

## Construcción de un grupo topológico de matrices no invertibles

<sup>a</sup>Aura Lucina Kantún-Montiel, <sup>b</sup>Anahí Rojas Carrasco, <sup>c</sup>Víctor Manuel Méndez Salinas,  
<sup>d</sup>José Nobel Méndez Alcocer

Instituto de Agroingeniería, Universidad del Papaloapan, Av. Ferrocarril S\N, Ciudad Universitaria, CP 68400, Loma Bonita, Oaxaca, México.

<sup>a</sup>alkantun@unpa.edu.mx, <sup>b</sup>arojas@unpa.edu.mx, <sup>c</sup>vmendez@unpa.edu.mx, <sup>d</sup>jmendez@unpa.edu.mx

### Abstract

Starting with a non-invertible matrix and its group inverse, we will construct a group which can be considered as a subspace of  $\mathbb{R}^{n^2}$ , hence it will be a metrizable topological space whose multiplication is continuous. On the other hand, we will show that any group  $G$  endowed with a topology that makes  $G$  locally compact, Hausdorff, first countable and whose multiplication is a continuous map, is a topological group. Applying this result to the group we have constructed, we obtain a topological group whose elements are non-invertible matrices.

### Resumen

A partir de una matriz no invertible y su grupo inversa, construiremos un grupo que, al considerarse como un subespacio de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , será un espacio topológico metrizable con multiplicación continua. Por otro lado, mostraremos que cualquier grupo  $G$  dotado de una topología en la que  $G$  es localmente compacto, Hausdorff, primero numerable y cuya multiplicación es una función continua, es un grupo topológico. Aplicando este resultado al grupo que hemos construido, obtenemos un grupo topológico cuyos elementos son matrices no invertibles.

---

*Keywords and phrases* : Espacios topológicos, Grupos topológicos, Grupo inversa

2010 *Mathematics Subject Classification* 15A09, 22A05, 54A05

---

## 1. Introducción

Uno de los grupos topológicos más importantes es el grupo general lineal  $GL_n(\mathbb{R})$  de las matrices invertibles de  $n \times n$ . Este grupo no es abeliano y dentro de sus subgrupos se encuentran los llamados *grupos clásicos* (ver [7, Chapter 6] y [12, Chapter 8]), a saber, el grupo especial lineal, el ortogonal, el especial ortogonal, el unitario, entre otros.

---

Fecha de recepción: 13 febrero 2024 / Fecha de aceptación: 11 de abril del 2025

Por ello, al pensar en grupos de matrices, por lo general descartamos trabajar con matrices no invertibles. Sin embargo, dada una matriz cuadrada no invertible  $A$  con índice 1, podemos formar un grupo, que denotaremos por  $\mathcal{G}_A$ , a partir de una de sus inversas generalizadas, tomando todas las potencias tanto de la matriz como de dicha inversa. A este nuevo grupo lo dotaremos con la topología inducida como subespacio del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^{n^2}$ , así,  $\mathcal{G}_A$  será un espacio metrizable y la multiplicación de matrices será continua.

Lo anterior es suficiente para afirmar que  $\mathcal{G}_A$ , además de ser un grupo abeliano, es un grupo topológico. Para probar esto último, emplearemos el resultado de R. Ellis [4] quien mostró que si un grupo es también un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff tal que la multiplicación del grupo es continua, entonces la función que envía cada elemento a su inversa es también continua, por lo que el grupo será además un grupo topológico.

Así, con el propósito de demostrar el Teorema 6.1 presentaremos, en las Secciones 2 y 3, los conceptos y propiedades básicas de topología general y teoría de grupos que necesitaremos, enfocándonos en los conjuntos de matrices invertibles, vistos tanto como grupos como espacios topológicos cuya topología es inducida por una métrica. Para trabajar con matrices no invertibles, en la Sección 4, mostraremos cómo se forma un grupo a partir de la pseudo-inversa conocida justamente como *grupo inversa*; dicho grupo cumple con las hipótesis del teorema de Ellis (Corolario 5.8). Cabe señalar que el resultado de Ellis ha sido generalizado por diversos autores (ver e.g. [14]); sin embargo, para fines didácticos, en la Sección 5 desarrollaremos la demostración de Ellis para el caso de espacios primero numerables. Esta condición de numerabilidad es añadida para trabajar con sucesiones y ejemplificar cómo estos conceptos básicos nos permiten visualizar las relaciones entre estructuras algebraicas y topológicas.

El presente texto no pretende ser exhaustivo en cuanto a la teoría de inversas generalizadas o la de grupos topológicos, sino ilustrar cómo pueden relacionarse estos diferentes conceptos, típicamente considerados como de áreas matemáticas distintas.

## 2. Espacios Topológicos

Esta sección está dedicada a presentar las definiciones y resultados básicos que se utilizarán a lo largo del escrito. Todo este material está expuesto con amplitud en textos como [3], [10] y [11].

**Definición 2.1.** Una *topología* sobre un conjunto  $X$  es una colección  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  que cumplen las siguientes propiedades:

- $\emptyset$  y  $X$  pertenecen a  $\tau$ .
- La unión arbitraria de elementos de  $\tau$  pertenece a  $\tau$ .
- La intersección finita de elementos de  $\tau$  pertenece a  $\tau$ .

En este caso, a  $(X, \tau)$  se le conoce como *espacio topológico* y a los elementos de  $\tau$  se les llama *abiertos*.

Por simplicidad, al espacio topológico  $(X, \tau)$  le llamaremos simplemente  $X$ , a menos que sea necesario especificar la topología.

**Definición 2.2.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $x \in X$ . Diremos que  $U$  es un *entorno* de  $x$ , si  $U$  es abierto en  $X$  y  $x \in U$ . Una *vecindad* de  $x$  es un conjunto  $V \subseteq X$  para el que existe un abierto  $A \in \tau$ , tal que  $x \in A \subseteq V$ .

**Definición 2.3.** Sea  $A$  un subconjunto de un espacio topológico  $X$ . Decimos que  $a$  es un *punto interior* de  $A$ , si  $A$  es una vecindad de  $a$ . Al conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto  $A$  lo llamamos *interior de  $A$*  y lo denotamos como  $\text{int}(A)$ .

Una de las topologías más importantes, es la *topología métrica*, la cual es inducida por una métrica o distancia de la siguiente forma:

Si  $d$  es una distancia definida en un espacio  $X$ , entonces  $U \subseteq X$  es abierto si y sólo si, para cada  $a \in U$  existe  $\delta > 0$  tal que la bola abierta  $B_d(a, \delta)$  con centro en  $a$  y radio  $\delta$  está contenida en  $U$ .

**Ejemplo 2.4.**

1. En el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , la distancia usual está dada por  $d(x, y) = |x - y|$ , las bolas abiertas son los intervalos de la forma  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  y, de esta forma, los abiertos en  $\mathbb{R}$  serán todos los intervalos abiertos  $(a, b)$  y las uniones de ellos.
2. La distancia usual en  $\mathbb{R}$  se puede generalizar a  $\mathbb{R}^n$  como

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$  son dos puntos en  $\mathbb{R}^n$ . De esta forma, los abiertos serán las uniones de las bolas abiertas con esta distancia.

3. Podemos considerar el conjunto  $M_n(\mathbb{R})$  de todas las matrices cuadradas de tamaño  $n \times n$  como un espacio euclidiano de dimensión  $n^2$ , ya que podemos identificar cada matriz  $A = (a_{i,j})$  con un punto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , colocando las filas ordenadamente, una tras de otra, por ejemplo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4.$$

De esta forma,  $M_n(\mathbb{R})$  es un espacio topológico con la topología inducida por la métrica

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (a_{i,j} - b_{i,j})^2},$$

donde  $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Definición 2.5.** Dados dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$ , decimos que una función  $f : X \rightarrow Y$  es **continua**, si para cada subconjunto abierto  $V$  de  $Y$ , el subconjunto  $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$  es abierto en  $X$ .

Esto es equivalente a la siguiente condición (ver e.g. [10, Teorema 18.1]).

**Proposición 2.6.** Decimos que  $f : X \rightarrow Y$  es continua si y sólo si, para cada  $x \in X$ , para toda vecindad  $V$  de  $f(x)$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subseteq V$ .

**Ejemplo 2.7.** Las operaciones de suma y multiplicación de números reales son funciones continuas. Esto es, las funciones

- $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $s(x, y) = x + y$ ,
- $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $m(x, y) = xy$ ,

son continuas.

Otro caso particularmente relevante es el de las funciones definidas en productos de espacios, lo que nos lleva a considerar la topología adecuada en estos conjuntos.

**Definición 2.8.** Dados dos espacios topológicos  $(X, \tau_X)$  y  $(Y, \tau_Y)$ , la **topología del producto** en  $X \times Y$  se define como la topología cuyos **abiertos básicos** son los conjuntos de la forma  $U \times V$ , donde  $U$  es un abierto de  $X$  y  $V$  es un abierto de  $Y$ , es decir,  $U \in \tau_X$  y  $V \in \tau_Y$ . Esto significa que un conjunto  $W \subseteq X \times Y$  es abierto en la topología del producto si y sólo si puede expresarse como una unión (posiblemente infinita) de conjuntos de la forma  $U \times V$ .

Para verificar que una función  $f : X \times Y \rightarrow Z$  es continua en un punto  $(x, y)$ , basta con encontrar, para cualquier abierto  $W \subseteq Z$  que contenga a  $f(x, y)$ , dos abiertos  $U \subseteq X$  y  $V \subseteq Y$  tales que  $(x, y) \in U \times V$  y  $f(U \times V) \subseteq W$ .

En muchos casos, resulta útil imponer condiciones adicionales sobre los espacios topológicos con los que trabajamos, pues esto nos permite obtener propiedades más estructuradas y mejores resultados. Una de estas condiciones es la propiedad de Hausdorff, que garantiza la separación de puntos y juega un papel clave en el estudio de la convergencia.

**Definición 2.9.** Decimos que  $X$  es un **espacio de Hausdorff**, o  $T_2$ , si para cada par  $x, y$  de puntos distintos de  $X$ , existen vecindades  $U$  y  $V$  de  $x$  y  $y$ , respectivamente, tales que  $U \cap V = \emptyset$ .

Una caracterización útil de los espacios de Hausdorff es la siguiente (ver e.g. [11, Proposición V.1.23]).

**Proposición 2.10.** *Un espacio es de Hausdorff si y sólo si todo punto  $x \in X$  es intersección de sus vecindades cerradas.*

**Definición 2.11.** Decimos que un espacio  $X$  es **primero numerable** o que satisface el **primer axioma de numerabilidad** si para cada  $x \in X$  existe una colección numerable  $\mathcal{B}$  de entornos de  $x$  tales que para cada entorno  $U$  de  $x$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $B \subseteq U$ . A tal colección se le conoce como **base local** de  $x$ .

**Definición 2.12.** Sea  $A \subseteq X$  y  $x \in X$ , decimos que  $x$  es un **punto límite** (o punto de acumulación) de  $A$  si  $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$  para todo entorno  $U$  de  $x$ .

**Definición 2.13.** Si un conjunto  $C \subseteq X$  contiene todos sus puntos de acumulación, decimos que es **cerrado**.

Esta definición es equivalente a la condición de que el complemento  $X \setminus C$  sea un conjunto abierto ([10, Corolario 17.7]).

**Definición 2.14.** Dado un espacio topológico  $X$  y  $A \subseteq X$ , la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $A$  se conoce como **cerradura** o clausura de  $A$  y se denota como  $\bar{A}$ .

De esta forma,  $x \in \bar{A}$  si y sólo si  $A \cap U \neq \emptyset$  para todo entorno  $U$  de  $x$ . El siguiente resultado permite expresar la cerradura de un conjunto en términos del interior de su complemento (ver [11, Proposición II.2.2]).

**Lema 2.15.** *Si  $A$  es un subconjunto de un espacio topológico  $X$ , entonces*

1.  $\bar{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A)$ ,
2.  $X \setminus \bar{A} = \text{int}(X \setminus A)$ .

**Definición 2.16.** Decimos que un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  es **denso** en  $X$  si su cerradura es todo  $X$ , es decir, si  $\bar{A} = X$ .

Veamos una caracterización interesante de los subconjuntos densos.

**Proposición 2.17.** *Un subconjunto  $A \subseteq X$  es denso en  $X$  si y sólo si el interior de su complemento  $\text{int}(X \setminus A)$  es vacío.*

**Demostración.** Supongamos que  $A$  es denso en  $X$ . Por definición,  $\bar{A} = X$ . Aplicando el Lema 2.15, obtenemos  $\text{int}(X \setminus A) = X \setminus \bar{A} = X \setminus X = \emptyset$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\text{int}(X \setminus A) = \emptyset$ . Entonces, nuevamente por el Lema 2.15, se tiene que  $\bar{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A) = X \setminus \emptyset = X$ , por lo que  $A$  es denso en  $X$ .  $\square$

**Definición 2.18.** Se dice que una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos abiertos de un espacio  $X$  es una **cubierta abierta de  $X$**  si

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Un espacio topológico es **compacto** si cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita.

Los espacios compactos cumplen las siguientes propiedades elementales (ver [3, Chapter XI, Theorem 1.4]).

**Proposición 2.19.** 1. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y sea  $A \subseteq X$ . Si  $A$  es compacto, entonces  $f(A)$  es compacto.

2. Sea  $X$  un espacio compacto y sea  $A \subseteq X$ . Si  $A$  es cerrado, entonces  $A$  es compacto.

3. Si  $X$  es un espacio de Hausdorff y  $A$  es un subconjunto compacto de  $X$ , entonces  $A$  es cerrado.

**Definición 2.20.** Sea  $\mathcal{C}$  una colección de subconjuntos de  $X$ , decimos que  $\mathcal{C}$  tiene la **propiedad de la intersección finita** si cada subcolección finita  $\{C_1, \dots, C_n\}$  de  $\mathcal{C}$  tiene intersección no vacía.

Este concepto es útil al tratar con espacios compactos. Veamos, por ejemplo, una característica que cumplen las familias de conjuntos compactos.

**Lema 2.21.** Dada una familia de conjuntos compactos, no vacíos, en un espacio topológico  $T_2$ , con la propiedad de la intersección finita, la intersección total de esa familia es no vacía.

**Demostración.** Probaremos la afirmación contrarrecíproca.

Sea  $\{K_j\}_{j \in J}$  una familia de compactos en un espacio  $X$  tal que  $\bigcap_{j \in J} K_j = \emptyset$ . Sea  $j_0 \in J$ , entonces para toda  $x \in K_{j_0}$ , existe  $K_x \in \{K_j\}_{j \in J}$  tal que  $x \notin K_x$ , luego

$$K_{j_0} \subseteq \bigcup_{x \in K_{j_0}} (X \setminus K_x).$$

Observemos que, como  $X$  es  $T_2$ , cada  $K_x$  es cerrado, por lo que  $X \setminus K_x$  es abierto, para cada  $x \in K_{j_0}$ . Luego, como  $K_{j_0}$  es compacto, existen  $K_{x_1}, \dots, K_{x_n}$  tales que

$$K_{j_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^n X \setminus K_{x_i} = X \setminus \bigcap_{i=1}^n K_{x_i},$$

lo que implica que

$$K_{j_0} \cap \left( \bigcap_{i=1}^n K_{x_i} \right) = \emptyset.$$

Por lo tanto,  $\{K_j\}_{j \in J}$  no tiene la propiedad de la intersección finita.  $\square$

Además, la propiedad de la intersección finita nos permite obtener la siguiente caracterización de los espacios compactos en términos de conjuntos cerrados (ver [10, Teorema 26.9]).

**Proposición 2.22.** Un espacio topológico  $X$  es compacto si y sólo si para cada colección  $\mathcal{C}$  de conjuntos cerrados en  $X$  con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección es no vacía, es decir,  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$ .

El concepto de compacidad puede también definirse de forma local.

**Definición 2.23.** Se dice que un espacio topológico de Hausdorff es **localmente compacto** si cada uno de sus puntos tiene una vecindad compacta.

De forma análoga a los conjuntos compactos, la propiedad de ser localmente compacto se hereda a los subconjuntos cerrados (ver [11, Proposición VI.2.20]).

**Proposición 2.24.** Sea  $X$  localmente compacto y  $A \subseteq X$  cerrado. Entonces  $A$  es localmente compacto.

En espacios de Hausdorff, tenemos la siguiente caracterización de los espacios localmente compactos (ver [10, Teorema 29.2]).

**Proposición 2.25.** *Sea  $X$  un espacio de Hausdorff. Entonces  $X$  es localmente compacto si y sólo si para todo  $x \in X$  y todo entorno  $U$  de  $x$ , existe un entorno  $V$  de  $x$  tal que  $\overline{V}$  es compacto y  $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ .*

El siguiente resultado es una consecuencia del teorema de Baire (ver [3, Theorem 10.1]) y nos será de utilidad en la Sección 5.

**Proposición 2.26.** *Sea  $X$  un espacio no vacío, Hausdorff y localmente compacto tal que  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ , donde cada  $C_n \subseteq X$  es cerrado. Entonces, existe al menos un  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{int}(C_i) \neq \emptyset$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $\text{int}(C_n) = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Definamos  $U_n = X \setminus C_n$ . Como  $C_n$  es cerrado y tiene interior vacío, se sigue que  $U_n$  es abierto y denso en  $X$  (Proposición 2.17). En particular,  $U_n$  es no vacío en  $X$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $x_1 \in U_1$ . Por la Proposición 2.25, existe un conjunto abierto  $V_1$  tal que  $x_1 \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$ , donde  $\overline{V_1}$  es compacto. Ahora, como  $U_2$  es denso en  $X$ , se tiene que  $U_2 \cap V_1 \neq \emptyset$ . Sea  $x_2 \in U_2 \cap V_1$ . Nuevamente, por la Proposición 2.25, existe un conjunto abierto  $V_2$  tal que  $x_2 \in V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq U_2 \cap V_1$ . Continuando de esta manera, construimos una colección de abiertos  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y una colección de puntos  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $x_k \in V_k \subseteq \overline{V_k} \subseteq V_{k-1} \cap U_k$  para  $k \in \mathbb{N}$ , donde  $V_0 = X$ .

La familia  $\{\overline{V_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una colección decreciente de conjuntos cerrados no vacíos contenidos en  $\overline{V_1}$ . Además, esta familia satisface la propiedad de la intersección finita, ya que  $\overline{V_{i_1}} \cap \dots \cap \overline{V_{i_m}} = \overline{V_{\max\{i_j\}}} \neq \emptyset$ . Como  $\overline{V_1}$  es compacto, la Proposición 2.22 garantiza que  $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n} \neq \emptyset$ . Observemos que, por construcción,  $V \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ . Sin embargo, tenemos que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus C_n) = X \setminus \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) = X \setminus X = \emptyset.$$

Esto implica que  $V \subseteq \emptyset$ , lo cual es una contradicción, ya que  $V \neq \emptyset$ . Por lo tanto, debe existir al menos un  $C_i$  tal que  $\text{int}(C_i) \neq \emptyset$ .  $\square$

Como ya mencionamos, una clase importante de espacios topológicos son aquellos inducidos por una métrica. Entre sus múltiples cualidades, está la de ser  $T_2$  y localmente compactos (ver [11, Corolario VI.2.18]).

**Proposición 2.27.** *Todo espacio métrico es de Hausdorff y localmente compacto.*

Otra propiedad interesante de los espacios métricos es que podemos definir la compacidad en términos de sucesiones. Recordemos primero qué es una sucesión.

**Definición 2.28.** Dado un conjunto  $X$ , definimos una **sucesión** de elementos de  $X$  como una función  $\mathbf{x} : \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ . Para cada  $i \in \mathbb{Z}_+$ , denotaremos la imagen  $\mathbf{x}(i)$  por  $x_i$  y a la propia función  $\mathbf{x}$  como  $(x_1, x_2, \dots)$ ,  $(x_n)$  ó  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ .

Si  $(x_n)$  es una sucesión de puntos de  $X$  y  $n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$  es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces la sucesión  $(x_{n_i})$  se denomina **subsucesión** de la sucesión  $(x_n)$ .

**Definición 2.29.** Se dice que una sucesión  $(x_n)$  de puntos del espacio  $X$  **converge** a  $x \in X$ , si para cada entorno  $U$  de  $x$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in U$  para cada  $n \geq N$ . En este caso escribimos  $x_i \rightsquigarrow x$ .

El siguiente resultado establece la unicidad del límite en espacios de Hausdorff (ver e.g. [10, Teorema 17.10]).

**Proposición 2.30.** *Si  $X$  es un espacio  $T_2$ , entonces toda sucesión de puntos en  $X$  converge a lo sumo a un punto de  $X$ .*

Además, en productos de espacios topológicos, podemos caracterizar la convergencia de la siguiente forma (ver [10, página 134]):

**Proposición 2.31.** *Sean  $(x_i)$  una sucesión en un espacio  $X$  y  $(y_i)$  una sucesión en un espacio  $Y$ . Entonces la sucesión  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$  en  $X \times Y$  converge a  $(x, y)$  si y sólo si  $x_i \rightsquigarrow x$  y  $y_i \rightsquigarrow y$ .*

La siguiente proposición proporciona una caracterización útil de los puntos en la cerradura y la continuidad en términos de sucesiones (ver [10, Teorema 30.1]).

**Proposición 2.32.** *Sea  $X$  un espacio topológico.*

- (a) *Sea  $A \subseteq X$ . Si existe una sucesión de puntos de  $A$  convergente a  $x$ , entonces  $x \in \bar{A}$ .  
El recíproco se cumple si  $X$  es primero numerable.*
- (b) *Sea  $f : X \rightarrow Y$ . Si  $f$  es continua, entonces para cada sucesión convergente  $x_n \rightsquigarrow x$  en  $X$ , la sucesión  $f(x_n)$  converge a  $f(x)$ .*

Si cada sucesión de puntos de  $X$  contiene una subsucesión convergente, diremos que  $X$  es **secuencialmente compacto**. Cuando el espacio  $X$  es metrizable, esta definición es equivalente a la de compacidad (ver [10, Teorema 28.2]). Si este no es el caso, es suficiente añadir a la compacidad la condición de ser primero numerable para garantizar la secuencialidad compacta.

**Proposición 2.33.** *Todo espacio compacto y primero numerable es secuencialmente compacto.*

**Demostración.** Sea  $X$  un espacio compacto, primero numerable, y sea  $(x_n)$  una sucesión en  $X$ . Veamos primero que existe un elemento  $x_0 \in X$  tal que para todo entorno  $U$  de  $x_0$  y para todo  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $k \geq m$  tal que  $x_k \in U$ . Supongamos lo contrario, que para todo  $x \in X$ , existe un entorno  $U_x$  de  $x$  y  $m_x \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \notin U_x$ , para cada  $k \geq m_x$ . Entonces  $\bigcup_{x \in X} U_x$  es una cubierta abierta del espacio compacto  $X$ , luego existen  $x_1, \dots, x_n$  tales que  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ . Sea  $m = \max\{m_{x_1}, \dots, m_{x_n}\}$ , entonces  $x_k \notin X$  para todo  $k \geq m$ , lo cual es una contradicción.

Ahora bien, como  $X$  es primero numerable, existe una base local numerable  $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de entornos de  $x_0$ . A partir de ella, podemos construir una colección decreciente de entornos de la siguiente forma: definamos  $U_1 = W_1$  y  $U_{i+1} = U_i \cap W_{i+1}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Así,  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una base local numerable de  $x_0$  tal que  $U_{i+1} \subseteq U_i$ .

Ahora construyamos una sucesión creciente de números naturales de la siguiente forma: sea  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{n_1} \in U_1$  y sea  $n_{i+1}$  el entero mayor o igual a  $n_i$  que cumple que  $x_{n_{i+1}} \in U_{i+1}$ . Es fácil ver que la subsucesión  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $x_0$ .  $\square$

### 3. Grupos

**Definición 3.1.** Un **grupo**  $(G, \cdot)$  es un conjunto  $G$  equipado con una operación binaria  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  que cumple las siguientes propiedades:

- Asociatividad:  $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ , para cada  $g_1, g_2, g_3 \in G$ .
- Existencia del neutro: Existe un *único* elemento  $e \in G$  tal que  $e \cdot g = g \cdot e = g$  para toda  $g \in G$ .
- Existencia del inverso: Para cada  $g \in G$ , existe un *único* elemento  $g^{-1} \in G$  tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .

En la práctica, cuando no hay lugar a confusión, se omite la operación binaria y escribimos simplemente  $G$  en lugar de  $(G, \cdot)$  y  $g_1 g_2$  en lugar de  $g_1 \cdot g_2$ .

**Ejemplo 3.2.** Uno de los ejemplos clásicos de grupos es el conjunto de las matrices invertibles de tamaño  $n \times n$ , con entradas en los números reales  $\mathbb{R}$  junto con la operación de multiplicación de matrices. Es fácil verificar que éste es un grupo, ya que el producto de dos matrices invertibles es invertible y la inversa de una matriz es también invertible. Además la multiplicación de matrices es asociativa y la matriz identidad cumple el papel de elemento neutro. Este grupo es conocido como *grupo general lineal* y lo denotaremos como  $GL_n(\mathbb{R})$ .

**Observación 3.3.** Cabe resaltar que el ejemplo anterior no es exclusivo para matrices con entradas reales, de hecho podemos considerar el conjunto de las matrices invertibles con entradas en cualquier campo  $\mathbb{K}$ , en particular, podemos considerar el grupo  $GL_n(\mathbb{C})$ . Por simplicidad, de ahora en adelante mencionaremos únicamente a las matrices con entradas en  $\mathbb{R}$ , sin embargo, se debe tener en cuenta que se tienen propiedades y resultados análogos para las matrices  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

**Definición 3.4.** Sea  $G$  un grupo. Las siguientes funciones están bien definidas:

- La **multiplicación**  $\mu : G \times G \rightarrow G$  dada por  $\mu(x, y) = xy$ .
- La **inversa**  $\iota : G \rightarrow G$  dada por  $\iota(x) = x^{-1}$ , donde  $x^{-1}$  es el inverso de  $x$ .

Dados dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de un grupo  $G$  y  $x \in G$ , utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} Ax &= \mu(A, \{x\}) = \{ax \mid a \in A\}, \\ xA &= \mu(\{x\}, A) = \{xa \mid a \in A\}, \\ AB &= \mu(A, B) = \{ab \mid a \in A, b \in B\}, \\ A^{-1} &= \iota(A) = \{a^{-1} \in G \mid a \in A\}. \end{aligned}$$

**Lema 3.5.** Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos de un grupo  $G$ , entonces

$$\bigcap_{i \in I} A_i^{-1} = \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)^{-1}.$$

**Demostración.** Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos de un grupo  $G$ . Entonces,

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i \in I} A_i^{-1} &\iff x \in A_i^{-1}, \forall i \in I \\ &\iff x^{-1} \in A_i, \forall i \in I \\ &\iff x^{-1} \in \bigcap_{i \in I} A_i \\ &\iff x \in \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)^{-1}, \end{aligned}$$

lo cual prueba la igualdad.  $\square$

Si a un grupo lo dotamos de una topología tal que las funciones de la Definición 3.4 son continuas, obtenemos una nueva estructura, conocida como grupo topológico.

**Definición 3.6.** Un **grupo topológico** es un conjunto  $G$  junto con una operación binaria  $\cdot$  y una familia  $\tau$  de subconjuntos de  $G$ , es decir, una terna  $(G, \cdot, \tau)$  tal que

- $(G, \cdot)$  es un grupo,
- $(G, \tau)$  es un espacio topológico,
- las funciones multiplicación  $\mu$  e inversa  $\iota$  son continuas.

**Ejemplo 3.7.** Consideremos el grupo general lineal  $GL_n(\mathbb{R})$  presentado en el Ejemplo 3.2.

Podemos dotar a este grupo con la topología heredada como subespacio de  $M_n(\mathbb{R})$ , el cual, como mencionamos en el Ejemplo 2.4, puede identificarse con  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Ahora bien, dadas dos matrices  $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ , la multiplicación

$$\begin{aligned} \mu : GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \\ (A, B) &\longmapsto AB, \end{aligned}$$

es continua, ya que cada coordenada  $ij$  de  $AB$  es un polinomio en las entradas de  $A$  y  $B$ . Como se mencionó en el Ejemplo 2.7, la suma y la multiplicación de números reales son funciones continuas, lo que garantiza la continuidad de  $\mu$ .

Asimismo, la función que asigna a cada matriz su inversa,

$$\begin{aligned} \iota : GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \\ A &\longmapsto A^{-1}, \end{aligned}$$

también es continua, pues las entradas de  $A^{-1}$ , dadas por la fórmula de Cramer, dependen de manera continua de las entradas de  $A$ .

Por lo tanto,  $GL_n(\mathbb{R})$  satisface las condiciones de la Definición 3.6 y, en consecuencia, es un grupo topológico.

La continuidad de la multiplicación en un grupo proporciona algunas propiedades interesantes.

**Proposición 3.8.** *Sea  $G$  un grupo dotado con una topología tal que la multiplicación es continua y sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de  $G$ , entonces  $\overline{A} \overline{B} \subseteq \overline{AB}$ .*

**Demostración.** Sean  $x \in \overline{A}$ ,  $y \in \overline{B}$  y sea  $W$  una vecindad de  $xy$ . Por la continuidad de la multiplicación, existen abiertos  $V_1, V_2$  con  $x \in V_1$  y  $y \in V_2$  tales que  $V_1 V_2 \subseteq W$ . Como  $x \in \overline{A}$  y  $y \in \overline{B}$ , existen elementos  $a, b \in G$  tales que  $a \in A \cap V_1$  y  $b \in B \cap V_2$ . Por lo tanto,  $ab \in (AB) \cap (V_1 V_2)$ , lo que implica que  $AB \cap W \neq \emptyset$ . Esto demuestra que  $xy \in \overline{AB}$ .  $\square$

**Proposición 3.9.** *Sea  $G$  un grupo dotado de una topología tal que la multiplicación es continua y sea  $g \in G$ . Entonces, las funciones  $\varphi_g : G \rightarrow G$  y  $\bar{\varphi}_g : G \rightarrow G$  dadas por  $\varphi_g(x) = gx$  y  $\bar{\varphi}_g(x) = xg$  son homeomorfismos.*

**Demostración.** Consideremos la función  $\varphi_{g^{-1}}(x) = g^{-1}x$ . Entonces  $\varphi_{g^{-1}}$  es la función inversa de  $\varphi_g$  ya que  $\varphi_g(\varphi_{g^{-1}}(x)) = gg^{-1}x = x$  y  $\varphi_{g^{-1}}(\varphi_g(x)) = g^{-1}gx = x$ . Como la multiplicación es continua, tanto  $\varphi_g$  como  $\varphi_{g^{-1}}$  son continuas. Por lo tanto,  $\varphi_g$  es un homeomorfismo. Análogamente, se prueba que  $\bar{\varphi}_g$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Corolario 3.10.** *Sean  $G$  un grupo con multiplicación continua,  $g \in G$  y  $S \subseteq G$ . Si  $S$  es abierto, cerrado o compacto, entonces  $gS$  y  $Sg$  son también conjuntos abiertos, cerrados o compactos, respectivamente.*

## 4. Pseudo-inversa de matrices singulares

Es un hecho conocido que una matriz es invertible si y sólo si es cuadrada y su determinante es distinto de cero. Debido a las múltiples aplicaciones de las inversas de las matrices, poco a poco se fue haciendo evidente la necesidad de tener algún tipo de inversa parcial para matrices singulares o incluso rectangulares. Es así como, a inicios del siglo pasado, aparece el concepto de *inversa generalizada* o *pseudo inversa* como una extensión de la inversa usual ([5]). A partir de ahí, la teoría de inversas generalizadas para matrices reales y complejas se ha desarrollado de forma notable (ver e.g. [1], [2], [6]).

Durante los últimos años, se han construido diferentes inversas generalizadas. Algunas de las más conocidas son la inversa de Moore-Penrose, la inversa de Drazin, la grupo inversa, la inversa de Bott-Duffin, entre otras. Dichas inversas tienen aplicaciones en distintas áreas de la matemática tales como la resolución de problemas de mínimos cuadrados, cadenas de Markov y sistemas singulares de ecuaciones diferenciales lineales (ver [1, Chapter 8, §7], [2, Chapter 8], [8] y [9]).

En esta sección, nos enfocaremos en el caso particular de la inversa generalizada conocida como *grupo inversa*. Ésta se construye de la siguiente manera:

Dada una matriz cuadrada  $A \in M_n(\mathbb{R})$  con factorización de rango completo  $A = FG$  (esto es,  $F \in M_{n \times r}(\mathbb{R})$  y  $G \in M_{r \times n}(\mathbb{R})$ , donde  $r = \text{rango}(A) = \text{rango}(F) = \text{rango}(G)$  [1, Chapter 0, Lemma 1]) tal que  $GF$  es no singular, se define la **grupo inversa** de  $A$ , que denotaremos por  $A^\#$ , como la matriz

$$A^\# = FB^2G, \tag{4.1}$$

donde  $B = (GF)^{-1}$ .

De acuerdo con su construcción, la matriz  $A^\#$  existe siempre y cuando el índice  $\text{ind}(A)$  de  $A$  es igual a uno, donde

$$\text{ind}(A) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{rango}(A^k) = \text{rango}(A^{k+1})\}.$$

Es decir,  $A^\#$  existe si y sólo si  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^2)$ . Además, cuando  $A^\#$  existe, es única ([1, Chapter 4, Theorem 2], [8, Chapter 2]). Asimismo, satisface las siguientes condiciones (ver [1, Chapter 4]):

$$AA^\# = A^\#A, \quad (4.2)$$

$$AA^\#A = A, \quad (4.3)$$

$$A^\#AA^\# = A^\#. \quad (4.4)$$

De esta forma, si  $A$  es una matriz invertible, entonces  $A^\#$  coincide justamente con  $A^{-1}$ , lo que se puede verificar directamente de la definición de  $A^\# = FB^2G$ . En efecto, observemos que:

$$\begin{aligned} A^\#A &= FB^2G(FG) = F(B^2GF)G \\ &= F(GF)^{-1}(GF)^{-1}(GF)G \\ &= F(GF)^{-1}G = I, \end{aligned}$$

donde  $I$  denota la matriz identidad.

La matriz  $A^\#$  recibe el nombre de *grupo inversa* debido a que podemos construir un grupo tomando las potencias de  $A$  y de  $A^\#$  como se describe a continuación. Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$  con  $\text{ind}(A) = 1$ . Como es usual, para cada  $j \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $A^j$  a la multiplicación de  $A$  por sí misma  $j$  veces. Además, definiremos

$$A^{-j} = (A^\#)^j \quad \text{y} \quad A^0 = AA^\#.$$

Bajo estas definiciones, el conjunto  $\mathcal{G}_A = \{A^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$  forma un grupo abeliano con la operación de multiplicación de matrices. En lo que sigue, probaremos que efectivamente cumple con las propiedades de grupo abeliano.

**I. Cerradura de la multiplicación.** Veamos que el conjunto  $\mathcal{G}_A = \{AA^\#, A^i, (A^\#)^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  es cerrado bajo la multiplicación de matrices. Para ello, consideraremos todas las combinaciones posibles de productos entre los elementos de  $\mathcal{G}_A$  y verificaremos que el resultado también pertenece a  $\mathcal{G}_A$ .

**I.1. Productos de  $A$ ,  $A^\#$  o de  $AA^\#$  con ellos mismos.**

Para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ , se cumple lo siguiente:

(I.1.a)  $A^m A^n = A^{m+n} \in \mathcal{G}_A$ .

(I.1.b)  $(A^\#)^m (A^\#)^n = (A^\#)^{m+n} \in \mathcal{G}_A$ .

(I.1.c)  $(AA^\#)(AA^\#) = (AA^\#A)A^\# = AA^\# \in \mathcal{G}_A$ .

**I.2. Productos de  $AA^\#$  con potencias de  $A$  o de  $A^\#$ .**

(I.2.a)  $(AA^\#)A^m = (AA^\#A)A^{m-1} = AA^{m-1} = A^m \in \mathcal{G}_A$ .

(I.2.b)  $A^m(AA^\#) = A^m(A^\#A) = A^{m-1}(AA^\#A) = A^{m-1}A = A^m \in \mathcal{G}_A$ .

(I.2.c)  $(AA^\#)(A^\#)^m = (A^\#A)(A^\#)^m = (A^\#AA^\#)(A^\#)^{m-1} = A^\#(A^\#)^{m-1} = (A^\#)^m \in \mathcal{G}_A$ .

(I.2.d)  $(A^\#)^m(AA^\#) = (A^\#)^{m-1}(A^\#AA^\#) = (A^\#)^{m-1}A^\# = (A^\#)^m \in \mathcal{G}_A$ .

**I.3. Productos entre  $A^m$  y  $(A^\#)^n$ .**

(I.3.a) Observamos las siguientes identidades:

$$A^2A^\# = AAA^\# = AA^\#A = A,$$

$$A(A^\#)^2 = AA^\#A^\# = A^\#AA^\# = A^\#.$$

De manera análoga, se verifican las igualdades:

$$A^\#A^2 = A \quad \text{y} \quad (A^\#)^2A = A^\#.$$

Emplearemos estas identidades para reducir expresiones de la forma  $A^m(A^\#)^n$  y  $(A^\#)^m A^n$ , para  $m, n > 2$ .

(I.3.b) Para  $m, n > 2$ , se cumple:

$$A^m(A^\#)^n = A^{m-2}A^2A^\#(A^\#)^{n-1} = A^{m-2}A(A^\#)^{n-1} = A^{m-1}(A^\#)^{n-1}.$$

Iterando este proceso, obtenemos:

$$A^m(A^\#)^n = A^{m-k}(A^\#)^{n-k} \quad \text{para todo } k \in \{1, \dots, p\},$$

donde  $p = \min\{m, n\} - 1$ . En particular:

- Si  $m = n$ , entonces  $m - p = n - p = 1$ , por lo que:

$$A^m(A^\#)^n = A^{m-p}(A^\#)^{n-p} = AA^\# \in \mathcal{G}_A.$$

- Si  $n > m$ , entonces  $m - p = 1$  y  $n - p - 2 \geq 0$ , por lo que:

$$A^m(A^\#)^n = A(A^\#)^{n-p} = A(A^\#)^2(A^\#)^{n-p-2} = A^\#(A^\#)^{n-p-2} = (A^\#)^{n-p-1} \in \mathcal{G}_A.$$

- Si  $n < m$ , entonces  $n - p = 1$  y  $m - p - 2 \geq 0$ , por lo que:

$$A^m(A^\#)^n = A^{m-p}(A^\#) = A^{m-p-2}A^2(A^\#) = A^{m-p-2}A = A^{m-p-1} \in \mathcal{G}_A.$$

(I.3.c) De manera similar, para  $m, n > 2$ , se cumple:

$$(A^\#)^m A^n = (A^\#)^{m-2}(A^\#)^2 A A^{n-1} = (A^\#)^{m-2} A^\# A^{n-1} = (A^\#)^{m-1} A^{n-1}.$$

Iterando este proceso, obtenemos:

$$(A^\#)^m A^n = (A^\#)^{m-k} A^{n-k} \quad \text{para todo } k \in \{1, \dots, p\},$$

donde  $p = \min\{m, n\} - 1$ . En particular:

- Si  $m = n$ , entonces  $m - p = n - p = 1$ , por lo que:

$$(A^\#)^m A^n = (A^\#)^{m-p} A^{n-p} = A^\# A = AA^\# \in \mathcal{G}_A.$$

- Si  $n > m$ , entonces  $m - p = 1$  y  $n - p - 2 \geq 0$ , por lo que:

$$(A^\#)^m A^n = A^\# A^{n-p} = A^\# A^2 A^{n-p-2} = A A^{n-p-2} = A^{n-p-1} \in \mathcal{G}_A.$$

- Si  $n < m$ , entonces  $n - p = 1$  y  $m - p - 2 \geq 0$ , por lo que:

$$(A^\#)^m A^n = (A^\#)^{m-p} A = (A^\#)^{m-p-2}(A^\#)^2 A = (A^\#)^{m-p-2} A^\# = (A^\#)^{m-p-1} \in \mathcal{G}_A.$$

II. **Existencia del elemento neutro.** De acuerdo con (I.1.c) y (I.2.a)–(I.2.d), se tiene que  $A^0 = AA^\#$  satisface  $BA^0 = A^0B = B$  para toda  $B \in \mathcal{G}_A$ . Por lo tanto,  $A^0$  es el elemento neutro de  $\mathcal{G}_A$ .

III. **Conmutatividad.** Veamos ahora que la multiplicación en  $\mathcal{G}_A$  es conmutativa. Por el punto anterior, sabemos que  $A^0$  conmuta con cualquier elemento de  $\mathcal{G}_A$ . Ahora bien, como la multiplicación de matrices es asociativa, si  $n, m > 0$ , entonces

$$A^n A^m = A^{n+m} = A^{m+n} = A^m A^n,$$

y

$$A^{-n} A^{-m} = (A^\#)^n (A^\#)^m = (A^\#)^{n+m} = (A^\#)^{m+n} = (A^\#)^m (A^\#)^n = A^{-m} A^{-n}.$$

Además, aplicando la propiedad (4.2), tenemos que

$$\begin{aligned} A^n A^{-m} &= A^n (A^\#)^m = \underbrace{(A \dots A)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(A^\# \dots A^\#)}_{m \text{ veces}} \\ &= \underbrace{A \dots A}_{n-1 \text{ veces}} A^\# A \underbrace{A^\# \dots A^\#}_{m-1 \text{ veces}} \\ &= \dots = (A^\#)^m A^n = A^{-m} A^n, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
A^{-n}A^m &= (A^\#)^n A^m = \underbrace{(A^\# \dots A^\#)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(A \dots A)}_{m \text{ veces}} \\
&= \underbrace{A^\# \dots A^\#}_{n-1 \text{ veces}} A A^\# \underbrace{A \dots A}_{m-1 \text{ veces}} \\
&= \dots = A^m (A^\#)^n = A^m A^{-n}.
\end{aligned}$$

IV. **Existencia del elemento inverso.** De los puntos (I.3.b) y (1.3.c), caso  $m = n$ , se desprende que  $A^m A^{-m} = A^m (A^\#)^m = AA^\# = A^0$  y  $A^{-m} A^m = (A^\#)^m A^m = AA^\# = A^0$ .

Por lo que concluimos que  $A^{-m}$  es el inverso de  $A^m$  para toda  $m \in \mathbb{Z}$ .

V. **Asociatividad.** Veamos que  $A^m A^n = A^{m+n}$  para toda  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

- a) Si  $m, n > 0$ , entonces  $A^m A^n = A^{m+n}$ , como ya se había mencionado.
- b) Si  $m, n < 0$ , entonces  $A^m A^n = (A^\#)^{-m} (A^\#)^{-n} = (A^\#)^{-(m+n)} = A^{m+n}$ , como también habíamos visto previamente.
- c) Si  $m > 0$  y  $n < 0$  con  $n = -m$ , por el punto (IV) se tiene que  $A^n A^{-n} = A^0 = A^{n-n}$ .
- d) Si  $m = 2$  y  $n = -1$ , por el punto (1.3.a) se tiene que  $A^2 A^{-1} = A^2 (A^\#) = A = A^{2-1}$ .
- e) Si  $m > 0$  y  $n < 0$  con  $m < -n$  y  $m, -n > 2$ , entonces siguiendo el resultado y la notación de (I.3.b), se deduce que

$$A^m A^n = A^m (A^\#)^{-n} = (A^\#)^{-n-p-1} = (A^\#)^{-n-m} = A^{m+n}.$$

- f) Si  $m > 0$  y  $n < 0$  con  $-n < m$  y  $m, -n > 2$ , entonces siguiendo también el resultado y la notación de (I.3.b), se deduce que

$$A^m A^n = A^m (A^\#)^{-n} = A^{m-p-1} = A^{m-(-n)} = A^{m+n}.$$

- g) Si  $m < 0$  y  $n > 0$ , el resultado se sigue de la conmutatividad y de los casos anteriores.

De esta manera, hemos construido un grupo con matrices no necesariamente invertibles.

Observemos que, como este grupo  $\mathcal{G}_A$  es un subconjunto de  $M_n(\mathbb{R})$ , lo podemos equipar con la topología del subespacio, esto es, con la topología heredada de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Así, de la misma forma que con el grupo general lineal, la multiplicación  $(A^i, A^j) \mapsto A^{i+j}$  en  $\mathcal{G}_A$  es continua (ver Ejemplo 3.7). Sin embargo, todavía no podemos afirmar que la función  $A^k \mapsto A^{-k}$  que pone en correspondencia cada matriz con su inversa sea continua.

No obstante,  $\mathcal{G}_A$  es un espacio metrizable, por ser un subespacio del espacio métrico  $\mathbb{R}^{n^2}$ . En la siguiente sección veremos que esta propiedad es suficiente para afirmar que  $\mathcal{G}_A$  es un grupo topológico.

## 5. Continuidad de la inversa

En [4], Ellis demostró que todo grupo  $G$  dotado de una topología con la cual  $G$  es un espacio de Hausdorff y localmente compacto tal que la multiplicación del grupo es continua, es un grupo topológico. En su demostración de poco más de una página, Ellis emplea filtros como herramienta para probar la continuidad de la función que asigna a cada elemento su inversa.

En esta sección, tomaremos como base dicha prueba y la detallaremos para demostrar que todo espacio topológico  $T_2$ , primero numerable y con estructura de grupo en la que la multiplicación es continua, es un grupo topológico. Esta condición de ser primero numerable se añadirá para poder emplear sucesiones como herramienta principal en la demostración de los resultados preliminares al Teorema 5.7.

Para probar la continuidad de la función inversa, dada una vecindad  $U$  del elemento neutro  $e$ , encontremos una vecindad  $V$  de  $e$  tal que  $V^{-1} \subseteq U$ , a partir de una colección finita de vecindades compactas de  $e$ . Como primer paso, demostraremos que para cualquier conjunto compacto  $A$  de  $G$ , su inversa  $A^{-1}$  también es compacta (Proposición 5.6). Para ello, comenzaremos con los siguientes lemas preliminares.

**Lema 5.1.** *Sea  $G$  un grupo dotado de una topología tal que la multiplicación es continua. Si  $(x_n)$  y  $(y_n)$  son sucesiones en  $G$  tales que  $x_n \rightsquigarrow x$  y  $y_n \rightsquigarrow y$  entonces  $x_n y_n \rightsquigarrow xy$ .*

**Demostración.** Como  $x_n \rightsquigarrow x$  y  $y_n \rightsquigarrow y$  entonces, por la Proposición 2.31,  $(x_n, y_n) \rightsquigarrow (x, y)$  en  $G \times G$ . Como  $\mu : G \times G \rightarrow G$  es continua, por la Proposición 2.32(b),  $\mu(x_n, y_n) \rightsquigarrow \mu(x, y)$ , esto es,  $x_n y_n \rightsquigarrow xy$ .  $\square$

**Lema 5.2.** *Sea  $G$  un espacio topológico de Hausdorff con estructura de grupo tal que la multiplicación es continua. Sea  $(x_n)$  una sucesión en  $G$ . Si  $x_n \rightsquigarrow x$  y  $x_n^{-1} \rightsquigarrow y$  entonces  $y = x^{-1}$ .*

**Demostración.** Por el Lema 5.1, se tiene que  $x_n x_n^{-1} \rightsquigarrow xy$ . Sin embargo, dado que  $x_n x_n^{-1} = e$ , también se cumple que  $x_n x_n^{-1} \rightsquigarrow e$ . Como  $G$  es un espacio de Hausdorff, se sigue de la Proposición 2.30 que  $xy = e$ , lo que implica que  $y = x^{-1}$ .  $\square$

**Proposición 5.3.** *Sea  $G$  un espacio topológico  $T_2$ , primero numerable con estructura de grupo tal que la multiplicación es continua. Sea  $H$  un subconjunto compacto de  $G$ , entonces el conjunto  $H^{-1} = \{h^{-1} \mid h \in H\}$  es cerrado.*

**Demostración.** Sea  $x \in \overline{H^{-1}}$ . Por la Proposición 2.32(a), existe una sucesión  $(x_n)$  en  $H^{-1}$  tal que  $x_n \rightsquigarrow x$ . Luego  $(x_n^{-1})$  es una sucesión en  $H$ . Como  $H$  es compacto, por la Proposición 2.33, existe una subsucesión  $(x_{n_j}^{-1})$  convergente en  $H$ . Sea  $y \in H$  tal que  $x_{n_j}^{-1} \rightsquigarrow y$ . Como  $x_{n_j} \rightsquigarrow x$ , entonces  $y = x^{-1}$  por el Lema 5.2, esto es,  $x = y^{-1} \in H^{-1}$ .  $\square$

**Lema 5.4.** *Sean  $G$  un grupo,  $D$  un subgrupo de  $G$  y  $A$  un subconjunto de  $G$  tales que  $D \subseteq A$  y  $A^2 \subseteq A$ . Entonces, para todo subconjunto  $U$  de  $X$  y toda  $d \in D$ ,  $d(U \cap A) = dU \cap A$ .*

**Demostración.** Sea  $x \in d(U \cap A)$ , entonces  $x = du$  para alguna  $u \in U \cap A$ , esto es,  $x = du \in dU$ . Ahora bien, como  $D \subseteq A$  y  $u \in A$ , entonces  $du \in A^2 \subseteq A$ , por lo que  $x \in dU \cap A$ .

Recíprocamente, si  $y \in dU \cap A$  entonces  $y \in dU$  y  $y \in A$ , luego existe alguna  $v \in U$  tal que  $y = dv$  por lo que  $v = d^{-1}y$ . Como  $d^{-1} \in D \subseteq A$  y  $y \in A$  entonces  $v \in A^2 \subseteq A$ . Así,  $v \in U \cap A$  por lo que  $y \in d(U \cap A)$ .  $\square$

**Proposición 5.5.** *Sea  $G$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, primero numerable, con estructura de grupo, tal que la multiplicación es continua. Sea  $A$  un subconjunto numerable de  $G$ . Si  $x \in \overline{A}$  entonces  $x^{-1} \in \overline{A^{-1}}$ .*

**Demostración.** Aplicaremos repetidamente la Proposición 2.32(a) que establece que  $x \in \overline{X}$  si y sólo si existe una sucesión  $(x_n)$  en  $X$  que converge a  $x$ .

Sea  $x \in \overline{A}$ . Entonces existe una sucesión  $(x_n)$  en  $A$  tal que  $x_n \rightsquigarrow x$ . En consecuencia, la sucesión  $(x_n^{-1})$  está contenida en  $A^{-1}$ . Veamos que admite una subsucesión convergente a  $x^{-1}$ .

Definamos  $B = A \cup \{x\}$  y consideremos el conjunto  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B^n$ , donde:

- $B^n = \{b_1 b_2 \cdots b_n \mid b_i \in B\}$  si  $n > 0$ ,
- $B^0 = \{e\}$ ,
- $B^n = \{b_1^{-1} b_2^{-1} \cdots b_n^{-1} \mid b_i \in B\}$  si  $n < 0$ .

Es fácil verificar que  $D$  es un subgrupo numerable de  $G$ . Sea  $E = \overline{D}$ . Veamos que  $E^2 \subseteq E$ .

Sean  $x, y \in E$ . Entonces existen sucesiones  $(x_n)$  y  $(y_n)$  en  $D$  tales que  $x_n \rightsquigarrow x$  y  $y_n \rightsquigarrow y$ . Como  $D$  es un subgrupo de  $G$ , se tiene que  $x_n y_n \in D$  para todo  $n$ . Además, por el Lema 5.1, se sigue que  $x_n y_n \rightsquigarrow xy$ . Esto implica que  $xy \in \overline{D} = E$  y, por lo tanto,  $E^2 \subseteq E$ .

Ahora bien, como  $G$  es localmente compacto, existe una vecindad compacta  $V$  de  $e$  (el elemento neutro de  $G$ ). Sea  $p \in E$ , entonces  $pV$  es una vecindad de  $p$  (Corolario 3.10). Como  $p \in E = \overline{D}$  entonces  $pV \cap D \neq \emptyset$ . Luego existe  $z \in D$  tal que  $z = p\tilde{v}$  para alguna  $\tilde{v} \in V$  por lo que  $p = z\tilde{v}^{-1} \in DV^{-1}$ . Por lo tanto

$$E \subseteq DV^{-1} = \bigcup_{d \in D} dV^{-1}.$$

Esto es,

$$E = \left( \bigcup_{d \in D} dV^{-1} \right) \cap E = \bigcup_{d \in D} (dV^{-1} \cap E).$$

Como, por el Lema 5.4,  $dV^{-1} \cap E = d(V^{-1} \cap E)$ , tenemos que

$$E = \bigcup_{d \in D} d(V^{-1} \cap E).$$

Ahora bien, como  $V$  es compacto, por la Proposición 5.3,  $V^{-1}$  es cerrado y, como  $E$  es cerrado,  $E \cap V^{-1}$  también lo es, luego  $d(E \cap V^{-1})$  es cerrado para cada  $d \in D$ . Además, como  $E$  es cerrado en  $G$  y  $G$  es localmente compacto, entonces  $E$  también es localmente compacto. Como  $D$  es numerable, por la Proposición 2.26, se sigue que el interior relativo a  $E$  de uno de estos conjuntos  $d(V^{-1} \cap E)$  es no vacío, esto es, existe  $d_0 \in D$  tal que  $d_0(V^{-1} \cap E)$  tiene interior no vacío en  $E$ .

Luego, existe un conjunto abierto  $U$  de  $G$  tal que  $U \cap E \neq \emptyset$  y  $U \cap E \subseteq d_0(V^{-1} \cap E)$ . Además, como  $U \cap \overline{D} \neq \emptyset$  y  $U$  es abierto, se sigue que  $U \cap D \neq \emptyset$ .

Sea  $c \in U \cap D$ . Entonces,  $c \in U \cap E$ , lo que implica que  $c^{-1}c \in c^{-1}(U \cap E)$ , es decir,  $e \in c^{-1}(U \cap E)$ . Esto significa que  $x \in xc^{-1}(U \cap E)$ . Por otro lado, tenemos que  $xc^{-1}(U \cap E) = xc^{-1}U \cap E$  según el Lema 5.4. Así,  $xc^{-1}U \cap E$  es un conjunto abierto en  $E$  que contiene a  $x$ . Por lo tanto, existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para cada  $m \geq N$ ,

$$\begin{aligned} x_m &\in xc^{-1}U \cap E = xc^{-1}(U \cap E) \\ &\subseteq xc^{-1}d_0(V^{-1} \cap E) \\ &= xc^{-1}(d_0V^{-1} \cap E) \\ &\subseteq xc^{-1}d_0V^{-1}. \end{aligned}$$

Así, para cada  $m \geq N$ , se cumple que  $x_m^{-1} \in Vd_0^{-1}cx^{-1}$ . Ahora bien, por el Corolario 3.10, el conjunto  $Vd_0^{-1}cx^{-1}$  es compacto. Luego, por el Teorema 2.33, existe una subsucesión  $(x_{m_k}^{-1})$  que converge a algún  $z \in Vd_0^{-1}cx^{-1}$ , es decir,  $x_{m_k}^{-1} \rightsquigarrow z$ . Como  $x_{m_k} \rightsquigarrow x$ , el Lema 5.2 implica que  $z = x^{-1}$ , lo que demuestra que  $x^{-1} \in \overline{A^{-1}}$ .  $\square$

**Proposición 5.6.** *Sean  $G$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, primero numerable, con estructura de grupo tal que la multiplicación es continua. Si  $A$  es un subconjunto compacto de  $G$ , entonces  $A^{-1}$  es compacto.*

**Demostración.** Sea  $V$  una vecindad compacta de  $e$ . Veamos que existen  $x_1, \dots, x_n$  en  $A$  tales que

$$A^{-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i^{-1}V.$$

Supongamos lo contrario. Construyamos una sucesión de elementos en  $A^{-1}$  de la siguiente manera:

- Sea  $x_1^{-1} \in A^{-1}$ . Como  $A^{-1} \not\subseteq x_1^{-1}V$ , existe  $x_2^{-1} \in A^{-1}$  tal que  $x_2^{-1} \notin x_1^{-1}V$ .
- Como  $A^{-1} \not\subseteq x_1^{-1}V \cup x_2^{-1}V$ , existe  $x_3^{-1} \in A^{-1}$  tal que  $x_3^{-1} \notin \bigcup_{i=1}^2 x_i^{-1}V$ .

- Continuando de esta manera, podemos construir una sucesión  $\{x_n^{-1}\} \subseteq A^{-1}$  tal que  $x_k^{-1} \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} x_i^{-1}V$ .

Definamos  $E_n = \{x_k \mid k \geq n\}$ . Entonces, la colección  $\{\overline{E_n}\}$  tiene la propiedad de la intersección finita. Ahora bien, como  $A$  es compacto y  $G$  es  $T_2$ , entonces  $A$  es cerrado, lo que implica que  $\overline{E_n} \subseteq A$ . Luego,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n} \neq \emptyset$ .

Sea  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n}$  y sea  $U$  una vecindad de  $e$  tal que  $U^2 \subseteq V$ . Como  $x \in Ux$  y  $x \in \overline{E_1}$ , se tiene que  $Ux \cap E_1 \neq \emptyset$ . Sea  $x_m \in Ux \cap E_1$ , entonces  $x_m \in Ux$ , es decir, existe  $u \in U$  tal que  $x_m = ux$ . Por lo tanto,

$$x^{-1} = x_m^{-1}u \in x_m^{-1}U.$$

Más aún, por la Proposición 5.5, como  $x \in \overline{E_{m+1}}$ , entonces  $x^{-1} \in \overline{E_{m+1}^{-1}}$ . Como  $x^{-1}U$  es vecindad de  $x^{-1}$ , se sigue que  $x^{-1}U \cap E_{m+1}^{-1} \neq \emptyset$ . Luego, existe  $n > m$  tal que

$$x_n^{-1} \in x^{-1}U \subseteq x_m^{-1}U \cdot U = x_m^{-1}U^2 \subseteq x_m^{-1}V,$$

lo que contradice la elección de  $x_n^{-1}$ . Por lo tanto,  $A^{-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i^{-1}V$ .

Finalmente, por la Proposición 5.3,  $A^{-1}$  es cerrado. Como  $\bigcup_{i=1}^n x_i^{-1}V$  es compacto, concluimos que  $A^{-1}$  es compacto.  $\square$

**Teorema 5.7.** *Sea  $G$  un grupo con una topología localmente compacta, Hausdorff, primero numerable, tal que la multiplicación es continua. Entonces la función  $\iota : G \rightarrow G$ , dada por  $\iota(x) = x^{-1}$ , es continua.*

**Demostración.** Sea  $U$  una vecindad de  $e$  y sea  $\mathcal{C}$  la colección de todas las vecindades compactas de  $e$ . Encontraremos una vecindad  $V \in \mathcal{C}$  tal que  $V^{-1} \subseteq U$ .

Por la Proposición 5.6,  $V^{-1}$  es compacto para cada  $V \in \mathcal{C}$ . Luego, la colección  $\{V^{-1} \cap (G \setminus U) \mid V \in \mathcal{C}\}$  es una familia de conjuntos compactos. Supongamos que esta familia tiene la propiedad de la intersección finita, es decir que para todo conjunto finito  $J$  y toda colección  $\{V_j \mid V_j \in \mathcal{C}\}_{j \in J}$ , se cumple que  $\bigcap_{j \in J} [V_j^{-1} \cap (G \setminus U)] \neq \emptyset$ . Entonces, por el Lema 2.21,  $\bigcap_{V \in \mathcal{C}} [V^{-1} \cap (G \setminus U)] \neq \emptyset$ .

Ahora bien, como  $G$  es  $T_2$ , tenemos que  $\{e\} = \bigcap \{V \mid V \in \mathcal{C}\}$ , por lo que, aplicando el Lema 3.5, obtenemos que  $\{e\} = \bigcap \{V^{-1} \mid V \in \mathcal{C}\}$ . Así, se cumple que

$$\bigcap_{V \in \mathcal{C}} (V^{-1} \cap (G \setminus U)) \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{C}} V^{-1} = \{e\},$$

lo que implica que  $\bigcap_{V \in \mathcal{C}} (V^{-1} \cap (G \setminus U)) = \{e\}$ . En particular,  $e \in G \setminus U$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe una colección finita  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  y una subcolección  $\{V_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{C}$  tal que

$$\bigcap_{j \in J} [V_j^{-1} \cap (G \setminus U)] = \emptyset.$$

Entonces, se cumple que  $(\bigcap_{j \in J} V_j^{-1}) \cap (G \setminus U) = \emptyset$ , es decir,  $(\bigcap_{j \in J} V_j^{-1}) \subseteq U$ . Por el Lema 3.5,  $\bigcap_{j \in J} V_j^{-1} = (\bigcap_{j \in J} V_j)^{-1}$ . Así,  $V = \bigcap_{j \in J} V_j$  es la vecindad deseada.

Hemos probado que para toda vecindad  $U$  de  $e$ , existe una vecindad  $V$  de  $e$  tal que  $\iota(V) \subseteq U$ . En otras palabras, hemos demostrado la continuidad de la función  $\iota$  en el punto  $e \in G$ . Como veremos a continuación, esto implica la continuidad de  $\iota$  en todos los puntos.

Sea  $g \in G$  y sea  $W$  una vecindad de  $g^{-1}$ . Entonces  $Wg$  es una vecindad de  $e$  (ver Corolario 3.10), por lo que existe una vecindad  $O$  de  $e$  tal que  $\iota(O) \subseteq Wg$ , es decir,  $O^{-1} \subseteq Wg$ . Luego  $O^{-1}g^{-1} \subseteq W$  y, como  $O^{-1}g^{-1} = (gO)^{-1}$ , obtenemos que  $gO$  es una vecindad de  $g$  que satisface  $\iota(gO) \subseteq W$ .  $\square$

**Corolario 5.8** ([4]). *Todo grupo equipado con una topología localmente compacta, Hausdorff, primero numerable, tal que la multiplicación es continua, es un grupo topológico.*

## 6. Resultado principal

En la Sección 4, a partir de una matriz cuadrada  $A$  con  $\text{ind}(A) = 1$ , construimos el grupo  $\mathcal{G}_A = \{A^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ , donde las potencias  $A^j$  se definen de la siguiente manera:

- Para  $j > 0$ ,  $A^j$  es la multiplicación usual de matrices.
- Para  $j \leq 0$ ,
  - Si  $j = 0$ , se define  $A^0 = AA^\#$ , donde  $A^\#$  es la grupo inversa de  $A$ .
  - Si  $j < 0$ , se define  $A^j = (A^\#)^{-j}$ , es decir, la potencia  $-j$  de la grupo inversa  $A^\#$ .

El conjunto  $\mathcal{G}_A$  es un subespacio de  $M_n(\mathbb{R})$ , por lo que puede ser identificado como un espacio topológico con la topología inducida por  $\mathbb{R}^{n^2}$ , como vimos en el Ejemplo 2.4.

Con esta topología, la multiplicación de matrices

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{G}_A \times \mathcal{G}_A &\longrightarrow \mathcal{G}_A, \\ (A^j, A^k) &\longmapsto A^{j+k}, \end{aligned}$$

es continua (ver Ejemplo 3.7). De esta forma  $\mathcal{G}_A$  es un grupo con una topología localmente compacta, Hausdorff, primero numerable, tal que la multiplicación es continua. Por el Teorema 5.7, esto implica que la función

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{G}_A &\longrightarrow \mathcal{G}_A, \\ A^j &\longmapsto A^{-j}, \end{aligned}$$

es continua. Por lo tanto,  $\mathcal{G}_A$  es un grupo topológico cuyos elementos son matrices no necesariamente invertibles. De esta forma, hemos demostrado el siguiente resultado.

**Teorema 6.1.** *Sea  $A$  una matriz cuadrada (no necesariamente invertible) con índice 1 y sea  $A^\#$  su grupo inversa. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{G}_A = \{AA^\#, A^i, (A^\#)^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

*es un grupo topológico con la operación de producto de matrices.*

**Ejemplo 6.2.** Consideremos la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . El determinante de  $A$  es 0, por lo que no es invertible. Además, como  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^2) = 1$ , se tiene que el índice de  $A$  es  $\text{ind}(A) = 1$ .

Calcularemos la grupo inversa de  $A$  aplicando la fórmula (4.1). Primero, descomponemos  $A$  como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definimos  $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = (GF)^{-1}$ . Entonces

$$GF = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad B = (GF)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad B^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right).$$

Por lo tanto, la grupo inversa  $A^\#$  de  $A$  es

$$A^\# = FB^2G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}A.$$

En efecto, la matriz  $A^\# = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}A$  satisface las condiciones (4.2) – (4.4), como mostraremos a continuación:

- $AA^\# = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A^\#A,$
- $AA^\#A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A,$
- $A^\#AA^\# = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = A^\#.$

Veamos cuáles son los elementos del grupo  $\mathcal{G}_A = \{A^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ . Al calcular las potencias de  $A$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} A &= 2^0 A, \\ A^2 &= 2A, \\ A^3 &= 4A, \\ &\vdots \\ A^j &= 2^{j-1} A \quad \text{para } j \geq 1, \\ A^0 &= AA^\# = \frac{1}{2}A, \\ A^{-1} &= A^\# = \frac{1}{4}A, \\ A^{-2} &= (A^\#)^2 = \left(\frac{1}{4}A\right)^2 = \frac{1}{8}A, \\ &\vdots \\ A^{-j} &= (A^\#)^j = \left(\frac{1}{4}A\right)^j = \frac{1}{2^{j+1}}A \quad \text{para } j \geq 1. \end{aligned}$$

Esto es,  $\mathcal{G}_A = \{2^k A \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Ahora veremos que el grupo multiplicativo  $\mathcal{G}_A$  es isomorfo al grupo aditivo  $\mathbb{Z}$ . Para esto, definamos la función

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathcal{G}_A, \\ j &\longmapsto 2^{j-1}A. \end{aligned}$$

Es fácil ver que esta función es biyectiva. Además,

$$\psi(j+k) = 2^{j+k-1}A = 2^{j+k-2} \cdot 2A = 2^{j+k-2}A^2 = 2^{j-1}A \cdot 2^{k-1}A = \psi(j)\psi(k).$$

Por lo tanto,  $\psi$  es un isomorfismo de grupos. Por otra parte, observemos que la topología en  $\mathcal{G}_A$  es la inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}^4$ . Dado que los elementos de  $\mathcal{G}_A$  están dados por múltiplos escalares de  $A$ , la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^4$  induce la topología discreta en  $\mathcal{G}_A$ . Como  $\mathbb{Z}$  también tiene la topología discreta, la función  $\psi$  es un homeomorfismo. Concluimos que  $\mathcal{G}_A$  y  $\mathbb{Z}$  son isomorfos como grupos topológicos.

### Agradecimientos

Los autores agradecen al árbitro por la revisión cuidadosa del texto y sus valiosos comentarios, que han contribuido significativamente a mejorar la claridad y calidad del artículo.

## Referencias

- [1] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, Springer, Second Edition, New York, 2003.
- [2] S.L. Campbell, C.D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Pitman, New York, 1979.
- [3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, U.S.A., 1966.
- [4] R. Ellis, *A note on the continuity of the inverse*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 372 – 373.
- [5] I. Fredholm, *Sur une classe d'equations fonctionnelles*, Acta Math. **27** (1903), 365 – 390.
- [6] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, New York, 1985.
- [7] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W. H. Freeman and Company, New York, 1985.
- [8] S.J. Kirkland, M. Neumann, *Group inverses of M-matrices and their applications*, CRC Press, 2013.
- [9] C.D. Meyer, Jr. *The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains*, SIAM Rev. **17** (1975), 443–464.
- [10] J.R. Munkres, *Topología*, 2a Ed., Pearson, España, 2002.
- [11] C. Prieto, *Topología básica*, Segunda edición, Ediciones científicas universitarias, México, 2013.
- [12] J.J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, 4a. Ed., Springer, U.S.A., 1995.
- [13] G. W. Stewart, *On the continuity of the generalized inverse*, SIAM J. Appl. Math. **17** (1969), 33–45.
- [14] M. G. Tkachenko, *Paratopological and Semitopological Groups vs Topological Groups*, Ch.20 in: Recent Progress in General Topology III (K.P. Hart, J. vanMill, P. Simon, Eds.), Atlantis Press, 2014; pp. 825-882.