

UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

INGENIERÍA EN BIOTECNOLOGÍA

CAMPUS TUXTEPEC

“Estimación de estados mediante observadores Luenberger con acción proporcional y proporcional-integral para la cristalización por lotes”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Ingeniero en Biotecnología

PRESENTA:

MAXIMILIANO LÓPEZ MORALES

Director: Dr. Jesús Carrillo Ahumada

Co-Director: Dr. Alfonso Flores Meza

SAN JUAN BAUTISTA TUXTEPEC, OAXACA 2019



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS TUXTEPEC


ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la ciudad de San Juan Bautista Tuxtepec, Oaxaca, el día 19 de noviembre de 2019 a las 12 hr, los miembros de la comisión revisora de tesis designada por la Jefatura de Carrera de la Ingeniería en Biotecnología se reunieron en la sala de juntas del Instituto de Biotecnología de la Universidad del Papaloapan, con la finalidad de examinar la tesis titulada "**Estimación de estados mediante observadores Luenberger con acción proporcional y proporcional-integral para la cristalización por lotes**" presentada por el alumno **Maximiliano López Morales**, con número de matrícula 14090516, aspirante al título de **Licenciatura**.

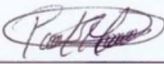
Después de intercambiar opiniones, los miembros de la comisión manifestaron que la tesis **satisface** los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes, otorgando su **aprobación** para que el aspirante pueda proceder con el proceso de titulación.

Tuxtepec, Oaxaca, a 19 de noviembre de 2019

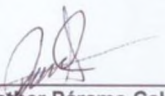
ATENTAMENTE
LA COMISIÓN REVISORA



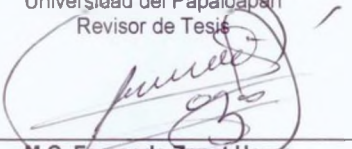
Dr. Jesús Carrillo Ahumada
Profesor Investigador Titular
Universidad del Papaloapan
Director de Tesis



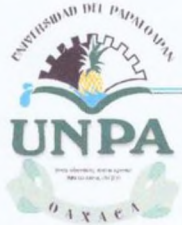
Dr. Paul Mauricio Sánchez Ocampo
Profesor Investigador Titular
Universidad del Papaloapan
Revisor de Tesis



Dra. Delia Esther Páramo Calderón
Profesor Investigador Titular
Universidad del Papaloapan
Revisor de Tesis



M.C. Fernando Zapot Hazas
Profesor Investigador Titular
Universidad del Papaloapan
Revisor de Tesis



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS TUXTEPEC

Tuxtepec, Oaxaca, a 20 de noviembre de 2019
Oficio No. JCIB/003/11/2019

Lic. Yesenia Barrientos Arenal
Jefe de Servicios Escolares
Universidad del Papaloapan

Con base en el dictamen de la comisión revisora, se autoriza la impresión del trabajo de tesis de la alumna **Maximiliano López Morales** titulado "**Estimación de estados mediante observadores Luenberger con acción proporcional y proporcional-integral para la cristalización por lotes**". Para ser presentado como trabajo de tesis para obtener el título de Licenciado en **Ingeniería en Biotecnología**, toda vez que cumple satisfactoriamente con la reglamentación establecida para tal fin.

El Jurado de Examen Profesional estará compuesto por los siguientes profesores:

Presidenta: Dra. Delia Esther Páramo Calderón
Vocal: Dr. Paul Mauricio Sánchez Ocampo
Secretario: M.C. Fernando Zapot Hazas
Primer Suplente: Dr. Óscar Núñez Gaona
Segundo Suplente: Dr. Aurelio Ramírez Hernández

Sin mas por el momento le envío un cordial saludo.



Dr. Julián Mario Peña Castro
Jefe de Carrera de Ingeniería en
Biotecnología
Universidad del Papaloapan

Atentamente
Terra uberrima, mens aperta
Bou Lo-tama, chí jí jú

Vo.Bo. M.C. Héctor López Arjona
Vice Rector Académico
Universidad del Papaloapan



c.c.p. Dr. Jesús Carrillo Ahumada, Director de tesis, Para su conocimiento
c.c.p. Maximiliano López Morales, Alumno, Para su conocimiento
c.c.p. Archivo

El presente trabajo no ha sido aceptado o empleado para el otorgamiento de título o grado diferente o adicional al actual. La tesis es resultado de las investigaciones del autor, excepto donde se indican las fuentes de información consultadas. El autor otorga su consentimiento a la **Universidad del Papaloapan** para la reproducción del documento con el fin del intercambio bibliotecario siempre y cuando se indique la fuente.

Agradecimientos

A mi director de tesis, **Dr. Jesús Carrillo Ahumada**, por haberme brindado todo el apoyo necesario para el desarrollo y la culminación de este trabajo tan importante en mi vida académica y profesional. Así mismo, a mi codirector de tesis, **Dr. Alfonso Flores Meza**, por haberme apoyado a lo largo de este trabajo.

A todos los maestros que aportaron sus conocimientos para para la revisión y corrección de este documento: **Dr. Paul M. Sánchez Ocampo, Dra. Delia E. Páramo Calderón, M.C. Fernando Zapot Hazas y al Dr. Julián M. Peña Castro.**

A todos los maestros que me enseñaron a través de sus clases todo lo que hoy me hace la persona que soy en el ámbito profesional.

Con todo el cariño, a mi familia que me apoyo, no solo a lo largo de la realización de este proyecto, si no a través de los 5 años de carrera: mis padres, **Graciela y Miguel Ángel** y a mi abuela **Juana Montero.**

A mis amigos **Keyla, Rosa, Ivan y Alexis F.** por hacer todos los días de la carrera más amenos y llevaderos. A mis amigos de mucho tiempo atrás, **Rosalba, Antoine y Alexis C.,** por todas esas veces que me dieron consejos y me animaron a seguir adelante.

A las becas de Manutención que me fueron otorgadas por el gobierno federal y estatal.

Dedicatoria

A mi madre Graciela, por siempre apoyarme en todas las decisiones que he tomado y por todo su amor incondicional, por acompañarme siempre sin importar lo feliz, triste o desesperado y por haber dado todo su esfuerzo para que a mí no me faltara nada.

A mi padre Miguel Ángel, por haberme siempre guiado por el camino del bien y enseñarme que sin importar los estudios que tengas, si no tienes disciplina nunca llegarás lejos. También por su amor incondicional y por esforzarse cada día para que yo no dejara de estudiar.

A mi abuela Juana Montero, por sin importar lo mucho o poco que tuviera siempre ofrecerme lo que más ella pudiera y por siempre alentarme a no abandonar mis estudios.

A mi abuela Beatriz Moreno (†), porque siempre desde pequeño me mostró que no importa lo rico o lo pobre que seas el saber siempre será lo máspreciado que se pueda tener y por siempre sembrar en mí la curiosidad de aprender cosas nuevas.

Contenido

Índice de figuras.....	VIII
Índice de tablas.	IX
Nomenclatura.....	X
Resumen.....	XII
Abstract.....	XIII

Índice

1. Introducción	1
1.1 Generalidades sobre cristalización.....	1
1.2 Generalidades sobre estimación.....	2
2. Descripción de la cristalización y sus modelos matemáticos.....	4
2.1 Tipos de cristalizadores	4
2.2 Generalidades sobre modelos matemáticos de cristalizadores	7
2.2.1 Balance de población	7
2.2.2 Relaciones constitutivas	11
2.2.3 Balance de masa.....	12
2.2.4 Balance de energía para el interior del cristizador.....	13
2.3 Modelos de aplicación de cristalización.....	14
2.3.1 Cristalización de sulfato de amonio y agua (Mesbah <i>et al.</i> , 2011)	14
2.3.2 Cristalización de paracetamol (Nagy <i>et al.</i> , 2008).....	15
2.3.3 Cristalización de sulfato de potasio (García <i>et al.</i> , 2012).....	16
2.3.4 Cristalización de nitrato de potasio (Nagy & Braatz, 2004)	17
2.3.5 Cristalización de azúcar mediante evaporación a vacío (Carrillo, 2006).....	17
2.3.6 Cristalización de azúcar mediante evaporación (Bolaños <i>et al.</i> , 2014).....	19
3. Observadores de estado: Estructuras y aplicaciones.....	21
3.1 Observadores de estado	21
3.1.1 Generalidades de observadores de estado.....	21
3.1.2 Estructuras de observadores de estado.....	22
3.1.2.2 Observadores Proporcional-Integral.....	23
3.2 Aplicaciones de los observadores de estado	26
3.2.1 Observadores de estado aplicados para ingeniería química y biotecnológica	26
3.2.2 Observadores de estado aplicados para el proceso de cristalización.....	28
3.3 Sintonización de observadores	29

3.3.1 Metodología de sintonización del criterio de Ackermann	29
4. Síntesis de antecedentes, hipótesis, justificación y objetivos	32
4.1 Síntesis de Antecedentes	32
4.2 Hipótesis	32
4.3 Justificación	32
4.4 Objetivo General	33
4.5 Objetivos Específicos	33
5. Metodología	34
5.1 Metodología general del trabajo de investigación	34
5.2 Caso de estudio: Modelo no lineal de un Cristalizador Evaporador Semi-industrial de Lote Alimentado	35
5.3 Metodología de linealización	36
5.3.1 Linealización del sistema de estudio descrito por Mesbah <i>et al.</i> , (2011)	37
5.4 Metodología de sintonización de observadores para el sistema de estudio	39
5.5 Metodología para el diseño de observadores proporcionales y proporcionales integrales	39
5.6 Evaluación de diferentes estructuras de observadores	40
6. Resultados	41
6.1 Resultados de la simulación de modelo no lineal del cristalizador	41
6.2 Sistema linealizado	46
6.3 Análisis preliminar de observabilidad	47
6.4 Resultados para el observador proporcional	48
6.5 Resultados para el observador proporcional integral	59
6.6 Comparativo de las estructuras del observador proporcional y proporcional- integral	73
7. Conclusiones	74
Bibliografía	76
Anexos	81

Índice de figuras

Figura 1. Evaporador-cristalizador con circulación de líquido.....	5
Figura 2. Cristalizador al vacío con circulación de magma.....	5
Figura 3. Cristalizador de tubo de aspiración deflector.....	6
Figura 4. Cambio del número de cristales por unidad de volumen para el rango de tamaño de cristal de L y $L+dL$	8
Figura 5. Representación de un proceso con un observador de estado.....	21
Figura 6. Representación de un proceso con un observador proporcional-integral.....	23
Figura 7. Metodología general del trabajo de investigación.....	34
Figura 8. Colocación de polos del sistema-observador en el plano complejo mediante el criterio de sintonización de Ackerman.....	39
Figura 9. Número de cristales.....	41
Figura 10. Longitud total de cristales.....	42
Figura 11. Área superficial de cristales.....	42
Figura 12. Volumen total de cristales.....	43
Figura 13. Respuesta del momento hipotético 4.....	43
Figura 14. Velocidad de nucleación.....	44
Figura 15. Velocidad de crecimiento.....	55
Figura 16. Concentración de soluto.....	45
Figura 17. Calor de entrada.....	45
Figura 18. Variación del valor máximo del observador proporcional (EigMax).....	51
Figura 19. Número de cristales.....	53
Figura 20. Área de cristales.....	54
Figura 21. Longitud de cristales.....	55
Figura 22. Volumen de cristales.....	56
Figura 23. Momento hipotético 4.....	57
Figura 24. Concentración de soluto.....	58
Figura 25. Variación del valor máximo del observador proporcional-integral (EigMax).....	62
Figura 26. Número de cristales.....	65

Figura 27. Desempeño de los observadores con respecto a la variación de los polos.....	66
Figura 28. Área de cristales.....	67
Figura 29. Longitud de cristales.....	68
Figura 30. Volumen de cristales.....	69
Figura 31. Momento hipotético 4.....	70
Figura 32. Concentración de soluto.....	71
Figura 33. Desempeño de los observadores con respecto a la variación de los polos.....	72

Índice de tablas

Tabla 1. Características de observadores de estado para ingeniería.....	25
Tabla 2. Aplicaciones a la ingeniería química y biotecnológica de observadores.....	27
Tabla 3. Observadores de estado para la cristalización.....	28
Tabla 4. Variación de los valores propios a partir de la Ecuación (107).....	49
Tabla 5. Valores de EigMax con respecto a la variación de los valores de la ecuación (107).....	50
Tabla 6. Métricas del observador Proporcional (P).....	59
Tabla 7. Variación de los valores propios a partir de la Ecuación (111).....	60
Tabla 8. Valores de EigMax con respecto a la variación de los valores de la ecuación (111).....	61
Tabla 9. Métricas del observador Proporcional-Integral (PI).....	72
Tabla 10. Desempeño de los observadores Proporcional (P) y Proporcional integral (PI).....	73

Nomenclatura

AFKF	Filtro de desvanecimiento adaptativo de Kalman
DTC	Distribución del Tamaño de Cristal
EBPD	Ecuación de Balance de Población Discretizada
EKF	Filtro extendido de Kalman
ELO	Observador extendido de Luenberger
EnKf	Filtro ensamblado de Kalman
MHE	Estimador con movimiento al horizonte
MPR	Métodos de pesos residuales
PF	Filtro de partículas
SDRE	Estado dependiente de la ecuación de Riccati
UKF	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>

Nomenclatura para la sección de estructuras de observadores

A, B, C, D, E, F, G Matrices de estado de espacio

<i>Signo</i>	Componente acertado para el argumento del vector
x_1	Concentración de los componentes medidos
\hat{x}	Vector de estado estimado
\dot{x}, \dot{z}	Dinámica del vector de estado
Z	Vector de proceso
R_v	Medida del ruido del vector de covarianza
u_1, u_2	Partición del vector correspondiente para las variables auxiliares
d	Discreto
L, K	Ganancia del observador
$\hat{\hat{x}}$	Vector de estado estimado con un término linear de función discontinua
U_1, U_2	Vector de transferencia externa
P_{k-1}	Covarianza en el tiempo $k - 1$
F_{k-1}	Función de estado de transición no linear

ξ	Variable auxiliar
$\bar{D}S$	Distorsión estimada
A_1, A_2	Solución única del vector de proceso
$D_1(S), D_2(S)$	Perturbaciones agrupadas en bucle incluyendo perturbaciones externas

Resumen

La operación de la cristalización es de gran importancia para la industria farmacéutica en la producción de medicamentos, la industria alimentaria en la producción de azúcar e incluso para la industria agropecuaria en la producción de fertilizantes. Lo anterior mencionado, demuestra la importancia de este proceso, pero, así como presenta grandes ventajas, también tiene algunas desventajas, siendo una de las más importantes el monitoreo de la misma. Actualmente el monitoreo en línea de la cristalización requiere de instrumentación muy costosa y, que, en muchas ocasiones, la empresa que requiere de este proceso no posee el presupuesto para instalar tal instrumentación. Una alternativa viable para el monitoreo de la cristalización son los observadores de estado; los cuales son *software* diseñados a partir de modelos matemáticos que representan un proceso en específico.

El objetivo de este trabajo fue diseñar observadores lineales Luenberger Proporcionales (P) y Proporcionales-Integrales (PI) de orden completo mediante las fórmulas de Ackermann para la estimación de parámetros no medibles directamente en la operación unitaria de la cristalización de sulfato de amonio y agua. Para ello, se partió de un modelo no lineal presentado por Mesbah *et al.*, (2011), tal sistema fue linealizado para facilitar el estudio del mismo. Después se utilizó la fórmula de Ackermann para la sintonización de observadores, para posteriormente diseñar los observadores y finalmente evaluar el desempeño que presentaron mediante una métrica.

Como resultado, se obtuvo que el observador Proporcional-Integral (PI) de manera global presenta un mejor desempeño que el observador Proporcional (P) en la estimación de parámetros de no medibles directamente en la operación unitaria de cristalización.

Palabras clave: observador de estado, cristalización, *Software*

Abstract

The crystallization has great importance for the pharmaceutical industry in the production of medicines, the food industry in the production of sugar and even for the agricultural industry in the production of fertilizers. The aforementioned, demonstrates the importance of this process, but, as it has great advantages, it also has some disadvantages, being one of the most important monitoring of it. Currently, the online monitoring of crystallization requires very expensive instrumentation and, in many cases, the company that requires this process does not have the budget to install such instrumentation. A viable alternative for crystallization monitoring is the state observers; which are software designed from mathematical models that represent a specific process.

The main aim of this work was to design full-order Proportional (P) and Proportional-Integral (PI) linear observers using the Ackermann formulas for the estimation of parameters not directly measurable in the unit operation of the crystallization of ammonium sulfate and water. For this, it was based on a non-linear model presented by Mesbah *et al.*, (2011), such a system was linearized to facilitate its study. Then the Ackermann formula was used for tuning observers, to later design the observers and finally evaluate the performance they presented using a metric. As a result, it was obtained that the Proportional-Integral Observer (PI) presents a better performance than the Proportional Observer (P) in the estimation of non-measurable parameters directly in the unit operation of crystallization.

Keywords: state observers, crystallization, software

1. Introducción

El presente capítulo, introduce al lector sobre las generalidades sobre cristalización y estimación. Para lo cual, se inicia con una descripción de esta operación unitaria y posteriormente una descripción de la estimación de estados. La estimación de estados se utiliza cuando se requiere reconstruir al sistema mediante muy poca información disponible.

1.1 Generalidades sobre cristalización

La cristalización es una operación unitaria utilizada para la separación de algún soluto que se encuentre presente en una mezcla mediante la formación de partículas (cristales) y de este modo obtener este producto con un alto nivel pureza. La cristalización es realizada a partir de una solución sobresaturada, muchas veces para la obtención de una mezcla con esta característica se utilizan procesos como evaporación, enfriamiento, adición de solventes, adición de precipitantes u otros químicos que inducen a las moléculas del soluto a unirse y comenzar la nucleación (formación de cristales) y crecimiento (Nagy & Braatz, 2012).

Como todo proceso presenta desventajas operativas, en las que se encuentran la formación de incrustaciones en las paredes de los intercambiadores de calor, así como el diseño adecuado para la descarga del producto final y la obtención de un tamaño de cristal pequeño (Velázquez *et al.*, 2009).

La cristalización es un proceso con un gran número de aplicaciones en la obtención de muchos productos a nivel industrial. Algunos de los ejemplos más conocidos es el uso de esta operación en la producción de azúcar tal como se describe en el trabajo de Bolaños *et al.*, (2014) donde realizan el modelado y la optimización de un tanque de cristalización utilizado para producir azúcar.

Ya sea como proceso final o intermedio en los productos en su forma sólida es donde la cristalización juega un papel clave como operación unitaria de separación y purificación (Lewiner *et al.*, 2002).

El uso de esta operación también tiene alcances en diferentes industrias:

- Industria farmacéutica: obtención de paracetamol (Sanzida & Nagy, 2013; Power *et al.*, 2015) y en la producción de naproxeno (Icten *et al.*, 2016),
- Industria alimentaria: producción de ácido succínico (Klapwijk *et al.*, 2016).
- Industria agropecuaria: producción de fertilizantes, tal es el caso del ácido glutámico (Ma & Wang, 2012) que se utiliza como fertilizante foliar (fertilizante que actúa sobre las hojas del cultivo), obtención del ácido amino benzoico (Simone *et al.*, 2016).
- Industria química: obtención de sulfato de potasio (K_2SO_4) y nitrato de potasio (KNO_3) (Nagy & Braatz, 2003).

En el proceso de cristalización y también en la mayoría de los procesos particulados, la distribución del tamaño de partícula influye en la calidad del producto final. Sin embargo, el monitoreo en línea del desempeño de este indicador representa un reto. Por lo tanto, se pueden utilizar técnicas de estimación para obtener este parámetro ya sea para reconstruir al sistema para detectar posibles fallas o bien para realizar un control por retroalimentación de estados.

1.2 Generalidades sobre estimación

Generalmente, las técnicas utilizadas para la medición se encuentran basadas en un análisis fuera de línea, mientras que la instrumentación en línea es costosa y difícil de calibrar, por lo tanto, es adecuado utilizar estimadores de estado o detectores. En cualquier proceso que se realice se tendrá que considerar diferentes clases de problemas, sin importar si este tipo de proceso sea de carácter industrial o de menor escala, la única diferencia entre los problemas generados por uno o por otro es la magnitud o la cantidad de estos. Por supuesto, la cristalización no es la excepción. El monitoreo en línea de este proceso toma en cuenta la distribución del tamaño de partícula y el buen desempeño de este representa un gran reto. Por otro lado, existen los observadores de estado los cuales permiten suponer variables de interés a partir del modelo que se esté utilizando y de las mediciones obtenidas del sistema. La efectividad de este tipo de estimadores depende de dos factores: la observabilidad y la detectabilidad (Ali *et al.*, 2015).

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado se determina por la observación de la salida medida en un intervalo de tiempo finito. El concepto de observabilidad es útil al

resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles a partir de variables que sí lo son en un tiempo mínimo posible. Por otro lado, un sistema es detectable si todos los estados que no son observables son estables.

2. Descripción de la cristalización y sus modelos matemáticos

En el presente capítulo se mencionan los tipos de equipos utilizados para lograr el proceso de la cristalización, generalidades sobre modelos matemáticos de cristalizadores (balance de población, relaciones constitutivas, balance de masa, balance de energía para el interior del cristizador), soluciones generales del balance de población y algunos modelos de aplicación de la cristalización.

2.1 Tipos de cristalizadores

La operación unitaria de la cristalización se realiza con el uso de diferentes equipos, también conocidos como cristalizadores. Estos equipos se pueden clasificar según la forma en la que operan, es decir: continuos y por lotes. Una de las partes más importantes para que se logre la cristalización es la sobresaturación de la mezcla. No todos los equipos realizan la sobresaturación de la misma manera, es aquí donde se puede crear otra clasificación, la cual es (Geankoplis, 1998):

1. Sobresaturación producida por el enfriamiento de la solución con evaporación despreciable.
2. Sobresaturación producida por la evaporación del disolvente con poco enfriamiento o sin enfriamiento.
3. Sobresaturación por combinación de enfriamiento y evaporación en evaporadores adiabáticos.

Otra clasificación es según el tipo de cristizador, es decir, el equipo que se utiliza es:

- Evaporador-cristalizador con circulación de líquido.

En este equipo la sobresaturación se produce por evaporación. El líquido circulante se extrae con una bomba hacia el interior del tubo calentador por condensación del vapor de agua. El líquido caliente fluye después al espacio de vapor donde se produce una vaporización repentina que produce sobresaturación. Como se muestra en la Figura 1.

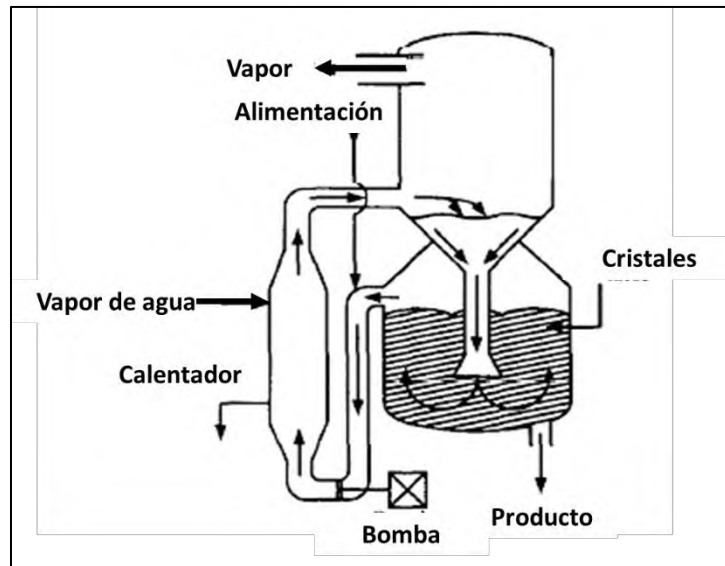


Figura 1. Evaporador-cristalizador con circulación de líquido (Geankoplis, 1998).

- Cristalizador al vacío con circulación de magma.

En este equipo la suspensión de cristales (magma) fluye por el exterior del cuerpo principal del cristalizador a través de un tubo de circulación. Como se muestra en la Figura 2.

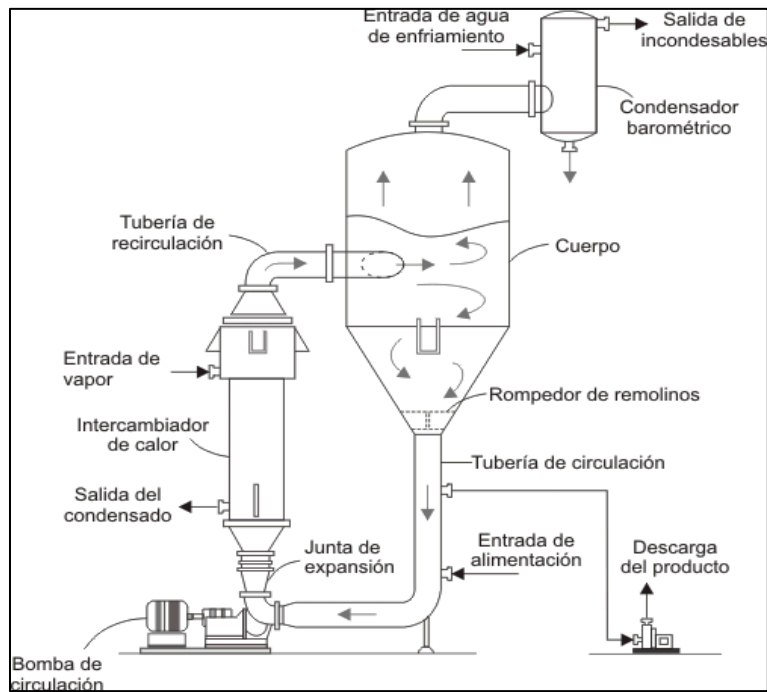


Figura 2. Cristalizador al vacío con circulación de magma.

- Cristalización de tubo de aspiración deflector (Harriot *et al.*, 2002).

El cuerpo de este cristalizador se encuentra equipado con un tubo de aspiración que a su vez actúa como una placa deflectora que actúa para controlar a la agitación de la suspensión de cristales (magma) y como un agitador de turbina dirigido hacia abajo para proporcionar una circulación controlable dentro del cristalizador. Como se muestra en la figura 3.

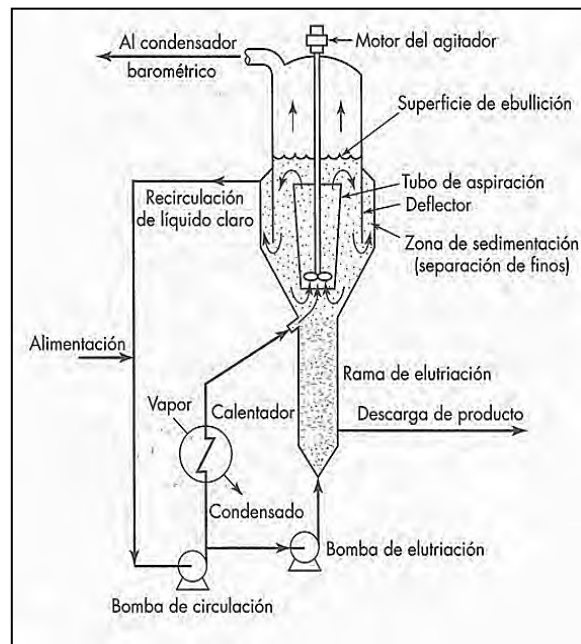


Fig. 3 Cristalizador de tubo de aspiración deflector (Harriot *et al.*, 2002).

El mejor equipo para cualquier proceso de cristalización que se desee realizar será aquel que se adapte mejor a las necesidades del usuario. Se debe considerar todos los aspectos necesarios, desde la cantidad de materia que se cristalizará hasta los costos de producción que este represente. Los equipos para la operación unitaria para la cristalización son representados por medio de modelos matemáticos.

2.2 Generalidades sobre modelos matemáticos de cristalizadores

Las características que debe poseer un modelo matemático para la operación unitaria de la cristalización según Rawlings *et al.*, (1993) son:

- Balance de población:

El cual muestra la distribución del tamaño de cristal (DTC), número de cristales, longitud, área y volumen del cristal. El balance de población se encuentra basado en la distribución de la densidad de población $n(L)$, y esta distribución se obtiene utilizando el número de partículas (cristales) que existe en un volumen determinado.

- Balance de materia y energía.
- Relaciones constitutivas: Las cuales son el crecimiento y nucleación, y sus parámetros.

A continuación, se muestra la descripción de estas características para un modelo matemático utilizado en la cristalización.

2.2.1 Balance de población

En la mayoría de las industrias que utilizan la cristalización no cuentan con un control adecuado para las condiciones de operación que les permita obtener una distribución de tamaño de cristal uniforme. Las velocidades de nucleación y crecimiento son los principales parámetros cinéticos que determinan la distribución de tamaño de cristal (DTC).

El concepto de balance de población proporciona una teoría de distribución variable en los procesos de partículas, fue introducido por Hulbert & Katz, (1964) y posteriormente formulado detalladamente para el proceso de cristalización por Randolph & Larson, (1978). Este balance de población está basado en la distribución de densidad de población $n(L)$, la cual se obtiene a partir del número de partículas por unidad de volumen (N), en el intervalo de tamaño de cristal (ΔL), originando una ecuación diferencial parcial hiperbólica.

$$n = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta L} = \frac{dN}{dL} \quad (1)$$

En un período diferencial de tiempo, los cristales que son más pequeños que L , pueden crecer dentro del intervalo de tamaño $L + dL$ y los cristales ubicados de L a $L + dL$ pueden crecer fuera del intervalo (Figura 4).

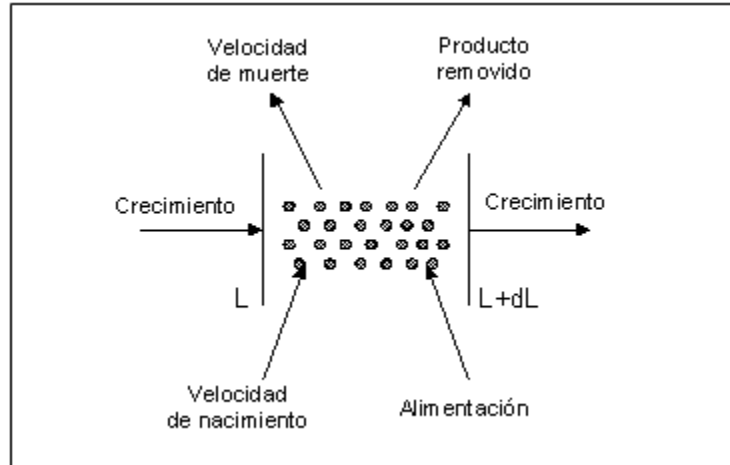


Figura 4. Cambio del número de cristales por unidad de volumen para el rango de tamaño de cristal de L y $L + dL$ (Mersmann, 1995).

La ecuación de balance de población expresada en términos generales con respecto al tiempo es (Mersmann, 1995):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(Gn)}{\partial L} + n \frac{\partial V}{V \partial t} + D(L) - B(L) + \sum_k \frac{n_k Q_k}{V} = 0 \quad (2)$$

donde el término $\partial n / \partial t$ representa el cambio en el número de densidad con respecto al tiempo en un cristizador batch y tiene el valor de cero en un equipo operado en continuo o en estado estable. La expresión $(\partial(Gn)) / \partial L$ describe la diferencia entre cristales creciendo dentro y fuera de un intervalo de tamaño de cristal dL debido a la velocidad de crecimiento del cristal $G = dL/dt$. El término $n(\partial V / \partial t)$ toma en cuenta los cambios en el volumen con respecto al tiempo. Los parámetros $D(L)$ y $B(L)$ representan la velocidad de muerte y velocidad de nacimiento, respectivamente; las cuales surgen debido a la aglomeración de los cristales, a su agotamiento o a su rompimiento. Finalmente, como el proceso es de tipo batch el término que da la suma de todos los flujos de partículas entrando y saliendo del cristizador es $\sum_k \frac{n_k Q_k}{V} = 0$. Por lo tanto, la Ecuación 2 queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial(nV)}{\partial t} + \frac{V\partial(Gn)}{\partial L} = V(\alpha(L)) \quad (3)$$

con la condición de frontera:

$$n(L_0, t) = \frac{B^0}{G_{L=L_0}} \text{ a } L = 0 \quad (4)$$

donde B^0 (# de part./ (cm^3))(min) es la velocidad de nucleación de los cristales de tamaño cero por unidad de volumen, G (cm/min) es la velocidad de crecimiento y n (# de part./ $(cm^3$ de licor)(cm) es la densidad de población (número) por unidad de volumen, y con la condición inicial:

$$n(L, t) = n_0(L, 0) \text{ a } t = 0 \quad (5)$$

Además del balance de población, se deben de considerar los parámetros de crecimiento nucleación y muerte de cristales los cuales conforman las relaciones constitutivas.

2.2.1.1 Soluciones generales del balance de población

Por lo general, los modelos matemáticos para cristalización consisten en una serie de ecuaciones integro-diferenciales no lineales. Las integrales se presentan porque la transferencia de masa de la población a la fase sólida se considera como la suma sobre las velocidades para cada cristal individual. Así, los balances de masa y energía involucran integrales sobre la distribución. La solución del modelo completo requiere una solución numérica (Rawlings *et al.*, 1993).

Las soluciones para la ecuación de balance de población se han agrupado en dos categorías: la ecuación de balance de población discretizada (EBPD) y la aplicación del método de pesos residuales (MPR). La solución por el método de pesos residuales aproxima la función de densidad de población a una combinación lineal de un conjunto conocido de funciones base $\psi_i(L)$.

$$n(L, t) \approx \sum_{i=1}^N a_i(t)\psi_i(L) \quad (6)$$

La aproximación es sustituida dentro de la ecuación de balance de población definida como un residual $r(L, t)$ y este es forzado para ser ortogonal a un segundo conjunto de funciones de peso y $w_i(L)$ dentro de un dominio de L .

$$\int_{L'}^{L''} w_i(L)r(L, t)dL = 0 \quad (7)$$

por lo tanto, existen variaciones de estas dos clasificaciones de solución generales:

- Variación del método de momentos.
- Métodos de caracterización.
- Simulación de Monte Carlo.
- Métodos espectrales.
- Método del elemento finito.
- Método del volumen finito
- Método de clases
- Método de pesos residuales

Cada uno de estos métodos tienen ventajas de desventajas como lo menciona Omar & Rohani, (2017) por ejemplo, obtener un número excesivo de ecuaciones diferenciales mediante discretización a comparación de los métodos de pesos.

2.2.1.2 Solución del balance de población mediante el método de pesos residuales

La solución llevada a cabo por este método hace que la función de densidad de población se aproxime a una combinación lineal de un conjunto de funciones conocidas con base $\psi_i(L)$.

$$n(L, t) \approx \sum_{i=1}^N a_i(t) \psi_i(L) \quad (8)$$

$$\int_{L1}^{L2} w_i(L)r(L, t)dt = 0 \quad (9)$$

$$w_i(L) = L^{3-1} \quad (10)$$

$$\frac{d\mu_0}{dt} = B \quad (11)$$

$$\frac{d\mu_i}{dt} = iG_{\mu i-1} \quad (12)$$

La forma de las Ecuaciones (11) y (12) depende del tipo de operación y representan el momento 0, 1, ..., n de la DTC. Por ejemplo, si es que existe variación de volumen o si este se mantiene constante.

2.2.2 Relaciones constitutivas

Para complementar el modelado del proceso de cristalización, se requieren de las relaciones constitutivas para conocer el proceso de manera completa considerando: la nucleación y el crecimiento de cristales. Estos dos fenómenos compiten en el cambio de fase desde la solución hacia la fase sólida. Hay varios factores que afectan la formación de cristales como son: la carga hidrostática, la temperatura, las impurezas disueltas o en suspensión, entre otros. La relación existente entre el balance de población, tomando como coordenada interna el tamaño de cristal, y las relaciones constitutivas (cinética de nucleación y crecimiento), se establece al definir el parámetro “densidad de población de cristales del tamaño del núcleo” $(dn/dL)_{L \rightarrow 0}$, la cual es una suposición que simplifica la función distribuida de nacimientos $B(L)$, y se puede utilizar como condición frontera (Randolph & Larson, 1978).

La velocidad de nucleación B^0 (# de part./ $(cm^3)(min)$) está dada por la Ecuación (13), la velocidad de crecimiento del cristal G (cm/min) se representa por la Ecuación (14) la masa total de cristales (g/cm^3) está dada por la Ecuación (15), donde μ_3 expresa el tercer momento de la distribución de cristales ($m^3/volumen$ de licor) y se considera independiente del tamaño de cristal dado en la Ecuación (16). El factor de transformación de malla esta dado por la Ecuación (17), la sobresaturación relativa ($adim$) está dada por la Ecuación (18) considerando la concentración en dominio del tiempo y concentración de saturación, la velocidad de producción – reducción de cristales de tamaño (L) está dada por la Ecuación (19).

$$B^0 = K_b S r^b M_T^j N_r^p \quad (13)$$

$$G = K_g S r^g N_r^q \quad (14)$$

$$M_T = \rho_c K_v \mu_3(t) \quad (15)$$

$$\mu_3(t) = \int_0^\infty n L^3 dL \quad (16)$$

$$FTM = \Delta L \left(\frac{n_i}{n_0} \right) \times 1000 \quad (17)$$

$$Sr = \frac{C - C_{sat}}{C_{sat}} \quad (18)$$

$$\alpha(L) = B_e + B_c + B_a - D(L) = K_a Sr^a M_T^k N_r^r FTM \quad (19)$$

donde $\rho_c (g/cm^3)$ es la densidad del cristal, $K_v (adim)$ es el factor de forma del cristal, $L (cm)$ es la longitud característica del cristal. Los parámetros (K_b, b, j, p, K_g, g, q) son ajustados a partir de datos experimentales mediante un método de optimización de ajuste de parámetros multivariable si es que se realiza experimentación.

2.2.3 Balance de masa

Las relaciones constitutivas son funciones de la sobresaturación y de la temperatura. Por lo tanto, uno de los balances que se requiere para complementar la descripción del proceso de cristalización es el de masa. El balance de masa para el soluto en fase continua es (Rawlings *et al.*, 1993):

$$\frac{d(V_c C)}{dt} = - \sum_k \varepsilon_k Q_k C_k - R \quad (20)$$

donde $V_c (cm^3)$ es el volumen libre de sólidos o la fase continua, $C (g \text{ de azúcar} / g \text{ de agua})$ es la concentración del soluto, ε fracción libre de sólidos (V_c/V), $Q_k (m^3/s)$ es la velocidad de flujo volumétrico, k es el subíndice que indica la k -ésima corriente y R es la velocidad global de transferencia de masa del soluto de la solución hacia los cristales. Para un cristalizador por lotes se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d(C)}{dt} = -\rho_c K_v h \left[3 \int_0^\infty G n L^2 dL + B^0 L_0^3 \right] \quad (21)$$

estableciéndose como condición inicial:

$$C(t) = C_0 \text{ a } t = 0 \quad (22)$$

donde $C (\text{masa del soluto} / \text{masa del solvente})$ es la concentración del soluto y $h (\text{volumen del licor} / \text{masa del solvente})$ es un factor de conversión. Si la velocidad de crecimiento G se considera independiente del tamaño del cristal en las relaciones constitutivas de la Ecuación (21), G sale del término integral en la Ecuación (21) y el resto del término

corresponde al segundo momento de la distribución de cristales, el cual representa el área total de cristales por volumen de licor. Por el contrario, si G es dependiente del tamaño de cristal, la Ecuación (21) debe resolverse numéricamente incluyendo la expresión para la velocidad de crecimiento.

2.2.4 Balance de energía para el interior del cristalizador

El balance de energía para el interior de un cristalizador es:

$$\frac{d}{dt}(U + KE + PE) = - \sum_k \rho_k Q_k (U_k^* + KE_k^* + PE_k^*) + H_{ext} + W \quad (23)$$

Donde U es la energía interna, KE y PE son las energías cinética y potencial respectivamente; Q_k y ρ_k son el flujo volumétrico y la densidad de la k -ésima corriente, respectivamente, H_{ext} es el calor neto adicionado (incorporando efectos del sistema de calentamiento, entradas de energía debido al mezclado y pérdida a los alrededores); W es la velocidad neta de trabajo desempeñado por el fluido de transporte sobre el sistema. El superíndice "*" denota base por unidad de masa. El balance general de energía que puede modificarse para variaciones de volumen es:

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dPV}{dt} - H_{ev} F_{ev} - \Delta H_c \rho_c K_v V \left[3 \int_0^\infty G n L^2 dL + B^0 L_0^3 \right] + U_1 A_1 (T_j - T) \quad (24)$$

Con la condición inicial:

$$T(t) = T_0 \text{ a } t = 0 \quad (25)$$

donde $\rho(g/cm^3)$, es la densidad de la solución, $V(cm^3)$ es el volumen del licor, $C_p(cal/g \text{ } ^\circ C)$, es el calor específico del licor, $T(^\circ C)$ es la temperatura del interior del cristalizador, $P(inHg)$ es la presión de la cámara de evaporación, $H_{ev}(cal/g)$ es la entalpía del agua evaporada, $F_{ev}(g/min)$ es el flujo de agua evaporada, $\Delta H_c (cal/g)$ es el cambio de entalpía de cristalización (calor de cristalización), $U_1(cal/(^\circ C) (min) (cm^2))$ es el coeficiente global de transferencia de calor (vapor-acero-licor), $A_1(cm^2)$ es el área de transferencia de calor y $T_j(^\circ C)$ es la temperatura de la chaqueta de calentamiento.

Como se ha expuesto en esta sección los modelos matemáticos para la cristalización pueden ser generalizados además de que pueden tener diferentes aplicaciones.

2.3 Modelos de aplicación de cristalización

En esta sección se exponen algunos modelos matemáticos para la cristalización con aplicaciones: cristalización de sulfato de amonio y agua (Mesbah *et al.*, 2011), cristalización de paracetamol (Nagy *et al.*, 2008), cristalización de sulfato de potasio (García *et al.*, 2012), cristalización de nitrato de potasio (Nagy & Braatz, 2004), cristalización- evaporación por lotes a vacío (Carrillo, 2006), cristalización por enfriamiento por lotes (Bolaños *et al.*, 2014).

2.3.1 Cristalización de sulfato de amonio y agua (Mesbah *et al.*, 2011)

Este modelo describe un proceso de cristalización en un recipiente de 75 L, el aparato utilizado es semiindustrial de un único compartimento, con una corriente de entrada y dos de salida. La operación es por lote alimentado para compensar las pérdidas en el volumen de cristalización debido a la evaporación del disolvente que en este caso es el agua. La operación de este cristalizador es descrita con un modelo constituido de ecuaciones diferenciales, ecuaciones auxiliares y parámetros:

- Ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dm_i}{dt} = 0^i B^0 + i G m_{i-1} - \frac{m_i Q_p}{V} \quad (26)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\left(\frac{Q_p(C^* - C)}{V}\right) + 3K_v G m_2 (k_1 + C)}{1 - k_v m_3} + \frac{k_2 H_{in}}{1 - K_v m_3} \quad (27)$$

$$\text{donde } m_i(t_0) = m_{i,0}, \text{ para } i = 0, \dots, 4 \text{ y } C(t_0) = C_0. \quad (28)$$

- Ecuaciones auxiliares y parámetros:

$$k_1 = \frac{H_v C^*}{H_v - H_L} \left(\frac{\rho_C}{\rho_L} - 1 + \frac{\rho_L H_L - \rho_C H_C}{\rho_L H_V} \right) - \frac{\rho_C}{\rho_L}$$

$$k_2 = \frac{C^*}{V \rho_L (H_v - H_L)}$$

$$B^0 = k_b m_3 G$$

$$G = k_g (C - C^*)^g$$

Conjunto de ecuaciones (29)

Donde $C^* = 0.46 \text{ kgsoluto/kg solución}$, $G [=]$ adim, $H_C = 60.75 \text{ kJ/Kg}$, $H_L = 69.86 \text{ kJ/kg}$, $H_V = 2.56 \times 10^3 \text{ kJ/kg}$, $K_v = 0.43$ adim, $K_b = 1.02 \times 10^{14} \text{ \#/m}^4$, $k_g = 7.50 \times 10^{-5} \text{ m/s}$, $Q_p = 1.73 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, $V = 7.50 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, $\rho_C = 767.35 \text{ kg/m}^3$, $\rho_L = 1248.93 \text{ kg/m}^3$.

Los detalles de este modelo se pueden consultar en Mesbah *et al.*, (2011).

2.3.2 Cristalización de paracetamol (Nagy *et al.*, 2008)

Este modelo describe un proceso de cristalización por lotes donde se utiliza el sembrado de una semilla, es decir, el sembrado de un cristal ya formado en la solución a cristalizar. Aunque esta técnica reduce la productividad del lote, se puede tener un producto final más consistente. En este caso esta técnica es utilizada para la cristalización de paracetamol (4-acetamidofenol). La operación de este cristizador es descrita con un modelo constituido de ecuaciones diferenciales y parámetros:

- Ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\mu_0}{dt} = B \tag{30}$$

$$\frac{d\mu_1}{dt} = G\mu_0 + Br_0 \tag{31}$$

$$\frac{d\mu_2}{dt} = 2G\mu_1 + Br_0^2 \tag{32}$$

$$\frac{d\mu_3}{dt} = 3G\mu_2 + Br_0^3 \tag{33}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\rho_c k_v (3G\mu_2 + Br_0^3) \quad (34)$$

$$\text{donde } C(0) = c_i. \quad (35)$$

Los valores de los parámetros: $\rho_c = 1.296 \text{ g/cm}^3$, $k_v = 0.24 \text{ adim}$, $c_i = 0.0256 \text{ g/g agua}$, r_0 es el tamaño del cristal en la nucleación.

Los detalles de este modelo se pueden consultar en Nagy *et al.*, (2008).

2.3.3 Cristalización de sulfato de potasio (García *et al.*, 2012)

En este caso, se considera la cristalización por lotes de sulfato de potasio con sembrado de semilla, de operación isotérmica. El comportamiento de esta cristalización es descrito por un modelo matemático constituido por ecuaciones diferenciales, también propuesto por Shi *et al.*, (2006):

- Ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\mu_0^n}{dt} = B(t) \quad (36)$$

$$\frac{d\mu_i^n}{dt} = iG(t)\mu_{i-1}^n(t) \quad (37)$$

$$\frac{dT}{dt} = -3 \frac{\Delta H}{C_p} 3\rho_c k_v G(t)\mu_2 - \frac{UA}{MC_p} (T(t) - T_j(t)) \quad (38)$$

$$\frac{d\mu_0^s}{dt} = cte \quad (39)$$

$$\frac{d\mu_i^s}{dt} = iG(t)\mu_{i-1}^n(t) \quad (40)$$

Los detalles del modelo se pueden consultar en García *et al.*, (2012).

2.3.4 Cristalización de nitrato de potasio (Nagy & Braatz, 2004)

En este artículo, el modelo matemático que presenta es utilizado para un cristalizador por lotes, en el cual la sustancia a cristalizar es sulfato de potasio. Se considera la cristalización mediante semilla. El comportamiento de esta cristalización es descrito por un modelo matemático constituido por ecuaciones diferenciales:

- Ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\mu_0}{dt} = B \quad (41)$$

$$\frac{d\mu_1}{dt} = G\mu_0 + Br_0 \quad (42)$$

$$\frac{d\mu_2}{dt} = 2G\mu_1 + Br_0^2 \quad (43)$$

$$\frac{d\mu_3}{dt} = 3G\mu_2 + Br_0^3 \quad (44)$$

$$\frac{d\mu_4}{dt} = 4G\mu_3 + Br_0^4 \quad (45)$$

$$\frac{dC}{dt} = -\rho_c k_v (3G\mu_2 + Br_0^3) \quad (46)$$

$$\text{donde } G\mu_{seed,1} = G\mu_{seed,0}, G\mu_{seed,2} = 2G\mu_{seed,1}, G\mu_{seed,3} = 2G\mu_{seed,2}. \quad (47)$$

Los detalles del modelo se pueden consultar en Nagy & Braatz, (2004).

2.3.5 Cristalización de azúcar mediante evaporación a vacío (Carrillo, 2006)

En este trabajo se realiza el modelamiento del proceso de cristalización por lotes considerando el término de variación de volumen, lo cual afecta directamente en las ecuaciones la DTC se considera un proceso más eficiente que la cristalización por enfriamiento, pero requiere relativamente más energía. Este modelo fue ajustado para cristalización de azúcar. El comportamiento de esta cristalización es descrito por un modelo matemático constituido por ecuaciones diferenciales y ecuaciones auxiliares:

- Ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\mu_0}{dt} = B^0 \quad (48)$$

$$\frac{d\mu_1}{dt} = G\mu_0(1 + Ln(V)) \quad (49)$$

$$\frac{d\mu_2}{dt} = 2G\mu_1(1 + Ln(V)) \quad (50)$$

$$\frac{d\mu_3}{dt} = 3G\mu_2(1 + Ln(V)) \quad (51)$$

$$\frac{d\mu_4}{dt} = 4G\mu_3(1 + Ln(V)) \quad (52)$$

$$\frac{d\mu_5}{dt} = 5G\mu_4(1 + Ln(V)) \quad (53)$$

$$\frac{dC}{dt} = -3\rho_c K_v h(G\mu_2 + BL_0^3) \quad (54)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d(PV)}{dt} c - H_{ev} F_{ev} - 3\Delta H_c \rho_c K_v h(G\mu_2 + BL_0^3) + \frac{H_{ext}}{\rho V C p} \quad (55)$$

$$V_j \frac{d\rho_j}{dt} = F_s \rho_s - W_c \quad (56)$$

$$\frac{dM_A}{dt} = -F_{ev} \quad (57)$$

- Ecuaciones auxiliares:

$$qe_A = \left[1 - \left(\frac{Bx}{100} \right) \right] M_{total}$$

$$F_{ev} = Cv \sqrt{P^2_{camperfil} - P^2_{con}}$$

$$M_I = \left[\left(\frac{Bx}{100} \right) \left(1 - \frac{Px}{100} \right) \right] M_{total}$$

Conjunto de ecuaciones (58)

Los detalles del modelo se pueden consultar en Carrillo, (2006).

2.3.6 Cristalización de azúcar mediante evaporación (Bolaños *et al.*, 2014)

En Bolaños *et al.*, (2014) se considera la cristalización de azúcar por evaporación. La operación del equipo es por lotes. Las cinéticas de crecimiento y nucleación son obtenidas experimentalmente. El comportamiento de esta cristalización es descrito por un modelo matemático constituido por ecuaciones diferenciales y ecuaciones auxiliares:

- Ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\mu_0}{dt} = B^0 \quad (59)$$

$$\frac{d\mu_k}{dt} = kG\mu_{k-1}(1 + \ln(V)) \quad (60)$$

$$\frac{dC}{dt} = -3\rho_c K_v h(G\mu_2 + BL_0^3) \quad (61)$$

$$\text{donde } k = 1, \dots, 5 \quad (62)$$

- Ecuaciones auxiliares:

$$B^0 = k_b S_r^b M_T^j N_r^p$$

$$G = K_g S_r^g N_r^q$$

$$S_r = \frac{c - c_{sat}}{c_{sat}}$$

$$M_T = \rho_c k_w \mu_3(t)$$

Conjunto de ecuaciones (63)

Los detalles del modelo se pueden consultar Bolaños *et al.*, (2014)

Como se ha mostrado en la presente sección, existen diferentes aplicaciones para la cristalización a nivel industrial y planta piloto. Los modelos que se presentaron en esta sección tienen una estructura semejante entre sí. Al tener esta semejanza, se puede estudiar la cristalización aplicada para cualquier sustancia.

Considerando los modelos matemáticos de la cristalización como no lineales y que en algunos casos se requieran de ciertos parámetros para estudiarlos (o controlarlos), se requiere de realizar observación para poder determinar estos parámetros en línea.

3. Observadores de estado: Estructuras y aplicaciones

El presente capítulo, se expone una introducción al tema de observadores de estado, estructuras de observadores comúnmente utilizadas (proporcional y proporcional-integral), además de otros tipos de estructuras de observadores más complejas utilizadas en ingeniería en general, en ingeniería química y biotecnológica.

3.1 Observadores de estado

3.1.1 Generalidades de observadores de estado

El concepto de la observabilidad es un concepto fundamental en la estimación de parámetros (control automático, detección de fallos entre otros) relacionando al concepto de sistema y de regulación. Teóricamente, si el sistema es observable es posible reconstruir las variables de estado a partir de las mediciones tomadas de las salidas y del conocimiento de las entradas. Con las condiciones de observabilidad, el problema de la observación consiste en la búsqueda de la estimación de estado, por medio de un sistema dinámico auxiliar denominado observador (Almarza *et al.*, (2005)). Este observador cuyas entradas son las entradas y salidas del sistema y sus salidas son los estados estimados (Figura 5).

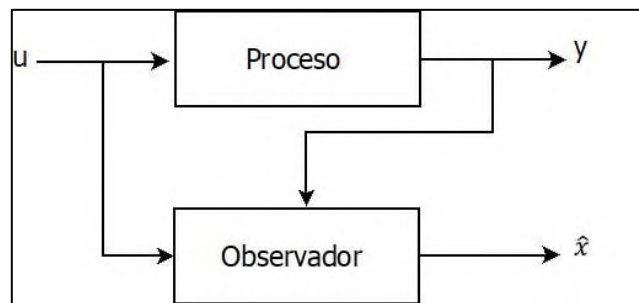


Figura 5. Representación de un proceso con un observador de estado.

Para sistemas lineales determinísticos, uno de los observadores más utilizados es el observador tipo Luenberger. Este tipo de observador es diseñado de tal modo que las diferencias entre los estados actuales del sistema y los estados del observador converjan en cero para todas las condiciones iniciales $x(0)$, entradas u y las condiciones estimadas inicialmente, $\hat{x}(0)$.

Comúnmente, para realizar la estimación se hace uso de *software* lo cual permite realizar la simulación numérica de los observadores de estado. Se puede definir a un observador de estado

como un dispositivo o expresión matemática que puede ser utilizado para obtener las variables a partir de muy poca información del sistema original (Figura 5). Existen dos tipos de observadores de estado, los de orden completo y los de orden reducido. Los de orden completo, utilizan las variables de salida para reconstruir a todo el sistema completamente. Por otro lado, se tienen los observadores de estado de orden reducido, los cuales reconstruyen una parte del sistema específicamente en las variables de interés. Además de diferentes estructuras de observadores entre las más comunes: observadores con acción proporcional y acción proporcional-integral.

3.1.2 Estructuras de observadores de estado

3.1.2.1 Observadores Proporcionales

Se puede considerar a continuación un sistema lineal o linealizado de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (64)$$

$$y = Cx \quad (65)$$

donde x es el vector de variables de estado, u es el vector de variables de entrada (que pueden considerarse como señales de control y/o entradas exógenas), y es el vector de salidas medidas que pueden ser tomadas para realizar observación, y las matrices A , B y C representan la linealización en un estado estacionario. Por otro lado, la expresión de observación es la siguiente:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x}) \quad (66)$$

donde \tilde{x} es el vector de estado estimado y K_e es el vector de ganancias del observador.

Realizando manipulación algebraica para determinar el error de observación:

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = Ax - A\tilde{x} - K_e(Cx - C\tilde{x}) = (A - K_eC)(x - \tilde{x}) \quad (67)$$

$$e = (x - \tilde{x}) \quad (68)$$

$$\dot{e} = (A - K_eC)e \quad (69)$$

Se considera que la estabilidad del sistema-observador es representada por la matriz $A - K_e C$. Un observador tipo Luenberger es relativamente de fácil implementación, sin embargo, es fuertemente dependiente de la precisión de los parámetros y de las medidas. La estructura que se ha mostrado en la Ecuación 66 representa a un observador proporcional.

3.1.2.2 Observadores Proporcional-Integral

El principio de un observador proporcional integral es el uso adicional del término de error integral, por la adición de una variable complementaria, w la cual está definida por $\hat{w} = \int_0^t (y(t) - \hat{y}(t)) dt$.

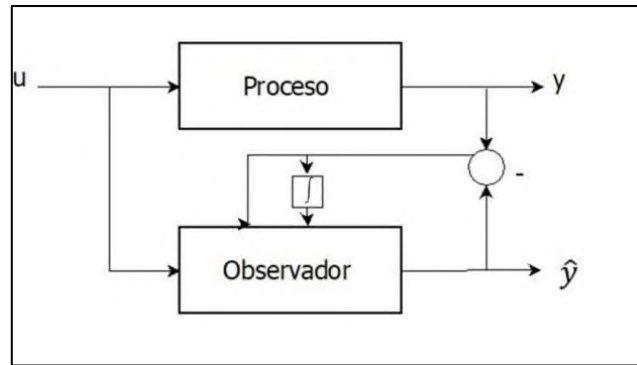


Figura 6. Representación de un proceso con un observador proporcional-integral.

La estructura de un observador proporcional integral se encuentra descrita por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = Ax + Bu + K_p(y - \hat{y}) + K_I \hat{w} \quad (70)$$

$$\hat{w} = y - \hat{y} \quad (71)$$

$$\hat{y} = C \hat{x} \quad (72)$$

donde K_p es la ganancia proporcional y K_I es la ganancia integral. Por tanto, el error de la ecuación se encuentra dado por:

$$\begin{pmatrix} \frac{de_x}{dt} \\ \frac{de_w}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - K_p C & K_I \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_w \end{pmatrix} \quad (73)$$

se considera que la estabilidad del sistema-observador es representada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} A - K_p C & K_I \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (74)$$

además de estas estructuras existen otras modificaciones a las mismas, aunque tienen en común la estabilidad del sistema-observador (Ecuaciones 69 y 74).

3.1.2.3 Otros tipos de estructuras de observadores

Según Ali *et al.*, (2015) existen diferentes tipos de observadores de estado, los cuales varían en estructura y para diferentes usos. Algunos tipos de observadores de estado de manera general se pueden clasificar como Observador tipo Luenberger (OL), Observadores para Sistemas de Observación Finita (OSOF), Estimador Bayesiano (EB), Observadores de Detección de Fallas y Disturbio (ODFD), Observadores basados en Inteligencia Artificial (OIA) y Observadores Híbridos (OH). Además, existen diferentes variantes entre esta clasificación general.

- Observador tipo Luenberger (OL):

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L\text{sign}(y - C\hat{x}) \quad (75)$$

- Observadores para Sistemas de Observación Finita (OSOF):

$$\frac{d\xi}{dt} = F\xi + Gx_1 - LU_1 + U_2 \quad (76)$$

- Estimador Bayesiano (EB):

$$P_{k|k-1} = F_{k-1|k-1}P_{k-1}^T + R_v \quad (77)$$

- Observadores de Detección de Fallas y Disturbio (ODFD):

$$\widehat{D}(s) = \widehat{D}_1(s) + \widehat{D}_2(s) + \dots + \widehat{D}_n(s) \quad (78)$$

- Observadores basados en Inteligencia Artificial (OIA):

Son acordes a los elementos de IA, por ejemplo, utilizan lógica difusa donde la regla es *IF-THEN*.

- Observadores Híbridos (OH):

$$\frac{dZ(t)}{dt} = D(t)Z(t) + A_1u_1(t) + A_2u_2(t) \quad (79)$$

Los observadores de estado mencionados anteriores presentan sus atributos, ventajas, limitaciones y usos en la ingeniería en general como se muestra en la Tabla 1 (Ali *et al.*, 2015).

Tipo	Atributos	Ventajas	Limitaciones	Usos en la ingeniería
OL	Extensión de un observador Luenberger clásico	Métodos computacionales simples	El diseño siempre está basado en el perfecto conocimiento de los parámetros del sistema	Para sistemas lineales no complejos. Este tipo de observador es suficiente para la estimación de un parámetro importante
OSOF	El conocimiento de la cinética del proceso no es necesario	Implementación y formulación relativamente sencilla	El factor de convergencia depende fuertemente las condiciones de operación	Adaptable para sistemas con poca información sobre la cinética
EB	Basados en la probabilidad de distribución y la inferencia matemática del sistema	Estimación rápida basada en la predicción y corrección del método y estimadores versátiles	La complejidad de su método computacional, en ocasiones, lo hace poco factible para sistemas altamente dimensionales	Para la estimación rápida de resultados basado en la teoría de la probabilidad

Tabla 1. Características de observadores de estado para ingeniería.

Tipo	Atributos	Ventajas	Limitaciones	Usos en la ingeniería
ODFD	Se enfoca en la estimación de los disturbios y en la detección de fallas dentro del sistema.	Eficiente al momento de estimar disturbios y predecir fallas antes de que puedan afectar la operación de la planta.	Podría ignorar algunas incertidumbres durante el proceso.	Si el objetivo es la estimación de disturbios y parámetros para predecir fallas, entonces este tipo de observadores son apropiados.
OIA	Combinación de observadores con elementos de IA.	Se sobrepone a las limitaciones de un solo observador y es utilizable en sistemas que tienen un modelo de estructura incompleta.	Consume tiempo para la implementación en línea, los elementos de IA primero deben ser adaptados al sistema.	Para sistemas altamente no lineales con un conocimiento incompleto o desconocimiento del modelo.
OH	Combinación de dos o más observadores.	Se sobrepone a las limitaciones de un solo observador	La selección de una combinación correcta puede ser tedioso.	Este tipo de observadores es aplicable cuando la precisión de un solo modelo no es suficiente.

Tabla 1. Características de observadores de estado para ingeniería (continuación).

3.2 Aplicaciones de los observadores de estado

En esta sección se presenta las aplicaciones de los observadores de estado primeramente para ingeniería química y biotecnológica y posteriormente para el proceso de cristalización.

3.2.1 Observadores de estado aplicados para ingeniería química y biotecnológica

En la tabla 2, se muestran ejemplos de observadores de estado y su aplicación en la ingeniería química (Ali *et al.*, 2015).

Tipo	Objetivo	Sistema	Puntos positivos	Referencia
UKF	Concentración de biomasa.	Fermentador.	Estimación efectiva a pesar del uso de un modelo mecanicista simple.	Wang <i>et al.</i> , (2010)
UKF	Parámetros inciertos.	Sistema de tanque híbrido.	Estimación satisfactoria de acuerdo al margen de error permisible y control efectivo.	Prakash <i>et al.</i> , (2010)
EnKF	Perturbaciones inmediatas.	Sistema de tanque híbrido.	Estimación satisfactoria de acuerdo al margen de error permisible y control efectivo.	Prakash <i>et al.</i> , (2010)
AFKF	Composición de productos.	Columna de destilación por lotes.	Estimación precisa a pesar de las condiciones de ruido.	Venkateswarlu & Avantika (2001)
AFKF	Temperatura.	Intercambiador de calor.	Estimación satisfactoria de acuerdo al margen de error permisible con coeficiente de ajuste.	Bagui <i>et al.</i> , (2004)
PF	Parámetro de rendimiento.	Fermentador.	Estimación satisfactoria de acuerdo al margen de error permisible basada en la maximización del algoritmo teórico.	Chitralkha <i>et al.</i> , (2010)

Tabla 2. Aplicaciones a la ingeniería química y biotecnológica de observadores.

Como se expone en tabla 2, existen diferentes tipos de observadores enfocados para diferentes problemáticas la elección entre un tipo y otro depende de la complejidad del modelo. Para el presente trabajo de investigación la estimación de estados se realizará para el proceso de cristalización.

3.2.2 Observadores de estado aplicados para el proceso de cristalización

En la tabla 3, se mencionan algunos ejemplos de los distintos tipos de observadores utilizados en el proceso de cristalización.

Observador	Objetivo	Sistema de cristalización	Puntos positivos	Referencia
ELO	Masa de cristales.	Unidad de cristalización.	Buena estimación sin condiciones iniciales.	Damour <i>et al.</i> , (2010a,b)
ELO	Concentración del soluto.	Por lote alimentado.	Robustez contra desviaciones del modelo.	Mesbah <i>et al.</i> , (2011)
EKF			Modelo robusto contra la desviación.	
UKF				
EnKF				
MHE				
ELO	Grados Brix.	Lote semi alimentado en un contenedor al vacío.	Masa del cristal, sacarosa, agua.	Damour <i>et al.</i> , (2010a & 2010b)
OL	Temperatura del interior del cristalizador, momento tres de la DTC y concentración	Por lotes a vacío, evaporación.	Buena estimación sin condiciones iniciales.	(Carrillo, 2006)
OLAG	Momento cero, uno de DTC, temperatura del interior, densidad del vapor.		Buena estimación sin condiciones iniciales.	(Carrillo, 2006)

Tabla 3. Observadores de estado para la cristalización.

El diseño de la estructura del observador requiere de una apropiada ganancia (Dochain, 2003) y esta es seleccionada basada en la estabilidad de la dinámica del error del sistema (Busawon & Kabore, 2001). La ganancia del observador puede ser encontrada utilizando el polinomio de Butterworth, la fórmula de Ackermann (Di Ruscio, 2009) y de la ecuación de Riccati (Farza *et al.*, 2011). Además, la decisión de cada estructura de control de cuál parámetro es el que se requiera estimar. Por ejemplo, en el trabajo de Carrillo, (2006) se consideró una misma salida para el diseño de los observadores (Luenberger y no lineal de alta ganancia tipo proporcional) y cada uno estimaba parámetros diferentes.

3.3 Sintonización de observadores

Algunos métodos de sintonización de observadores comúnmente conocidos son las técnicas de ubicación o de asignación de polos, además del incremento de convergencia entre el modelo original y el estimado. Se considera que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles. Si se demuestra que, si el sistema considerado es de estado completamente controlable, los polos del sistema en lazo cerrado se pueden ubicar en cualquier posición deseada mediante una retroalimentación del estado a través de una matriz de ganancias. Una de las fórmulas muy difundidas es la de Ackermann (Ogata, 2003).

3.3.1 Metodología de sintonización del criterio de Ackermann

Considerando un sistema lineal o linealizado de la forma (Ecuación 64). Donde se usa el estado de retroalimentación de control $u = -Kx$. Se asume que el sistema es completamente de estado controlable. También se asume que los estados del sistema son completamente controlables $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$. Por lo tanto, las características deseadas son (Ogata, 2003):

$$|sI - A + BK| = |sI - \tilde{A}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \quad (80)$$

El teorema de Cayley-Hamilton establece que \tilde{A} satisface su propia ecuación característica, por lo tanto:

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_n I = 0 \quad (81)$$

Utilizando la Ecuación (81) para derivar la fórmula de Ackermann. Para simplificar la derivación, se considerará el caso donde $n = 3$. Con las siguientes identidades:

$$I = I$$

$$\tilde{A} = A - BK$$

$$\tilde{A}^2 = (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BK\tilde{A}$$

$$\tilde{A}^3 = (A - BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2$$

Conjunto de Ecuaciones (82)

multiplicando las ecuaciones anteriores por $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ y α_0 (donde $\alpha_0 = 1$). Respectivamente y agregando los resultados se obtiene:

$$\begin{aligned} & \alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = \\ & \alpha_3 I + \alpha_2 (A - BK) + \alpha_1 (A^2 - ABK - BK\tilde{A}) + A^3 - A^2 BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \\ & \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + \tilde{A}^3 - \alpha_2 BK - \alpha_2 ABK - \alpha_1 BK\tilde{A} - A^2 BK - ABK\tilde{A} - BKA^2 \end{aligned} \quad (83)$$

considerando la Ecuación (81), se tiene:

$$\alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = \phi(\tilde{A}) = 0 \quad (84)$$

$$\alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = \phi(\tilde{A}) \neq 0 \quad (85)$$

Sustituyendo las últimas dos ecuaciones en la Ecuación (83):

$$\phi(\tilde{A}) = \phi(A) - \alpha_2 BK - \alpha_1 BK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 - \alpha_1 ABK - ABK\tilde{A} - A^2 BK \quad (86)$$

desde $\phi(\tilde{A}) = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi(A) &= B(\alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2) + AB(\alpha_1 K + K\tilde{A}) + A^2 BK \\ &= [B \quad AB \quad A^2 B] \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (87)$$

El sistema es un estado completamente controlable, la inversa de la matriz controlable existe $[B \quad AB \quad A^2 B]$. Premultiplicando ambos lados de la Ecuación (86) por el inverso de la matriz controlable, se obtiene:

$$[B \quad AB \quad A^2 B]^{-1} \phi(A) = \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \quad (88)$$

pre-multiplicando ambos lados de la ecuación por $[0 \quad 0 \quad 1]$:

$$[0 \ 0 \ 1][B \ AB \ A^2B]^{-1}\phi(A) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} = K \quad (89)$$

la cual puede ser reescrita como:

$$[0 \ 0 \ 1][B \ AB \ A^2B]^{-1}\phi(A) = K \quad (90)$$

Ésta última ecuación da el requerimiento de la retroalimentación de estado de la ganancia de la matriz K .

4. Síntesis de antecedentes, hipótesis, justificación y objetivos

En el presente capítulo se expone la síntesis de antecedentes, justificación, objetivo general y específicos del presente trabajo de investigación.

4.1 Síntesis de Antecedentes

La estimación por medio de observadores de estados es una estrategia de la automatización para poder determinar con las salidas medidas todos los estados del sistema o bien algunos estados que son de interés. Los usos de los observadores se encuentran en la estimación de fallas y para el desarrollo posterior de control por retroalimentación. La importancia que tiene la estimación se encuentra en los resultados que podrían obtenerse sin necesidad de instrumentos costosos o bien que no podrían implementarse *in situ*. Se considera que un observador tipo Luenberger puede ser utilizado para sistemas no complejos (sin no-linealidades duras) pudiéndose utilizar para el proceso de cristalización (Carrillo 2006; Carrillo *et al.*, 2008). Además, el resultado de la convergencia de la estimación y de los estados estimados varía con el procedimiento de sintonización y de la estructura del observador.

4.2 Hipótesis

La colocación de polos de la matriz del sistema-observador en diferentes regiones del semiplano izquierdo del plano complejo proporcionará una mejor estimación de estados para las diferentes estructuras de observadores utilizadas en la cristalización por lotes de sulfato de amonio y agua.

4.3 Justificación

Se han analizado diferentes trabajos de investigación que utilizan estructuras de observadores los cuales tienen su origen del observador tipo Luenberger. La sintonización de estos observadores se ha realizado conforme a la estabilidad de la ecuación del error tanto en el caso proporcional o proporcional integral variando en metodologías. Por lo tanto, el presente trabajo de investigación presenta áreas de oportunidad obtenidas de revisión bibliográfica:

- 1) Evaluación global de diferentes estructuras de observadores con la misma metodología de sintonización.
- 2) Determinar si es que comparten ambas estructuras soluciones compartidas.

4.4 Objetivo General

Diseñar observadores lineales Luenberger P y PI de orden completo mediante las fórmulas de Ackermann para la estimación de parámetros no medibles directamente en la operación unitaria de la cristalización de sulfato de amonio y agua.

4.5 Objetivos Específicos

- Diseñar un observador lineal tipo Luenberger P (Proporcional) y PI (Proporcional-Integral) para un modelo matemático específico para la operación unitaria de la cristalización.
- Sintonizar las estructuras de observadores mediante la fórmula de Ackermann en diferentes regiones de colocación y polos
- Realizar simulación numérica en el dominio del tiempo de cada tipo de observador.
- Comparar los diferentes tipos de observadores propuestos para evaluar el que proporciona la mejor estimación.

5. Metodología

El presente capítulo muestra la metodología que hizo posible la realización del trabajo, partiendo de cómo se linealizó el sistema original presentado en Mesbah *et al.*, (2011) para después generar los observadores proporcional y proporcional-integral y a su vez sintonizarlos bajo el criterio de Ackerman y la posterior evaluación de ambos observadores de estado.

5.1 Metodología general del trabajo de investigación

El presente trabajo de investigación considera la siguiente metodología general (Figura 7).

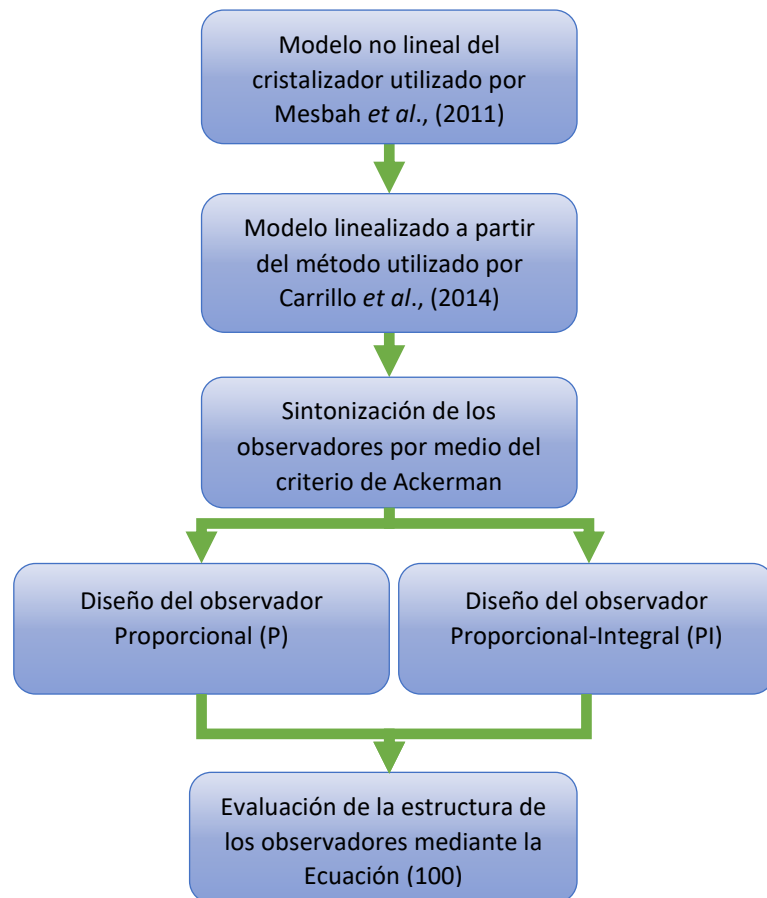


Figura 7. Metodología general del trabajo de investigación.

A continuación, se describe con mayor detalle la metodología del trabajo de investigación.

5.2 Caso de estudio: Modelo no lineal de un Cristalizador Evaporador Semi-industrial de Lote Alimentado

El caso de estudio es el propuesto por Mesbah *et al.*, (2011) descrito por las Ecuaciones (26)-(28) de la sección 2.3.1. Se trata de la cristalización de sulfato de amonio y agua. La cristalización toma lugar en un tubo cristalizador de aspiración 75 L. El cristalizador Semi-industrial de un único compartimento con mezclado perfecto con una entrada y dos corrientes de salida. La operación de alimentación del lote se ejerce para compensar las pérdidas en el volumen de cristalización debido a la evaporación del solvente y agua. Por lo tanto, el cristalizador se alimenta continuamente durante la ejecución del lote con una corriente de alimentación libre de cristales que contiene amonio. Por otro lado, la salida fluye desde el cristalizador incluye una corriente de eliminación de producto no clasificado también como una corriente de vapor que está libre de cristal y soluto. El flujo del producto es retirado del cristalizador en intervalos regulares de tiempo de unos 100 segundos. El flujo del producto es diluido con la solución saturada de alimentación cada 20 segundos para facilitar la medición en línea de CSD con un instrumento de difracción de láser.

Neuman & Kramer, (2002) demostraron que la evolución de CSD en cristalizadores industriales puede ser adecuadamente medida en la base del láser principalmente cuando la concentración del sólido es baja 1.5 % en volumen. Cabe señalar que la siembra se lleva a cabo para garantizar la reproducibilidad de los lotes y el logro de las especificaciones de calidad del producto deseado. Las corridas experimentales por lotes se inician insertando ciertas cantidades de semillas molidas de un tamiz conocido para la fracción en el cristalizador.

En este trabajo de investigación se realizan simulaciones sobre la dinámica del sistema específicamente sobre la variación de condiciones iniciales y parámetros utilizando plataforma Matlab®.

5.3 Metodología de linealización

Es conveniente, al analizar un sistema no lineal (Ecuaciones 25 a 27), comenzar linealizando el sistema alrededor de algún punto de operación y estudiar al sistema lineal resultante. Sin embargo, esto no es suficiente debido básicamente a dos razones (Byrnes & Isidori., 1989):

- La linealización sólo predice el comportamiento local, no sirve para estudiar el comportamiento lejos del punto de operación.
- La dinámica de un sistema no lineal es mucho más compleja que la de un sistema lineal debido a la presencia de fenómenos no lineales como: escape en tiempo finito, múltiples puntos de operación aislados, etc.

Empleando la linealización del modelo no lineal, se tiene un modelo lineal alrededor de un punto de operación $(x, u) = (x_0, u_0)$: Ecuación 64 y 65.

donde A (Ecuación 64) es la matriz del sistema, B (Ecuación 64) es la matriz de distribución de las entradas manipulables, C (Ecuación 65) es la matriz de distribución de salidas observables o informativas, además x (Ecuaciones 64 y 65) es el vector de estado del sistema, u (Ecuación 64) es el vector de entradas manipulables del sistema. Las matrices A , B y C tienen la siguiente forma:

$$A = \left(\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right)_{x=x_0, u=u_0} \quad (91)$$

$$B = \left(\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right)_{x=x_0, u=u_0} \quad (92)$$

$$C = \left(\frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right)_{x=x_0, u=u_0} \quad (93)$$

Considerando al vector $f(x, u)$ como los estados del sistema y al vector $g(x, u)$ como las salidas del sistema. La linealización permite tener una buena aproximación del comportamiento del sistema en un punto de operación nominal. Lo cual es fundamental para poder emplear las siguientes metodologías de sintonización.

5.3.1 Linealización del sistema de estudio descrito por Mesbah *et al.*, (2011)

Para linealizar el modelo presentado por Mesbah *et al.*, (2011) se utilizó el método empleado por Carrillo *et al.*, (2014) en el cual un sistema no lineal puede estar definido por las ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, w) \quad (94)$$

$$y = g(x, u, w) \quad (95)$$

donde x es el vector de estado del proceso, w es el vector de entradas exógenas, y es el vector de salidas medidas y u es el vector de señales de control.

Por otro lado, según García-Alvarado & Ruíz-López (2010) y Carrillo *et al.*, (2011) un sistema lineal puede definirse por las ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1w + B_2u \quad (96)$$

$$y = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \quad (97)$$

donde las matrices A , B_1 , B_2 , C_1 , D_{11} , D_{12} son producto de la linealización de las ecuaciones diferenciales representadas por f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 y f_6 :

$$f_1 = 0^1B_0 + 0Gx_1 - \frac{x_1Q_p}{V}$$

$$f_2 = 0^2B_0 + Gx_2 - \frac{x_2Q_p}{V}$$

$$f_3 = 0^3B_0 + 2Gx_3 - \frac{x_3Q_p}{V}$$

$$f_4 = 0^4B_0 + 3Gx_4 - \frac{x_4Q_p}{V}$$

$$f_5 = 0^4B_0 + 4Gx_5 - \frac{x_5Q_p}{V}$$

$$f_6 = \frac{\left(\frac{Q_p(C^* - x_6)}{V}\right) + 3K_v G x_3 (k_1 + x_6)}{1 - k_v x_4} + \frac{k_2 u_1}{1 - K_v x_4}$$

Conjunto de ecuaciones (98)

Considerando que u_1 es igual a w_1 (entrada exógena). Por lo tanto, las matrices A, B_1, D_{11}, D_{12} y C_1 tienen la siguiente representación:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{1s}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{2s}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{ns}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{1s}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{2s}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{ns}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{1s}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{2s}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{ns}} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_{1s}} & \frac{\partial f_1}{\partial u_{2s}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_{cs}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_{1s}} & \frac{\partial f_2}{\partial u_{2s}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_{cs}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_{1s}} & \frac{\partial f_n}{\partial u_{2s}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_{cs}} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{1s}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{2s}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{ns}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{1s}} & \frac{\partial g_2}{\partial x_{2s}} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{ns}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_{1s}} & \frac{\partial g_r}{\partial x_{2s}} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_{ns}} \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial w_{1s}} & \frac{\partial g_1}{\partial w_{2s}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial w_{ms}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial w_{1s}} & \frac{\partial g_2}{\partial w_{2s}} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial w_{ms}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial w_{1s}} & \frac{\partial g_n}{\partial w_{2s}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial w_{ms}} \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_{1s}} & \frac{\partial g_1}{\partial u_{2s}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_{cs}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_{1s}} & \frac{\partial g_2}{\partial u_{2s}} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_{cs}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_{1s}} & \frac{\partial g_n}{\partial u_{2s}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_{cs}} \end{bmatrix}$$

Conjunto de ecuaciones (99)

donde los subíndices n representan la dimensión de los estados, c representa la dimensión de las entradas al sistema, m representa la dimensión de las señales exógenas en las salidas medidas y s representa al estado estacionario en el punto de operación. Considerando también que la matriz de perturbación es $E = D_{11}$.

5.4 Metodología de sintonización de observadores para el sistema de estudio

Se utilizará la fórmula de Ackerman para la colocación de polos en regiones deseadas del plano complejo del sistema-observador para la estructura del observador P y del PI.

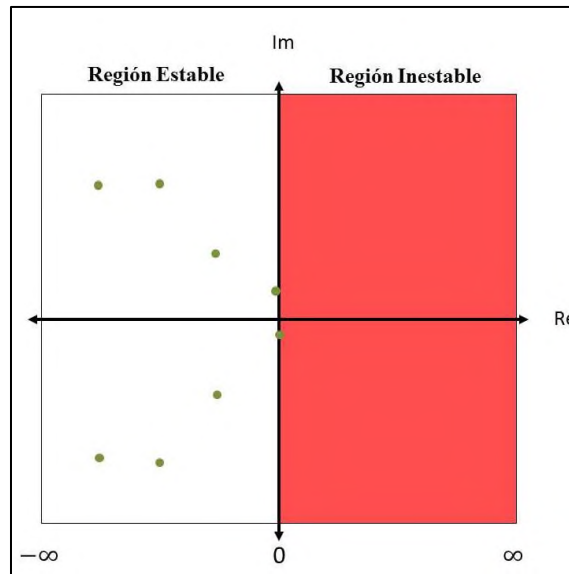


Figura 8. Colocación de polos del sistema-observador en el plano complejo mediante el criterio de sintonización de Ackerman.

Con este comparativo, se podrá tener una apreciación global del comportamiento de cada estructura del observador por ejemplo cuál de las dos presenta una mayor estabilidad que otra.

5.5 Metodología para el diseño de observadores proporcionales y proporcionales integrales

Utilizado la metodología propuesta por Ackermann es posible realizar la sintonización de observadores proporcionales y proporcionales integrales. La metodología propuesta en este trabajo de investigación es la siguiente:

- a) Determinar los valores propios del sistema de lazo abierto.
- b) La colocación de polos para el observador proporcional utilizando la metodología de Ackermann debe de ser muy semejante a los valores propios del sistema de lazo abierto, considerando la estabilidad del sistema (todos los valores propios deben ser menores que cero).

- c) A partir de a la colocación de polos inicial, se realizó una variación del 5 % del valor original de los polos hasta tener una variación total del 100 %.
- d) Con las ganancias obtenidas correspondientes a las variaciones arriba mencionadas. se realizaron simulaciones en dominio del tiempo empleando el método Runge-Kuttha de cuarto orden programado en la plataforma Matlab®.
- e) Se realiza una evaluación del desempeño mediante la Ecuación (100) de todos los posibles observadores que pueden ser aplicados para ese sistema de estudio.

5.6 Evaluación de diferentes estructuras de observadores

Para realizar la evaluación de diferentes estructuras de observadores, se utilizaron métricas desempeño para evaluar la convergencia entre el estado estimado y el estado original; la condición inicial del estado estimado y del estado original es diferente en orden de magnitud. Se realizó simulación numérica utilizando el método de Runge-Kuttha de 4to orden para resolver las ecuaciones diferenciales. Se utilizó como plataforma de programación el software Matlab®.

$$x_{métrica} = \sum_{i=1}^n |x_{n_{original}} - x_{n_{estimado}}| \quad (100)$$

6. Resultados

En este capítulo se presentan todos los resultados obtenidos en el presente trabajo de investigación. Se incluyen las simulaciones de modelo original utilizado por Mesbah *et al.*, (2011), así como las estructuras y los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas en Matlab® de los observadores Proporcionales (P) y los observadores Proporcionales-Integrales (PI).

6.1 Resultados de la simulación de modelo no lineal del cristizador

El modelo no lineal descrito por el conjunto de ecuaciones diferenciales (26) y (27) con $i = 1, 2, 3$, y el momento hipotético 4 ($i = 4$), ecuaciones algebraicas B_0 y G del conjunto de Ecuaciones (29) y con los parámetros: $C_{sat} = 0.46 \text{ mol soluto/L de solución}$, $G = 1.0 \text{ m/s}$, $H_C = 60.75 \text{ kJ/kg}$, $H_L = 69.86 \text{ kJ/kg}$, $H_v = 2.59 \times 10^3 \text{ kJ/kg}$, $k_v = 0.43$, $k_b = 1.02 \times 10^{14} / \text{m}^4$, $k_g = 7.5 \times 10^5 \text{ m/s}$, $Q_p = 1.73 \times 10^{-6} \text{ m}^3 / \text{s}$, $V = 7.50 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, $\rho_c = 1767.35 \text{ kg/m}^3$, $\rho_l = 1248.931767.35 \text{ kg/m}^3$, $G_{max} = 2.5 \times 10^{-8} \text{ m/s}$. Fue simulado con el método Runge-Kutta de cuarto orden con un tiempo de simulación de 1000 s obteniéndose la siguiente dinámica (Figura 9-17).

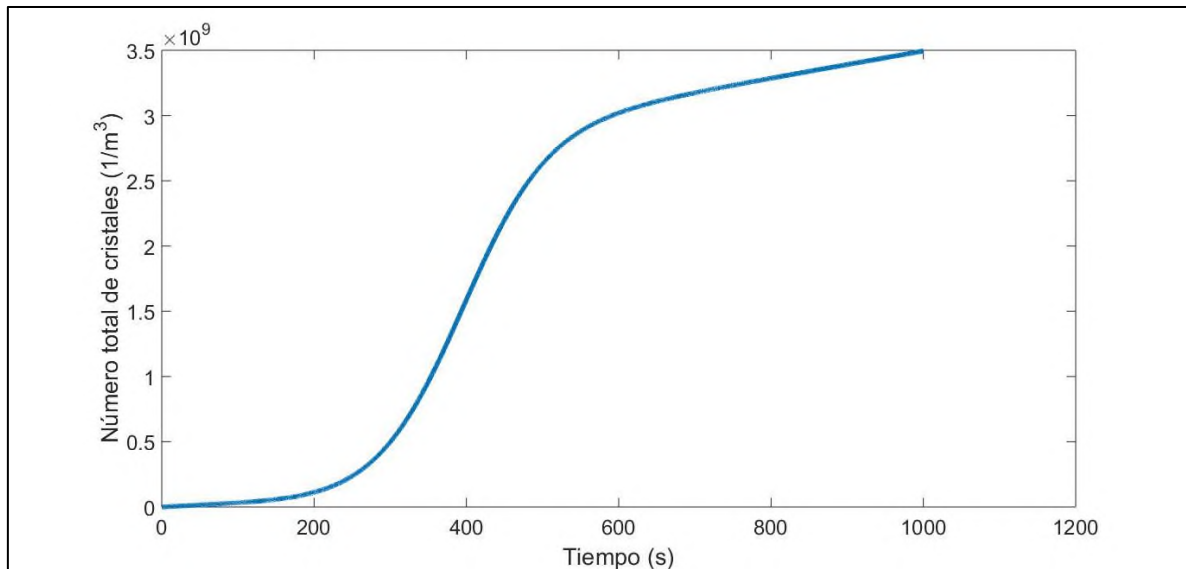


Figura 9. Número total de cristales.

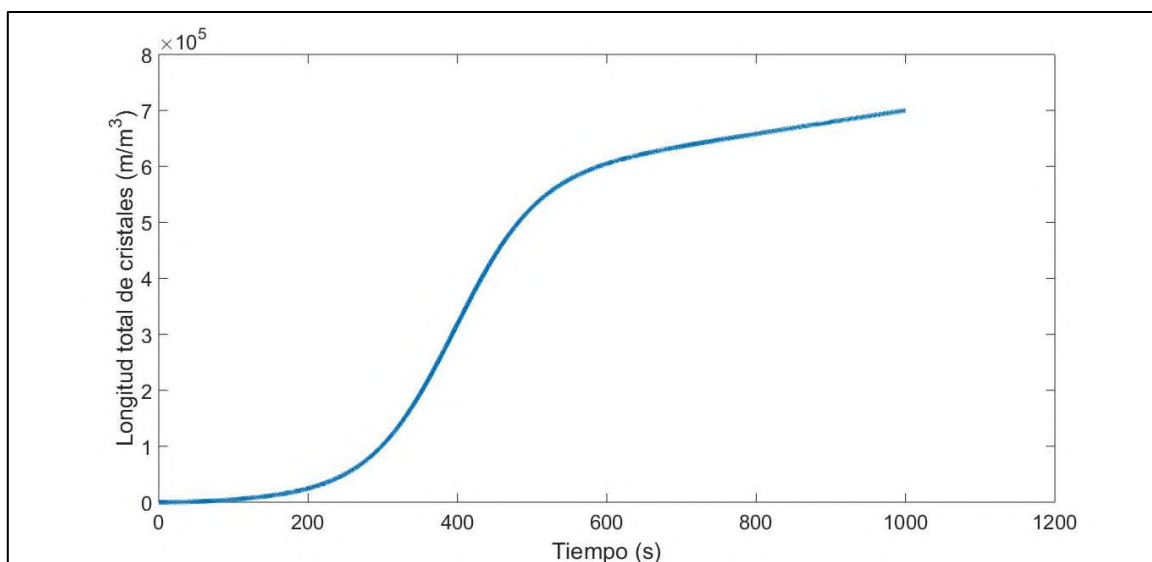


Figura 10. Longitud total de cristales.

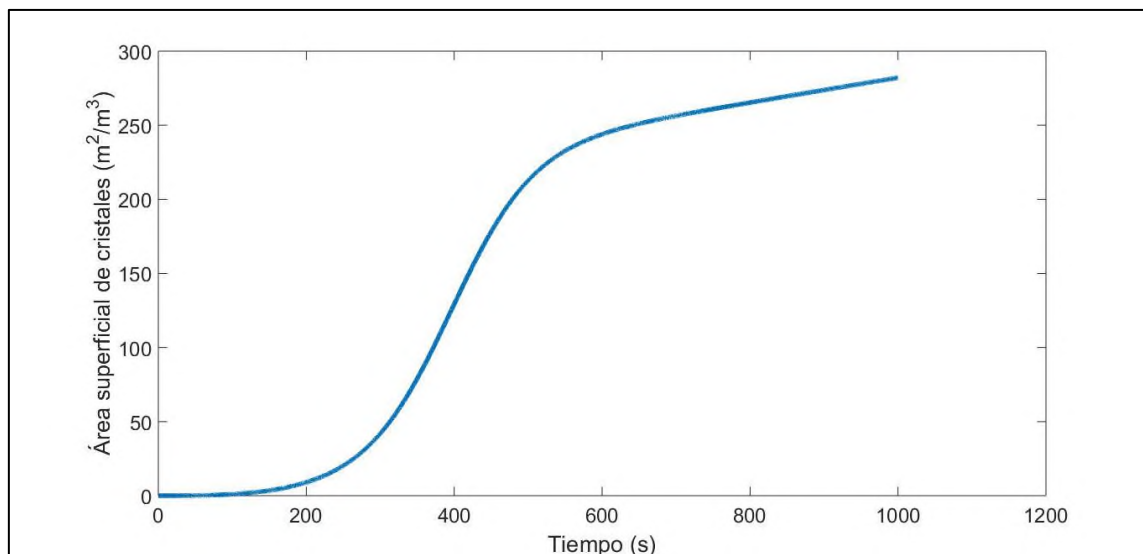


Figura 11. Área superficial de cristales.

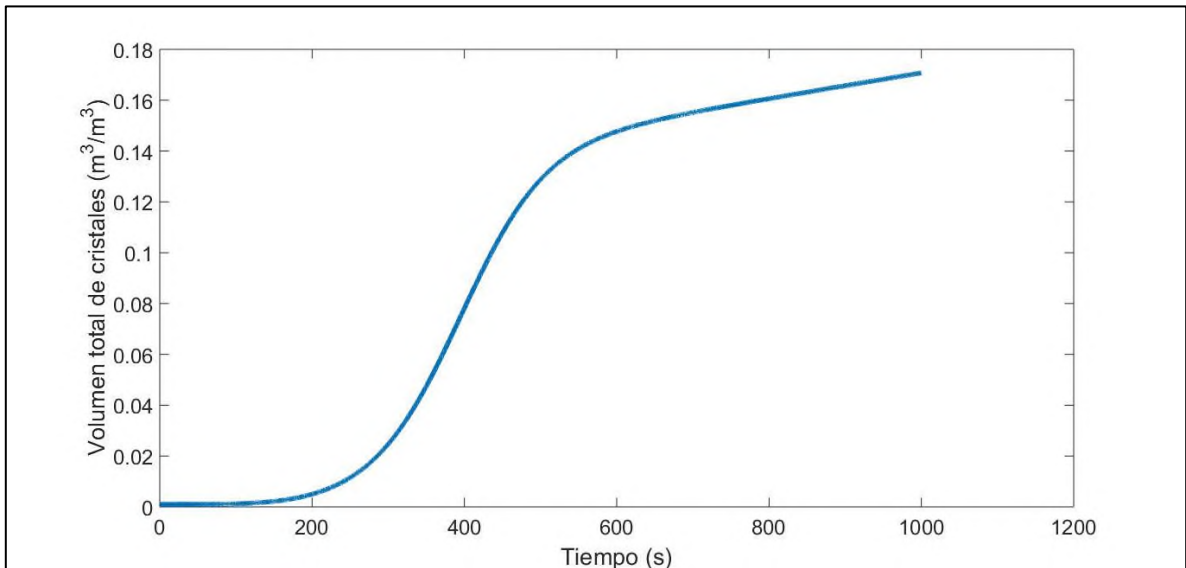


Figura 12. Volumen total de cristales.

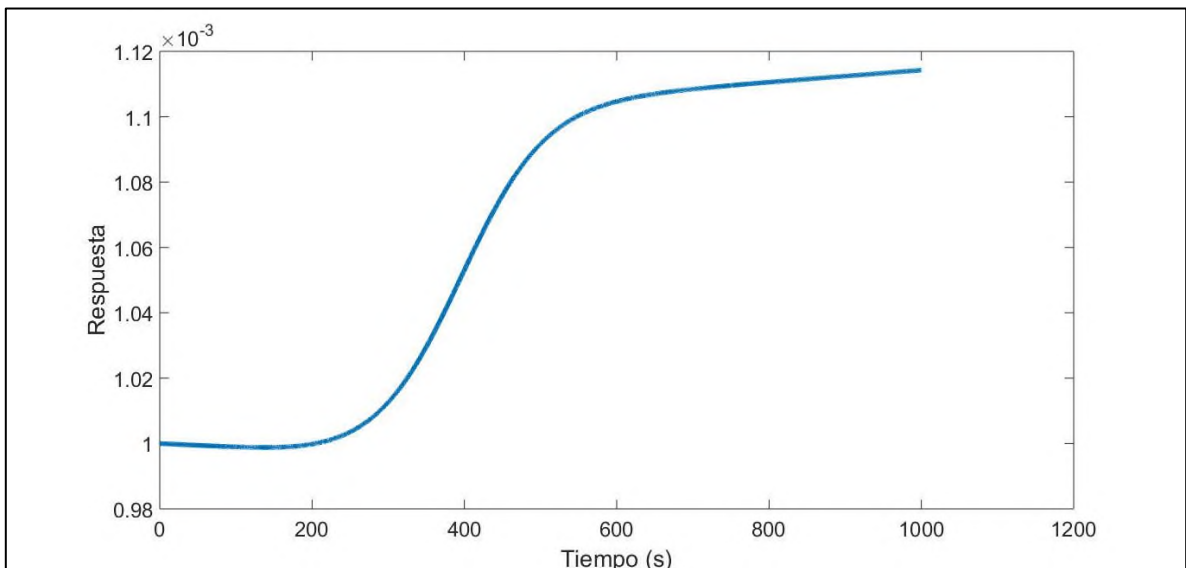


Figura 13. Respuesta del momento hipotético 4.

Las Figuras 9 a la 13 tienen una tendencia semejante, cabe mencionar que es considerado un tiempo de simulación hasta 1000 s, pero el comportamiento que se observa tiene una tendencia a incrementarse para el momento 0, 1, 2, 3 y 4.

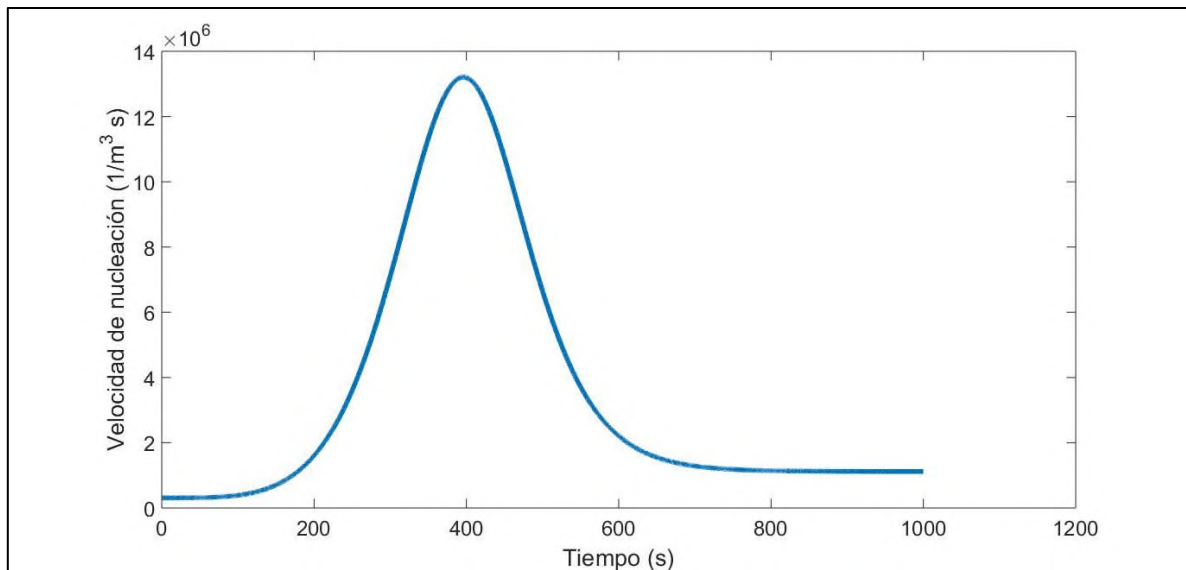


Figura 14. Velocidad de nucleación.

En la Figura 14, existe un valor máximo en la velocidad de nucleación de 13 ($1/(m^3 s)$) en un tiempo aproximado de 400 s.

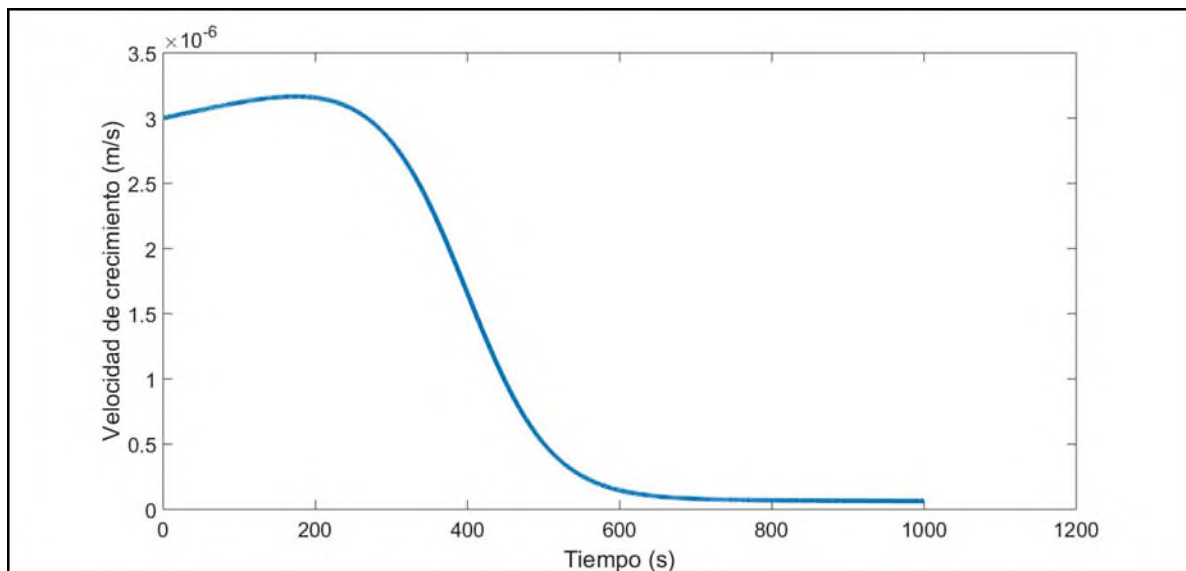


Figura 15. Velocidad de crecimiento.

En la Figura 15 se observa que la velocidad de crecimiento inicia con 3×10^6 (m/s), posteriormente hay una fase de decremento que inicia en los 300 s hasta los 600 s, donde mantiene un valor constante con tendencia hacia cero hasta el final del tiempo de simulación.

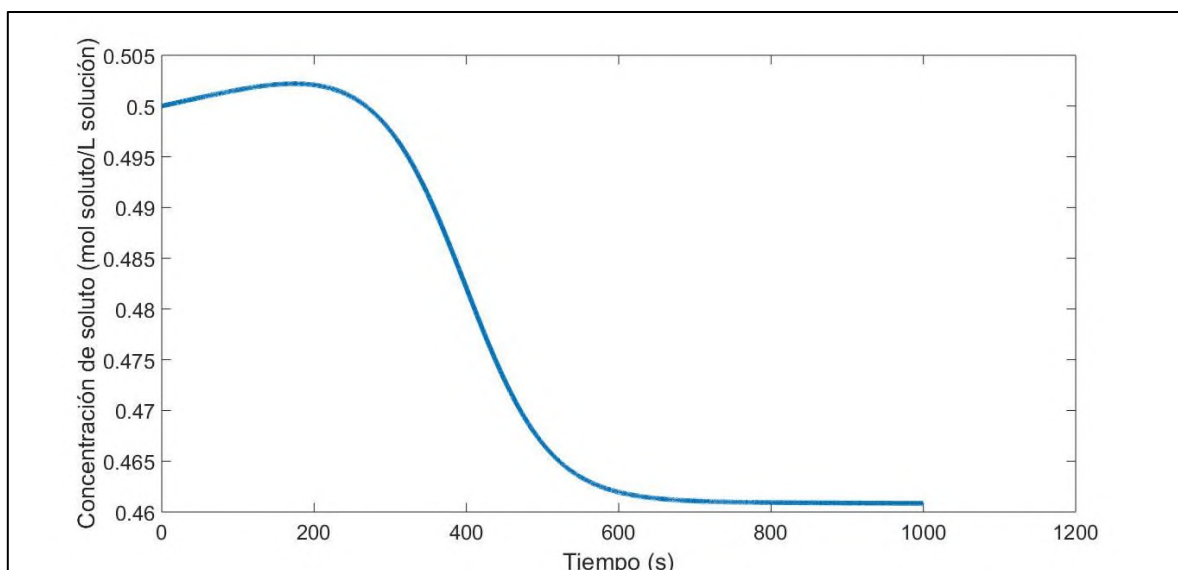


Figura 16. Concentración de soluto.

En la Figura 16 se muestra la concentración de soluto en la mezcla la cual tiene un valor inicial de $0.5 \text{ mol soluto/L de solución}$ manteniéndose un incremento moderado hasta aproximadamente 300 s, donde posteriormente hay un decremento de la concentración hasta un tiempo aproximado de 500 s. A partir de los 600 s hasta el final de la simulación, se mantiene la concentración de manera constante. La concentración es un parámetro importante para generar la sobresaturación que es la fuerza motriz de la cristalización.

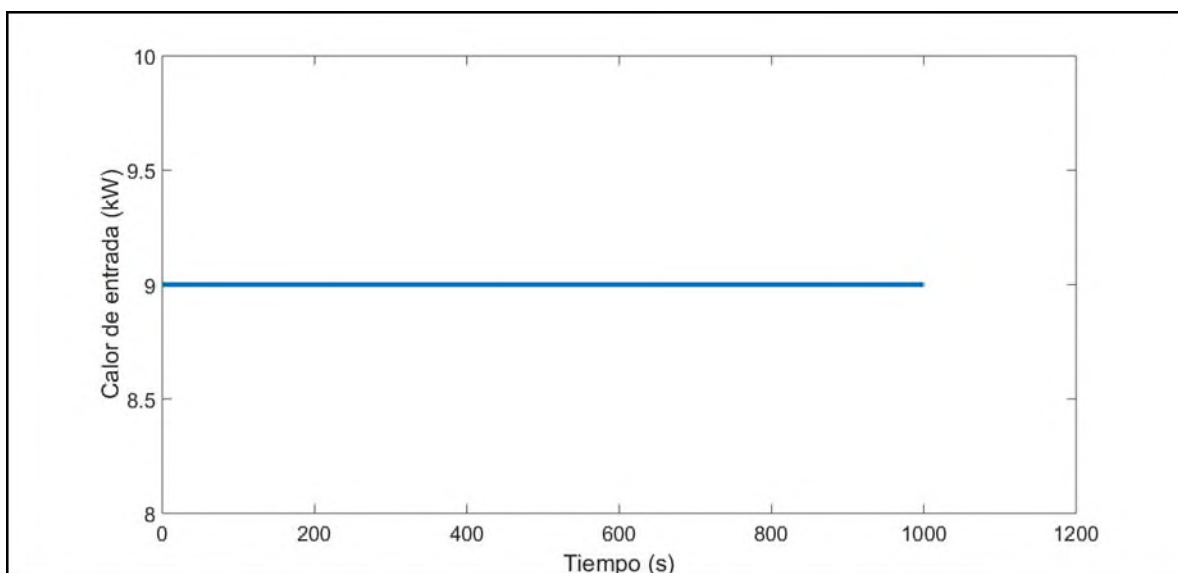


Figura 17. Calor de entrada.

En la Figura 17 se muestra el calor de entrada, el cual se considera que es una entrada al sistema y para la simulación no lineal el valor numérico de este parámetro se considera constante. En esta simulación no es considerada una perturbación en la entrada para este parámetro.

6.2 Sistema linealizado

Para la representación del modelo linealizado son necesarias las matrices de lazo abierto, estas son presentadas en su forma general en el conjunto de Ecuaciones (99) y a continuación se muestran las matrices de lazo abierto específicas para el caso de estudio:

$$A = \begin{bmatrix} -5.82 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 306 \times 10^6 & 0 & 7.56 \times 10^6 \\ 3 \times 10^{-6} & -2.3067 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 7.5 \times 10^{-8} \\ 0 & 6 \times 10^{-6} & -2.30 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 1.5 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 9 \times 10^{-6} & -2.3 \times 10^{-5} & 0 & 2.25 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 & 1.20 \times 10^{-5} & -2.3 \times 10^{-5} & 3 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & -2.79 \times 10^{-6} & 7.14 \times 10^{-6} & 0 & -2.13 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.9495 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9495 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Conjunto de ecuaciones (101)

Teniendo en cuenta el conjunto de Ecuaciones (101) el modelo linealizado se encuentra representado a continuación (conjunto de Ecuaciones (102)):

$$\frac{dx_1}{dt} = -5.82 \times 10^{-5}x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 306 \times 10^6x_4 + 0x_5 + 7.65 \times 10^6x_6 + 0u_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3 \times 10^6x_1 - 2.3067 \times 10^{-5}x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 7.5 \times 10^{-8}x_6 + 0u_1$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0x_1 + 6 \times 10^6x_2 - 2.30 \times 10^{-5}x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1.5 \times 10^{-7}x_6 + 0u_1$$

$$\frac{dx_4}{dt} = 0x_1 + 0x_2 + 9 \times 10^{-6}x_3 - 2.3 \times 10^{-5}x_4 + 0x_5 + 2.25 \times 10^{-7}x_6 + 0u_1$$

$$\frac{dx_5}{dt} = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1.20 \times 10^{-5}x_4 - 2.30 \times 10^{-5}x_5 + 3 \times 10^{-7}x_6 + 0u_1$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_6}{dt} = & 0x_1 + 0x_2 - 2.79 \times 10^{-6}x_3 + 7.14 \times 10^{-6}x_4 + 0x_5 + 7.31 \times 10^{-5}x_6 \\ & + 1.9495 \times 10^{-6}u_1 \end{aligned}$$

Conjunto de ecuaciones (102)

Con el conjunto de Ecuaciones (101) y (102) es posible realizar un análisis preliminar de observabilidad para posteriormente realizar la sintonización de observadores de estado.

6.3 Análisis preliminar de observabilidad

El cristalizador descrito por Mesbah *et al.*, (2011) tiene los siguientes valores propios utilizando la matriz característica A obtenida del conjunto de Ecuaciones (101):

$$Eig(A) = \begin{bmatrix} -2.3 \times 10^{-5} \\ -0.0149 \\ -0.317 \times 10^{-5} + 0.01i \\ -0.317 \times 10^{-5} - 0.01i \\ -0.0149 \\ -0.2321 \times 10^{-5} \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Conforme a los valores propios de la matriz característica algunos de ellos contienen números complejos y otros se encuentran muy cerca de ser inestables (valores positivos). Por esta razón, el sistema tiene una estabilidad general muy sensible ante parámetros de bifurcación que pueden afectar la estabilidad del sistema y por lo tanto el diseño de observadores de estado.

Para poder diseñar cualquier tipo de observador se requiere la matriz de observabilidad para saber cuántos estados pueden ser estimados. Para esto, se requiere la matriz A y la matriz C obtenidas del conjunto de Ecuaciones (101). Utilizando la función “**obsv**” de Matlab® la cual es descrita a continuación:

$$\text{Matriz de observabilidad} = \text{obsv}(A, C) \quad (104)$$

$$\text{Número de estados no observables} = \text{length}(A) - \text{rank}(C) \quad (105)$$

El número de estados no observables para este sistema es cero, por lo tanto, es posible estimar todos los estados del sistema de estudio.

6.4 Resultados para el observador proporcional

Mediante la matriz Est1com del conjunto de Ecuaciones (106), la cual es la matriz del sistema y el observador es posible determinar como parámetro de estabilidad el valor máximo de la parte real de los valores propios de esta matriz como se muestra a continuación:

$$R_1 = A - (k_p)(C), R_2 = E, R_3 = -k_i(C), R_4 = 0_{(1 \times 1)}, \text{Est1com} = [R_1, R_2; R_3, R_4], \text{EigMax} = \max(\text{Re}(\text{eig}(\text{Est1com})))$$

Conjunto de ecuaciones (106)

De la Ecuación (103) se observa que no todos los valores propios de A tienen parte real negativa, por lo tanto, este sistema es inestable. La colocación de polos debe de tener la característica de estabilidad, de tal modo que los polos elegidos deben tener una parte real negativa para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, así que la primera aproximación que se consideró con los siguientes polos:

$$Polos = \begin{bmatrix} -0.230 \\ -0.014 \\ -0.317 + 0.01i \\ -0.317 - 0.01i \\ -0.014 \\ -0.232 \end{bmatrix} \quad (107)$$

A partir de los valores mostrados en la Ecuación (107) se realizan variaciones del 5% hasta el 100% de su valor tendiendo hacia una zona con mayor estabilidad. Esta variación se muestra de manera más detallada en la Tabla 4 variación de los valores propios a partir de la Ecuación (107).

De la misma manera en la Tabla 5 valores de EigMax se muestra los valores de EigMax obtenidos con cada variación de los valores mostrados en la Ecuación (107).

Porcentaje	Polos					
0	-0.23	-0.014	-0.317+0.01i	-0.317-0.01i	-0.014	-0.232
5	-0.2415	-0.0147	-0.3329 + 0.0105i	-0.3329 - 0.0105i	-0.0147	-0.2436
10	-0.2530	-0.0154	-0.3487 + 0.0110i	-0.3487 - 0.0110i	-0.0154	-0.2552
15	-0.2645	-0.0161	-0.3645 + 0.0115i	-0.3645 - 0.0115i	-0.0161	-0.2668
20	-0.2760	-0.0168	-0.3804 + 0.0120i	-0.3804 - 0.0120i	-0.0168	-0.2784
25	-0.2875	-0.0175	-0.3962 + 0.0125i	-0.3962 - 0.0125i	-0.0175	-0.2900
30	-0.2990	-0.0182	-0.4121 + 0.0130i	-0.4121 - 0.0130i	-0.0182	-0.3016
35	-0.3105	-0.0189	-0.4280 + 0.0135i	-0.4280 - 0.0135i	-0.0189	-0.3132
40	-0.3220	-0.0196	-0.4438 + 0.0140i	-0.4438 - 0.0140i	-0.0196	-0.3248
45	-0.3335	-0.0203	-0.4597 + 0.0145i	-0.4597 - 0.0145i	-0.0203	-0.3364
50	-0.3450	-0.0210	-0.4755 + 0.0150i	-0.4755 - 0.0150i	-0.0210	-0.3480
55	-0.3565	-0.0217	-0.4914 + 0.0155i	-0.4914 - 0.0155i	-0.0217	-0.3596
60	-0.3680	-0.0224	-0.5073 + 0.0160i	-0.5073 - 0.0160i	-0.0224	-0.3712
65	-0.3795	-0.0231	-0.5232 + 0.0165i	-0.5232 - 0.0165i	-0.0231	-0.3828
70	-0.3910	-0.0238	-0.5391 + 0.0170i	-0.5391 - 0.0170i	-0.0238	-0.3944
75	-0.4025	-0.0245	-0.5549 + 0.0175i	-0.5549 - 0.0175i	-0.0245	-0.4060
80	-0.4140	-0.0252	-0.5708 + 0.0180i	-0.5708 - 0.0180i	-0.0252	-0.4176
85	-0.4255	-0.0259	-0.5866 + 0.0185i	-0.5866 - 0.0185i	-0.0259	-0.4292
90	-0.4370	-0.0266	-0.6025 + 0.0190i	-0.6025 - 0.0190i	-0.0266	-0.4408
95	-0.4485	-0.0273	-0.6184 + 0.0195i	-0.6184 - 0.0195i	-0.0273	-0.4524
100	-0.4600	-0.028	-0.6343 + 0.0200i	-0.6343 - 0.0200i	-0.0280	-0.4640

Tabla 4. Variación de los valores propios a partir de la Ecuación (107).

Porcentaje	EigMax
0	-0.014
5	-0.0147
10	-0.0154
15	-0.0161
20	-0.0168
25	-0.0175
30	-0.0182
35	-0.0189
40	-0.0196
45	-0.0203
50	-0.021
55	-0.0217
60	-0.0224
65	-0.0231
70	-0.0238
75	-0.0245
80	-0.0252
85	-0.0259
90	-0.0266
95	-0.0273
100	-0.028

Tabla 5. Valores de EigMax con respecto a la variación de los valores de la ecuación (107).

En la Figura 18 se muestran los valores de la Tabla 5 graficados.

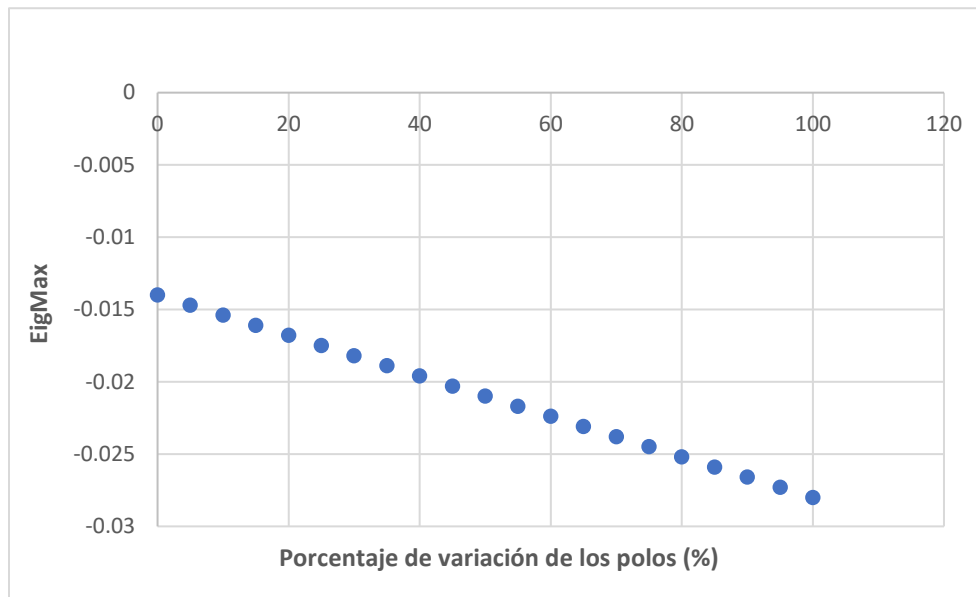


Figura 18. Variación del valor máximo del observador proporcional (EigMax).

La figura 18 muestra como al decrementar el valor numérico de los valores propios de la Ecuación (107) con un tamaño de paso del 5% hasta llegar a una variación del 100% se observa que la estabilidad es directamente proporcional a la variación, esto es demostrado por la disminución del valor máximo (EigMax)

Conforme a la Tabla 4 Variación de los valores propios a partir de la Ecuación (107), se obtuvieron 21 observadores proporcionales que pueden ser aplicados al sistema y todos ellos tienen la misma estructura proporcional variando únicamente en sus ganancias (K_e) (las ganancias del sistema se pueden consultar en la sección de Anexos). Se realizó la simulación numérica de estos observadores mediante el *software* Matlab®. De manera representativa, se muestra (conjunto de Ecuaciones (108)) la estructura del observador que se obtiene a partir de 0% de la variación de la matriz polos (renglón 1, tabla 4).

La representación general de un observador proporcional está dada por la Ecuación (66).

La representación específica del observador obtenido con la variación del 0% de la matriz polos se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = & -5.82 \times 10^{-5}\tilde{x}_1 + 0\tilde{x}_2 + 0\tilde{x}_3 + 306 \times 10^6\tilde{x}_4 + 0\tilde{x}_5 + 7.65 \times 10^6\tilde{x}_6 + 0u_1 \\ & + 0.3169(x_1 - \tilde{x}_1) - 0.01(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 306 \times 10^6(x_4 - \tilde{x}_4) \\ & + 0(x_5 - \tilde{x}_5) + 765 \times 10^4(x_6 - \tilde{x}_6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_2}{dt} = & 3 \times 10^6\tilde{x}_1 - 2.3067 \times 10^{-5}\tilde{x}_2 + 0\tilde{x}_3 + 0\tilde{x}_4 + 0\tilde{x}_5 + 7.5 \times 10^{-8}\tilde{x}_6 + 0u_1 \\ & + 0.01(x_1 - \tilde{x}_1) + 0.3169(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 0(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) \\ & + 7.5 \times 10^{-8}(x_6 - \tilde{x}_6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_3}{dt} = & 0\tilde{x}_1 + 6 \times 10^6\tilde{x}_2 - 2.30 \times 10^{-5}\tilde{x}_3 + 0\tilde{x}_4 + 0\tilde{x}_5 + 1.5 \times 10^{-7}\tilde{x}_6 + 0u_1 + 0(x_1 - \tilde{x}_1) \\ & + 6 \times 10^{-6}(x_2 - \tilde{x}_2) + 0.2299(x_3 - \tilde{x}_3) + 0(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) \\ & + 1.5 \times 10^{-7}(x_6 - \tilde{x}_6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_4}{dt} = & 0x_1 + 0x_2 + 9 \times 10^{-6}x_3 - 2.3 \times 10^{-5}x_4 + 0x_5 + 2.25 \times 10^{-7}x_6 + 0u_1 + 0(x_1 - \tilde{x}_1) \\ & + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 9 \times 10^{-6}(x_3 - \tilde{x}_3) + 0.0139(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) \\ & + 2.25 \times 10^{-7}(x_6 - \tilde{x}_6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_5}{dt} = & 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1.20 \times 10^{-5}x_4 - 2.30 \times 10^{-5}x_5 + 3 \times 10^{-7}x_6 + 0u_1 + 0(x_1 - \tilde{x}_1) \\ & + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 1.2 \times 10^{-5}(x_4 - \tilde{x}_4) + 0.0139(x_5 - \tilde{x}_5) \\ & + 3 \times 10^{-7}(x_6 - \tilde{x}_6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_6}{dt} = & 0x_1 + 0x_2 - 2.79 \times 10^{-6}x_3 + 7.14 \times 10^{-6}x_4 + 0x_5 + 7.31 \times 10^{-5}x_6 \\ & + 1.9495 \times 10^{-6}u_1 + (x_1 - \tilde{x}_1) + 0(x_2 - \tilde{x}_2) - 2.79 \times 10^{-6}(x_3 - \tilde{x}_3) \\ & + 7.14 \times 10^{-6}(x_4 - \tilde{x}_4) + (x_5 - \tilde{x}_5) + 0.2319(x_6 - \tilde{x}_6)\end{aligned}$$

Conjunto de ecuaciones (108)

La simulación numérica se realizó en dominio del tiempo que va desde 0 s hasta 1000 s. Para las ecuaciones que corresponden al observador proporcional (descrito por el conjunto de Ecuaciones 108) con una condición inicial para todos los estados estimados de 0.0001. La condición inicial elegida para el observador se considera que es adecuada, ya que físicamente los momentos desde el 0 hasta el 4 tienen órdenes de magnitud más pequeños (Carrillo, 2006).

A continuación, se muestran los resultados de la simulación numérica realizada:

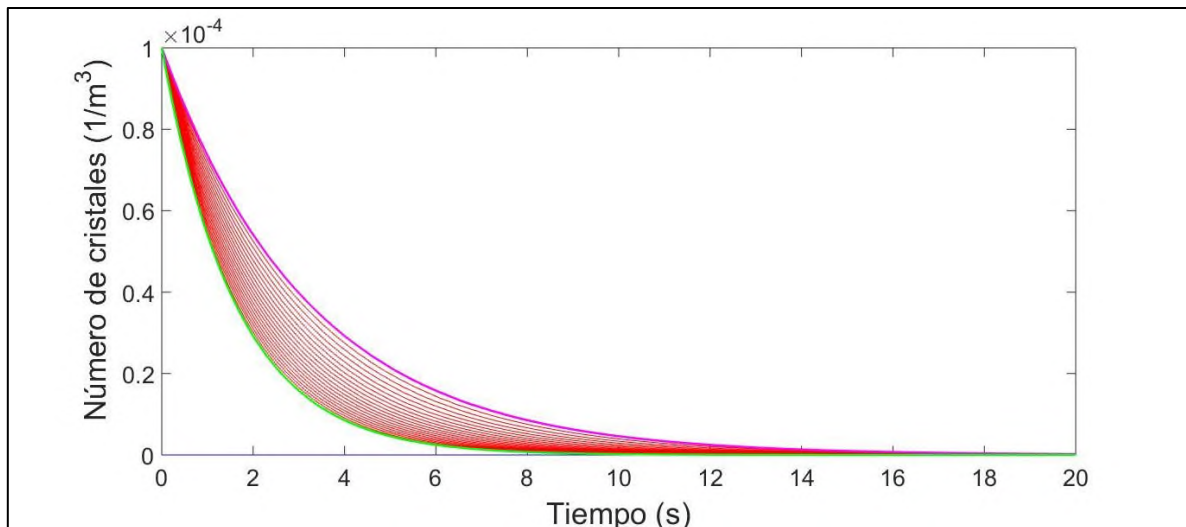


Figura 19. Número de cristales.

En la Figura 19, se muestra el primer estado que representa al número de cristales estimado por el observador proporcional. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa al estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con valores originales de la matriz polos, con un tiempo de estabilización de 16 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100 %, con un tiempo de estabilización de 10 s. Con todas las ganancias del observador la respuesta, es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto, ni oscilación. Por lo tanto, se puede decir que en este estado estimado el observador con las ganancias obtenido por los polos modificados al 100% es el que proporciona el mejor desempeño.

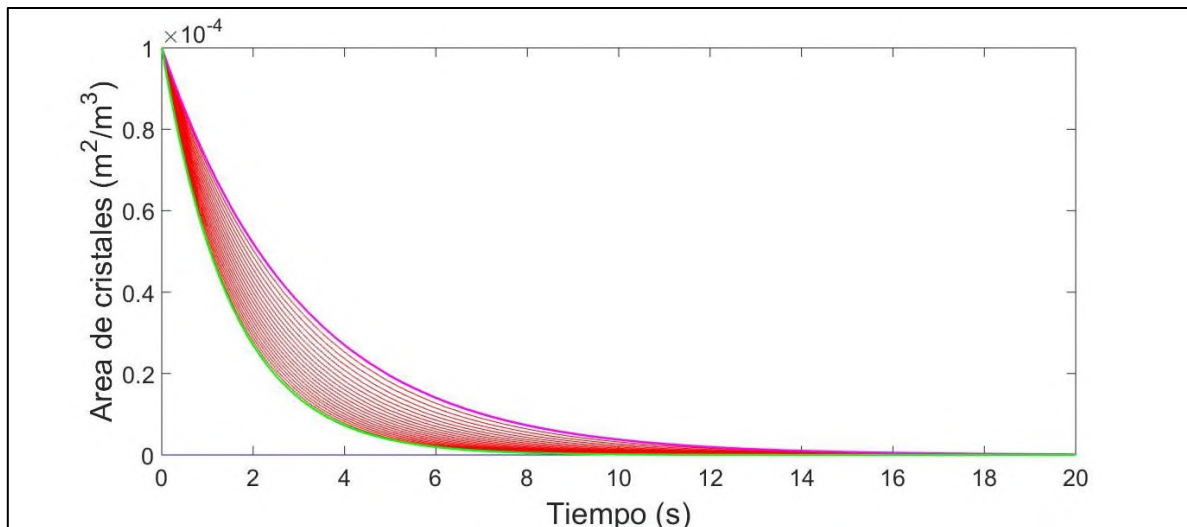


Figura 20. Área de cristales.

En la Figura 20, se muestra el segundo estado que representa el área superficial de los cristales estimada por el observador proporcional. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación con los valores originales de la matriz polos. La línea color azul representa al estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con los polos iniciales del sistema, con un tiempo de estabilización de 15 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100 %, con un tiempo de estabilización de 10 s. Con todas las ganancias del observador, la respuesta es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto ni oscilación. Por lo tanto, se puede decir que en este estado estimado el observador con las ganancias obtenido por los polos modificados al 100% es la que proporciona el mejor desempeño.

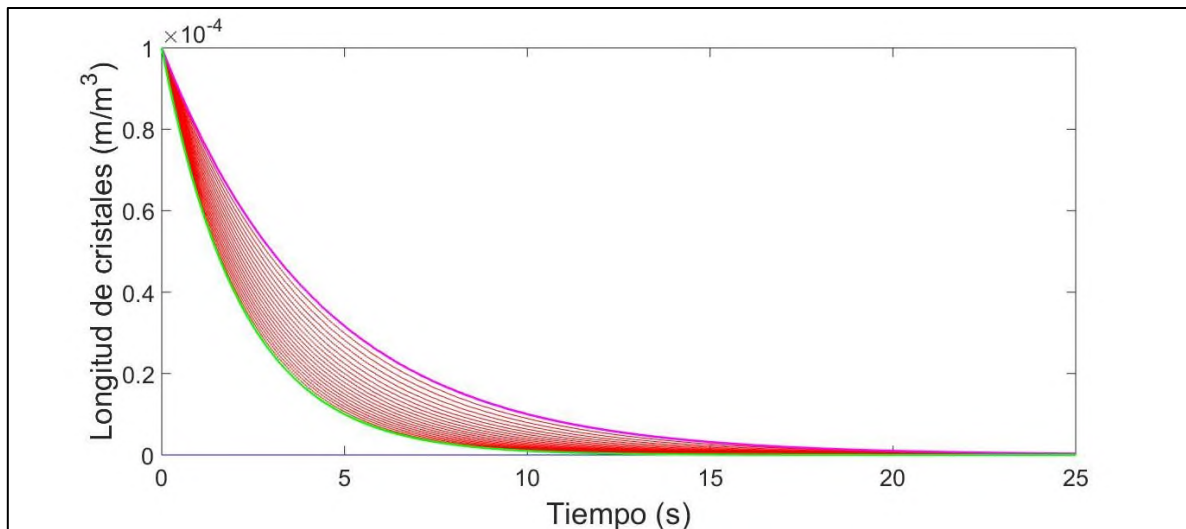


Figura 21. Longitud de cristales.

En la Figura 21, se muestra el tercer estado el cual representa la longitud de los cristales estimada por el observador proporcional. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa al estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con valores originales de la matriz polos, con un tiempo de estabilización de 20 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100 %, con un tiempo de estabilización de 15 s. Con todas las ganancias del observador se observa que la respuesta es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto, ni oscilación. Por lo tanto, se puede decir que en este estado estimado el observador con las ganancias obtenido por los polos modificados al 100% es la que proporciona el mejor desempeño.

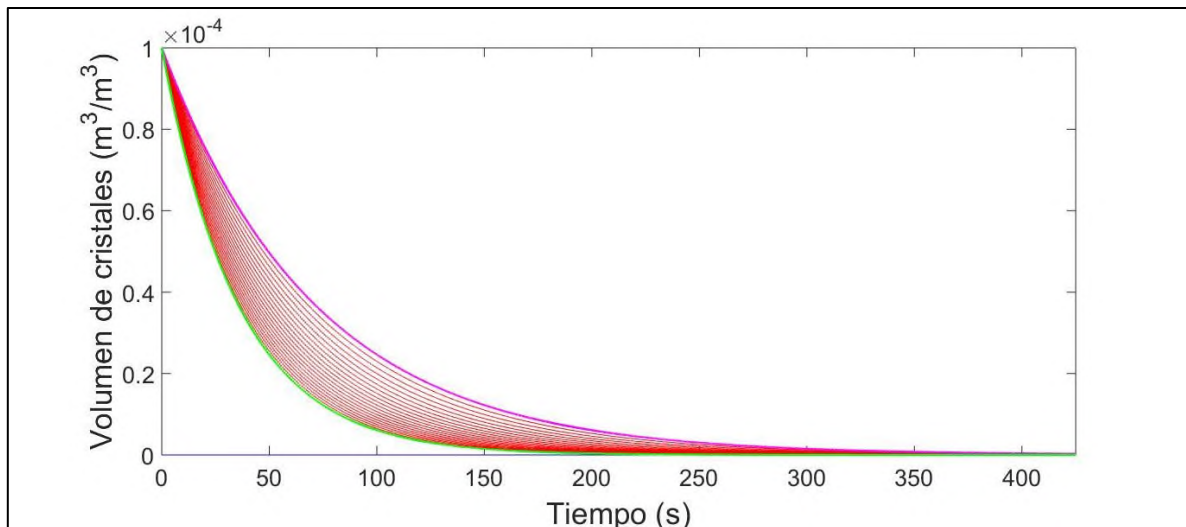


Figura 22. Volumen de cristales.

En la Figura 22, se muestra el cuarto estado el cual representa el volumen de cristales estimado por el observador proporcional. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa al estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con valores originales de la matriz polos, con un tiempo de estabilización de 350 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100 %, con un tiempo de estabilización de 20 s. Con todas las ganancias del observador se observa que la respuesta es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto, ni oscilación. Por lo tanto, se puede decir que en este estado estimado el observador con las ganancias obtenido por los polos modificados al 100% es la que proporciona el mejor desempeño.

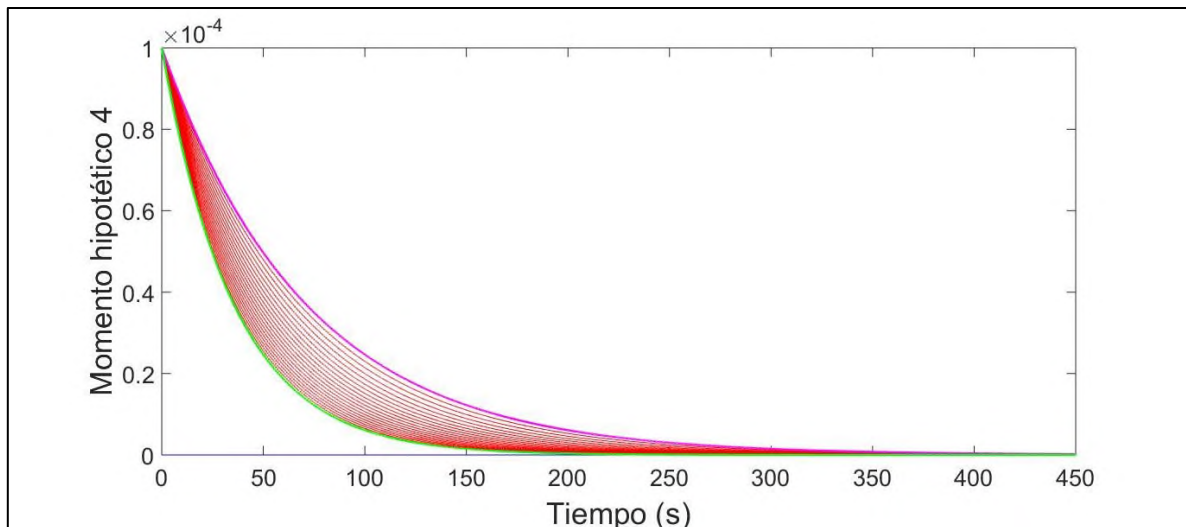


Figura 23. Momento hipotético 4.

En la Figura 23, se muestra el quinto estado el cual representa el momento hipotético número 4 estimado por el observador proporcional. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa al estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con valores originales de la matriz polos, con un tiempo de estabilización de 350 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100 %, con un tiempo de estabilización de 200 s. Con todas las ganancias del observador se observa que la respuesta es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto, ni oscilación. Por lo tanto, se puede decir que en este estado estimado el observador con las ganancias obtenido por los polos modificados al 100% es la que proporciona el mejor desempeño.

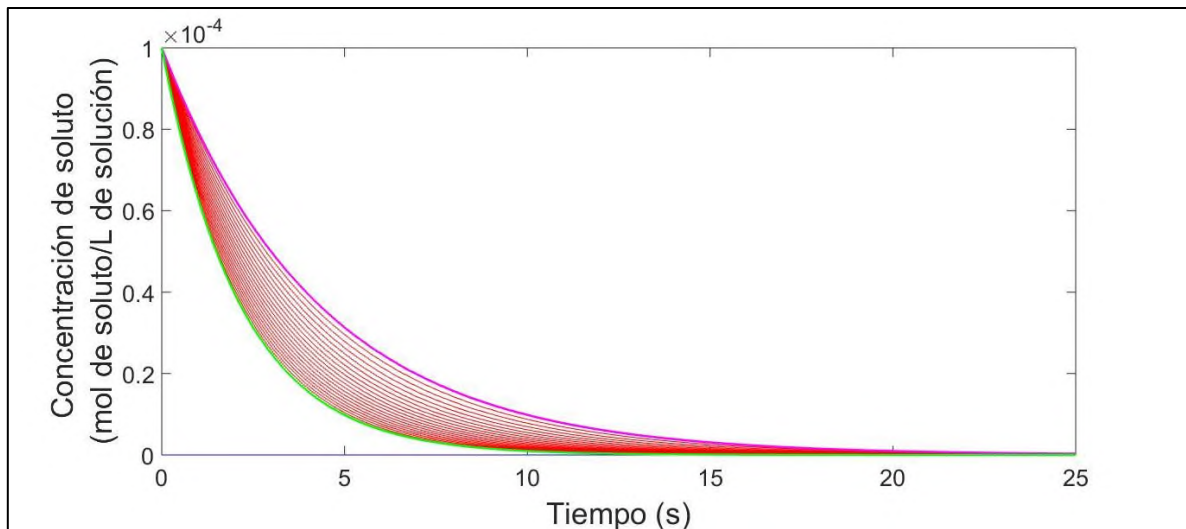


Figura 24. Concentración de soluto.

En la Figura 24, se muestra el quinto estado el cual representa la concentración del soluto estimada por el observador proporcional. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa al estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con valores originales de la matriz polos, con un tiempo de estabilización de 20 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100 %, con un tiempo de estabilización de 15 s. Con todas las ganancias del observador se observa que la respuesta es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto, ni oscilación. Por lo tanto, se puede decir que en este estado estimado el observador con las ganancias obtenido por los polos modificados al 100% es la que proporciona el mejor desempeño.

La tabla 6, muestra el valor máximo y mínimo de la métrica (Ecuación (100)) para cada estado estimado y su correspondiente variación de polos. Con estos datos es posible determinar el mejor desempeño al momento de la simulación, lo cual es complementario a la estabilidad del sistema mostrado en la Figura 18.

Estado	Máximo	% Polos	Mínimo	% Polos	Desviación	Media
\tilde{x}_1	0.00330171	0	0.00167619	100	0.00049274	0.00231295
\tilde{x}_2	0.0031029	0	0.00157696	100	0.00046262	0.00217467
\tilde{x}_3	0.00439762	0	0.00222428	100	0.00065891	0.00307629
\tilde{x}_4	0.07147871	0	0.03576446	100	0.01082603	0.04976458
\tilde{x}_5	0.07147871	0	0.03576446	100	0.01082603	0.04976458
\tilde{x}_6	0.00436046	0	0.00220539	100	0.00065321	0.0030503

Tabla 6. Métricas del observador proporcional (P).

Conforme a la tabla 5, el orden de los estados que tienen mayor convergencia es:

$$\tilde{x}_2 > \tilde{x}_1 > \tilde{x}_6 > \tilde{x}_3 > \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5$$

6.5 Resultados para el observador proporcional integral

Mediante la matriz Est1com (conjunto de Ecuaciones (109)), la cual es la matriz del sistema y el observador es posible determinar como parámetro de estabilidad el valor máximo de la parte real de los valores propios de esta matriz como se muestra a continuación:

$$R_1 = A - k_p(C), R_2 = E, R_3 = -k_i(C), R_4 = 0_{(1 \times 1)}, Est1com = [R_1, R_2; R_3, R_4], EigMax = \max(Re(eig(Est1com)))$$

Conjunto de ecuaciones (109)

Los valores propios de la matriz característica de la matriz en lazo abierto (A) son los siguientes:

$$Eig(A) = \begin{bmatrix} -2.3 \times 10^{-5} \\ -0.0149 \\ -0.317 \times 10^{-5} + 0.01i \\ -0.317 \times 10^{-5} - 0.01i \\ -0.0149 \\ -0.2321 \times 10^{-5} \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad (110)$$

Se observa que no todos los valores propios de A tienen parte real negativa, por lo tanto, este sistema es inestable. La colocación de polos debe de tener la característica de estabilidad, por lo tanto, los polos elegidos deben tener la parte real negativa para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, por lo tanto, la primera aproximación que se considera son los siguientes polos:

$$Polos = \begin{bmatrix} -0.230 \\ -0.014 \\ -0.317 + 0.01i \\ -0.317 - 0.01i \\ -0.014 \\ -0.232 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad (111)$$

A partir de los valores mostrados en la Ecuación (111) se realizan variaciones del 5% hasta el 100% de su valor tendiendo hacia una zona con mayor estabilidad. Esta variación se muestra de manera más detallada en la Tabla 7 variación de los valores propios a partir de la Ecuación (111).

De la misma manera en la Tabla 8 valores de EigMax se muestra los valores de EigMax obtenidos con cada variación de los valores mostrados en la Ecuación (111).

Porcentaje	Polos						
0	-0.230	-0.14	-0.317+0.01i	-0.317-0.01i	-0.15	-0.232	-0.5
5	-0.2415	-0.0147	-0.3329 + 0.0105i	-0.3329 - 0.0105i	-0.0147	-0.2436	-0.5250
10	-0.2530	-0.0154	-0.3487 + 0.0110i	-0.3487 - 0.0110i	-0.0154	-0.2552	-0.5500
15	-0.2645	-0.0161	-0.3645+ 0.0115i	-0.3645 - 0.0115i	-0.0161	-0.2668	-0.5750
20	-0.2760	-0.0168	-0.3804 + 0.0120i	-0.3804 - 0.0120i	-0.0168	-0.2784	-0.6000
25	-0.2875	-0.0175	-0.3962 + 0.0125i	-0.3962 - 0.0125i	-0.0175	-0.2900	-0.6250
30	-0.2990	-0.0182	-0.4121 + 0.0130i	-0.4121 - 0.0130i	-0.0182	-0.3016	-0.6500
35	-0.3105	-0.0189	-0.4280 + 0.0135i	-0.4280 - 0.0135i	-0.0189	-0.3132	-0.6750
40	-0.3220	-0.0196	-0.4438 + 0.0140i	-0.4438 - 0.0140i	-0.0196	-0.3248	-0.7000
45	-0.3335	-0.0203	-0.4597 + 0.0145i	-0.4597 - 0.0145i	-0.0203	-0.3364	-0.7250
50	-0.3450	-0.0210	-0.4755 + 0.0150i	-0.4755 - 0.0150i	-0.0210	-0.3480	-0.7500
55	-0.3565	-0.0217	-0.4914 + 0.0155i	-0.4914 - 0.0155i	-0.0217	-0.3596	-0.7750
60	-0.3680	-0.0224	-0.5072 + 0.0160i	-0.5072 - 0.0160i	-0.0224	-0.3712	-0.8000
65	-0.3795	-0.0231	-0.5231 + 0.0165i	-0.5231 - 0.0165i	-0.0231	-0.3828	-0.8250
70	-0.3910	-0.0238	-0.5389 + 0.0170i	-0.5389 - 0.0170i	-0.0238	-0.3944	-0.8500
75	-0.4025	-0.0245	-0.5547 + 0.0175i	-0.5547 - 0.0175i	-0.0245	-0.4060	-0.8750
80	-0.4140	-0.0252	-0.5706 + 0.0180i	-0.5706 - 0.0180i	-0.0252	-0.4176	-0.9000
85	-0.4255	-0.0259	-0.5865 + 0.0185i	-0.5865 - 0.0185i	-0.0259	-0.4292	-0.9250
90	-0.4370	-0.0266	-0.6023 + 0.0190i	-0.6023 - 0.0190i	-0.0266	-0.4408	-0.9500
95	-0.4485	-0.0273	-0.6181 + 0.0195i	-0.6181 - 0.0195i	-0.0273	-0.4524	-0.9750
100	-0.4600	-0.0280	-0.6340 + 0.0200i	-0.6340 - 0.0200i	-0.0280	-0.4640	-1.0000

Tabla 7. Variación de los valores propios a partir de la Ecuación (111).

Porcentaje	EigMax
0	-0.014
5	-0.0147
10	-0.0154
15	-0.0161
20	-0.0168
25	-0.0175
30	-0.0182
35	-0.0189
40	-0.0196
45	-0.0203
50	-0.021
55	-0.0217
60	-0.0224
65	-0.0231
70	-0.0238
75	-0.0245
80	-0.0252
85	-0.0259
90	-0.0266
95	-0.0273
100	-0.028

Tabla 8. Valores de EigMax con respecto a la variación de los valores de la ecuación (111).

En la Figura 25 se muestran los valores de la Tabla 8 graficados.

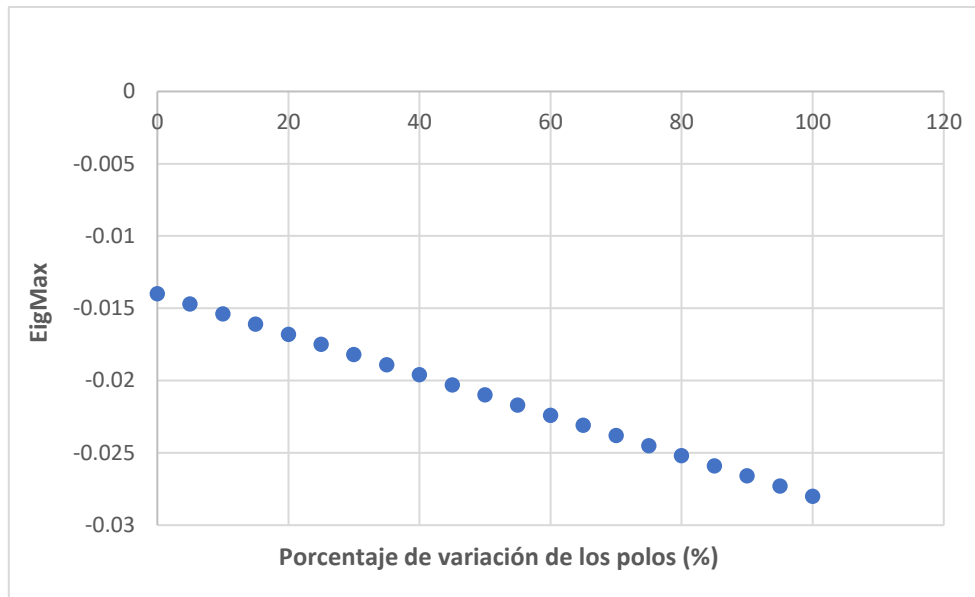


Figura 25. Variación del valor máximo del observador proporcional integral (EigMax).

La figura 25 muestra como al decrementar el valor numérico de los valores propios de la Ecuación (107) con un tamaño de paso del 5% hasta llegar a una variación del 100% se observa que la estabilidad es directamente proporcional a la variación, esto es demostrado por la disminución del valor máximo (EigMax).

Conforme a la Tabla 7 Variación de los valores propios a partir de la Ecuación (111), se obtuvieron 21 observadores proporcionales-integrales que pueden ser aplicados al sistema y todos ellos tienen la misma estructura proporcional variando únicamente en sus ganancias (K_e) (las ganancias del sistema se pueden consultar en la sección de Anexos). Se realizó la simulación numérica de estos observadores mediante el *software* Matlab®. De manera representativa, se muestra (conjunto de Ecuaciones (108)) la estructura del observador que se obtiene a partir de 0% de la variación de la matriz polos (renglón 1, tabla 4).

La representación general de un observador proporcional está dada por la Ecuación (70).

La representación específica del observador obtenido con la variación del 0% de la matriz polos se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = & -5.82 \times 10^{-5}\tilde{x}_1 + 0\tilde{x}_2 + 0\tilde{x}_3 + 3.06 \times 10^8\tilde{x}_4 + 0\tilde{x}_5 + 7.65 \times 10^6\tilde{x}_6 + 0u_1 \\ & - 3.12 \times 10^{-1}(x_1 - \tilde{x}_1) + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 0(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) \\ & - 1.13 \times 10^{-3}(x_6 - \tilde{x}_6) + 0(x_7 - \tilde{x}_7) + K_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_2}{dt} = & 3 \times 10^6\tilde{x}_1 - 2.3067 \times 10^{-5}\tilde{x}_2 + 0\tilde{x}_3 + 0\tilde{x}_4 + 0\tilde{x}_5 + 7.5 \times 10^{-8}\tilde{x}_6 + 0u_1 + 0(x_1 - \tilde{x}_1) \\ & - 5 \times 10^{-1}(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 0(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) + 0(x_6 - \tilde{x}_6) \\ & + 0(x_7 - \tilde{x}_7) + K_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_3}{dt} = & 0\tilde{x}_1 + 6 \times 10^6\tilde{x}_2 - 2.30 \times 10^{-5}\tilde{x}_3 + 0\tilde{x}_4 + 0\tilde{x}_5 + 1.5 \times 10^{-7}\tilde{x}_6 + 0u_1 + 0(x_1 - \tilde{x}_1) \\ & + 0(x_2 - \tilde{x}_2) - 1.4 \times 10^{-2}(x_3 - \tilde{x}_3) + 0(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) + 0(x_6 - \tilde{x}_6) \\ & + 0(x_7 - \tilde{x}_7) + K_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_4}{dt} = & 0x_1 + 0x_2 + 9 \times 10^{-6}x_3 - 2.3 \times 10^{-5}x_4 + 0x_5 + 2.25 \times 10^{-7}x_6 + 0u_1 + 0(x_1 - \tilde{x}_1) \\ & + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) - 1.4 \times 10^{-2}(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) + 0(x_6 - \tilde{x}_6) \\ & + 0(x_7 - \tilde{x}_7) + K_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_5}{dt} = & 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1.20 \times 10^{-5}x_4 - 2.30 \times 10^{-5}x_5 + 3 \times 10^{-7}x_6 + 0u_1 + 0(x_1 - \tilde{x}_1) \\ & + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 0(x_4 - \tilde{x}_4) - 2.3 \times 10^{-1}(x_5 - \tilde{x}_5) + 0(x_6 - \tilde{x}_6) \\ & + 0(x_7 - \tilde{x}_7) + K_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_6}{dt} = & 0x_1 + 0x_2 - 2.79 \times 10^{-6}x_3 + 7.14 \times 10^{-6}x_4 + 0x_5 + 7.31 \times 10^{-5}x_6 \\ & + 1.9495 \times 10^{-6}u_1 - 4.34 \times 10^{-1}(x_1 - \tilde{x}_1) + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) \\ & + 0(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) - 5.54 \times 10^{-1}(x_6 - \tilde{x}_6) \\ & + 1.95 \times 10^{-6}(x_7 - \tilde{x}_7) + K_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_7}{dt} = & -7.41 \times 10^4(x_1 - \tilde{x}_1) + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 0(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) \\ & - 3.87 \times 10^4(x_6 - \tilde{x}_6) + 0(x_7 - \tilde{x}_7) + K_7\end{aligned}$$

Conjunto de ecuaciones (112)

$$K_1 = 3.12 \times 10^{-1}(x_1 - \tilde{x}_1) + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 3.06 \times 10^8(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) \\ + 7.65 \times 10^6(x_6 - \tilde{x}_6)$$

$$K_2 = 3 \times 10^6(x_1 - \tilde{x}_1) + 5 \times 10^{-1}(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 0(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) \\ + 7.5 \times 10^{-8}(x_6 - \tilde{x}_6)$$

$$K_3 = 0(x_1 - \tilde{x}_1) + 6 \times 10^{-6}(x_2 - \tilde{x}_2) + 1.4 \times 10^{-2}(x_3 - \tilde{x}_3) + 0(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) \\ + 1.5 \times 10^{-7}(x_6 - \tilde{x}_6)$$

$$K_4 = 0(x_1 - \tilde{x}_1) + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 9 \times 10^{-6}(x_3 - \tilde{x}_3) + 1.4 \times 10^{-2}(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) \\ + 2.25 \times 10^{-7}(x_6 - \tilde{x}_6)$$

$$K_5 = 0(x_1 - \tilde{x}_1) + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 1.2 \times 10^{-5}(x_4 - \tilde{x}_4) + 2.3 \times 10^{-1}(x_5 - \tilde{x}_5) \\ + 3 \times 10^{-7}(x_6 - \tilde{x}_6)$$

$$K_6 = 4.34 \times 10^{-1}(x_1 - \tilde{x}_1) + 0(x_2 - \tilde{x}_2) - 2.79 \times 10^{-6}(x_3 - \tilde{x}_3) + 7.14 \times 10^{-6}(x_4 - \tilde{x}_4) \\ + 0(x_5 - \tilde{x}_5) + 5.54 \times 10^{-1}(x_6 - \tilde{x}_6)$$

$$K_7 = 7.41 \times 10^4(x_1 - \tilde{x}_1) + 0(x_2 - \tilde{x}_2) + 0(x_3 - \tilde{x}_3) + 0(x_4 - \tilde{x}_4) + 0(x_5 - \tilde{x}_5) \\ + 3.87 \times 10^4(x_6 - \tilde{x}_6)$$

Conjunto de ecuaciones (113)

La simulación numérica se realizó en dominio del tiempo que va desde 0 s hasta 1000 s. Para las ecuaciones que corresponden al observador proporcional-integral (descrito por el conjunto de Ecuaciones 112 y 113) con una condición inicial para todos los estados estimados de 0.0001. La condición inicial elegida para el observador se considera que es adecuada, ya que físicamente los momentos desde el 0 hasta el 4 tienen órdenes de magnitud más pequeños (Carrillo, 2006).

A continuación, se muestran los resultados de la simulación numérica realizada:

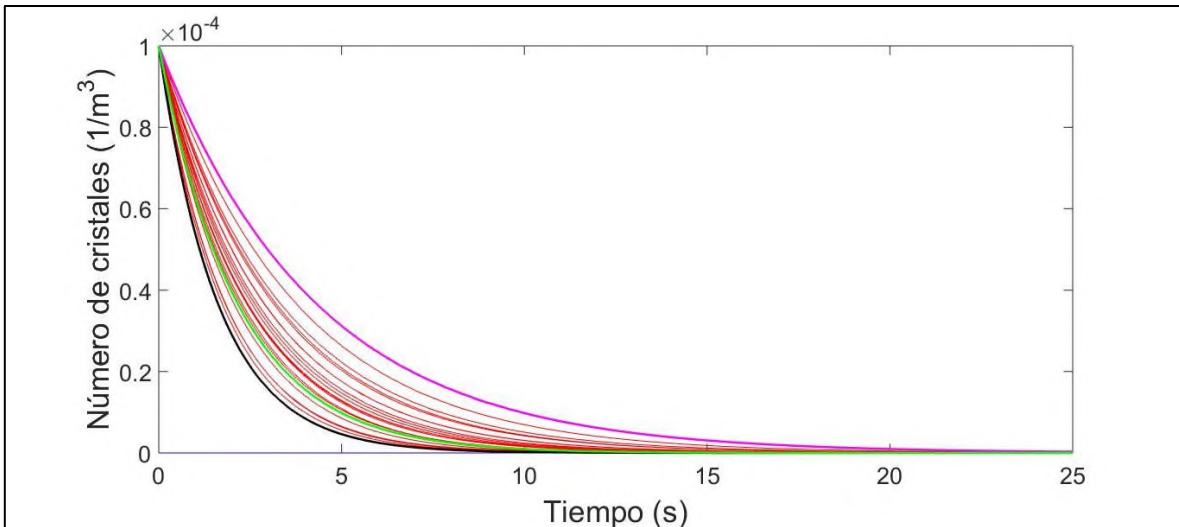


Figura 26. Número de cristales.

En la Figura 26, se muestra el primer estado el cual representa el número de cristales estimado por el observador proporcional integral. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa el estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con los polos iniciales del sistema, con un tiempo de estabilización de 20 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100%. La línea de color negro representa una variación de polos del 95% y un tiempo de asentamiento de 10 s, siendo este observador el que muestra el mejor desempeño en este estado en específico. Con todas las ganancias del observador, la respuesta es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto ni oscilación. Para evaluar este comportamiento se realizó una evaluación del desempeño de cada trayectoria para este estado en específico mediante la métrica mostrada en la Ecuación (100) y los resultados de esta son mostrados en la Figura 27.

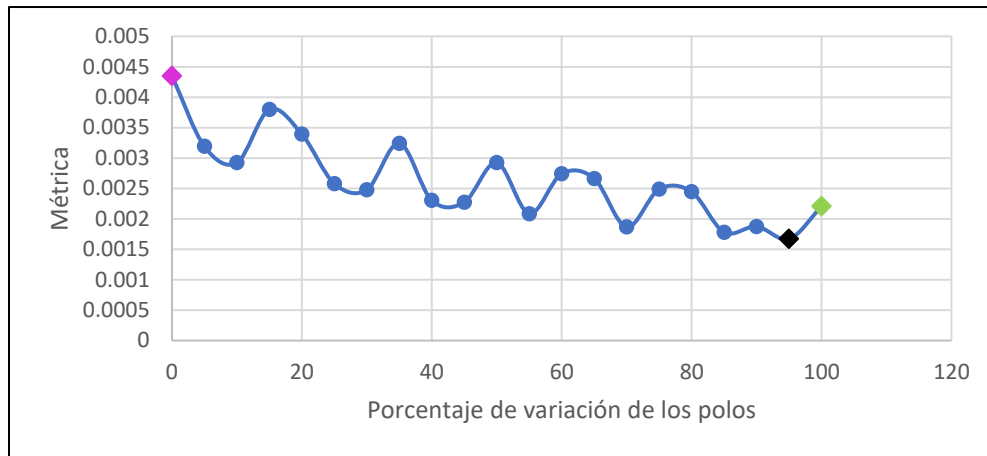


Figura 27. Desempeño de los observadores con respecto a la variación de polos.

Conforme la Figura 26 y la Figura 27, se muestra que la trayectoria que tiene la mayor estabilidad no necesariamente es el que tiene el mejor desempeño esto se debe al criterio de sintonización de los observadores, el cual establece la estabilidad global de sistema, aunque para ello implique sacrificar el desempeño en algún estado, como sucede en el estado del número de cristales. En la figura 27, el estado con una variación de polos del 95% (punto de color negro) es el que tiene el mejor desempeño, mientras que la variación del 100% es representada por el punto color verde de la figura 27.

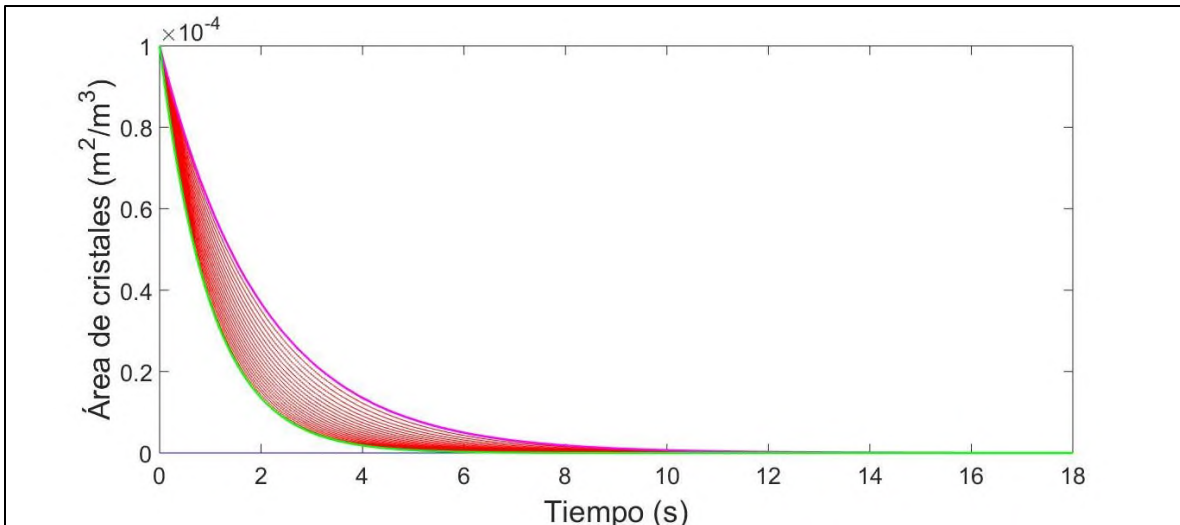


Figura 28. Área superficial de cristales.

En la Figura 28 se muestra el segundo estado, el cual representa el área de cristales estimada por el observador proporcional integral. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa el estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con los polos iniciales del sistema, con un tiempo de estabilización de 10 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100 %, con un tiempo de estabilización de 6 s, siendo este un tiempo menor que el que el observador proporcional necesitó. Con todas las ganancias del observador se observa que la respuesta es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto, ni oscilación. Por lo tanto, se puede decir que en este estado estimado el observador con las ganancias obtenidas por los polos modificados al 100% es el que presenta un mejor desempeño.

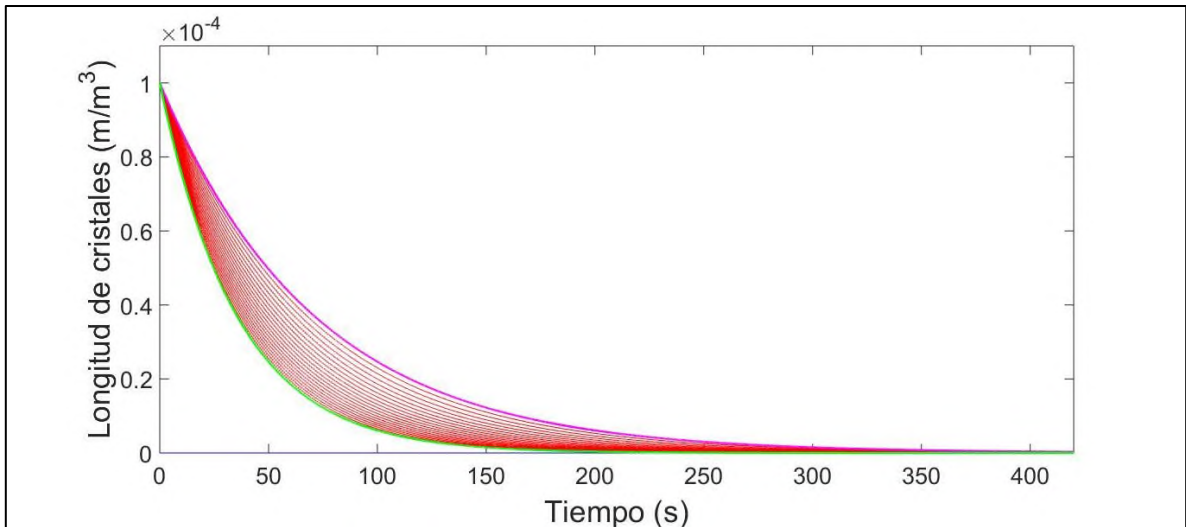


Figura 29. Longitud de cristales.

En la Figura 29 se muestra el tercer estado, el cual representa la longitud de cristales estimada por el observador proporcional integral. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa el color original. La línea de color magenta representa el estado estimado con los polos iniciales del sistema, con un tiempo de estabilización de 350 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100 %, con un tiempo de 200 s. Con todas las ganancias del observador se observa que la respuesta es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto, ni oscilación. Por lo tanto, se puede decir que en este estado estimado el observador con las ganancias obtenido por los polos modificados al 100% es el que presenta un mejor desempeño.

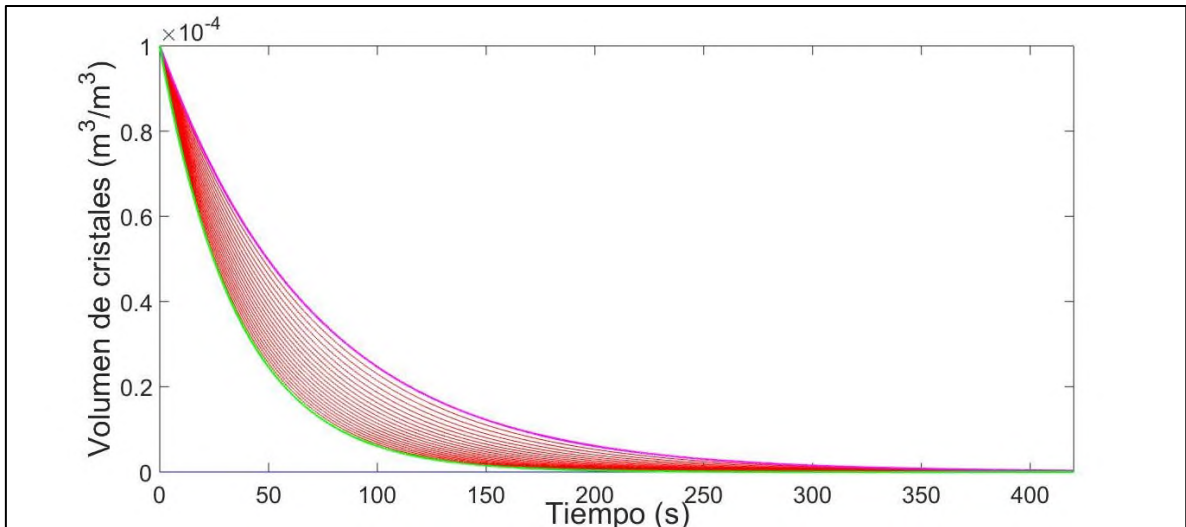


Figura 30. Volumen de cristales.

En la Figura 30 se muestra el cuarto estado, el cual representa el volumen de los cristales estimado por el observador proporcional integral. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa el estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con los polos iniciales del sistema, con un tiempo de estabilización de 350 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100 %, con un tiempo de estabilización de 350 s, semejante al estado estimado por el observador proporcional. Con todas las ganancias del observador se observa que la respuesta es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto, ni oscilación. Por lo tanto, se puede decir que en este estado estimado el observador con las ganancias obtenidas por los polos modificados al 100% es el que presenta un mejor desempeño.

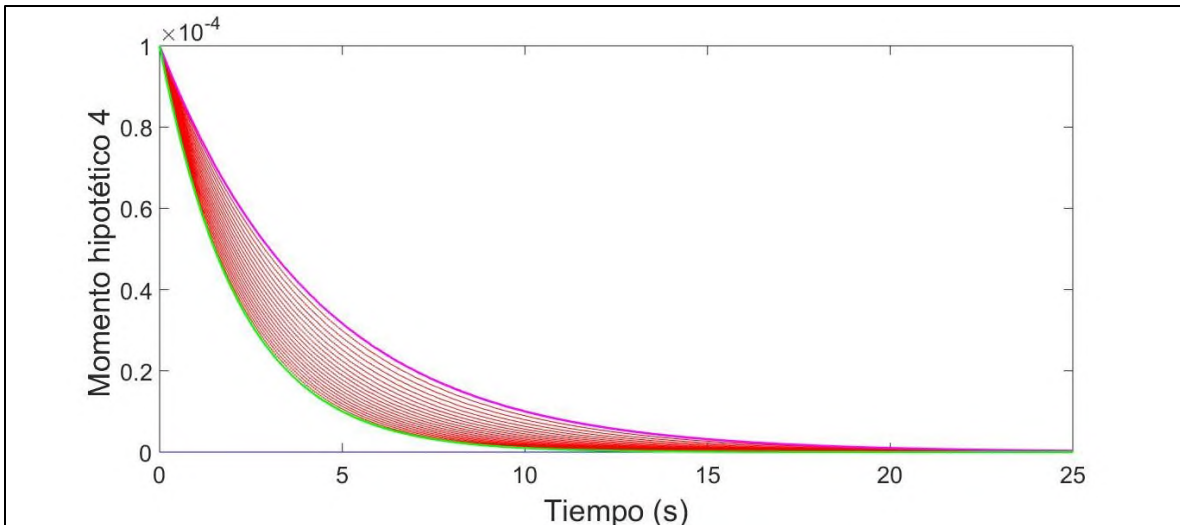


Figura 31. Momento hipotético 4.

En la Figura 31 se muestra el quinto estado, el cual representa el momento hipotético 4 estimado por el observador proporcional integral. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa el estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con los polos iniciales del sistema, con un tiempo de estabilización de 20 s, aproximadamente. Mientras que la línea de color verde representa el estado estimado con una variación de polos del 100 %, con un tiempo de estabilización de 15 s, semejante al estado estimado por el observador proporcional. Con todas las ganancias del observador se observa que la respuesta es suave sin ningún tipo de sobre salto, bajo salto, ni oscilación. Por lo tanto, se puede decir que en este estado estimado el observador con las ganancias obtenidas por los polos modificados al 100% es el que presenta un mejor desempeño.

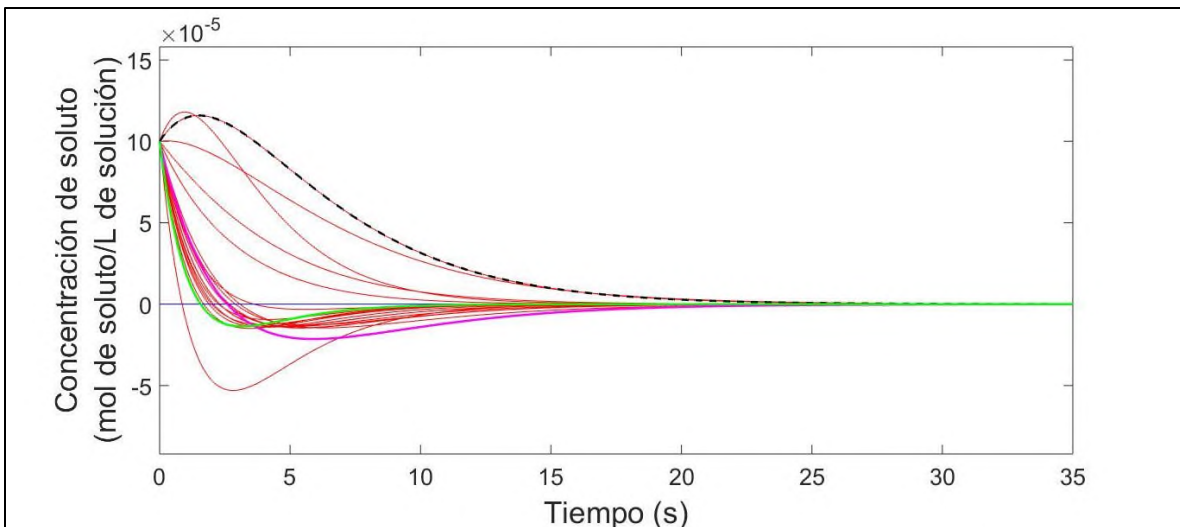


Figura 32. Concentración de soluto.

En la Figura 33 se muestra el sexto estado, el cual representa la concentración del soluto estimada por el observador proporcional integral. Cada línea representa una estimación del estado con un porcentaje de variación de polos diferente en cada caso. La línea color azul representa el estado original. La línea de color magenta representa el estado estimado con los polos iniciales, mostrando un tiempo de asentamiento de 20 s, mientras que la línea verde representa el estado estimado con una variación del 100 % de los polos mostrando un tiempo de asentamiento de 10 s. Por otro lado, el peor desempeño se obtuvo con una variación de polos del 20%, el cual corresponde a la línea punteada de color negro la cual tiene un tiempo de asentamiento de 25 s.

Como se observa en la Figura 33, los observadores proporcionan diferentes trayectorias, tiempos de asentamiento diferentes, sobre saltos y bajo saltos de este estado en específico. Para evaluar este comportamiento tan diverso se realizó una evaluación del desempeño de cada trayectoria para este estado en específico mediante la métrica de la Ecuación (100), los resultados se muestran a continuación:

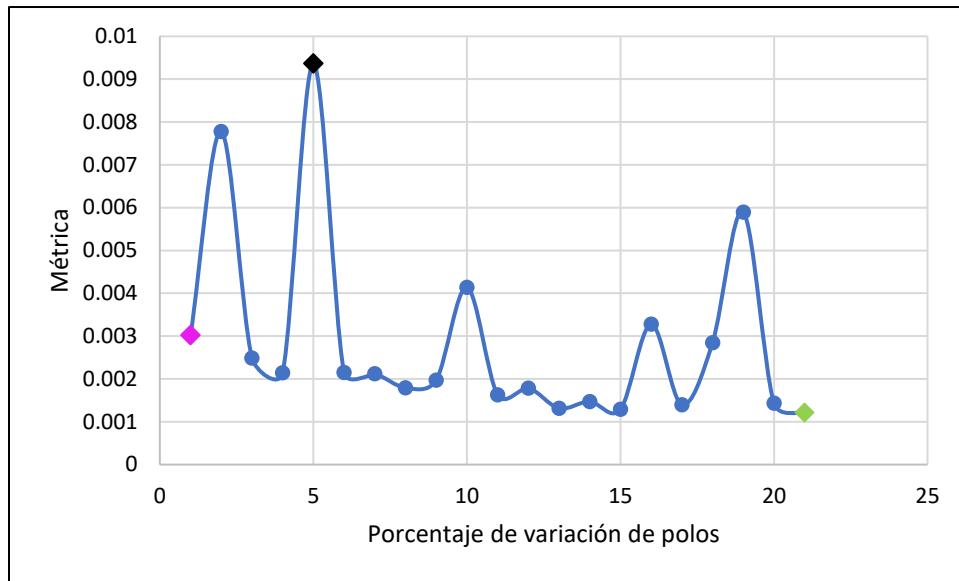


Figura 33. Desempeño de los observadores con respecto a la variación de los polos.

En la figura 33, el punto color magenta representa el desempeño del observador evaluado con los valores iniciales de la Ecuación (111). Mientras que el punto color verde representa el desempeño del observador evaluado con una variación del 100%, en este estado la variación del 100% coincide con el mejor desempeño de los observadores. Por otro lado, el punto negro de la gráfica corresponde a la variación del 20% de polos, con la cual se obtuvo el observador con el peor desempeño.

La tabla 9, muestra el valor máximo y mínimo de la métrica ecuación(100) para cada estado estimado y su correspondiente variación de polos. Con estos datos es posible determinar el mejor desempeño al momento de la simulación, lo cual es complementario a la estabilidad del sistema mostrado en la Figura 33.

Estado	Mínimo	% polos	Máximo	% polos	Media	Desviación
\tilde{x}_1	0.00167059	100	0.004350067	5	0.002632372	6.84E-04
\tilde{x}_2	0.00105104	100	0.002050679	5	0.001442728	3.03E-04
\tilde{x}_3	0.035764464	100	0.049764579	5	0.071478711	1.08E-02
\tilde{x}_4	0.035764464	100	0.049764579	5	0.071478711	1.08E-02
\tilde{x}_5	0.002224285	100	0.004397622	5	0.003076295	6.59E-04
\tilde{x}_6	0.001214654	100	0.009361523	5	0.002882318	2.21E-03

Tabla 9. Métricas del observador proporcional-Integral (PI).

Conforme a la tabla 9, el orden de los estados que tienen mayor convergencia es:

$$\tilde{x}_2 > \tilde{x}_6 > \tilde{x}_1 > \tilde{x}_5 > \tilde{x}_4 = \tilde{x}_3$$

6.6 Comparativo de las estructuras del observador proporcional y proporcional- integral

Conforme a las Figuras 18 y 25 la estabilidad de las dos estructuras de control es igual conforme a la variación de los polos. Esto se debe que para el diseño de ambas estructuras de observadores se utilizó la misma metodología de sintonización y la misma variación de polos para cada uno. Con respecto al desempeño (Tabla 10) de ambas estructuras de observadores, se puede observar de dos puntos de vista diferentes: **(a)** de manera específica, con el observador tiene un mejor desempeño en el estado x_3 estimado, para el estado 4 ambos observadores tienen el mismo desempeño; **(b)** de manera global, el observador Proporcional-Integral (PI) presenta un mejor desempeño que el observador Proporcional (P) debido a su calificación menor de **0.0776895** contra **0.07921**.

Estado	Mínimo (Observador P)	Mínimo (Observador PI)
\tilde{x}_1	0.00167619	0.00167059
\tilde{x}_2	0.00157696	0.00105104
\tilde{x}_3	0.00222428	0.035764464
\tilde{x}_4	0.03576446	0.035764464
\tilde{x}_5	0.03576446	0.002224285
\tilde{x}_6	0.00220539	0.001214654
Sumatoria(calificación)	0.07921174	0.0776895

Tabla 10. Desempeño de los observadores Proporcional (P) y Proporcional-Integral (PI).

Por lo tanto, teniendo como criterios de decisión la estabilidad y desempeño de cada estructura de los observadores se puede considerar con respecto a los resultados obtenidos que el observador Proporcional-Integral (PI) es más adecuado para la cristalización del caso de estudio que el observador Proporcional (P).

7. Conclusiones

Se diseñaron observadores lineales tipo Luenberger proporcionales (P) y proporcionales-integrales (PI) para la operación unitaria de la cristalización de sulfato de amonio y agua.

Se sintonizaron los observadores proporcionales (P) y proporcionales-integrales (PI) mediante la fórmula de Ackermann en diferentes regiones de colocación y polos.

Se realizó la simulación numérica en dominio del tiempo de los observadores proporcionales (P) y proporcionales-integrales (PI).

Se compararon los observadores proporcionales (P) y proporcionales-integrales (PI) para evaluar cual proporciona una mejor estimación bajo el margen de error permisible.

El sistema que se tomó como caso de estudio y que es mostrado por Mesbah *et al.*, (2011), se encontraba al límite de la estabilidad, lo cual en las simulaciones del mismo dio como resultado que los valores de algunos parámetros se incrementaran con el tiempo, incluso a mayores tiempos de simulación que los mostrados en el presente trabajo de investigación.

La metodología de Ackermann para la sintonización de observadores fue aplicada dando resultados adecuados para ambas estructuras de observadores.

La variación de los polos de la matriz sistema-observador tuvo efectos en la estabilidad de los observadores desarrollados para la cristalización por lotes de sulfato de amonio y agua.

Para tener una evaluación global de una estructura de un observador de estados en específico es necesario tener un conjunto de soluciones factibles que puedan ser aplicadas al sistema, lo cual con la metodología de Ackermann es posible tener con un mapeo en la colocación de polos.

Entre diferentes estructuras de observadores sintonizados con la misma metodología de sintonización presentan la misma estabilidad, siempre y cuando se utilicen las mismas condiciones de diseño.

Para el caso de estudio, el observador Proporcional-Integral (PI) tiene un mejor desempeño que el observador Proporcional (P). Esto se debe a la acción integral del observador PI que ayuda a minimizar el error entre el estado estimado y el estado original del observador PI.

Conforme a los resultados obtenidos, esta metodología puede ser aplicada a sistemas estables con múltiples estados, con una señal exógena y con múltiples salidas.

Bibliografía

- Ali, J. M., Hoang, N. H., Hussain, M. A., & Dochain, D. (2015). Review and classification of recent observers applied in chemical process systems. *Computers & Chemical Engineering*, 76, 27-41.
- Bagui, F., Abdelghani-Idrissi, M. A., & Chafouk, H. (2004). Heat exchanger kalman filtering with process dynamic acknowledgement. *Computers and Chemical Engineering*, 28(8), 1465-1473.
- Bolaños-Reynoso, E., Sánchez-Sánchez, K. B., Urrea-García, G. R., & Ricardez-Sandoval, L. (2014). Dynamic modeling and optimization of batch crystallization of sugar cane under uncertainty. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 53(33), 13180-13194.
- Busawon, K. K., & Kabore, P. (2001). Disturbance attenuation using proportional integral observers. *International Journal of Control*, 74(6), 618-627.
- Byrnes, C. I., & Isidori, A. (1989). New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems and Control Letters*, 12(5), 437-442.
- Carrillo, A. J. (2006). Diseño y simulación de estrategias para el control no lineal de la sobresaturación en la cristalización por lotes a través de perfiles dinámicos de regulación de vacío y estimación de parámetros. Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Química. Instituto Tecnológico de Orizaba.
- Carrillo, J., Teco, M. V., Osório, A., & Bolaños, E. (2008). Dynamic simulator construction for vacuum batch crystallization processes. [Construcción de un simulador dinámico para procesos de cristalización por lotes a vacío] *Informacion Tecnologica*, 19(3)
- Carrillo-Ahumada, J., Páramo-Calderón, D. E., Aparicio-Saguilán, A., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (2014). Approach of a measurement of linearized representation of a nonlinear system. application to (bio)chemical reactors. [Planteamiento de una métrica de la representación linealizada de un sistema no lineal. Aplicación para reactores (bio)químicos] *Revista Mexicana De Ingeniera Quimica*, 13(2), 631-647.
- Carrillo-Ahumada, J., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (2011). Tuning optimal-robust linear MIMO controllers of chemical reactors by using pareto optimality. *Chemical Engineering Journal*, 174(1), 357-367.

- Chitralekha, S. B., Prakash, J., Raghavan, H., Gopaluni, R. B., & Shah, S. L. (2010). A comparison of simultaneous state and parameter estimation schemes for a continuous fermentor reactor. *Journal of Process Control*, 20(8), 934-943.
- Damour, C., Benne, M., Boillereaux, L., Grondin-Perez, B., & Chabriat, J. -. (2010). NMPC of an industrial crystallization process using model-based observers. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*, 16(5), 708-716.
- Damour, C., Benne, M., Grondin-Perez, B., & Chabriat, J. -. (2010). Nonlinear predictive control based on artificial neural network model for industrial crystallization. *Journal of Food Engineering*, 99(2), 225-231.
- Di Ruscio D. (2009)- Linear polynomial estimator: the state observer.; [http://home.hit.no/~hansha/documents/control/theory/state observer.pdf](http://home.hit.no/~hansha/documents/control/theory/state%20observer.pdf).
- Dochain, D. (2003). State and parameter estimation in chemical and biochemical processes: A tutorial. *Journal of Process Control*, 13(8), 801-818.
- Farza, M., Oueder, M., Abdennour, R. B., & M'Saad, M. (2011). High gain observer with updated gain for a class of MIMO nonlinear systems. *International Journal of Control*, 84(2), 270-280.
- Gamez-Garcia, V., Flores-Mejia, H. F., Ramirez-Muñoz, J., & Puebla, H. (2012). Dynamic optimization and robust control of batch crystallization. Paper presented at the *Procedia Engineering*, , 42 471-481.
- Garcia-Alvarado, M. A., & Ruiz-López, I. I. (2010). A design method for robust and quadratic optimal MIMO linear controllers. *Chemical Engineering Science*, 65(11), 3431-3438.
- Geankoplis, C. J. C. J. (1998). *Procesos de transporte y operaciones unitarias*. Compañía Editorial Continental.
- Harriott, P., McCabe, W. L., & Smith, J. C. (1991). *Operaciones unitarias en ingeniería química*.
- Hulbertz H. M. y Katz S., (1964). Some problems in particle technology: A statical mechanical formulation. *Chemical Engineering Science*. Vol. 19, Págs. 555-574. USA.

Içten, E., Giridhar, A., Nagy, Z. K., & Reklaitis, G. V. (2016). Drop-on-demand system for manufacturing of melt-based solid oral dosage: Effect of critical process parameters on product quality. *AAPS PharmSciTech*, *17*(2), 284-293.

Klapwijk, A. R., Simone, E., Nagy, Z. K., & Wilson, C. C. (2016). Tuning crystal morphology of succinic acid using a polymer additive. *Crystal Growth and Design*, *16*(8), 4349-4359.

Lewiner, F., Févotte, G., Klein, J. P., & Puel, F. (2002). An online strategy to increase the average crystal size during organic batch cooling crystallization. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, *41*(5), 1321-1328.

Ma, C. Y., & Wang, X. Z. (2012). Closed-loop control of crystal shape in cooling crystallization of l-glutamic acid. *Journal of Process Control*, *22*(1), 72-81.

Mesbah, A., Huesman, A. E. M., Kramer, H. J. M., & Van Den Hof, P. M. J. (2011). A comparison of nonlinear observers for output feedback model-based control of seeded batch crystallization processes. *Journal of Process Control*, *21*(4), 652-666.

Mohd Ali, J., Ha Hoang, N., Hussain, M. A., & Dochain, D. (2015). Review and classification of recent observers applied in chemical process systems. *Computers and Chemical Engineering*, *76*, 27-41.

Nagy, Z. K., & Braatz, R. D. (2003). Robust nonlinear model predictive control of batch processes. *AIChE Journal*, *49*(7), 1776-1786.

Nagy, Z. K., & Braatz, R. D. (2004). Open-loop and closed-loop robust optimal control of batch processes using distributional and worst-case analysis. *Journal of Process Control*, *14*(4), 411-422.

Nagy, Z. K., & Braatz, R. D. (2012). Advances and new directions in crystallization control. *Annual Review of Chemical and Biomolecular Engineering*, *3*, 55-75.

Nagy, Z. K., Fujiwara, M., Woo, X. Y., & Braatz, R. D. (2008). Determination of the kinetic parameters for the crystallization of paracetamol from water using metastable zone width experiments. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, *47*(4), 1245-1252.

Neumann, A. M., & Kramer, H. J. (2002). A comparative study of various size distribution. *Particle & Particle Systems Characterization*, *19*(1), 17-27.

Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.

Omar, H. M., & Rohani, S. (2017). Crystal population balance formulation and solution methods: A review. *Crystal Growth and Design*, 17(7), 4028-4041.

Power, G., Hou, G., Kamaraju, V. K., Morris, G., Zhao, Y., & Glennon, B. (2015). Design and optimization of a multistage continuous cooling mixed suspension, mixed product removal crystallizer. *Chemical Engineering Science*, 133, 125-139.

Prakash, J., Deshpande, A. P., & Patwardhan, S. C. (2009). *State estimation and fault tolerant nonlinear predictive control of an autonomous hybrid system using unscented kalman filter*.

Prakash, J., Patwardhan, S. C., & Shah, S. L. (2010). State estimation and nonlinear predictive control of autonomous hybrid system using derivative free state estimators. *Journal of Process Control*, 20(7), 787-799.

Prakash, J., Patwardhan, S., & Shah, S. (2008). Control of an autonomous hybrid system using a nonlinear model predictive controller. Paper presented at the *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, , 17(1 PART 1)

Pichardo-Almarza, C., Rahmani, A., Dauphin-Tanguy, G., & Delgado, M. (2005). Proportional-integral observer for systems modelled by bond graphs. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 13(3), 179-211.

Randolph A. D. y Larson M. A., (1978). *Theory of particulate processes*. Editorial Academic Press, New York. USA.

Rawlings, J. B., Miller, S. M., & Witkowski, W. R. (1993). Model identification and control of solution crystallization processes: A review. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 32(7), 1275-1296.

Sanzida, N., & Nagy, Z. K. (2013). Iterative learning control for the systematic design of supersaturation-controlled batch cooling crystallization processes. *Computers and Chemical Engineering*, 59, 111-121.

Simone, E., Cenzato, M. V., & Nagy, Z. K. (2016). A study on the effect of the polymeric additive HPMC on morphology and polymorphism of ortho-aminobenzoic acid crystals. *Journal of Crystal Growth*, 446, 50-59.

Velázquez-Camilo, O., Álvarez-Ramírez, J. J., & Bolaños-Reynoso, E. (2009). Comparative analysis of the crystallizer dynamics type continuous stirred tank: Isothermic and cooling case. [Análisis comparativo de la dinámica de un cristalizador continuo tipo tanque agitado: Casos isotermico y por enfriamiento] *Revista Mexicana De Ingeniera Qumica*, 8(1), 127-133.

Venkateswarlu, C., & Avantika, S. (2001). Optimal state estimation of multicomponent batch distillation. *Chemical Engineering Science*, 56(20), 5771-5786.

Wang J, Zhao L, Yu T. (2010) On-line estimation in fed-batch fermentation process using state space model and unscented Kalman filter. *Chin J Chem Eng*, 18:258–64.

Yang, Y., & Nagy, Z. K. (2015). Combined cooling and antisolvent crystallization in continuous mixed suspension, mixed product removal cascade crystallizers: Steady-state and startup optimization. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 54(21), 5673-5682.

Anexos

A continuación, se muestran las matrices de ganancias (L) y la matriz Est1com para cada variación de la Ecuación (107) del observador proporcional:

Variación de Ecuación (107)	L					
0%	3.2E-01	-1.0E-02	0.0E+00	3.1E+08	0.0E+00	7.7E+06
	1.0E-02	3.2E-01	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	7.5E-08
	0.0E+00	6.0E-06	2.3E-01	0.0E+00	0.0E+00	1.5E-07
	0.0E+00	0.0E+00	9.0E-06	1.4E-02	0.0E+00	2.3E-07
	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	1.2E-05	1.4E-02	3.0E-07
	0.0E+00	0.0E+00	-2.8E-06	7.1E-06	0.0E+00	2.3E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
5%	3.33E-01	-1.05E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.05E-02	3.33E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.41E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.47E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	1.47E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	2.44E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
10%	3.49E-01	-1.10E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.10E-02	3.49E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.53E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.54E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	1.54E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	2.55E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
15%	3.64E-01	-1.15E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.15E-02	3.64E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.64E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.61E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	1.61E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	2.67E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
20%	3.80E-01	-1.20E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.20E-02	3.80E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.76E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.68E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	1.68E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	2.78E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
25%	3.96E-01	-1.25E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.25E-02	3.96E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.87E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.75E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	1.75E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	2.90E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
30%	4.12E-01	-1.30E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.30E-02	4.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.99E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.82E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	1.82E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	3.02E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
35%	4.28E-01	-1.35E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.35E-02	4.28E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	3.10E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.89E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	1.89E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	3.13E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
40%	4.44E-01	-1.40E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.40E-02	4.44E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	3.22E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.96E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	1.96E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	3.25E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
45%	4.60E-01	-1.45E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.45E-02	4.60E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	3.33E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.03E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.03E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	3.36E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
50%	4.75E-01	-1.50E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.50E-02	4.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	3.45E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.10E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.10E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	3.48E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
55%	4.91E-01	-1.55E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.55E-02	4.91E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	3.56E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.17E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.17E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	3.60E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
60%	5.07E-01	-1.60E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.60E-02	5.07E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	3.68E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.24E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.24E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	3.71E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
65%	5.23E-01	-1.65E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.65E-02	5.23E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	3.79E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.31E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.31E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	3.83E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
70%	5.39E-01	-1.70E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.70E-02	5.39E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	3.91E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.38E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.38E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	3.94E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
75%	5.55E-01	-1.75E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.75E-02	5.55E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	4.02E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.45E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.45E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	4.06E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
80%	5.71E-01	-1.80E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.80E-02	5.71E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	4.14E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.52E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.52E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	4.18E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
85%	5.86E-01	-1.85E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.85E-02	5.86E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	4.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.59E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.59E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	4.29E-01

Variación de Ecuación (107)	L					
90%	6.02E-01	-1.90E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.90E-02	6.02E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	4.37E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.66E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.66E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	4.41E-01

Variación de Ecuación (107)	<i>L</i>					
95%	6.18E-01	-1.95E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	1.95E-02	6.18E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	4.48E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.73E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.73E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	4.52E-01

Variación de Ecuación (107)	<i>L</i>					
100%	6.34E-01	-2.00E-02	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	2.00E-02	6.34E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	4.60E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.80E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.80E-02	3.00E-07
	0.00E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	4.64E-01

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
0%	-0.317	0.01	0	0	0	0
	-0.01	-0.317	0	0	0	0
	0	0	-0.23	0	0	0
	0	0	0	-0.014	0	0
	0	0	0	0	-0.014	0
	0	0	0	0	0	-0.232

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
5%	-0.3329	0.0105	0	0	0	0
	-0.0105	-0.3329	0	0	0	0
	0	0	-0.2415	0	0	0
	0	0	0	-0.0147	0	0
	0	0	0	0	-0.0147	0
	0	0	0	0	0	-0.2436

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
10%	-0.3487	0.011	0	0	0	0
	-0.011	-0.3487	0	0	0	0
	0	0	-0.253	0	0	0
	0	0	0	-0.0154	0	0
	0	0	0	0	-0.0154	0
	0	0	0	0	0	-0.2552

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
15%	-0.3645	0.0115	0	0	0	0
	-0.0115	-0.3645	0	0	0	0
	0	0	-0.2645	0	0	0
	0	0	0	-0.0161	0	0
	0	0	0	0	-0.0161	0
	0	0	0	0	0	-0.2668

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
20%	-0.3804	0.012	0	0	0	0
	-0.012	-0.3804	0	0	0	0
	0	0	-0.276	0	0	0
	0	0	0	-0.0168	0	0
	0	0	0	0	-0.0168	0
	0	0	0	0	0	-0.2784

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
25%	-0.3962	0.0125	0	0	0	0
	-0.0125	-0.3962	0	0	0	0
	0	0	-0.2875	0	0	0
	0	0	0	-0.0175	0	0
	0	0	0	0	-0.0175	0
	0	0	0	0	0	-0.29

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
30%	-0.4121	0.013	0	0	0	0
	-0.013	-0.4121	0	0	0	0
	0	0	-0.299	0	0	0
	0	0	0	-0.0182	0	0
	0	0	0	0	-0.0182	0
	0	0	0	0	0	-0.3016

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
35%	-0.428	0.0135	0	0	0	0
	-0.0135	-0.428	0	0	0	0
	0	0	-0.3105	0	0	0
	0	0	0	-0.0189	0	0
	0	0	0	0	-0.0189	0
	0	0	0	0	0	-0.3132

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
40%	-0.4438	0.014	0	0	0	0
	-0.014	-0.4438	0	0	0	0
	0	0	-0.322	0	0	0
	0	0	0	-0.0196	0	0
	0	0	0	0	-0.0196	0
	0	0	0	0	0	-0.3248

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
45%	-0.4597	0.0145	0	0	0	0
	-0.0145	-0.4597	0	0	0	0
	0	0	-0.3335	0	0	0
	0	0	0	-0.0203	0	0
	0	0	0	0	-0.0203	0
	0	0	0	0	0	-0.3364

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
50%	-0.4755	0.015	0	0	0	0
	-0.015	-0.4755	0	0	0	0
	0	0	-0.345	0	0	0
	0	0	0	-0.021	0	0
	0	0	0	0	-0.021	0
	0	0	0	0	0	-0.348

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
55%	-0.4914	0.0155	0	0	0	0
	-0.0155	-0.4914	0	0	0	0
	0	0	-0.3565	0	0	0
	0	0	0	-0.0217	0	0
	0	0	0	0	-0.0217	0
	0	0	0	0	0	-0.3596

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
60%	-0.5072	0.016	0	0	0	0
	-0.016	-0.5072	0	0	0	0
	0	0	-0.368	0	0	0
	0	0	0	-0.0224	0	0
	0	0	0	0	-0.0224	0
	0	0	0	0	0	-0.3712

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
65%	-0.5231	0.0165	0	0	0	0
	-0.0165	-0.5231	0	0	0	0
	0	0	-0.3795	0	0	0
	0	0	0	-0.0231	0	0
	0	0	0	0	-0.0231	0
	0	0	0	0	0	-0.3828

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
70%	-0.5389	0.017	0	0	0	0
	-0.017	-0.5389	0	0	0	0
	0	0	-0.391	0	0	0
	0	0	0	-0.0238	0	0
	0	0	0	0	-0.0238	0
	0	0	0	0	0	-0.3944

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
75%	-0.5547	0.0175	0	0	0	0
	-0.0175	-0.5547	0	0	0	0
	0	0	-0.4025	0	0	0
	0	0	0	-0.0245	0	0
	0	0	0	0	-0.0245	0
	0	0	0	0	0	-0.406

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
80%	-0.5706	0.018	0	0	0	0
	-0.018	-0.5706	0	0	0	0
	0	0	-0.414	0	0	0
	0	0	0	-0.0252	0	0
	0	0	0	0	-0.0252	0
	0	0	0	0	0	-0.4176

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
85%	-0.5865	0.0185	0	0	0	0
	-0.0185	-0.5865	0	0	0	0
	0	0	-0.4255	0	0	0
	0	0	0	-0.0259	0	0
	0	0	0	0	-0.0259	0
	0	0	0	0	0	-0.4292

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
90%	-0.6023	0.019	0	0	0	0
	-0.019	-0.6023	0	0	0	0
	0	0	-0.437	0	0	0
	0	0	0	-0.0266	0	0
	0	0	0	0	-0.0266	0
	0	0	0	0	0	-0.4408

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
95%	-0.6181	0.0195	0	0	0	0
	-0.0195	-0.6181	0	0	0	0
	0	0	-0.4485	0	0	0
	0	0	0	-0.0273	0	0
	0	0	0	0	-0.0273	0
	0	0	0	0	0	-0.4524

Variación de Ecuación (107)	<i>Est1Com</i>					
100%	-0.634	0.02	0	0	0	0
	-0.02	-0.634	0	0	0	0
	0	0	-0.46	0	0	0
	0	0	0	-0.028	0	0
	0	0	0	0	-0.028	0
	0	0	0	0	0	-0.464

A continuación, se muestran las matrices de ganancias (L), la matriz Est1com y las matrices K_i y K_p para cada variación de la Ecuación (111) del observador Proporcional-Integral:

Variación de Ecuación (111)	L					
0%	3.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	5.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.40E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.40E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.30E-01	3.00E-07
	4.34E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	5.54E-01
	7.41E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.87E+04

Variación de Ecuación (111)	L					
5%	3.22E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	5.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.47E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.47E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.41E-01	3.00E-07
	-6.09E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	5.88E-01
	-1.07E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.35E+04

Variación de Ecuación (111)	L					
10%	3.48E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	5.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.54E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.54E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.53E-01	3.00E-07
	3.63E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	6.05E-01
	2.51E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.58E+04

Variación de Ecuación (111)	L					
15%	2.67E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	5.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.61E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.61E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.64E-01	3.00E-07
	9.79E-03	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	7.29E-01
	2.18E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.82E+04

Variación de Ecuación (111)	L					
20%	3.05E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	6.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.68E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.68E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.76E-01	3.00E-07
	-9.79E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	7.34E-01
	-1.93E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.91E+04

Variación de Ecuación (111)	L					
25%	3.95E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	6.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.75E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.75E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.87E-01	3.00E-07
	5.32E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	6.87E-01
	2.81E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.91E+04

Variación de Ecuación (111)	L					
30%	4.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	6.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.82E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.82E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.99E-01	3.00E-07
	-1.44E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	7.14E-01
	-1.29E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.38E+04

Variación de Ecuación (111)	L					
35%	3.13E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	6.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.89E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.89E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.10E-01	3.00E-07
	4.53E-03	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	8.56E-01
	1.18E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.41E+04

Variación de Ecuación (111)	L					
40%	4.44E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	7.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.96E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.96E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.22E-01	3.00E-07
	1.19E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	7.69E-01
	1.15E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.40E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>L</i>					
45%	4.53E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	7.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.03E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.03E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.33E-01	3.00E-07
	-6.01E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	8.03E-01
	-1.49E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.12E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>L</i>					
50%	3.48E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	7.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.10E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.10E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.45E-01	3.00E-07
	6.90E-03	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	9.51E-01
	2.01E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.16E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>L</i>					
55%	4.91E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	7.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.17E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.17E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.56E-01	3.00E-07
	1.68E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	8.51E-01
	1.80E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.08E+04

Variación de Ecuación (111)	L					
55%	4.91E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	7.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.17E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.17E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.56E-01	3.00E-07
	1.68E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	8.51E-01
	1.80E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.08E+04

Variación de Ecuación (111)	L					
60%	3.71E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	8.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.24E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.24E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.68E-01	3.00E-07
	-5.02E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.01E+00
	-1.56E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.32E+05

Variación de Ecuación (111)	L					
65%	3.83E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	8.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.31E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.31E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.79E-01	3.00E-07
	4.34E-03	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.05E+00
	1.39E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.40E+05

Variación de Ecuación (111)	L					
70%	5.52E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	8.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.38E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.38E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.91E-01	3.00E-07
	-1.31E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	9.20E-01
	-5.23E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.07E+05

Variación de Ecuación (111)	L					
75%	4.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	8.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.45E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.45E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.02E-01	3.00E-07
	5.76E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.10E+00
	1.59E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.56E+05

Variación de Ecuación (111)	L					
80%	4.18E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	9.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.52E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.52E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.14E-01	3.00E-07
	1.84E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.14E+00
	6.40E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.67E+05

Variación de Ecuación (111)	L					
85%	5.81E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	9.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.59E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.59E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.25E-01	3.00E-07
	-6.60E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.02E+00
	-2.12E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.31E+05

Variación de Ecuación (111)	L					
90%	5.58E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	9.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.66E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.66E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.37E-01	3.00E-07
	-1.53E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.09E+00
	-4.80E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.50E+05

Variación de Ecuación (111)	L					
95%	6.17E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	9.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.73E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.73E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.48E-01	3.00E-07
	-4.80E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.07E+00
	-6.25E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.44E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>L</i>					
100%	4.64E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	1.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.80E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.80E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.60E-01	3.00E-07
	1.25E-03	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.27E+00
	4.86E+02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.06E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
0%	-3.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.13E-03
	0.00E+00	-5.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-1.40E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.40E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.30E-01	0.00E+00
	-4.34E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-5.54E-01
	-7.41E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-3.87E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
5%	-3.22E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.41E-03
	0.00E+00	-5.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-1.47E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.47E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.42E-01	0.00E+00
	6.09E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-5.88E-01
	1.07E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.35E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
10%	-3.48E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.45E-03
	0.00E+00	-5.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-1.54E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.54E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.53E-01	0.00E+00
	-3.63E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-6.05E-01
	-2.51E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.58E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
15%	-2.67E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-9.27E-05
	0.00E+00	-5.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-1.61E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.61E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.65E-01	0.00E+00
	-9.79E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-7.29E-01
	-2.18E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-6.82E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
20%	-3.05E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.01E-03
	0.00E+00	-6.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-1.68E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.68E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.76E-01	0.00E+00
	9.79E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-7.34E-01
	1.93E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-6.91E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
25%	-3.95E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.06E-03
	0.00E+00	-6.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-1.75E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.75E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.88E-01	0.00E+00
	-5.32E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-6.87E-01
	-2.81E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-5.91E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
30%	-4.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-5.46E-03
	0.00E+00	-6.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-1.82E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.82E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.99E-01	0.00E+00
	1.44E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-7.14E-01
	1.29E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-6.38E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
35%	-3.13E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.27E-05
	0.00E+00	-6.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-1.89E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.89E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-3.11E-01	0.00E+00
	-4.53E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-8.56E-01
	-1.18E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-9.41E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
40%	-4.44E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.64E-03
	0.00E+00	-7.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-1.96E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.96E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-3.22E-01	0.00E+00
	-1.19E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-7.69E-01
	-1.15E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-7.40E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
45%	-4.53E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.60E-03
	0.00E+00	-7.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.03E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.03E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-3.34E-01	0.00E+00
	6.01E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-8.03E-01
	1.49E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-8.12E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
50%	-3.48E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-6.53E-05
	0.00E+00	-7.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.10E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.10E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-3.45E-01	0.00E+00
	-6.90E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-9.51E-01
	-2.01E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.16E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
55%	-4.91E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.64E-03
	0.00E+00	-7.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.17E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.17E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-3.57E-01	0.00E+00
	-1.68E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-8.51E-01
	-1.80E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-9.08E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
60%	-3.72E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.81E-04
	0.00E+00	-8.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.24E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.24E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-3.68E-01	0.00E+00
	5.02E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.01E+00
	1.56E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.32E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
65%	-3.83E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.10E-05
	0.00E+00	-8.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.31E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.31E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-3.80E-01	0.00E+00
	-4.34E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.05E+00
	-1.39E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.40E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
70%	-5.52E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.39E-03
	0.00E+00	-8.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.38E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.38E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-3.91E-01	0.00E+00
	1.31E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-9.20E-01
	5.23E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.07E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
75%	-4.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.78E-03
	0.00E+00	-8.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.45E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.45E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.03E-01	0.00E+00
	-5.76E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.10E+00
	-1.59E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.56E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
80%	-4.18E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.74E-04
	0.00E+00	-9.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.52E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.52E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.14E-01	0.00E+00
	-1.84E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.14E+00
	-6.40E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.67E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
85%	-5.81E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.92E-03
	0.00E+00	-9.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.59E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.59E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.26E-01	0.00E+00
	6.60E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.02E+00
	2.12E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.31E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
90%	-5.58E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.28E-03
	0.00E+00	-9.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.66E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.66E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.37E-01	0.00E+00
	1.53E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.09E+00
	4.80E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.50E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
95%	-6.17E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-3.60E-03
	0.00E+00	-9.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.73E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.73E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.49E-01	0.00E+00
	4.80E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.07E+00
	6.25E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.44E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Est1Com</i>					
100%	-4.64E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.18E-05
	0.00E+00	-1.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	-2.80E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.80E-02	0.00E+00	0.00E+00
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-4.60E-01	0.00E+00
	-1.25E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-1.27E+00
	-4.86E+02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.06E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
0%	3.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	5.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.40E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.40E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.30E-01	3.00E-07
	4.34E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	5.54E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
5%	3.22E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	5.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.47E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.47E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.41E-01	3.00E-07
	-6.09E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	5.88E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
10%	3.48E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	5.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.54E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.54E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.53E-01	3.00E-07
	3.63E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	6.05E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
15%	3.05E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	6.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.68E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.68E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.76E-01	3.00E-07
	-9.79E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	7.34E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
20%	3.95E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	6.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.75E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.75E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.87E-01	3.00E-07
	5.32E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	6.87E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
25%	4.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	6.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.82E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.82E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.99E-01	3.00E-07
	-1.44E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	7.14E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
30%	3.13E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	6.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.89E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.89E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.10E-01	3.00E-07
	4.53E-03	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	8.56E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
35%	4.44E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	7.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.96E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.96E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.22E-01	3.00E-07
	1.19E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	7.69E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
40%	4.53E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	7.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.03E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.03E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.33E-01	3.00E-07
	-6.01E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	8.03E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
45%	3.48E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	7.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.10E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.10E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.45E-01	3.00E-07
	6.90E-03	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	9.51E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
50%	4.91E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	7.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.17E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.17E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.56E-01	3.00E-07
	1.68E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	8.51E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
55%	3.71E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	8.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.24E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.24E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.68E-01	3.00E-07
	-5.02E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.01E+00

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
60%	3.83E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	8.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.31E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.31E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.79E-01	3.00E-07
	4.34E-03	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.05E+00

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
65%	5.52E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	8.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.38E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.38E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	3.91E-01	3.00E-07
	-1.31E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	9.20E-01

Variación de Ecuación (111)	<i>Kp</i>					
70%	4.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	8.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.45E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.45E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.02E-01	3.00E-07
	5.76E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.10E+00

Variación de Ecuación (111)	Kp					
75%	4.18E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	9.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.52E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.52E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.14E-01	3.00E-07
	1.84E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.14E+00

Variación de Ecuación (111)	Kp					
80%	5.81E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	9.25E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.59E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.59E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.25E-01	3.00E-07
	-6.60E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.02E+00

Variación de Ecuación (111)	Kp					
85%	5.58E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	9.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.66E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.66E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.37E-01	3.00E-07
	-1.53E+00	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.09E+00

Variación de Ecuación (111)	Kp					
90%	6.17E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	9.75E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.73E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.73E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.48E-01	3.00E-07
	-4.80E-02	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.07E+00

Variación de Ecuación (111)	Kp					
95%	4.64E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	1.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	2.80E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	2.80E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	4.60E-01	3.00E-07
	1.25E-03	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	1.27E+00

Variación de Ecuación (111)	Kp					
100%	3.12E-01	0.00E+00	0.00E+00	3.06E+08	0.00E+00	7.65E+06
	3.00E-06	5.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.50E-08
	0.00E+00	6.00E-06	1.40E-02	0.00E+00	0.00E+00	1.50E-07
	0.00E+00	0.00E+00	9.00E-06	1.40E-02	0.00E+00	2.25E-07
	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.20E-05	2.30E-01	3.00E-07
	4.34E-01	0.00E+00	-2.79E-06	7.14E-06	0.00E+00	5.54E-01

Variación de Ecuación (111)	Ki					
0%	7.41E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.87E+04

Variación de Ecuación (111)	Ki					
5%	-1.07E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.35E+04

Variación de Ecuación (111)	Ki					
10%	2.51E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.58E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
15%	2.18E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.82E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
20%	-1.93E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.91E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
25%	2.81E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.91E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
30%	-1.29E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.38E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
35%	1.18E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.41E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
40%	1.15E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.40E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
45%	-1.49E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.12E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
50%	2.01E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.16E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
55%	1.80E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.08E+04

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
60%	-1.56E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.32E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
65%	1.39E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.40E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
70%	-5.23E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.07E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
75%	1.59E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.56E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
80%	6.40E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.67E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
85%	-2.12E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.31E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
90%	-4.80E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.50E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
95%	-6.25E+03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.44E+05

Variación de Ecuación (111)	<i>Ki</i>					
100%	4.86E+02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.06E+05