

UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

CAMPUS LOMA BONITA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

SISTEMAS DINÁMICOS APLICADOS A
MODELOS CON PRESIÓN SOCIAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

**EMMA BEATRIZ
HERNÁNDEZ BAUTISTA**

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Beatriz Carely Luna Olivera

CO-DIRECTOR DE TESIS:

Dr. José Geiser Villavicencio Pulido

Loma Bonita, Oaxaca, México, 2019



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
Campus Loma Bonita

LOMA BONITA, OAXACA 2019

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

LA PRESENTE TESIS TITULADA

"SISTEMAS DINÁMICOS APLICADOS A MODELOS CON PRESIÓN SOCIAL"

PRESENTADA POR LA SUSTENTANTE DE LICENCIATURA: **C. EMMA BEATRIZ HERNÁNDEZ BAUTISTA** BAJO LA DIRECCION DE LA **DRA. BEATRIZ CARELY LUNA OLIVERA** Y EL **DR. JOSÉ GEISER VILLAVICENCIO PULIDO**, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITÉ EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE **LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS**.

DRA. BEATRIZ CARELY LUNA OLIVERA

DIRECTORA

DR. JOSÉ GEISER VILLAVICENCIO PULIDO

CO-DIRECTOR

DR. JUAN MANUEL PÉREZ ABARCA

PRESIDENTE

DRA. ERÉNDIRA MUNGUÍA VILLANUEVA

SECRETARIA

DR. VIRGILIO VÁZQUEZ HIPÓLITO

VOCAL



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

Oficio No. MA011-19

Loma Bonita Oaxaca a 25 de enero del 2019

Asunto: Asignación de sinodales de tesis

M.E. Yesenia Barrientos Arenal

Jefa del departamento de servicios escolares

PRESENTE

Mediante la presente, le informo que la Vicerrectoría Académica, ha designado a los siguientes profesores como sinodales del examen profesional de la alumna **Emma Beatriz Hernández Bautista**, quien defenderá su trabajo de tesis titulado "**Sistemas dinámicos aplicados a modelos con presión social**", para obtener el título de Licenciada en Matemáticas Aplicadas.

Titulares:

Presidente: Dr. Juan Manuel Pérez Abarca

Secretario: Dra. Eréndira Munguía Villanueva

Vocal: Dr. Virgilio Vázquez Hipólito

Suplentes:

Dr. Hiram Netzahualcoyotl García Lozano

M.C. Iván Guadalupe Mendoza Alonzo

Sin otro particular me despido quedando a sus ordenes para cualquier aclaración.



ATENTAMENTE

Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas

Jefe de carrera de la Lic. en Matemáticas Aplicadas

Universidad del Papaloapan

Vo.Bo.

M.C. Hector López Arjona

Vicerector Académico

c.c.p. M.C. Héctor López Arjona. Vicerrector académico

c.c.p. M.E. Yesenia Barrientos Arenal. Jefa de servicios escolares

Índice general

Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Resumen	vii
Abstract	viii
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Objetivos	1
1.3. Metodología	2
1.4. Justificación	2
2. Preliminares de Sistemas Dinámicos Continuos	3
2.1. Definiciones de Álgebra Lineal	4
2.2. Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	8
2.2.1. Soluciones de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales	10
2.3. Sistemas No Lineales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	12
2.3.1. Dependencia de Parámetros y Condiciones Iniciales	16
2.3.2. Teoría Local Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales	18
2.3.3. Estabilidad en Sistemas de Ecuaciones Diferenciales	22
2.3.4. Tipos de Puntos de Equilibrio en \mathbb{R}^2	27
2.4. Conjugación Topológica	28
2.5. Teoría Cualitativa de Bifurcaciones	32
2.5.1. Estabilidad Estructural	33
2.5.2. Tipos de Bifurcación	35
2.5.3. Bifurcación Hacia Atrás	43
3. Introducción a la Modelación de Fenómenos Sociales	45
3.1. Preliminares de Modelos de presión social	46
3.1.1. Modelo SIR	47
3.1.2. Modelo SIS	49

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
3.1.3. Número reproductivo básico	50
3.1.4. Bifurcación Hacia Atrás	53
4. Modelo Matemático con Presión Social Positiva	56
4.1. Presentación del Modelo	56
4.2. Análisis de Bifurcación en el Equilibrio Libre de Conductas Antisociales . . .	58
4.2.1. Análisis Particular del Modelo	61
4.2.2. Simulación	62
5. Conclusiones	72
Bibliografía	73

Dedicatoria

♥ *Para mi amada familia..., Graciela, Rafa y Gonso. La razón de mi existir.*

Planta tu propio jardín y decora tu propia alma,
antes de esperar a que alguien te traiga flores.
(*Virginia. A. Shoffstall.*)

Agradecimientos

Todos tenemos a alguien que nos persigue a cualquier lugar. Alguien que saca siempre lo mejor de ti mismo y te conoce perfectamente. Alguien que es tu mejor amiga y que está junto a ti...

Toda mi gratitud para mi madre, por ser mi fortaleza y el pilar de mi vida. Por apoyarme incondicionalmente en cada etapa, pese a las adversidades e inconvenientes que se presentaron.

Agradezco a mis directores de tesis la Dra. Beatriz Carely Luna Olivera y el Dr. José Geiser Villavicencio Pulido, quienes con su experiencia, conocimiento y motivación me orientaron en la realización de éste trabajo, por el tiempo dedicado y su paciencia. Además de sus consejos, enseñanzas y apoyo. También doy las gracias al Dr. Juan Manuel Pérez Abarca, la Dra. Eréndira Munguía Villanueva y al Dr. Virgilio Vázquez Hipólito, por dedicar su tiempo a la revisión de ésta tesis.

Finalmente, agradezco también a todos los docentes que me motivaron a desarrollarme como profesional y contribuyeron en mi formación académica compartiendo sus conocimientos en cada clase. A la Universidad del Papaloapan.

Gracias a ti también, RFG.

Resumen

En las últimas dos décadas se empezaron a desarrollar modelos denominados de presión social. Éstos modelos intentan explicar cómo influye la presión del grupo social que rodea a una persona en su recuperación de situaciones consideradas comportamientos antisociales.

Los modelos planteados se basaron en modelos anteriores que habían sido probados por la epidemiología, particularmente los modelos *SIR* que considera individuos susceptibles (*S*), individuos infecciosos (*I*) e individuos recuperados (*R*), y los modelos *SIS* que consideran individuos susceptibles (*S*) e individuos infecciosos (*I*), y una vez recuperados los infectados vuelven a ser susceptibles (*S*). Algunos resultados del análisis de los modelos de presión social mostraron que si los individuos recuperados se apoyan entre sí en la decisión de no reincidir en hábitos dañinos, el número de individuos con trastorno disminuye, mientras que se observó que si los recuperados debilitan su convicción al sentirse presionados por sus pares hay un incremento en el número de individuos con trastornos.

En esta tesis se revisarán modelos del tipo *SIR* y *SIS* para comprender su dinámica y se analizará un modelo que considere la presión positiva de los pares. Particularmente se estudiará la aparición del fenómeno denominado bifurcación hacia atrás, ya que ésta nos ayudará a determinar si la recaída en los contextos anteriores es insuperable para los individuos recuperados, dependiendo de su interacción con ambientes que conducen o refuerzan la persistencia de estos trastornos.

Palabras Claves: *Presión Social, Pares, Bifurcación Hacia Atrás, Modelo, SIR, SIS.*

Abstract

In the last two decades the researchers began to develop the so-called peer pressure models. These models explain how the social pressure around an individual contributes in his recovery of situation considered anti-social behaviours.

The proposed model was based on previous models that had been tried by the epidemiology, particularly the *SIR* model which considers susceptible individuals, (S), infected individuals (I) and recovered individuals (R) and the *SIS* models which considers susceptible individuals (S) and infected individuals (I), and in this case, susceptible individuals will be in the susceptible class again when they have been recovered from the infectious disease. Some results of the analysis of peer pressure models showed that if recovered individual from antisocial behaviours supported themselves in the decision of no-relapse into harmful habits then the number of individuals with antisocial behaviours decrease, on the other hand, it was observed that if the recovered weaken their conviction by the pressured by their peer there is an increase in the number of individuals with disorders.

In this thesis, models type *SIR* and *SIS* was analyzed to understand their dynamics, and we analyze a model which consider positive peer pressure. Particularly we studied a phenomenon called backward bifurcation, which it will help us to determine if the relapse in previous context is insuperable for recovered individuals depending on their interaction with environments that lead or re-inforce the persistence of these disorders.

Keywords: *Peer Pressure, Peers, Backward Bifurcation, Model, SIR, SIS.*

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del problema

La presión social negativa es la influencia que ejerce una o varias personas sobre otra para que adquieran conductas antisociales, que afecten la integridad física y emocional de ésta última, por ejemplo, los individuos presionados podrían caer en el consumo de drogas o presentar trastornos de alimentación como bulimia o anorexia. Cuando la presión social es ejercida sobre individuos con los cuales se comparten intereses, por ejemplo, estudiantes en una universidad, empleados en una industria, es llamada presión social por pares.

Los modelos matemáticos que estudian la presión por pares negativa revelan la aparición del fenómeno denominado bifurcación hacia atrás.

En éste trabajo se construirá y analizará un modelo matemático considerando: una población totalmente susceptible de presentar conductas antisociales debido a la presión de los pares y el efecto de la presión social positiva en dicha población (Johnson (2012); González et al. (2003); McMillon et al. (2014); Sánchez et al. (2007); Song et al. (2006)). Es decir, a diferencia de trabajos anteriores se considerará la presión social positiva en lugar de la negativa y se determinará si este fenómeno es suficiente para que el modelo propuesto no presente una bifurcación hacia atrás.

1.2. Objetivos

Objetivo General

Comprender y analizar a través de modelos matemáticos el efecto de la presión positiva de los pares, en poblaciones susceptibles a problemas sociales.

Objetivos Específicos

- ◆ Construir un modelo matemático para describir la dinámica de una población totalmente susceptible a que sus individuos presenten conductas antisociales.

- ◆ Determinar la dirección de la bifurcación cuando $R_0 = 1$ y su implicación en la existencia de estados de equilibrios endémicos.
- ◆ Comprender los mecanismos sociales que llevan a la existencia de equilibrios endémicos para $R_0 > 1$.
- ◆ Comprender los mecanismos sociales que llevan a la existencia de equilibrios endémicos múltiples cuando $R_0 < 1$.

1.3. Metodología

1. Revisar los modelos clásicos de la epidemiología matemática, particularmente los modelos *SIR* y *SIS*.
2. Calcular el número reproductivo básico, R_0 , asociado a cada modelo epidemiológico.
3. Aplicar resultados de la teoría de los sistemas dinámicos continuos para el análisis de los modelos *SIR* y *SIS*.
4. Proponer un modelo que involucre la presión social por pares positiva.
5. Aplicar la teoría de sistemas dinámicos para el análisis y desarrollo del modelo mencionado.
6. Simular y explicar posibles escenarios para las soluciones del modelo.

1.4. Justificación

Los estudios actuales en modelos de presión social revelan la aparición de una bifurcación hacia atrás debido a la presión social negativa, ésta tesis tiene su justificación en el estudio de lo que sucede cuando en lugar de enfrentarse a una presión social por pares negativa los individuos involucrados en algún problema social se enfrentan a la presión social positiva por parte de sus pares.

A continuación se mencionarán conceptos y teoremas útiles para el desarrollo de ésta tesis, posteriormente en el capítulo 3 presentaremos los preliminares de presión social, así como los modelos *SIR* y *SIS* que son base para el modelo que se propondrá más adelante. En el capítulo 4 propondremos un modelo general con presión social positiva, el cual analizaremos usando los conceptos y resultados mencionados en el capítulo 2. En este mismo capítulo se presentará el análisis del modelo utilizando una función particular, además se mostrará el comportamiento de éste con un conjunto de parámetros. Finalmente, en el capítulo 5 daremos algunas conclusiones sobre el trabajo realizado.

Capítulo 2

Preliminares de Sistemas Dinámicos Continuos

Un modelo matemático es una representación (abstracta) e idealización de un fenómeno o aspecto real, está constituido por expresiones y formalismo matemático, como pueden ser ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales parciales, ecuaciones en diferencias, variables aleatorias, distribuciones de probabilidad, integrales, entre otros. Éstos modelos pueden ser estáticos, es decir, permanecen constantes en el tiempo o dinámicos, lo que significa que algunos elementos del modelo no permanecen constantes (se consideran como funciones de tiempo).

Las ecuaciones diferenciales ordinarias tienen aplicaciones en problemas del ‘mundo real’. Con la teoría y resultados que se han obtenido a través de los años se han podido abordar problemas diversos, y darles una interpretación; aunque las soluciones, la mayoría de las veces no son exactas, pueden ser muy cercanas a lo que realmente está pasando y con ello se puede ayudar a predecir o tener una idea de lo que podría ocurrir en un tiempo futuro.

Como primer paso para construir un modelo, se plantea claramente el problema, con ello formulamos una o más ecuaciones diferenciales que constituyen el modelo, aunque no se logre encontrar una solución explícita, con un buen análisis se puede obtener información sobre el comportamiento de las soluciones del modelo. Cuando hay parámetros en estos sistemas de ecuaciones se presentan bifurcaciones.

Varias ecuaciones diferenciales representan un sistema el cual puede ser *lineal* (donde cada ecuación es de primer grado) o *no lineal*. Si tenemos un sistema no lineal podemos obtener una aproximación a un sistema lineal (*linealización*). En primer lugar se obtendrán los puntos de equilibrio de nuestro sistema, pues aquí el sistema no varía, posteriormente calculamos su derivada que en este caso será el *jacobiano* y con ello se podrá utilizar la teoría de los sistemas lineales (esto es posible, aplicando un teorema que se mencionará más adelante).

2.1. Definiciones de Álgebra Lineal

Los sistemas dinámicos se auxilian del álgebra lineal, ya que al trabajar con sistemas no lineales éstos se llevan a una linealización, obteniendo así una expresión matricial de ellos. Por este motivo, a continuación se introducirán los conceptos y teoremas necesarios de álgebra lineal (ver Hoffman et al. (1973)) que facilitarán la comprensión de las siguientes secciones.

Definición 2.1.1. Sea F un conjunto de objetos x, y, z, \dots y dos operaciones sobre los elementos de F ; la primera operación, llamada adición, asocia a cada par de elementos $x, y \in F$ un elemento $(x + y) \in F$; la segunda operación llamada multiplicación, asocia a cada par $x, y \in F$, un elemento $xy \in F$. Se designa por F el conjunto de los números reales o el conjunto de los número complejos, las operaciones mencionadas anteriormente satisfacen lo siguiente:

1. La adición es conmutativa,

$$x + y = y + x,$$

para cualquier x e $y \in F$.

2. La adición es asociativa

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$

para cualquier x, y, z de F .

3. Existe un elemento único $0 \in F$ tal que

$$x + 0 = 0 + x,$$

para todo x en F .

4. A cada elemento x de F corresponde un elemento único $(-x) \in F$ tal que

$$x + (-x) = 0.$$

5. La multiplicación es conmutativa,

$$xy = yx,$$

para cualquier elemento x e $y \in F$.

6. La multiplicación es asociativa,

$$x(yz) = (xy)z,$$

para cualquier $x, y, z \in F$.

7. Existe un elemento $e \in F$, no nulo y único, tal que para todo $x \in F$, cumple que $ex = xe = x$.

8. A cada elemento no nulo $x \in F$ le corresponde un único elemento $x^{-1} \in F$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.
9. La multiplicación es distributiva respecto de la adición; esto es $x(y+z) = xy + yz$, para cualesquiera $x, y, z \in F$.

El conjunto F , junto con las operaciones anteriormente mencionadas, es llamado *cuerpo*.

Definición 2.1.2. Un *espacio vectorial* o también llamado espacio lineal, consta de lo siguiente:

1. Un cuerpo F de escalares.
2. Un conjunto V de objetos llamados vectores.
3. Una regla u operación llamada adición, que asocia a cada par de vectores $\alpha, \beta \in V$, un vector $\alpha + \beta \in V$, al cual se le llama suma de α y β . La adición cumple las siguientes propiedades:
 - a) La adición es conmutativa, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
 - b) La adición es asociativa, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
 - c) Existe un único vector $0 \in V$, llamado vector nulo, tal que $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, para todo $\alpha \in V$.
 - d) Para cada vector $\alpha \in V$, existe un único vector $-\alpha \in V$, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$.
4. Una regla u operación llamada multiplicación por escalar, que asocia cada escalar c de F y cada vector $\alpha \in V$ a un vector $c\alpha \in V$, llamado producto escalar de c y α de tal modo que:
 - a) $1\alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in V$,
 - b) $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$,
 - c) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$,
 - d) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

Esta definición establece, que un espacio vectorial es un objeto compuesto, el cual consta de un cuerpo, de un conjunto de ‘vectores’ y de dos operaciones con ciertas propiedades especiales.

Definición 2.1.3. Sea V un espacio vectorial sobre F . Un subconjunto S de V se dice *linealmente dependiente*, si existen vectores distintos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S$ y escalares $c_1, \dots, c_n \in F$, no nulos, tales que

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice *linealmente independiente*.

Definición 2.1.4. Sea W un subconjunto de un espacio vectorial V . Sean v_1, v_2, \dots, v_m ; cualquier conjunto finito de vectores en W y escalares cualesquiera a_1, a_2, \dots, a_m ; se dice que la suma $a_1v_1 + \dots + a_mv_m$ es una *combinación lineal finita sobre W* .

Definición 2.1.5. El conjunto de generadores de W ($Span(W)$), es el conjunto de vectores V que son combinaciones lineales finitas en W , éste recibe el nombre de subespacio de V generado por W .

Definición 2.1.6. Sea V un espacio vectorial. Una base de B es un conjunto de vectores linealmente independiente de V que genera al espacio V , es decir, $V = Span(B)$.

Si B es una base del espacio vectorial V , entonces todo vector $v \in V$ se puede escribir como combinación lineal finita en B .

Definición 2.1.7. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F y sea T un operador lineal sobre V . Un *valor propio* de T es un escalar λ de F tal que existe un vector no nulo v con $Tv = \lambda v$. Si λ es un valor propio de T , entonces:

- ◆ Cualquier v tal que $Tv = \lambda v$ se llama *vector propio* de T asociado al valor propio λ .
- ◆ La colección de todos los v tal que $Tv = \lambda v$ se llama *espacio propio* asociado a λ .

Los valores propios suelen recibir otro tipo de nombres, raíces características, eigenvalores, valores característicos, etc. Si T es cualquier operador y λ cualquier escalar, el conjunto de los vectores v que cumple $Tv = \lambda v$ es un subespacio de V .

Teorema 2.1.8. *Sea T un operador lineal sobre un espacio V de dimensión finita y sea λ un escalar. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. λ es valor propio de T .
2. El operador $(T - \lambda I)$ es singular, es decir, no invertible.
3. $\det(T - \lambda I) = 0$.

La propiedad 3 del Teorema 2.1.8 es muy importante, debido a que indica como encontrar los valores propios del operador lineal T .

Por otra parte $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ es un polinomio de grado m en la variable λ . Las raíces de dicho polinomio son llamadas valores propios de la matriz T .

Definición 2.1.9. Si A es una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo F , un valor propio de A en F es un escalar $\lambda \in F$ tal que la matriz $(A - \lambda I)$ es singular (no invertible).

Nótese que λ es un valor propio de la matriz A si y solo sí, $\det(A - \lambda I) = 0$ ó si $\det(\lambda I - A) = 0$.

Supóngase que A es una matriz de $n \times n$ con elementos reales o complejos. Sea λ_1 un valor propio de A , y v un vector columna tal que $Av = \lambda_1 v$. Entonces el sistema lineal $(A - \lambda_1 I)v = 0$ tiene una solución v no trivial.

A continuación se define $p(\lambda)$ de manera explícita.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \cdots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ recibe el nombre de *polinomio característico* de la matriz cuadrada A , el cual es un polinomio de grado n .

Definición 2.1.10. El número λ es un valor propio de A de multiplicidad k si λ es una raíz de multiplicidad k del polinomio característico $p(\lambda)$. Los valores propios de multiplicidad 1 se denominan valores característicos simples.

Teorema 2.1.11. Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de una matriz A de $n \times n$, son reales y distintos, entonces existe un conjunto de vectores propios correspondiente $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, los cuales forman una base para \mathbb{R}^n . La matriz $P = [v_1 v_2 \dots v_n]$ es invertible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n].$$

Definición 2.1.12. El operador norma de T se define como

$$\|T\| = \max_{|x| \leq 1} |T(x)|,$$

donde $|x|$ denota la norma Euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$, es decir,

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Para $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$, se tiene:

- a) $\|T\| \geq 0$ y $\|T\| = 0$ si y sólo si $T = 0$.
- b) $\|kT\| = |k| \|T\|$ para $k \in \mathbb{R}$.
- c) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

Lema 2.1.13. Sean $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces se cumple:

- ◆ $|T(x)| \leq \|T\| |x|$.
- ◆ $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$.
- ◆ $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.2. Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En esta sección se tomarán en cuenta los conceptos básicos del álgebra lineal que fueron mencionados en la sección anterior. De esta forma se introducirán algunas definiciones y teoremas importantes sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, los cuales se pueden encontrar en (Perko (2008)).

Un sistema está compuesto por un conjunto de elementos (componentes) y una estructura. Supóngase que F es un cuerpo. Se considera el problema de encontrar n escalares, es decir, n elementos de F , x_1, x_2, \dots, x_n , que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= y_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= y_2, \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= y_m. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde y_1, \dots, y_m y A_{ij} con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, son los elementos de F . El sistema (2.1) es llamado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Una solución del sistema (2.1) son los elementos $x_1, \dots, x_n \in F$ que satisfacen las ecuaciones del mismo simultáneamente. Si $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$, se dice que el sistema es homogéneo, o que cada una de las ecuaciones que lo componen es homogénea.

Un sistema de ecuaciones lineales se puede representar de forma matricial, con esto no será necesario seguir escribiendo las incógnitas, x_1, \dots, x_n , ya que realmente se operará con los coeficientes $A_{i,j}$ y los escalares y_i del sistema (2.1). Además, esto facilitará el análisis del sistema y será posible utilizar la teoría del álgebra lineal.

El sistema de ecuaciones lineales está dado por:

$$Ax = y,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

En este caso A recibe el nombre de matriz de los coeficientes del sistema.

Sea A una matriz de $m \times n$ sobre un cuerpo F , una función del conjunto de los pares enteros (i, j) , con $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Los elementos de esta matriz son los escalares $A_{i,j}$, x se define como una matriz de $n \times 1$ e y una matriz de $m \times 1$.

$Ax = y$ es una notación abreviada del sistema lineal. En la mayoría de los casos suele ser conveniente describir de esta manera un sistema de ecuaciones lineales.

Definición 2.2.1. Para el sistema general (2.1), supóngase que se seleccionan m escalares c_1, \dots, c_m . Se multiplica a la j -ésima ecuación por c_j y posteriormente se suman todos estos productos. Entonces se obtiene la ecuación

$$(c_1 A_{11} + \dots + c_m A_{m1})x_1 + (c_1 A_{1n} + \dots + c_m A_{mn})x_n = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m.$$

A esta ecuación se le llama combinación lineal de las ecuaciones de (2.1).

Definición 2.2.2. Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes, si cada ecuación de cada sistema es una combinación lineal de la ecuación del otro sistema.

Definición 2.2.3. Supóngase que la matriz A de $n \times n$ tiene k valores propios negativos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ y $n - k$ valores propios positivos $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$, todos distintos.

Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ el conjunto correspondiente de vectores propios. Entonces el *subespacio estable e inestable* de $x' = Ax$, los cuales son denotados por E^s y E^u respectivamente, son los espacios generados por v_1, \dots, v_k y v_{k+1}, \dots, v_n respectivamente, es decir;

$$\begin{aligned} E^s &= \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}, \\ E^u &= \text{Span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}. \end{aligned}$$

Si la matriz A , tiene valores propios imaginarios puros, existe también un *subespacio central* E^c .

Considérese $w_j = u_j + iv_j$ un vector generalizado de la matriz A correspondiente al valor propio $\lambda_j = a_j + ib_j$.

Definición 2.2.4. Sea $\lambda_j = a_j + ib_j$, $w_j = u_j + iv_j$ y $B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$, una base de \mathbb{R}^n , entonces

$$\begin{aligned} E^s &= \text{Span}\{u_j, v_j \mid a_j < 0\}, \\ E^c &= \text{Span}\{u_j, v_j \mid a_j = 0\}, \\ E^u &= \text{Span}\{u_j, v_j \mid a_j > 0\}, \end{aligned}$$

con $j \in \mathbb{N}$. En otras palabras, E^s, E^c, E^u son los subespacios de \mathbb{R}^n generados por la parte real o imaginaria de los vectores generalizados w_j los cuales corresponden al valor propio λ_j .

2.2.1. Soluciones de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Las variables de estado de un sistema son el conjunto mínimo de variables $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Si conocemos cada una de éstas variables en un tiempo t_0 y la información de entrada aplicada al sistema a partir de dicho tiempo, éstas variables permitirán conocer la situación del sistema en cualquier tiempo. Las variables de estado conforman un espacio de estados $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$. Los sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales (*EDO's*) en las n variables de estado x_1, \dots, x_n tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + F_1(t), \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + F_2(t), \\ &\vdots, \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + F_n(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde los coeficientes a_{ij} y las funciones F_i son constantes o funciones de t pero no dependen de las variables de estado, para $i, j = 1, \dots, n$.

El sistema (2.2) se puede escribir en forma matricial, como se muestra a continuación:

$$x' = Ax + F, \quad (2.3)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}.$$

Si se tiene una condición inicial, entonces se tiene un problema con condición inicial

$$x' = Ax + F,$$

con

$$x(t_0) = x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix},$$

donde los x_1^0, \dots, x_n^0 son constantes cualesquiera y t_0 es un punto del intervalo I , en la mayoría de los casos se supone que A es una matriz constante y que I es la recta real.

Teorema 2.2.5. *Sistemas equivalentes de ecuaciones lineales tienen exactamente las mismas soluciones.*

Teorema 2.2.6. *Considérese el sistema lineal $Ax = b$ de $n \times n$.*

- ◆ *Si $\det A \neq 0$ entonces el sistema no homogéneo tiene la solución única $x = A^{-1}b$ y el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene sólo la solución trivial $x = 0$.*

- ◆ Si $\det A = 0$, entonces A es singular, el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene infinidad de soluciones, y el sistema $Ax = b$ no tiene ninguna solución, o tiene un número infinito de ellas.
- ◆ $Ax = b$ tiene una única solución si y sólo si $\det A \neq 0$; es decir, si y sólo si A es invertible.

Teorema 2.2.7 (Teorema Fundamental para Sistemas Lineales). *Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces para un x_0 dado, el problema con valor inicial*

$$x' = Ax, \tag{2.4}$$

$$x(0) = x_0,$$

tiene una única solución dada por

$$x(t) = e^{At}x_0. \tag{2.5}$$

En analogía con la solución de una ecuación diferencial con una variable de estado, se puede suponer que el sistema lineal

$$x' = Ax, \tag{2.6}$$

tiene una solución de la forma $x = ve^{\lambda t}$ para alguna constante λ y algún vector v . Sustituyendo $ve^{\lambda t}$ en el sistema (2.6) se tiene

$$\lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t}. \tag{2.7}$$

Dividiendo entre $e^{\lambda t}$, la ecuación (2.7) queda expresada de la siguiente manera

$$\lambda v = Av. \tag{2.8}$$

Por lo tanto $x = ve^{\lambda t}$ es una solución de (2.7).

En el caso que se está describiendo donde se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, cuya matriz de coeficientes es A , si se supone que tiene valores propios reales distintos λ_1 y λ_2 con v_1, v_2 vectores característicos correspondientes, entonces $x_1 = v_1e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = v_2e^{\lambda_2 t}$ son soluciones de la ecuación (2.7).

Teorema 2.2.8. *Supóngase que A es una matriz de $n \times n$ con elementos reales; todos los valores propios λ_i con $1 \leq i \leq n$ son reales no necesariamente distintos y todos los espacios característicos no son necesariamente diferentes. Supóngase también que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base característica correspondiente de \mathbb{R}^n . Entonces para cada x_0 existe un conjunto único de constantes c_1, \dots, c_n tal que*

$$x = c_1v_1e^{\lambda_1 t} + \dots + c_nv_ne^{\lambda_n t} \tag{2.9}$$

es la única solución del problema con valor inicial $x' = Ax$, $x(0) = x_0$.

2.3. Sistemas No Lineales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En la sección anterior se enunciaron conceptos y resultados sobre sistemas lineales de la forma $x' = Ax$. Éstos tienen una única solución en cada punto x_0 en el espacio fase \mathbb{R}^n , la cual está dada por $x(t) = e^{At}x_0$ y que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

En este sentido es fundamental presentar la teoría de los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales, la cual podemos encontrar en (Perko (2008)). Así mismo, se incluyen algunas definiciones, como son, la definición de estabilidad de un punto crítico y estabilidad de la solución del sistema.

De manera general, un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$x' = f(x) \qquad f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \qquad (2.10)$$

no será posible resolver de manera analítica; sin embargo, si se tiene una gran cantidad de información cualitativa del sistema, ésta nos permitirá conocer el comportamiento local de la solución.

Definición 2.3.1. Supongamos que V_1 y V_2 son espacios lineales con normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ que satisfacen las condiciones (a – c) de la definición (2.1.12). Entonces

$$F : V_1 \rightarrow V_2$$

es continua en $x_0 \in V_1$, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $x \in V_1$ y $\|x - x_0\| < \delta$ implica que

$$\|F(x) - F(x_0)\|_2 < \epsilon.$$

Al ser F continua en un conjunto $E \subset V_1$, F es continua en cada punto $x \in E$. Si F es continua en $E \subset V_1$, escribiremos $F \in C(E)$.

Definición 2.3.2. La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si hay una transformación $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n)$ que satisface

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h|}{|h|} = 0.$$

La transformación lineal $Df(x_0)$ es llamada *derivada* de f en x_0 .

Teorema 2.3.3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en x_0 , entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, con $i, j = 1, \dots, n$ existen en x_0 y para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j.$$

Por tanto, si f es una función diferenciable, la derivada Df es dada por la matriz Jacobiana:

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}.$$

Definición 2.3.4. Dada una función vectorial F diferenciable tal que

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

y cuyas componentes son funciones reales, $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, entonces

$$J_F(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

indica la derivada de una función multivariable.

Teorema 2.3.5. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces $f \in C^1(E)$ si y sólo si las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, existen y son continuas en E .

Supongamos que $f(x)$ es al menos tres veces continuamente diferenciable en una bola $B_r(y) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}$, entonces por el Teorema de Taylor (ver en Spivak (1996)) se tiene

$$f(x) = f(y) + J(y)(x - y) + P(x). \quad (2.11)$$

Donde $J(y)$ es la matriz Jacobiana de f en y , y $P(x)$ es el término residual.

Si se supone que $f(y) = 0$, se puede escribir $x' = f(x)$ como la siguiente expresión en y

$$x' = f(x) = J(y)(x - y) + P(x). \quad (2.12)$$

Con ayuda de la matriz Jacobiana se puede aproximar linealmente un sistema no lineal.

Definición 2.3.6. Una función $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es analítica en el conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$, si cada componente $f_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, es analítica en E , es decir, para $j = 1, \dots, n$; $f_j(x)$ tiene una serie convergente de Taylor en alguna vecindad de cada punto en E .

Definición 2.3.7. Bajo la hipótesis que $f \in C^1(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n

$$|f(x) - f(y)| \leq K_0 |x - y|.$$

Una ϵ -vecindad de un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se refiere a una bola abierta de un radio positivo ϵ ; es decir,

$$N_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \epsilon\}.$$

Definición 2.3.8. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Una función $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que satisface una *condición de Lipschitz* en E si existe una constante positiva K tal que para todo $x, y \in E$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|.$$

Definición 2.3.9. La función f se dice que es *localmente Lipschitz* en E si para cada punto $x_0 \in E$ existe una ϵ -vecindad de x_0 , $N_\epsilon(x_0) \subset E$ y una constante $K_0 > 0$ tal que para todo $x, y \in N_\epsilon(x_0)$.

Lema 2.3.10. Sea E un subconjunto de \mathbb{R}^n y $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces, si $f \in C^1(E)$, f es localmente Lipschitz en E .

Definición 2.3.11. Sea V un espacio lineal normado, entonces la sucesión $\{u_k\} \subset V$ es llamada una *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que $k, m \geq N$ implica que,

$$\|u_k - u_m\| < \epsilon.$$

El espacio V es llamado *completo* si toda sucesión de Cauchy en V converge a un elemento en V .

Teorema 2.3.12. El espacio $C(I)$ de las funciones continuas en el intervalo I , es un espacio lineal normado completo.

Consideremos el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$x' = f(x), \tag{2.13}$$

y el sistema no autónomo

$$x' = f(x, t) \tag{2.14}$$

donde la función f puede depender de la variable independiente t ; algunos sistemas no autónomos (2.14) con $x \in \mathbb{R}^n$ se pueden escribir como un sistema autónomo (2.13) con $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, usando $x_{n+1} = t$ y $x'_{n+1} = 1$.

En palabras más simples un sistema autónomo es aquel donde la función es independiente del tiempo t .

Definición 2.3.13. Supongamos que $f \in C(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Entonces $x(t)$ es una solución de la ecuación

$$x' = f(x), \tag{2.15}$$

en el intervalo I , si $x(t)$ es diferenciable en I , para todo $t \in I$, $x(t) \in E$ y

$$x' = f(x(t)).$$

Sea $x_0 \in E$, donde $x(t)$ es una solución del problema de valor inicial

$$x' = f(x), \tag{2.16}$$

$$x(t_0) = x_0,$$

en un intervalo I , si $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$, más aún $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (2.16) en el intervalo I .

Teorema 2.3.14 (Teorema Fundamental de Existencia-Unicidad). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a x_0 y $f \in C^1(E)$, entonces existe un $a > 0$ tal que el problema de valor inicial*

$$x' = f(x),$$

$$x(0) = x_0,$$

tiene una única solución $x(t)$ en el intervalo $[-a, a]$.

Definición 2.3.15. Sea V un espacio lineal normado y $T : V \rightarrow V$ tal que

$$\|T(u) - T(v)\| \leq c\|u - v\| \tag{2.17}$$

para todo $u, v \in V$ con $0 < c < 1$. T es llamada contracción de mapeos.

Teorema 2.3.16 (El principio de contracción de mapeos). *Sea V un espacio lineal normado completo y $T : V \rightarrow V$ una contracción de mapeos.*

Entonces existe un único $u \in V$ tal que $T(u) = u$.

Sea $f \in C^1(E)$ y $x_0 \in E$. Para $[-a, a]$ y $u \in C(I)$, tenemos

$$T(u)(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s))ds.$$

Lema 2.3.17. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a x_0 y supongamos que $f \in C^1(E)$. Sea $u_1(t)$ y $u_2(t)$ las soluciones del problema de valor inicial (2.16) en el intervalo I_1 e I_2 . Entonces $\theta \in I_1 \cap I_2$ y si I es algún intervalo abierto que contiene al θ y contenido en $I_1 \cap I_2$. Se sigue que $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in I$.*

Teorema 2.3.18. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y asumimos que $f \in C^1(E)$. Entonces para cada punto $x_0 \in E$, existe un intervalo maximal M en el cual el problema de valor inicial (2.16) tiene una única solución, $x(t)$; es decir, si el problema de valor inicial tiene una solución $y(t)$ en el intervalo I entonces $I \subset M$ y $y(t) = x(t)$ para todo $t \in I$. Por tanto, el intervalo maximal M es abierto, $M = (\alpha, \beta)$.*

Definición 2.3.19. El intervalo (α, β) en el Teorema (2.3.18) es llamado el intervalo maximal de existencia de la solución $x(t)$ del problema de valor inicial (2.16).

Teorema 2.3.20. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al punto x_0 , sea $f \in C^1(E)$ y $[\alpha, \beta)$ el intervalo derecho maximal de existencia de la solución $x(t)$ del problema de valor inicial (2.16). Se asume que $\beta < \infty$. Entonces, dado algún conjunto compacto $K \subset E$, existe un $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $x(t) \notin K$.*

Corolario 2.3.21. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene x_0 , además $f \in C^1(E)$, y sea $[0, \beta)$ el intervalo derecho maximal de existencia de la solución $x(t)$ del problema con valor inicial (2.16). Asumimos que existe un conjunto compacto $K \subset E$ tal que*

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid y = x(t) \text{ para algún } t \in [0, \beta)\} \subset K.$$

Se sigue que $\beta = \infty$; es decir, el problema de valor inicial (2.16) tiene una solución $x(t)$ en $[0, \infty)$.

Teorema 2.3.22. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a x_0 , además $f \in C^1(E)$. Supóngase que el problema de valor inicial (2.16) tiene una única solución $x(t, x_0)$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Existe un $\delta > 0$ y una constante positiva K tal que para todo $y \in N_\delta(x_0)$ el problema de valor inicial*

$$x' = f(x), \tag{2.18}$$

$$x(0) = y,$$

tiene una única solución $x(t, y)$ definida en $[a, b]$, la cual satisface

$$|x(t, y) - x(t, x_0)| \leq |y - x_0| e^{K|t|}.$$

Más aún

$$\lim_{y \rightarrow x_0} x(t, y) = x(t, x_0)$$

uniformemente para todo $t \in [a, b]$.

2.3.1. Dependencia de Parámetros y Condiciones Iniciales

El Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad (Teorema 2.3.14), establece que si $f \in C^1$, el problema de valor inicial

$$x' = f(x), \tag{2.19}$$

$$x(0) = y,$$

tiene una única solución $x(t)$ definida en un intervalo maximal de existencia (α, β) .

Un problema de valor inicial, como se muestra en (2.19) puede depender de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}^n$; en otras palabras, la función $f(x)$ es remplazada por $f(x, \mu)$, por tanto la solución ahora está representada por $u(t, y, \mu)$, la cual depende de la condición inicial y el parámetro μ .

Lema 2.3.23 (Gronwall). *Supóngase que $g(t)$ es una función de valor real que satisface lo siguiente, $g(t) \geq 0$ y además*

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s) ds,$$

para todo $t \in [0, a]$, donde C y K son constantes positivas. Se sigue que para todo $t \in [0, a]$, $g(t)$ cumple

$$g(t) \leq Ce^{Kt}.$$

Teorema 2.3.24 (Dependencia de Condiciones Iniciales). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a x_0 y $f \in C^1(E)$. Entonces, existe $a > 0$ y $\delta > 0$ tal que para todo $y \in N_\delta(x_0)$ el problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} x' &= f(x), \\ x(0) &= y, \end{aligned} \tag{2.20}$$

tiene una única solución $u(t, y)$ con $u \in C^1(G)$ donde $G = [-a, a] \times N_\delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$; por tanto, para cada $y \in N_\delta(x_0)$, $u(t, y)$ es una función dos veces continuamente diferenciable en t para $t \in [-a, a]$.

Definición 2.3.25. Sea

$$\begin{aligned} \Phi' &= A(t, y_0)\Phi, \\ \Phi(0, y_0) &= I, \end{aligned} \tag{2.21}$$

con $A(t, y_0) = Df[u(t, y_0)]$ e I la matriz identidad de $n \times n$.

Sea

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0) = \Phi(t, y_0),$$

para todo $t \in [-a, a]$, donde $\Phi(t, y_0)$ es la matriz fundamental de solución del problema de valor inicial (2.21), el cual es continuo en t y en $y_0 \in N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ para todo $t \in [-a, a]$.

Corolario 2.3.26. *Bajo las hipótesis del Teorema (2.3.24);*

$$\Phi(t, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, y), \tag{2.22}$$

si y solo si $\Phi(t, y)$ es la matriz fundamental de solución de

$$\begin{aligned} \Phi' &= Df[u(t, x)]\Phi, \\ \Phi(0, y) &= I, \end{aligned}$$

para $t \in [-a, a]$, $y \in N_\delta(x_0)$.

Si $f \in C^r(E)$, la solución $u(t, y)$ del problema de valor inicial (2.19) está en $C^r(G)$, donde G es definida como en el Teorema (2.3.24). Por otra parte, si $f(x)$ es una función (real) analítica, para $x \in E$, entonces $u(t, y)$ es analítica en el interior de G .

Además de la continuidad de la solución $u(t, y)$ del problema de valor inicial (2.19), se sigue lo siguiente, para cada $t \in [-a, a]$

$$\lim_{y \rightarrow x_0} u(t, y) = u(t, x_0).$$

Teorema 2.3.27 (Dependencia de Parámetros). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{n+m} que contiene el punto (x_0, μ_0) donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$, asumimos que $f \in C^1(E)$. Entonces existe $a > 0$ y $\delta > 0$ tal que para todo $y \in N_\delta(x_0)$ y $\mu \in N_\delta(\mu_0)$, el problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} x' &= f(x, \mu), \\ x(0) &= y, \end{aligned} \tag{2.23}$$

tiene una única solución $u(t, y, \mu)$ con $u \in C^1(G)$ donde $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \times N_\delta(\mu_0)$.

2.3.2. Teoría Local Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales

Anteriormente se expusieron resultados sobre la dependencia de parámetros en un problema de valor inicial. En este apartado se enunciarán algunos resultados sobre la teoría local cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$x' = f(x). \quad (2.24)$$

Además de algunos teoremas que permiten la linealización de un sistema no lineal, los cuales se pueden encontrar en (Perko (2008); Hirsch et al. (1983)).

Definición 2.3.28. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f \in C^1(E)$. Para $x_0 \in E$, supongamos que $\phi(t, x_0)$ es la solución del problema de valor inicial. Consideremos

$$x' = f(x), \quad (2.25)$$

$$x(0) = x_0,$$

definido en su intervalo de existencia maximal $I(x_0)$. Entonces para $t \in I(x_0)$, el conjunto de mapeos $\phi(t)$ definido por

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

es llamado *el flujo de la ecuación diferencial o el flujo definido por (2.24)*; ϕ_t también se conoce como flujo del campo vectorial $f(x)$.

Definición 2.3.29. Un subconjunto ordenado en el espacio de estados \mathbb{X} ,

$$\sigma(x_0) = \{x \in \mathbb{X} \mid x = \phi_t(x_0) \text{ para todo } t \in I \subset \mathbb{R}\},$$

es llamada una órbita (curva solución o trayectoria), que comienza en el estado inicial x_0 .

Definición 2.3.30. Una órbita σ puede descomponerse en dos semiórbitas, una semiórbita positiva y una semiórbita negativa, las cuales se definen de la siguiente manera:

$$\sigma_+ := \{x \in \mathbb{X} \mid x = \phi_t(x_0), \text{ para todo } t \geq 0\}$$

y

$$\sigma_- := \{x \in \mathbb{X} \mid x = \phi_t(x_0), \text{ para todo } t < 0\}.$$

Definición 2.3.31. Una órbita periódica es aquella que satisface lo siguiente:

$$\sigma_{t+T}(x_p) = \sigma_t(x_p)$$

para algún $T > 0$, y para todo $t \in I \subset \mathbb{R}$.

Si consideramos que el punto inicial x_0 es fijo, y además $I = I(x_0)$, entonces el mapeo $\phi(\cdot, x_0) : I \rightarrow E$ define una curva solución o una trayectoria del sistema (2.24) a través del punto $x_0 \in E$. El mapeo $\phi(\cdot, x_0)$ se identifica con su gráfica en $I \times E$ y una trayectoria se visualiza como un movimiento a lo largo de una curva Γ a través del punto x_0 en el subconjunto E del espacio fase \mathbb{R}^n . Por otra parte, si x_0 varía a lo largo de $K \subset E$, el flujo de la ecuación diferencial (2.24), $\phi_t : K \rightarrow E$, puede ser visto como el movimiento de todos los puntos en el conjunto K .

Definición 2.3.32. El conjunto $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$ es definido como

$$\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times E \mid t \in I(x_0)\}.$$

Teorema 2.3.33. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f \in C^1(E)$. Entonces Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times E$ y $\phi \in C^1(\Omega)$.

Teorema 2.3.34. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y además $f \in C^1(E)$. Entonces para todo $x_0 \in E$, si $t \in I(x_0)$, $s \in I(\phi(x_0))$, se sigue que $s + t \in I(x_0)$ y

$$\phi_{s+t}(x_0) = \phi_s(\phi_t(x_0)).$$

Teorema 2.3.35. Bajo la hipótesis del Teorema (2.3.34), si $(t, x_0) \in \Omega$, existe una vecindad U de x_0 tal que $\{t\} \times U \subset \Omega$. De esta manera, el conjunto $V = \phi_t(U)$ es un abierto en E , además

$$\phi_{-t}(\phi_t(x)) = x \quad \text{para todo } x \in U$$

y

$$\phi_t(\phi_{-t}(y)) = y \quad \text{para todo } y \in V.$$

Definición 2.3.36. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , sea $f \in C^1(E)$ y $\phi_t : E \rightarrow E$ el flujo de la ecuación diferencial (2.24) definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Un conjunto $S \subset E$ es llamado *invariante* con respecto al flujo ϕ_t , si $\phi_t(S) \subset S$ para todo $t \in \mathbb{R}$, además S es llamado positivamente (o negativamente) invariante con respecto al flujo ϕ_t si $\phi_t(S) \subset S$ para todo $t \geq 0$ (o $t \leq 0$).

Definición 2.3.37. Sea $\phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ el flujo de la ecuación diferencial (2.24), un *punto de equilibrio* \hat{x} es tal que $\phi_t(\hat{x}) = \hat{x}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, \hat{x} también recibe el nombre de punto fijo o punto estacionario del flujo ϕ_t .

Supongamos que $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (2.24) y $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el flujo asociado a (2.24), para $x \in \mathbb{R}^n$, la aplicación $t \rightarrow \phi(t, x) = \phi_t(x)$; sea $\phi_t(\hat{x})$ la solución de (2.24) que pasa por \hat{x} cuando $t = 0$; la cual está definida para cada t en cierto intervalo abierto.

Si \hat{x} es un punto de equilibrio, por definición $\phi_t(\hat{x}) = \hat{x}$, por el Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones (Teorema 2.3.14),

$$x(t) \equiv \phi_t(\hat{x}) = \hat{x},$$

al derivar la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} x' &\equiv 0, \\ x' &= f(\hat{x}) \equiv 0. \end{aligned}$$

Por tanto \hat{x} es un cero del campo vectorial f , en otras palabras \hat{x} es un punto crítico o singular del campo vectorial f .

Si \hat{x} es un punto equilibrio de (2.24), se tiene que $f(0) = 0$, así por el *Teorema de Taylor*, podemos expresar $f(x)$ como

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)(x, x) + \dots$$

Debido a lo cual la función lineal $Df(0)x$ es una buena aproximación de la función no lineal $f(x)$ cerca de $x = 0$. Es razonable pensar que el comportamiento del sistema no lineal (2.24) cerca del punto $x = 0$ sea aproximado por el comportamiento de su linealización en $x = 0$. Esto ocurre cuando la matriz no tiene ceros o eigenvalores imaginarios puros. El sistema lineal $x' = Ax$ donde $A = Df(\hat{x})$ es llamada *linealización* de la ecuación diferencial no lineal (2.24) en \hat{x} .

Definición 2.3.38. Un punto de equilibrio es llamado *punto de equilibrio hiperbólico* de (2.24), si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(\hat{x})$ tiene parte real cero.

Definición 2.3.39. Un punto de equilibrio \hat{x} de (2.24) es llamado *punto sumidero* si todos los valores propios de la matriz $Df(\hat{x})$ tienen parte real negativa.

Definición 2.3.40. Un punto de equilibrio \hat{x} de (2.24) es llamado *punto fuente*, si todos los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real positiva.

Definición 2.3.41. Un punto de equilibrio \hat{x} de (2.24) es llamado *punto silla*, si es un punto de equilibrio hiperbólico y la matriz $Df(\hat{x})$ tiene al menos un valor propio con parte real positiva y al menos un valor propio con parte real negativa.

Teorema 2.3.42 (Teorema de la Variedad Estable). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen y $f \in C^1(E)$, sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (2.24). Supóngase que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa y $n - k$ valores propios con parte real positiva. Entonces existe una k - dimensional variedad diferenciable S tangente al subespacio estable E^s del sistema lineal $x' = Ax$ en 0 tal que para todo $t \geq 0$, $\phi_t(S) \subset S$ y para todo $x_0 \in S$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0;$$

y existe una $n - k$ dimensional variedad diferenciable U y el espacio E^u de $x' = Ax$ en 0 tal que para todo $t \leq 0$, $\phi_t(U) \subset U$ y para todo $x_0 \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

El Teorema de la Variedad Estable es un resultado importante en la teoría local cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias, nos dice que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema no lineal (2.24) tiene una variedad estable S y una variedad inestable U tangente a x_0 en el subespacio estable e inestable E^S y E^U del sistema linealizado $x' = Ax$, donde $A = Df(x_0)$. Por tanto, las variedades S y U tienen la misma dimensión que los subespacios E^S y E^U , además si ϕ_t es el flujo del sistema no lineal (2.24), se tiene que S y U son positivamente y negativamente invariantes bajo ϕ_t respectivamente y satisfacen lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = x_0 \quad \text{para todo } c \in S$$

y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(c) = x_0 \quad \text{para todo } c \in U.$$

La variedad estable S e inestable U solo es definida en una pequeña vecindad del origen, es decir, se refiere a la variedad estable e inestable local del sistema (2.24). En una pequeña vecindad, N , de un punto crítico hiperbólico en el origen, la variedad local estable S y la variedad local inestable U de (2.24) en el origen son dadas por:

$$S = \{x \in N \mid \phi_t(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \text{ y } \phi_t(x) \in N \text{ para } t \geq 0\}$$

y

$$U = \{x \in N \mid \phi_t(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty \text{ y } \phi_t(x) \in N \text{ para } t \leq 0\}.$$

Definición 2.3.43. Sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (2.24). La variedad global estable y la variedad global inestable de (2.24) en 0 son definidas por

$$W^S(0) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S)$$

y

$$W^U(0) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U)$$

respectivamente.

Las variedades estable $W^S(0)$ e inestable $W^U(0)$ son únicas e invariantes con respecto al flujo ϕ_t ; por lo tanto para todo $x \in W^S(0)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = 0$ y para todo $x \in W^U(0)$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = 0$.

Teorema 2.3.44 (Teorema de la Variedad Central). *Sea $f \in C^r(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen y $r \geq 1$. Supóngase que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa, j valores propios con parte real positiva, y $m = n - k - j$ valores propios con parte real cero. Entonces existe una m -dimensional variedad central $W^c(0)$ de la clase C^r tangente al subespacio central E^C de $x' = Ax$ en 0 el cual es invariante bajo el flujo ϕ_t de (2.24).*

2.3.3. Estabilidad en Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Los puntos de equilibrio son una parte fundamental en las ecuaciones diferenciales ordinarias, por ello, estos puntos deben de ser analizados detalladamente; ya que la solución de una ecuación diferencial en un punto de equilibrio \hat{x} está en \hat{x} y permanece en \hat{x} para todo tiempo t y nos interesa saber cual es el comportamiento de la solución en un entorno de \hat{x} . Un sistema lineal puede tener varios puntos de equilibrio, algunos podrían ser estables y otros inestables. La estabilidad de los puntos críticos \hat{x} se puede determinar por el signo de la parte real de los valores propios λ_j de la matriz $Df(x_0)$ pero la estabilidad de los puntos no hiperbólicos es más difícil de determinar.

Ésta parte se enfocará en las definiciones y teoremas que nos permitirán identificar el comportamiento (ver Perko (2008); Borrelli and Coleman (2002); Braun (1990)).

Estabilidad de Puntos Críticos

Consideremos el sistema no lineal de la forma

$$x' = f(x). \quad (2.26)$$

Definición 2.3.45. Sea ϕ_t el flujo de la ecuación diferencial (2.26) definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Un punto de equilibrio x_0 de (2.26) es *estable*, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in N_\delta(x_0)$ y $t \geq 0$ tenemos que

$$\phi_t(x) \in N_\epsilon(x_0).$$

Un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones cercanas permanecen cercanas.

Definición 2.3.46. Un punto de equilibrio x_0 que no es estable se le llama *inestable*, esto significa que existe un entorno U de x_0 tal que para todo entorno U_1 de x_0 en U , existe al menos una solución $x(t)$ de (2.26) que comienza en $x(0) \in U_1$ y que no permanece en U .

Definición 2.3.47. Un punto de equilibrio x_0 es *asintóticamente estable* si es estable y además existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in N_\delta(x_0)$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0$$

En otras palabras, x_0 es asintóticamente estable, si todas las soluciones cercanas permanecen cercanas y tienden al punto x_0 .

Teorema 2.3.48. Si x_0 es un punto sumidero del sistema no lineal (2.26), y $Re(\lambda_j) < -\alpha < 0$ para todos los valores propios λ_j con $j = 1, \dots, n$ de la matriz $Df(x_0)$, entonces para un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in N_\delta(x_0)$, el flujo $\phi_t(x)$ de (2.26) satisface:

$$|\phi_t(x) - x_0| \leq \epsilon e^{-\alpha t},$$

para todo $t \geq 0$.

Sea $f \in C^1$, donde $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial para el que $0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio.

Consideremos a la derivada de f , $Df(0) = A$ en 0 , como un campo vectorial lineal que aproxima a f en una vecindad del 0 (se denomina parte lineal de f en 0).

Teorema 2.3.49. *Sea $\hat{x} \in W$ un sumidero de la ecuación (2.26). Supongamos que todo valor propio de $Df(\hat{x})$ tiene parte real menor que $-c$, donde $c > 0$. Entonces, existe un entorno $U \subset W$ de \hat{x} tal que:*

♦ $\phi_t(x)$ está definida y pertenece a U para todo $x \in U$ y $t > 0$.

♦ Existe una norma Euclideana en \mathbb{R}^n tal que

$$|\phi_t(x) - \hat{x}| \leq e^{-ct} |x - \hat{x}|$$

para todo $x \in U$, $t \geq 0$.

♦ Para cualquier norma en \mathbb{R}^n ; existe una constante $B > 0$ tal que

$$|\phi_t(x) - \hat{x}| \leq Be^{-ct} |x - \hat{x}|$$

para todo $x \in U$, $t \geq 0$.

En particular, $\phi_t(x) \rightarrow \hat{x}$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $x \in U$.

El teorema anterior expone que si \hat{x} es un punto sumidero de una ecuación diferencial no lineal, se comporta localmente como un punto sumidero de un sistema lineal, es decir, las soluciones cercanas a \hat{x} se aproximan a él exponencialmente.

Teorema 2.3.50. *Sea x_0 un punto de equilibrio de (2.26) y λ_j los valores propios de $Df(x_0)$ entonces:*

♦ x_0 es estable, si $Re(\lambda_j) \leq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, es decir, todos los valores propios λ_j no tiene parte real positiva,

♦ x_0 es asintóticamente estable si y sólo si $Re(\lambda_j) < 0$ para todo $j = 1, \dots, n$ si y sólo si x_0 es un sumidero.

Corolario 2.3.51. *Un punto de equilibrio hiperbólico es inestable si y sólo si es una fuente o una silla.*

Corolario 2.3.52. *Un punto de equilibrio hiperbólico es o bien inestable o bien asintóticamente estable.*

La única ocasión que un punto de equilibrio hiperbólico puede ser estable, pero no asintóticamente estable es cuando $Df(x_0)$ tiene valores propios cero o un par de valores propios complejos conjugados puramente imaginarios $\pm i\lambda$.

Definición 2.3.53. Un punto crítico del sistema (2.26) en el cual $Df(x_0)$ tiene un valor propio cero es llamado punto crítico *no degenerado*, en otro caso, es llamado punto crítico degenerado del sistema (2.26).

Definición 2.3.54. Sea $f \in C^1(E)$, $V \in C^1(E)$ y ϕ_t el flujo de la ecuación diferencial (2.25), entonces para todo $x \in E$ la derivada de la función $V(x)$ a lo largo de la solución $\phi_t(x)$ es de la siguiente forma

$$V'(x) = \frac{d}{dt}V(\phi_t(x)) \Big|_{t=0} = DV(x)f(x).$$

Si $V(x)$ es negativa en E entonces $V(x)$ decrece a lo largo de la solución $\phi_t(x_0)$ a través de $x_0 \in E$ con $t = 0$.

Teorema 2.3.55. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a x_0 . Supóngase que $f \in C^1(E)$ y $f(x_0) = 0$, además existe una función $V \in C^1(E)$ que satisface $V(x_0) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$. Se tiene lo siguiente:*

- a) *si $V'(x) < 0$ para todo $x \in E$, entonces x_0 es estable;*
- b) *si $V'(x) < 0$ para todo $x \in E - \{x_0\}$, entonces x_0 es asintóticamente estable;*
- c) *si $V'(x) > 0$ para todo $x \in E$, x_0 es inestable.*

La función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **función de Liapunov**.

Sea $f(x)$ una función de n vectores, la cual es continuamente diferenciable en \mathbb{R}^n . Entonces, el problema

$$x' = f(x) \tag{2.27}$$

con $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tiene sólo una solución extendida al máximo que se denota con $x(t, x_0)$, la cual está definida para $t \geq 0$.

Definición 2.3.56. Un punto crítico p es un punto de atracción, si $\|x(t, x_0) - p\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ para toda x_0 , es decir, no importa donde inicie la solución del sistema siempre se irá acercando cada vez más al punto de equilibrio p .

Definición 2.3.57. La cuenca de atracción de un punto de equilibrio p asintóticamente estable, es el conjunto de puntos x_0 tales que $\|x(t, x_0) - p\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Definición 2.3.58. La estabilidad asintótica de p es global, si la cuenca de atracción es todo el espacio de estados.

En caso contrario se dice que la estabilidad es local.

Definición 2.3.59. Un conjunto cerrado invariante $A \subset E$ es llamado un conjunto de atracción de (2.27), si existe alguna vecindad U de A tal que para todo $x \in U$, $\phi_t(x) \in U$ para todo $t \geq 0$ y $\phi_t \rightarrow A$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 2.3.60. Un atractor de (2.27) es un conjunto de atracción el cual contiene una órbita densa.

Definición 2.3.61. Una solución del sistema (2.27) es localmente estable en un punto de equilibrio p , si para cada número positivo ϵ hay un número positivo δ tal que $\|x_0 - p\| < \delta$ entonces $\|x(t, x_0) - p\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

Definición 2.3.62. Una solución del sistema es asintóticamente estable en p , si la solución es estable en p , y además $\|x(t, x_0) - p\| \rightarrow 0$. Esto quiere decir que $x(t, x_0) \rightarrow p$ cuando $t \rightarrow \infty$ para los puntos x_0 cercanos a p .

En caso contrario, el sistema es inestable.

Teorema 2.3.63. Sea $x = \phi(t)$ una solución de la ecuación diferencial $x' = Ax$.

1. Toda solución $x = \phi(t)$ es estable si todos los valores característicos de A tienen parte real negativa.
2. Toda solución $x = \phi(t)$ es inestable si al menos un valor característico de A tiene parte real positiva.
3. Supóngase que todos los valores característicos de A tienen parte real menor o igual a cero y $\lambda_1 = i\gamma_1, \dots, \lambda_l = i\gamma_l$ tienen parte real igual a cero. Supóngase además que $\lambda_j = i\gamma_j$ tiene multiplicidad k_j . Esto significa que el polinomio característico de A se puede factorizar como

$$p(\lambda) = (\lambda - i\gamma_1)^{k_1} \cdots (\lambda - i\gamma_l)^{k_l} q(\lambda)$$

donde todas las raíces de $q(\lambda)$ tienen parte real negativa. Entonces toda solución $x = \phi(t)$ de (2.26) es estable si A tiene k_j vectores característicos, linealmente independientes para cada valor característico $\lambda_j = i\gamma_j$. De otro modo, todas las soluciones $\phi(t)$ son inestables.

Conjuntos Límites

Consideremos el sistema autónomo

$$x' = f(x) \tag{2.28}$$

con $f \in C^1(E)$, donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 2.3.64. Un punto $\hat{p} \in E$ es un punto límite ω de la órbita $\phi(\cdot, x)$ del sistema (2.28), si existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = \hat{p}.$$

De manera similiar, si existe una sucesión $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = \hat{q},$$

el punto $\hat{q} \in E$, es llamado un punto límite α de la órbita $\phi(\cdot, x)$ del sistema (2.28).

Definición 2.3.65. El conjunto de todos los puntos límite ω de la órbita σ es llamado el conjunto ω -límite de σ y es denotado por $\omega(\sigma)$.

Definición 2.3.66. El conjunto de todos los puntos límite α de la órbita σ es llamado el conjunto α -límite de σ , denotado por $\alpha(\sigma)$.

Definición 2.3.67. El conjunto de todos los puntos límite de σ , $\alpha(\sigma) \cup \omega(\sigma)$ es llamado el conjunto límite de σ .

Teorema 2.3.68. *Un punto \hat{p} es un punto límite ω de la órbita σ de (2.28), por lo tanto los otros puntos de la órbita $\phi(\cdot, \hat{p})$ de (2.28) a través del punto \hat{p} , también son puntos límite ω de σ ; es decir, si $\hat{p} \in \omega(\sigma)$, entonces $\sigma_{\hat{p}} \subset \omega(\sigma)$, similarmente para $\hat{p} \in \alpha(\sigma)$, tenemos que, $\sigma_{\hat{p}} \subset \alpha(\sigma)$.*

Teorema 2.3.69. *Si x_0 es un punto de equilibrio de (2.28), x_0 es su propio conjunto α -límite y ω -límite, pues $\phi(t, x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por otro lado, si la órbita σ de (2.28) tiene un único punto límite ω , éste punto es un punto de equilibrio de (2.28).*

Definición 2.3.70. El conjunto de todos los puntos límite de σ , $\alpha(\sigma) \cup \omega(\sigma)$ es llamado conjunto límite de σ .

Teorema 2.3.71. *Si punto \mathbf{q} es un punto límite ω de una trayectoria σ de (2.28), entonces todos los otros puntos de la trayectoria $\phi(\cdot, \mathbf{q})$ de (2.28) a través del punto \mathbf{q} son también puntos límite ω de σ ; es decir, si $\mathbf{q} \in \omega(\sigma)$, entonces $\sigma_{\mathbf{q}} \subset \omega(\sigma)$, similarmente si $\mathbf{q} \in \alpha(\sigma)$, entonces $\sigma_{\mathbf{q}} \subset \alpha(\sigma)$.*

Definición 2.3.72. Un ciclo u órbita periódica es una curva solución cerrada de (2.28), la cual no tiene un punto de equilibrio.

Definición 2.3.73. Una órbita periódica σ es llamada estable, si para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de σ tal que para todo $x \in U$, $d(\sigma_x^+, \sigma) < \epsilon$; es decir, para todo $x \in U$ y $t \geq 0$, $d(\phi(t, x), \sigma) < \epsilon$.

Definición 2.3.74. Una órbita periódica σ es llamada inestable, si no es estable, σ es llamada asintóticamente estable, si es estable y además todos los puntos x en alguna vecindad U de σ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), \sigma) = 0.$$

Definición 2.3.75. Si un ciclo σ es un conjunto límite ω de toda trayectoria en alguna vecindad de σ , entonces σ es llamado un ciclo límite ω o ciclo límite estable.

Definición 2.3.76. Sea σ un conjunto límite α de toda trayectoria en alguna vecindad de σ , entonces σ es llamado un ciclo límite α o ciclo límite inestable.

Definición 2.3.77. Sea σ un conjunto límite ω de una trayectoria aparte de σ y el conjunto límite α de otra trayectoria aparte de σ , entonces σ es llamado un ciclo límite semi-estable.

Definición 2.3.78. Un ciclo S_0 se dice que es un ciclo separatriz simple si la cantidad

$$\sigma_0 \equiv \nabla \cdot f(x_0) \neq 0.$$

En otro caso es llamado ciclo separatriz múltiple.

Teorema 2.3.79. Sea x_0 un punto topológico silla en un sistema analítico $x' = f(x)$ y sea S_0 un ciclo simple separatriz en x_0 . Entonces, S_0 es estable si y sólo si $\sigma_0 < 0$.

Teorema 2.3.80. Si S_0 es un ciclo simple separatriz en un punto silla topológico x_0 de un sistema analítico plano $x' = f(x)$, entonces

1. Existe un $\delta > 0$ y un $\epsilon > 0$ tal que el sistema ϵ – cerrado $x' = f(x)$ en la C^1 – norma tiene a lo más un ciclo límite en una δ – vecindad de S_0 , $N_\delta(S_0)$ y
2. para algún $\delta > 0$ y un $\epsilon > 0$ existe un sistema analítico el cual es ϵ – cerrado en $x' = f(x)$ en la C^1 – norma tiene exactamente un ciclo límite simple en $N_\delta(S_0)$.

Por lo tanto, si tal límite existe, se caracteriza por tener la misma estabilidad que S_0 ; es decir, si $\sigma_0 < 0$ es estable, y si $\sigma_0 > 0$ es inestable.

2.3.4. Tipos de Puntos de Equilibrio en \mathbb{R}^2

A continuación se definirán algunos tipos de punto de equilibrio para un sistema no lineal (2.26) en \mathbb{R}^2 . Primero, introducimos las coordenadas polares, las cuales tienen la forma (r, θ) donde $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$, sea $x = (x, y)^t$ y $f_1 = P(x, y)$, $f_2 = Q(x, y)$, el sistema (2.26) se puede escribir de la siguiente manera:

$$x' = P(x, y), \tag{2.29}$$

$$y' = Q(x, y). \tag{2.30}$$

El sistema no lineal (2.29) en términos de coordenadas polares queda expresado como:

$$r' = P(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta) + Q(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta), \tag{2.31}$$

$$r\theta' = Q(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta) - P(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta). \tag{2.32}$$

Denotamos la solución del sistema no lineal (2.31) como $r(0) = r_0$ y $\theta(0) = \theta_0$.

Definición 2.3.81. El origen es llamado *centro* del sistema no lineal, si existe un $\delta > 0$ tal que para toda curva solución de (2.26) en la vecindad $N_{\delta(0)} - 0$ es una curva cerrada (es decir, el inicio de la curva coincide con su final) con 0 en su interior.

Definición 2.3.82. El origen es llamado un *foco central* para (2.26), si existe una sucesión de curvas solución cerradas σ_n con σ_{n+1} en el interior de σ_n tal que $\sigma_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y toda trayectoria entre σ_n y σ_{n+1} es una espiral hacia σ_n o σ_{n+1} cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Definición 2.3.83. El origen es llamado un *foco estable* para (2.26), si existe $\delta > 0$ de tal forma que para $0 < r_0 < \delta$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ y $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 2.3.84. El origen es llamado un *foco inestable* para (2.26), si existe $\delta > 0$ tal que para $0 < r_0 < \delta$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ y $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Definición 2.3.85. Una trayectoria de (2.26) la cual satisface que $r(t) \rightarrow 0$ y $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ se dice que es una espiral hacia el origen cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Definición 2.3.86. El origen es llamado *nodo estable* de (2.26), si existe un $\delta > 0$ tal que para $0 < r_0 < \delta$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ $t \rightarrow \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$ existe; es decir, cada trayectoria en una vecindad que no contiene al origen, se acerca al origen a lo largo de una línea tangente bien definida cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 2.3.87. El origen es llamado un *nodo inestable*, si $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ $t \rightarrow \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$, existe para todo $r_0 \in (0, \delta)$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Definición 2.3.88. El origen es llamado un *nodo propio* de (2.26), si es un nodo y además cada rayo que pasa a través del origen es tangente a una trayectoria de (2.26).

Definición 2.3.89. El origen es una *silla topológica*, si existen dos trayectorias σ_1 y σ_2 las cuales se aproximan a cero cuando $t \rightarrow \infty$ y dos trayectorias σ_3 y σ_4 las cuales se aproximan a cero cuando $t \rightarrow -\infty$, además existe un $\delta > 0$ tal que las otras trayectorias inician en una vecindad $N_\delta(0) - 0$ y salen de $N_\delta(0)$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Las trayectorias especiales $\sigma_1, \dots, \sigma_4$ son llamadas *separatrices*.

Teorema 2.3.90. Sea E un subconjunto abierto en \mathbb{R}^2 , el cual contiene al origen, sea $f \in C^2(E)$. Supongase que el origen es un punto crítico hiperbólico de (2.26). Entonces el origen es un nodo estable (o inestable) para el sistema no lineal (2.26) si y sólo si es un nodo estable (o inestable) para el sistema lineal $x' = Ax$ con $A = Df(0)$.

El origen es un foco estable (o inestable) de (2.26) si y sólo si es un foco estable (o inestable) del sistema lineal $x' = Ax$ con $A = Df(0)$.

2.4. Conjugación Topológica

Definición 2.4.1. Un espacio métrico es un par (X, d) , donde X es un conjunto no vacío y d es una función real definida en $X \times X$ llamada distancia o métrica que satisface:

- ◆ $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
- ◆ $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$,
- ◆ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Definición 2.4.2. Sea X un espacio métrico y sean A y B subconjuntos de X . Un homeomorfismo es una función continua $h : A \rightarrow B$ tal que h es inyectiva y además $h^{-1} : B \rightarrow A$ es continua.

Definición 2.4.3. Los conjuntos A y B son llamados homeomorfos o topológicamente equivalentes, si existe un homeomorfismo h de A en B .

Definición 2.4.4. Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales

$$x' = f(x), \text{ sistema no lineal} \tag{2.33}$$

y

$$x' = Ax \text{ donde } A = Df(x_0), \text{ sistema lineal} \tag{2.34}$$

son *topológicamente equivalentes* en una vecindad del origen, es decir, tienen la misma estructura cualitativa cerca del origen, si existe un homeomorfismo H que mapea un conjunto abierto U contenido en el origen sobre un conjunto abierto V que contiene el origen, el cual mapea una trayectoria de (2.33) en U en trayectorias de (2.34) en V y preserva su orientación por tiempo, en el sentido de que si se dirige una trayectoria de x_1 a x_2 en U , entonces su imagen se dirige de $H(x_1)$ a $H(x_2)$ en V .

Definición 2.4.5. Sea $f : A \rightarrow A$ y $g : B \rightarrow B$ dos mapeos, si existe un homeomorfismo $H : A \rightarrow B$ tal que $H \circ f = g \circ H$, entonces f y g son topológicamente conjugados y en este caso se dice que H es una conjugación topológica.

Si el homeomorfismo H preserva la parametrización por tiempo, entonces los sistemas (2.33) y (2.34) se conocen como *topológicamente conjugados* en una vecindad del origen.

Teorema 2.4.6 (El Teorema de Hartman-Grobman). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen. Sea $f \in C^1(E)$, y ϕ_t el flujo del sistema no lineal (2.33). Supóngase que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene ningún valor propio con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo H de un subconjunto abierto U que contiene al origen sobre un conjunto abierto V que contiene al origen, tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero y para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$*

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0);$$

es decir, H mapea trayectorias del sistema (2.33) cerca del origen en trayectorias del sistema (2.34) cerca del origen y preserva la parametrización por tiempo.

Éste teorema es otro de los resultados sobresalientes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema (2.33) tiene la misma estructura cualitativa que el sistema (2.34).

Lema 2.4.7. *Existe un homeomorfismo H de un subconjunto abierto U que contiene al origen sobre un conjunto abierto V que contiene al origen, tal que*

$$H \circ T = L \circ H.$$

Teorema 2.4.8. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , el cual contiene al origen y sea $f \in C^1(E)$; supongamos que $f(0) = 0$ y que la matriz $Df(0) = \text{diagonal}[C, P, Q]$, donde la matriz cuadrada C tiene c valores propios con parte real cero, la matriz cuadrada P tiene s valores propios con parte real negativa y la matriz cuadrada Q tiene u valores propios con parte real positiva. Entonces existen las funciones $h_1(x) \in C^1$ y $h_2(x) \in C^1$ en una vecindad del origen, tal que el sistema (2.33) se puede escribir de la forma:*

$$\begin{aligned}x' &= Cx + F(x, y, z), \\y' &= Px + G(x, y, z), \\z' &= Qx + H(x, y, z).\end{aligned}$$

donde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u$, $F(0) = G(0) = H(0) = 0$ y $DF(0) = DG(0) = DH(0) = 0$. es topológicamente conjugado al sistema C^1

$$\begin{aligned}x' &= Cx + F(x, h_1(x), h_2(x)), \\y' &= Py, \\z' &= Qz,\end{aligned}$$

para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u$ en una vecindad del origen.

Definición 2.4.9. Un mapeo H continuamente diferenciable es un C^1 – difeomorfismo, si existe su inversa H^{-1} y es continuamente diferenciable.

Teorema 2.4.10 (Hartman). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , el cual contiene al punto x_0 , sea $f \in C^2(E)$, y ϕ_t el flujo del sistema no lineal (2.33). Supongamos que $f(x_0) = 0$ y todos los eigenvalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matriz $A = Df(x_0)$ tienen parte real negativa (o positiva). Entonces existe un C^1 – difeomorfismo H de una vecindad U de x_0 en un conjunto abierto V que contiene al origen, tal que para cada $x \in U$ y $t \in I(x)$*

$$H \circ \phi_t(x) = e^{At}H(x).$$

Definición 2.4.11. Un **sistema dinámico** es la tripleta $\{I, \mathbb{X}, \phi_t\}$, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es el intervalo de tiempo, $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es el espacio de estados y $\phi_t : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ es una familia de operadores de evolución parametrizada por $t \in I$, que satisfacen las propiedades

1. $\phi_0 = x$ para todo $x \in E$ y
2. $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y $x \in E$.

En palabras más simples, un sistema dinámico es un sistema que cambia a través del tiempo.

Sea A una matriz de $n \times n$, entonces la función $\phi(t, x) = e^{At}x$, define un sistema dinámico en \mathbb{R}^n y para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi(t, x_0)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned}x' &= Ax, \\x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

De manera general, si $\phi(t, x_0)$ es un sistema dinámico en $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces la función

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi(t, x_0) \right|_{t=0},$$

define un C^1 -campo vectorial en E y para cada $x_0 \in E$, $\phi(t, x_0)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x' &= f(x), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Definición 2.4.12. Supongamos que $f \in C^1(E_1)$ y que $g \in C^1(E_2)$ donde E_1 y E_2 son subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Entonces los dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales

$$x' = f(x), \tag{2.35}$$

y

$$y' = g(x), \tag{2.36}$$

se dicen *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo $H : E_1 \rightarrow E_2$ el cual mapea trayectorias de (2.35) en trayectorias de (2.36) y preserva su orientación.

Si dos campos vectoriales f y g son topológicamente conjugados entonces ellos son topológicamente equivalentes.

Teorema 2.4.13 (Teorema de Existencia Global). *Para $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema con valor inicial*

$$x' = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}, \tag{2.37}$$

y

$$x(0) = x_0,$$

tiene una única solución $x(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$; es decir, la ecuación (2.37) define un sistema dinámico en \mathbb{R}^n , por tanto (2.37) es topológicamente conjugado a (2.35) en \mathbb{R}^n .

Teorema 2.4.14. *Supongamos que E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y que $f \in C^1(E)$. Entonces, existe una función $\mathbf{F} \in C^1(E)$ tal que*

$$x' = \mathbf{F}(x), \tag{2.38}$$

define un sistema dinámico en E y (2.38) es topológicamente equivalente a (2.33) en E .

Teorema 2.4.15. *Sea M una variedad compacta y sea $f \in C^1(M)$. Entonces para $x_0 \in M$, el sistema (2.33) tiene una única solución $x(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$.*

La teoría anteriormente expuesta se encuentran en (Perko (2008)).

2.5. Teoría Cualitativa de Bifurcaciones

Los ciclos y los puntos de equilibrio son aspectos distintivos de los retratos fase de órbitas de un sistema autónomo. Si las funciones de tasa de cambio del sistema se modifican ligeramente o la condición inicial cambia, se esperaría que la nueva gráfica tenga mucha semejanza con la anterior, perdurando características importantes, por ejemplo: un ciclo podría reducirse, un punto de equilibrio desplazarse, una espiral tensarse o aflojarse. Esto puede ser lógico pero no suele ocurrir siempre éste caso, en realidad en algunos modelos al introducir pequeños cambios en el coeficiente de una función de tasa de cambio éstas características desaparecen y repentinamente aparece algo muy distinto. Cuando un parámetro cambia, podría aparecer un punto de equilibrio y generar un segundo punto de equilibrio, o bien, un punto de equilibrio estable puede desestabilizarse y expulsar un ciclo límite atrayente. Éstos son algunos ejemplos de *bifurcaciones*.

En las ecuaciones diferenciales ordinarias una bifurcación significa cualquier cambio marcado en la estructura de la órbita de un sistema, cuando un parámetro pasa por un valor crítico. Las bifurcaciones más simples tienen que ver con la aparición, desaparición o división de un punto de equilibrio cuando cambia algún parámetro.

La teoría de éste capítulo se encuentra en (Perko (2008); Guo and Wu (2013); Borrelli and Coleman (2002)).

El comportamiento cualitativo del conjunto solución del sistema

$$x' = f(x, \mu), \tag{2.39}$$

depende de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$, pues varía a medida que el campo vectorial f pasa a través de un punto que está en el conjunto de bifurcación o conforme a la variación del parámetro μ a través de un valor de bifurcación μ_0 .

Asumimos que $f \in C^1(E \times J)$, donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo.

Definición 2.5.1. Una *bifurcación* se da cuando una pequeña variación en los valores de los parámetros de un sistema causa un cambio brusco en el comportamiento cualitativo de sus soluciones.

Definición 2.5.2. Sea μ un parámetro de la ecuación (2.39) y μ_0 un valor del parámetro μ , para el cual un campo vectorial $f(x, \mu) \in C^1$ no es estructuralmente estable μ_0 es llamado *valor de bifurcación*.

El conjunto de todos éstos valores se conoce como *conjunto de bifurcación* en el espacio de parámetros \mathbb{R}^n .

Supongamos que un sistema de la forma

$$x' = f(x, \mu), \tag{2.40}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ y $\mu > 0 \in \mathbb{R}$;

$$\tag{2.41}$$

tiene un punto crítico de multiplicidad m en $x = 0$.

Si $f(x_0, \mu) = Df(x_0, \mu) = 0$, entonces x_0 es un punto no hiperbólico del sistema (2.40) con $\mu = \mu_0$ y μ_0 es el valor de bifurcación del sistema. En este caso, el tipo de bifurcación que ocurre en el punto crítico $x = x_0$ y el valor $\mu = \mu_0$ en el sistema uno dimensional es determinado por :

$$\frac{\partial^m f(x_0, \mu_0)}{\partial x^j \partial \mu^k}$$

con $m \geq 2$.

2.5.1. Estabilidad Estructural

Considérese el sistema no lineal

$$x' = f(x, \mu) \tag{2.42}$$

donde f es C^1 , el cual depende del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$.

Definición 2.5.3. Sea $f \in C^1(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , entonces la C^1 norma de f se define como sigue

$$\|f\|_1 = \sup |f(x)| + \sup \|Df(x)\|,$$

donde $x \in E$, $|\cdot|$ denota la norma Euclidiana en \mathbb{R}^n y $\|\cdot\|$ denota la norma usual de la matriz $Df(x)$.

Definición 2.5.4. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Un campo vectorial $f \in C^1(E)$ se dice *estructuralmente estable*, si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $g \in C^1(E)$ con

$$\|f - g\|_1 < \epsilon,$$

f y g son topologicamente equivalentes en E ; es decir hay un homeomorfismo $H : E \rightarrow E$ el cual envía trayectorias de

$$x' = f(x) \tag{2.43}$$

en trayectorias de

$$x' = g(x) \tag{2.44}$$

y preserva la orientación. En este caso se dice que el sistema dinámico (2.43) es *estructuralmente estable*. En caso contrario se dice que es estructuralmente inestable.

Definición 2.5.5. Sea f un campo vectorial C^1 sobre un compacto n – dimensional y una variedad diferenciable M . Entonces $f \in C^1(M)$ es estructuralmente estable sobre M , si existe un ϵ tal que para todo $g \in C^1(M)$ con $\|f - g\|_1 < \epsilon$, g es topológicamente equivalente a f .

Teorema 2.5.6. Sea $f \in C^1(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene un punto crítico hiperbólico x_0 de (2.43). Entonces para algún $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $g \in C^1(E)$ con

$$\|f - g\|_1 < \delta,$$

existe un $y_0 \in N_\epsilon(x_0)$, el cual es un punto crítico hiperbólico de (2.44). Por lo tanto $Df(x_0)$ y $Dg(x_0)$ tienen el mismo número de valores propios con parte real negativa o positiva.

Teorema 2.5.7. Sea $f \in C^1(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene una órbita periódica hiperbólica Γ de (2.43). Entonces para algún $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $g \in C^1(E)$ con

$$\|f - g\|_1 < \delta,$$

existe una órbita hiperbólica periódica Γ' de (2.44) contenida en una ϵ – vecindad de Γ ; por tanto, las variedades estables $W^s(\Gamma)$ y $W^s(\Gamma')$ y las variedades inestables $W^u(\Gamma)$, $W^u(\Gamma')$ tienen la misma dimensión.

Definición 2.5.8. Un punto $x \in E$ (o $x \in M$) es un punto errante en el flujo ϕ_t definido por (2.43) si para alguna vecindad U de x y para todo $T > 0$ existe un $t > T$ tal que

$$\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset.$$

El conjunto errante Ω del flujo ϕ_t es el conjunto de todos los puntos errantes de ϕ_t en E (o en M).

Los puntos de equilibrio y los puntos en las órbitas periódicas son ejemplos de puntos no errantes de un flujo o para un flujo plano. Los únicos puntos no errantes son los puntos críticos, puntos en ciclos, y puntos sobre gráficas.

Teorema 2.5.9 (Peixoto). Sea f un campo vectorial C^1 en un compacto 2 – dimensional y M una variedad diferenciable. Entonces f es estructuralmente estable en M si y sólo si:

1. el número de puntos críticos y ciclos es finito; y cada uno de ellos es hiperbólico;
2. no hay trayectoria que contenga puntos silla; y
3. el conjunto de puntos errantes ϕ consiste únicamente de los puntos críticos y ciclos límites.

Por lo tanto, si M es orientable, el conjunto estructuralmente estable del campo vectorial en $C^1(M)$ es un conjunto abierto y un subconjunto denso de $C^1(M)$.

2.5.2. Tipos de Bifurcación

Una bifurcación se presenta cuando hay un cambio brusco en el comportamiento cualitativo de la solución del sistema, estos comportamientos pueden tomar distintas formas gráficamente. Para visualizar esquemáticamente la solución, podemos utilizar el diagrama de bifurcación de dicho sistema, como una función paramétrica de bifurcación del sistema. En él la solución estable será representada por líneas sólidas, mientras que la solución inestable es representada por líneas discontinuas.

Una bifurcación local de una solución dada puede ser detectada por un análisis de estabilidad en dicha solución. La bifurcación global de este modo se refiere a la continuación de una bifurcación local cuando el parámetro de bifurcación está lejos del valor de bifurcación.

Consideremos el siguiente sistema dinámico continuo definido por el campo vectorial $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$x' = f(\mu, x), \quad \mu \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n, \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (2.45)$$

donde μ es un parámetro de bifurcación y Λ, U son conjuntos abiertos.

Definición 2.5.10. La bifurcación asociada a la aparición de un valor característico 0 es llamada *bifurcación tangente o bifurcación fold*.

Definición 2.5.11. La bifurcación correspondiente a la presencia de un par de valores característicos puramente imaginarios es llamada *bifurcación de Hopf*.

Teorema 2.5.12. *Supongamos que $f(x_0, \mu_0) = 0$ y que la matriz de $n \times n$ $A \equiv Df(x_0, \mu_0)$ tiene un valor propio $\lambda = 0$ con un vector propio v y A^t tiene un valor propio w correspondiente al valor propio $\lambda = 0$. Por tanto, supongamos que A tiene k valores propios con parte real negativa y $(n - k - 1)$ valores característicos con parte real positiva, además satisface las siguientes condiciones:*

$$w^t f_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0, \quad (2.46)$$

$$w^t [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] \neq 0, \quad (2.47)$$

f_μ denota el vector de derivadas parciales de los componentes de f con respecto al escalar μ . Entonces existe una curva suave del punto de equilibrio de (2.39) en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que pasa a través de (x_0, μ_0) y es tangente al hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$.

Dependiendo del signo de la expresión en (2.46), no existirá un punto de equilibrio de (2.39) cerca de x_0 cuando $\mu < \mu_0$ (o cuando $\mu > \mu_0$) y existen dos puntos de equilibrio de (2.39) cerca de x_0 cuando $\mu > \mu_0$ (o $\mu < \mu_0$). Los dos puntos de equilibrio de (2.39) cerca de x_0 son puntos hiperbólicos y tienen variedad estable de dimensión k y $k + 1$ respectivamente.

En otras palabras, el sistema (2.39) experimenta una bifurcación nodo silla en el punto de equilibrio x_0 con el parámetro μ que pasa a través del valor de bifurcación $\mu = \mu_0$.

El conjunto de campos vectoriales C^∞ que satisfacen la condición anterior, cumplen lo siguiente:

- ◆ son un abierto,
- ◆ son un subconjunto denso en el espacio de Banach de todo C^∞ ,
- ◆ tienen un parámetro y
- ◆ el campo vectorial con el punto de equilibrio x_0 tiene un valor característico simple cero.

Si cambiamos la condición (2.46) en el teorema anterior por

$$w^t f_\mu(x_0, \mu_0) = 0, \quad (2.48)$$

$$w^t [Df_\mu(x_0, \mu_0)v] \neq 0, \quad (2.49)$$

$$w^t [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] \neq 0. \quad (2.50)$$

El sistema (2.39) experimenta una bifurcación transcítica en el punto de equilibrio x_0 , con el parámetro μ variando a través del valor de bifurcación $\mu = \mu_0$.

Por otra parte, si la condición (2.46) es

$$w^t f_\mu(x_0, \mu_0) = 0,$$

$$w^t [Df_\mu(x_0, \mu_0)v] \neq 0,$$

$$w^t [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] = 0,$$

$$w^t [D^3 f(x_0, \mu_0)(v, v, v)] \neq 0.$$

El sistema (2.39) experimenta una bifurcación de tenedor en el punto de equilibrio x_0 cuando el parámetro μ varía a través del valor de bifurcación $\mu = \mu_0$.

A continuación se expondrán con más detalle los tipos de bifurcación que nombra el teorema anterior e introduciremos la bifurcación de Hopf.

Bifurcación Tangente

En la ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$x' = f(\mu, x), \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.51)$$

donde $f(0, 0) = 0$, es decir, la ecuación (2.51) tiene un punto de equilibrio $x_0 = 0$, cuando $\mu = \mu_0 = 0$. La condición $\frac{df}{dx}(0, 0) = 0$, asegura que la ecuación diferencial (2.51) tiene una bifurcación fold. Analicemos el siguiente ejemplo:

Consideremos la siguiente familia de ecuaciones

$$x' = \mu - x^2, \quad x, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.52)$$

Una familia de ecuaciones diferenciales. Para comenzar con el análisis de estabilidad, hallamos los puntos de equilibrio de (2.52), es decir, debemos encontrar los valores que satisfacen la siguiente expresión

$$\mu - x^2 = 0, \quad (2.53)$$

dichos valores son $x_0 = \pm\sqrt{\mu}$. El parámetro μ puede ser positivo, negativo o cero, con ello se presentan tres casos:

1. Si $\mu > 0$, existen dos puntos de equilibrio, $x_0 = -\sqrt{\mu}$, $x_0 = +\sqrt{\mu}$.
2. Si $\mu < 0$, no hay puntos de equilibrio.
3. Si $\mu = 0$, existe solo un punto de equilibrio, $x_0 = 0$.

Por consiguiente, para saber la estabilidad de estos puntos de equilibrio, en cada caso, calculamos el Jacobiano de la familia de ecuaciones diferenciales (2.53), que está dado por

$$\frac{d}{dx}(\mu - x^2) = -2x.$$

Evaluando los puntos de equilibrio en el Jacobiano, se obtiene lo siguiente:

- ◆ Cuando $\mu > 0$, $x_0 = \pm\sqrt{\mu}$
 - $-2(-\sqrt{\mu}) = 2\sqrt{\mu} > 0$, por tanto $-\sqrt{\mu}$ es un punto de equilibrio inestable.
 - $-2(\sqrt{\mu}) < 0$, entonces $\sqrt{\mu}$ es un punto de equilibrio estable.
- ◆ Cuando $\mu < 0$, no tenemos puntos de equilibrio reales.
- ◆ Cuando $\mu = 0$, $x_0 = 0$ y $-2(x_0) = 0$, por tanto 0 es un punto no hiperbólico.

El valor de bifurcación es $\mu_0 = 0$, el diagrama de bifurcación (Fig. 2.1) es una parábola $\mu = x^2$, en el cual el parámetro μ es asignado al eje horizontal.

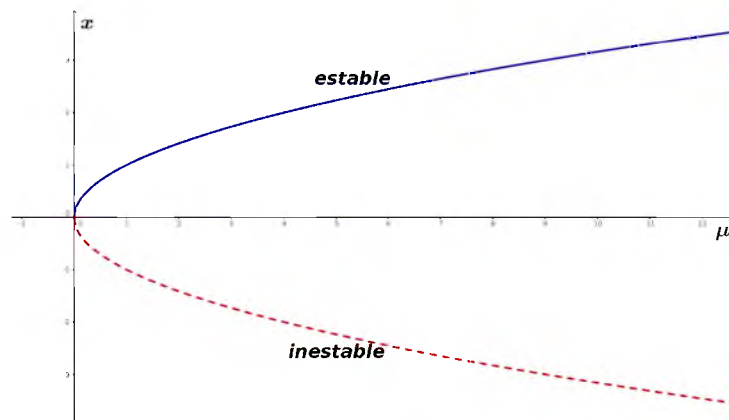


Fig. 2.1: Diagrama de bifurcación: Bifurcación Nodo Silla.

El siguiente teorema, proporciona las condiciones suficientes para que una bifurcación nodo silla ocurra en $(\mu, x) = (0, 0)$ en el sistema (2.51).

Teorema 2.5.13. *Supongamos que f en (2.51) es suficientemente suave y satisface*

$$f(0, 0) = 0. \quad f_x(0, 0) = 0. \quad f_\mu(0, 0)f_{xx}(0, 0) \neq 0.$$

Entonces, existe un cambio local invertible de las coordenadas y el parámetro que transforma (2.51) en la siguiente forma normal

$$y' = \gamma \pm y^2 + \mathbf{O}(|y|^3).$$

Por lo tanto, si $f_x(0, 0)f_{xx}(0, 0) < 0$ (respectivamente, si es mayor a cero), cerca del origen, solo existen dos puntos de equilibrio para $\mu > 0$ (respectivamente, si es positivo), para $\mu = 0$, solo existe un punto de equilibrio, para $\mu < 0$ (o $\mu > 0$, respectivamente). En el caso cuando existen dos puntos de equilibrio, uno es asintóticamente estable y el otro es inestable.

Bifurcación Transcrítica

La bifurcación transcritical es otro tipo de comportamiento que la solución de una ecuación diferencial ordinaria puede presentar, recordemos que en caso de tener una bifurcación nodo silla, en un lado de un valor del parámetro μ , no existen puntos de equilibrio, mientras que en el otro, existirán dos, en este caso existen dos puntos de equilibrio antes y después del valor de bifurcación, uno de ellos es un equilibrio estable y el otro es un equilibrio inestable, sin embargo, su estabilidad se intercambia cuando ellos coinciden, el punto de equilibrio inestable comienza a ser estable y el punto de equilibrio estable comienza a ser inestable. En el siguiente ejemplo se presenta una bifurcación transcritical.

Consideremos un campo vectorial

$$x' = \mu x - x^2, \quad x, \mu \in \mathbb{R}^n.$$

Los valores que cumple que $x' = 0$ son: $x_0 = 0$ y $x_0 = \mu$. El Jacobiano de la ecuación diferencial es $\frac{d}{dx}(\mu x - x^2) = \mu - 2x$.

◆ Si $\mu < 0$:

- para $x_0 = 0$, tenemos que $\mu - 2x_0 = \mu < 0$, por tanto $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio estable,
- para $x_0 = \mu$, $-\mu - 2x_0 = -\mu > 0$, por lo que $x_0 = \mu$ es un punto de equilibrio inestable.

◆ Si $\mu > 0$:

- para $x_0 = 0$, al evaluar este punto en el Jacobiano tenemos, $\mu - 2x_0 > 0$, entonces $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio inestable,

- para el valor de $x_0 = \mu$, $\mu - 2x_0 < 0$, por tanto $x_0 = \mu$ es un punto de equilibrio estable.

Éstos dos puntos de equilibrio x_0 , se juntan en el valor de bifurcación $\mu = 0$, es decir, cuando $\mu = 0$, tenemos solo un punto de equilibrio $x_0 = 0$.

El diagrama de bifurcación es representado por la Fig.2.2

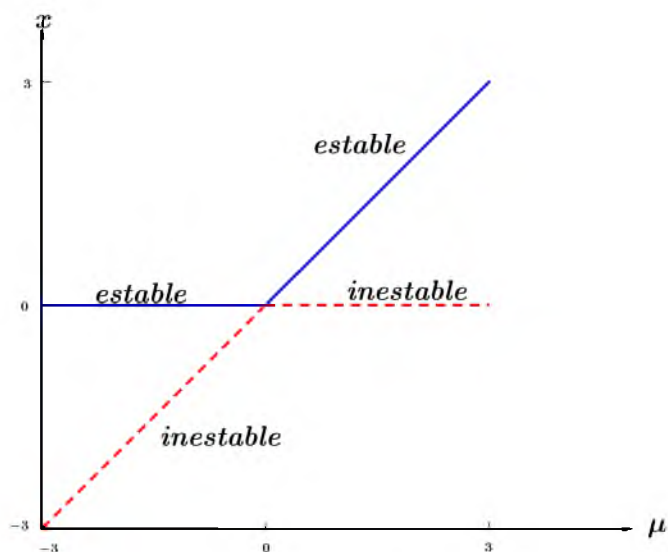


Fig. 2.2: Bifurcación Transcritica.

A continuación se enunciarán las condiciones suficientes para que el sistema (2.51) presente una bifurcación transcritical.

Teorema 2.5.14. *Supongamos que f en (2.51) es suficientemente suave y satisface*

$$f(0,0) = 0. \quad f_x(0,0) = 0. \quad f_{x\mu}(0,0)f_{xx}(0,0) \neq 0.$$

Entonces, existe un cambio local invertible de las coordenadas y un cambio en el parámetro que transforma (2.51) en la siguiente forma normal

$$y' = \gamma y \pm y^2 + \mathcal{O}(|y|^3).$$

Por lo tanto, además de la solución trivial, el sistema (2.51) tiene un punto de equilibrio distinto a cero, el cual depende continuamente de μ , para todo $|\mu|$ suficientemente pequeño y es un punto de equilibrio estable para todo μ suficientemente pequeño, tal que $\mu f_{x\mu}(0,0) > 0$.

Bifurcación de Tenedor

Consideremos el siguiente ejemplo:
El campo vectorial

$$x' = \mu x - x^3, \quad x, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $\mu > 0$, tiene tres puntos de equilibrio $x_0 = 0$ y $x_0 = \pm\sqrt{\mu}$, donde $x_0 = 0$ es un equilibrio inestable, el Jacobiano de la ecuación diferencial en $x_0 = 0$ es igual a $\mu - 3x_0^2 = \mu > 0$, mientras que $x_0 = \pm\sqrt{\mu}$ son dos puntos de equilibrio estables, $\mu - 3x_0^2 = -2\mu < 0$. A éste tipo de bifurcación se le conoce como bifurcación de tenedor (el diagrama de bifurcación se muestra en la Fig.2.3).

Es claro que $x_0 = 0$ siempre es un punto de equilibrio. Sin embargo, el parámetro μ pasa a través del valor de bifurcación $\mu = 0$ en el cual existe solo un punto de equilibrio $x_0 = 0$, el punto crítico en el origen pierde su estabilidad y dos nuevos puntos críticos estables son bifurcados desde el origen.

La bifurcación tenedor es llamada también *bifurcación supercrítica* porque existe un nuevo equilibrio para un parámetro μ mayor que es mayor al valor de bifurcación $\mu = 0$. Cuando el punto de equilibrio adicional existe para un parámetro μ pequeño que el valor de bifurcación $\mu = 0$, la bifurcación es llamada *subcrítica*.

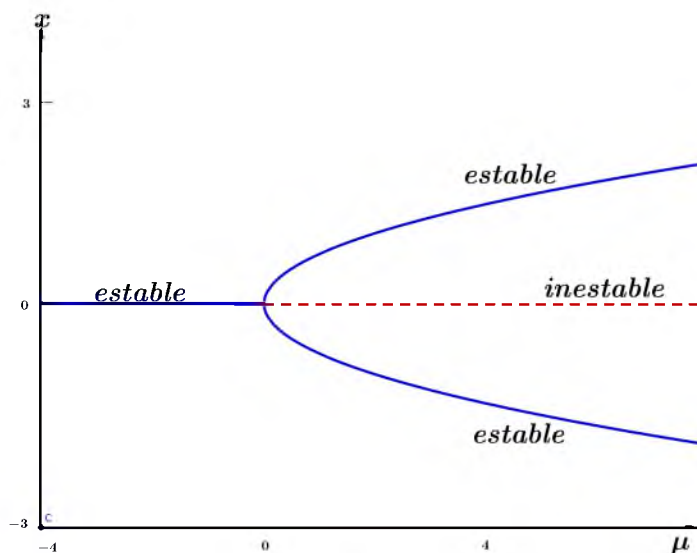


Fig. 2.3: Bifurcación de Tenedor.

Teorema 2.5.15. *Consideremos el campo vectorial*

$$f(\mu, -x) = -f(\mu, x), \quad f_x(0, 0) = 0, \quad f_{x\mu}(0, 0)f_{xxx}(0, 0) \neq 0.$$

Entonces, existe un cambio local invertible de las coordenadas y el parámetro que transforma (2.51) en la siguiente forma normal

$$y' = \gamma y \pm y^3 + \mathfrak{o}(|y|^3).$$

Por lo tanto, si $f_{x\mu}(0, 0)f_{xxx}(0, 0) < 0$ ($f_{x\mu}(0, 0)f_{xxx}(0, 0) > 0$ respectivamente), entonces dos puntos de equilibrio no triviales existen para $\mu > 0$ (respectivamente para $\mu < 0$) y solo el equilibrio trivial continua existiendo para $\mu < 0$ (respectivamente, si $\mu > 0$). Sin embargo, el punto crítico no trivial se une en cero cuando μ se acerca al cero.

Bifurcación Poincaré-Andronov-Hopf

Una bifurcación de Hopf ocurre cuando se tienen dos valores característicos complejos, específicamente un punto de equilibrio x_0 de un sistema pierde su estabilidad, un par de valores propios conjugados complejos de la linealización alrededor del equilibrio cruzan el eje imaginario del plano complejo.

Examinaremos el siguiente sistema plano.

$$x' = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \tag{2.54}$$

$$y' = x + \mu y - y(x^2 + y^2), \tag{2.55}$$

donde $x, y, \mu \in \mathbb{R}$

$$\dots \tag{2.56}$$

Usando las coordenadas polares r y θ del punto (x, y) corresponden a un número complejo $z = x + iy$, donde $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, y por tanto z queda expresado de la siguiente manera $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$; en forma exponencial $z = re^{i\theta}$. Así, el sistema (2.54) se puede ver como la siguiente expresión

$$z' = (\mu i)z - z|z|^2,$$

$$r' = r(\mu - r^2),$$

$$\theta' = 1.$$

Resolviendo para (r, θ) ,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\mu(1 + Ce^{-2\mu t})^{-1}}, & \mu \neq 0 \\ \sqrt{(2t + C)^{-1}}, & \mu = 0, \end{cases} \tag{2.57}$$

$$\theta = t - t_0, \tag{2.58}$$

donde C y t_0 son determinados por la condición inicial.

La variación del diagrama fase (Fig. 2.4) del sistema (2.54) cuando μ pasa a través del cero, puede ser analizado usando la forma polar, ya que la ecuación para r y θ están desacopladas. El sistema (2.54) siempre tiene un punto de equilibrio $x_0 = (0, 0)$, el cual es un foco estable para los valores de $\mu < 0$ y es un foco inestable en el caso que $\mu > 0$. El punto de equilibrio x_0 para $\mu > 0$, está rodeado por una órbita cerrada aislada (ciclo límite), que es única y estable.

El ciclo límite aparece después de la bifurcación, por tanto es una bifurcación supercrítica. Puede ocurrir que el ciclo límite sea una órbita estable y por tanto la bifurcación es supercrítica, o bien, el ciclo límite es una órbita inestable, entonces la bifurcación será subcrítica.

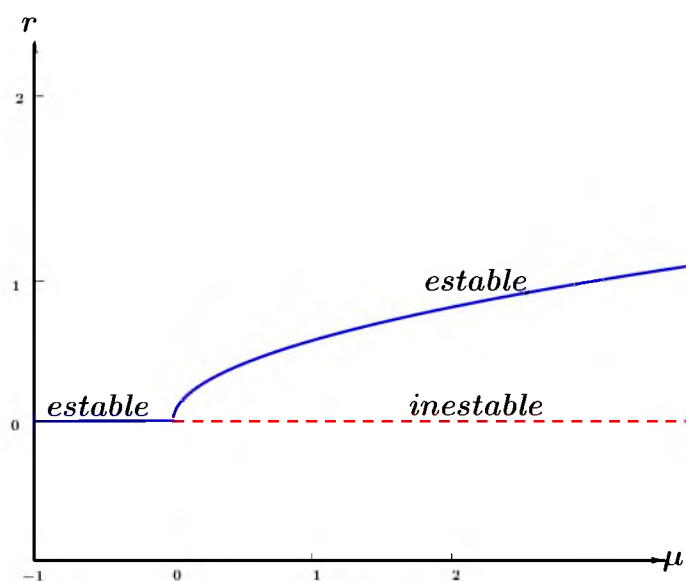


Fig. 2.4: Bifurcación Hopf supercrítica

El siguiente teorema, expresa las condiciones suficientes para que ocurra una bifurcación tipo Hopf en un sistema plano.

Teorema 2.5.16 (Hassard and Wan). *Considerese el siguiente sistema:*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f^1(x, y) \\ f^2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Donde $\omega > 0$ y f^j es tres veces diferenciable y satisface lo siguiente $f_x^j(0, 0) = f_y^j(0, 0) = 0$, para $j = 1, 2$.

Existe una rama de la solución periódica de (2.5.16) que bifurca de la solución trivial $x = 0$. Una bifurcación de Hopf es supercrítica (subcrítica), es decir, las soluciones periódicas que bifurcan existen para $\mu > 0$ (recíprocamente, cuando $\mu < 0$), si $\gamma < 0$ (respectivamente si

$\gamma > 0$), donde

$$\gamma = f_{xxx}^1 + f_{xyy}^1 + f_{xxy}^2 + f_{yyy}^2 + \frac{1}{\omega} [f_{xy}^1 (f_{xx}^1 + f_{yy}^1) - f_{xy}^2 (f_{xx}^2 + f_{yy}^2) - f_{xx}^1 f_{xx}^2 + f_{yy}^1 f_{yy}^2].$$

De manera general, para estudiar la bifurcación de Hopf en ecuaciones diferenciales ordinarias de alta dimensión, incluso en dimensiones infinitas generadas por ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones diferenciales funcionales, podemos emplear la reducción de la variedad central y la teoría de formas normales para obtener el siguiente sistema

$$z' = \lambda(\mu)z + C(\mu)z |z|^2 + \mathcal{O}(|z|^5), \quad (\mu, z) \in \mathbb{R} \times C,$$

donde $\lambda(0) = i\omega$, $\omega > 0$.

2.5.3. Bifurcación Hacia Atrás

El siguiente teorema es de gran importancia para éste trabajo, en el se describe el papel que juegan los coeficientes a y b de la forma normal, representados en los sistemas dinámicos, decidiendo la dirección transcítica de la bifurcación que ocurre en $\phi = 0$. Nos expresa, en que caso se presenta una bifurcación hacia atrás.

Éste resultado será utilizado para el análisis del modelo que se propondrá en el siguiente capítulo.

Teorema 2.5.17. *Considérese el siguiente sistema general de ecuaciones diferenciales ordinarias con un parámetro ϕ*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \phi), \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad y \quad f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}). \quad (2.59)$$

Sea 0 un punto de equilibrio del sistema (2.59), es decir, $f(0, \phi) \equiv 0$ para todo ϕ .

Supóngase que:

- ◆ $A = D_x f(0, 0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ es la matriz de linealización del sistema (2.59) alrededor del equilibrio 0 con ϕ evaluado en 0 . Además 0 es un valor propio simple de A , los otros valores propios de A tienen parte real negativa;
- ◆ La matriz A tiene vector derecho propio w y un vector izquierdo v correspondiente al valor propio 0 . Sea f_k la k -ésima componente de f y

$$a = \sum_{k,i,j=1}^n v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0),$$

$$b = \sum_{k,i=1}^n v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \phi}(0, 0).$$

CAPÍTULO 2. PRELIMINARES DE SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS

La dinámica local del sistema (2.59) alrededor de 0 queda totalmente determinada por el signo de a y b .

- ◆ $a > 0, b > 0$. Cuando $\phi < 0$ con $|\phi| \ll 1$, 0 es localmente asintóticamente estable y existe un equilibrio positivo inestable; cuando $0 < \phi \ll 1$, 0 es inestable y existe un equilibrio negativo localmente asintóticamente estable.
- ◆ $a < 0, b < 0$. Cuando $\phi < 0$ con $|\phi| \ll 1$, 0 es inestable, cuando $0 < \phi \ll 1$, 0 es un equilibrio localmente asintóticamente estable y existe un equilibrio inestable positivo.
- ◆ $a > 0, b < 0$. Cuando $\phi < 0$ con $|\phi| \ll 1$, 0 es inestable, existe un equilibrio negativo localmente asintóticamente estable; cuando $0 < \phi \ll 1$, 0 es estable, y aparece un equilibrio positivo inestable.
- ◆ $a < 0, b > 0$. Cuando ϕ cambia de negativo a positivo, 0 cambia su estabilidad de estable a inestable. Correspondientemente un equilibrio inestable negativo que comienza positivo y localmente asintóticamente estable.

Para la demostración del teorema anterior ver (Castillo-Chavez and Song (2004)).

Corolario 2.5.18. Cuando $a > 0$ y $b > 0$, la bifurcación en $\phi = 0$ es una bifurcación hacia atrás.

En nuestro siguiente capítulo se revisarán los modelos clásicos de la epidemiología, concretamente los modelos *SIR* y *SIS*; y se introducirán preliminares de presión social.

Capítulo 3

Introducción a la Modelación de Fenómenos Sociales

De acuerdo a Burt and Donnellan (2009), las conductas antisociales son acciones que infringen las reglas o normas de la sociedad, dañando a otros individuos y/o así mismo. Estas conductas perturban el orden, causando en algunas ocasiones hechos delictivos, impiden un buen desarrollo o progreso de una persona o comunidad, pues se utilizan las relaciones sociales para causar daño a otros. Se tienen identificados al menos dos factores antisociales correlacionados, los cuales son:

- ◆ Un factor “*abierto*” o físicamente agresivo, como son: atacar físicamente a otros, el acoso, etc.
- ◆ Un factor “*encubierto*” o no agresivo, es decir, mentir, robar sin agresión, vandalismo, entre otros.

Algunas formas de comportamiento antisocial, como la agresión física son frecuentes en la infancia, mientras que la ruptura de reglas, aumenta en el transcurso de la adolescencia.

La presión de los pares es considerada un comportamiento inherente a los y las adolescentes, éstos necesitan la afiliación a un grupo de su misma edad, clase social o con quién comparten afinidad, lo cual es manifestado por la aceptación de las normas del grupo, y éste grupo se fortalece en la medida en que los miembros ejercen presión para que las reglas sean aceptadas por los otros. En ese sentido, investigaciones recientes muestran que los adolescentes inmersos en las drogas son introducidos al consumo de éstas por amigos. Otros de los problemas presentados con frecuencia en esta etapa, son los trastornos alimenticios, éstos van ganando terreno con el paso del tiempo, al ser la apariencia física algo con gran importancia para las personas. La publicidad influye drásticamente al bombardear diariamente con el estereotipo de ‘belleza aceptada’, el cual es de gran impacto para cada persona, aún más para aquellas jóvenes que están buscando su identidad. En González et al. (2003) se analiza con ayuda de datos la influencia y dinámica de la bulimia cuando se tiene presente la presión de los pares. La población de estudio fueron mujeres universitarias. En éste caso se trata de explicar cómo es la evolución y el comportamiento de las personas bulímicas en dicho entorno escolar; los

resultados indican la presencia de más casos cada vez y se descubrió que un porcentaje no despreciable de mujeres en época universitaria presentaban bulimia por primera vez en su vida.

Para modelar éstos fenómenos sociales se han utilizado algunos modelos de contacto epidemiológico del tipo *SIR* y *SIS*, dichos modelos datan de principios de 1900.

Si bien el uso de modelos matemáticos para describir enfermedades infecciosas es extenso, no existen modelos matemáticos que muestren en términos generales el efecto de la presión social y si ésta tiene relación con la existencia de equilibrios endémicos.

Las enfermedades infecciosas transmisibles (o contagiosas) se pueden propagar directamente de un individuo infectado a través de sus secreciones, mucosas, y a partir de la contaminación del aire, etc; ésto cuando la persona coexiste en un entorno con más individuos vulnerables a enfermedades infecciosas. De manera similar, en las conductas antisociales, la persona que tiene éste tipo de comportamiento se encuentra en un contexto social, ya sea una escuela, grupos de igualdad, instituciones, asociaciones que alientan las relaciones agresivas o violentas de las personas. Por lo cual una enfermedad infecciosa, así como los comportamientos antisociales se desarrollan en un ambiente donde se involucran a varias personas y necesitan de la interacción de éstas para llevarse a cabo. En éste sentido, se pretende entender el fenómeno social y el papel que juega la presión social en la aparición de nuevos casos de individuos con conductas antisociales. Así mismo, en éste trabajo también se investigará si el fenómeno conocido como bifurcación hacia atrás puede aparecer mediante el efecto de la presión positiva de los pares.

3.1. Preliminares de Modelos de presión social

Los modelos de presión social mostrados hasta ahora tienen como antecedentes modelos que ya habían sido probados por la epidemiología, los cuales tienen sus inicios a principios de 1900. Aunque ya se tenían indicios y resultados de la aplicación de las matemáticas a la epidemiología desde el año 1760, cuando Daniel Bernoulli publicó un pequeño tratado sobre la epidemia de peste que en ese entonces abatía Europa.

En el siglo pasado el interés por la aplicación de métodos cuantitativos a la biología surgió como consecuencia del uso de éstos en la física; en ese tiempo se pensaba que un brote epidémico solo iba a disminuir si el número de personas infectadas se agotaba. Posteriormente se observó que las enfermedades infecciosas se transmiten por contacto entre un individuo susceptible y uno infeccioso.

Hamer en 1906 formuló la *ley de acción de masas* la cual establece que *el número de contactos infecciosos, es decir, que producen enfermedad por unidad de tiempo es proporcional al número total de contactos entre individuos infecciosos y sanos.*

Más tarde Ronald Ross en su libro *The Prevention of Malaria* en la edición de 1911, formuló un modelo matemático sencillo, el cual apoyaba su argumentación de que para erradicar el paludismo era suficiente con disminuir la población de mosquitos a un nivel bajo, sin ser necesario extinguirlos.

Así surgieron particularmente los modelos *SIR* (Kermack and McKendrick (1927); Martcheva

(2015)) y *SIS* (Tassier (2013)), los cuales son modelos básicos que consideran la interacción de dos o tres clases de individuos respectivamente, dichas clases de individuos coexisten e interactúan en el mismo entorno. La población total está dada por la suma de las poblaciones de las diferentes clases.

Existen otros modelos que también se han derivado de los modelos *SIR* y *SIS* como es el caso del modelo *SIRS* donde la población que se recupera pierde su inmunidad y vuelve a ser parte de los susceptibles, o el modelo *SEIS*, en el cual, hay otra clase de población, las personas que son portadoras de la enfermedad, dicho de otra manera, están infectados pero no pueden contagiar a otras personas pues la enfermedad está en periodo de incubación; un modelo similar al modelo anterior, es el *SEIR*, pero ahora se tiene una población de recuperados; en el modelo *MSIR*, también se tiene una nueva clase de población, llamada infantes con inmunidad pasiva, los cuales en cierto tiempo pierden la inmunidad y pueden infectar a la población.

La mayor parte de modelos epidemiológicos se basan en dividir a la población en un pequeño número de grupos compartimentados, cada uno de éstos grupos está formado por individuos idénticos en términos de su estatus con respecto a la infección en cuestión.

A continuación se profundizará en los modelos *SIR* y *SIS*, de los cuales surgieron los modelos de presión social.

3.1.1. Modelo SIR

El modelo *SIR* es un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que tiene sus orígenes en la propuesta realizada por W.O. Kermack, A.G. McKendrick en 1927 (ver Kermack and McKendrick (1927)). En éste modelo la población es dividida en tres tipos de individuos: **individuos susceptibles (S)**, **individuos infecciosos (I)** e **individuos recuperados (R)**. De esta manera una población tiene asociadas las siguientes subpoblaciones:

- ◆ Población susceptible (S), éstos individuos no tienen inmunidad al agente infeccioso, y por tanto pueden ser infectados al ser expuestos a una persona infectada.
- ◆ Población infecciosa (I), son los individuos que están infectados en un momento dado y pueden transmitir la infección a individuos de la población susceptible cuando entran en contacto con ellos.
- ◆ Población recuperada (R), individuos que se recuperan de la infección. Algunas veces, estos individuos adquieren cierta inmunidad a la infección, por lo que no pueden ser infectados cuando entran en contacto con otros individuos.

Según el modelo *SIR* un individuo susceptible (S) en contacto con un individuo infeccioso (I), tiene cierta probabilidad de pasar él mismo a la condición de infectado y entonces ser infeccioso. Por otra parte, la capacidad de infectar a la población susceptible no es siempre la misma, sino que desaparece al cabo de cierto tiempo. Ese fenómeno puede ocurrir por diferentes mecanismos tales como el curso natural de la enfermedad con inmunidad adquirida, muerte o cuarentena.

CAPÍTULO 3. INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN DE FENÓMENOS SOCIALES

Se sabe que las enfermedades infecciosas se pueden transmitir con mucha facilidad pero también si se recibe algún tratamiento (medicamento), en cierto tiempo, cuarentena, etc., el individuo se recupera, en el peor de los casos si la enfermedad es muy grave o la persona no la puede soportar, ésta fallece.

Las ecuaciones del modelo de Kermack y McKendrick que describen el comportamiento de los tres tipos de individuos mencionados anteriormente son las siguientes:

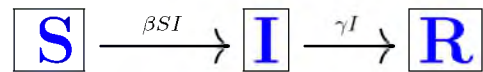
$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (3.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (3.2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (3.3)$$

Donde β es la tasa de transmisión y γ es la tasa de recuperación. En este modelo se supone que ambas tasas son constantes y que la población N también lo es, por tanto $S + I + R = N$, con N constante.

Este modelo puede ser representado con un diagrama, el cual se presenta a continuación:



En el diagrama anterior se observa la transición entre distintas clases de individuos en las que se dividió la población: la clase de individuos susceptibles (S) interactúa con los individuos infectados, con un total de interacciones SI , ya que cada individuo de S va a interactuar con todos los individuos en I y existe cierta tasa β de que el contacto sea exitoso, por lo cual βSI representa la población de nuevos infecciosos, los cuales resultaron infectados cuando interactuaron los individuos susceptibles con los infecciosos. Ésta cantidad es agregada a la clase de individuos infecciosos. Por otra parte, suelen existir tratamientos, o con el tiempo las personas infectadas logran recuperarse de la enfermedad de forma natural, con las defensas que produce su cuerpo, esto ocurrirá a una cierta tasa de recuperación γ . Es decir, γI es la población que se recupera por unidad de tiempo.

Algunos fenómenos bien representados por este modelo son la evolución de una conducta bulímica en un entorno escolar y el inicio de consumo de éxtasis en los jóvenes (González et al. (2003); Song et al. (2006)). El modelo SIR nos da un buen análisis del comportamiento de enfermedades como la gripe, la influenza (Earn et al. (2002); Coburn et al. (2009)), etc. Para tener una mejor representación de las situaciones reales, se realizan pequeños cambios a los modelos, con esto se busca tener modelos más realistas los cuales tengan soluciones cada vez más cercanas a la realidad. Existe una derivación del modelo anteriormente mencionado, en el cual se consideran los nacimientos y muertes de los individuos en la población. En este caso, las ecuaciones diferenciales del modelo SIR , con dinámica vital son las siguientes:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu(N - S), \quad (3.4)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I, \quad (3.5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R. \quad (3.6)$$

Donde β es la tasa de transmisión, γ es la tasa de recuperación y μ es la tasa promedio de defunciones o nacimientos, se asume que la población (N) es constante y además $N = S + I + R$.

3.1.2. Modelo SIS

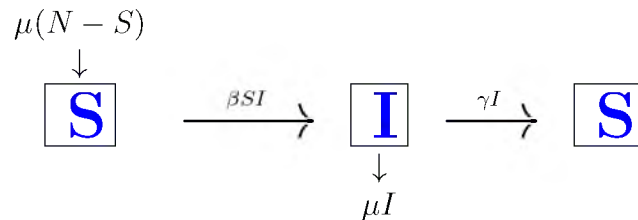
Este modelo es una simplificación del modelo *SIR*. En este caso se toma en cuenta la hipótesis de que los individuos infectados al recuperarse vuelven a ser susceptibles. El modelo *SIS* considera solamente individuos susceptibles (S) e individuos infecciosos (I). Consideramos el modelo *SIS* con nacimientos y muertes, el cual está expresado por dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu(N - S) + \gamma I, \quad (3.7)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I. \quad (3.8)$$

Donde β es la tasa de transmisión, γ es la tasa de recuperación, μ es la tasa promedio de nacimientos/muerte y N es la población total, es decir, $N = S + I$.

Al igual que el modelo *SIR*, el modelo *SIS* también puede ser representado por un diagrama, el cual se presenta a continuación:



Con este diagrama se observa la transición de los individuos entre las poblaciones.

Se supone que nacen y mueren la misma cantidad de personas, por lo cual, cuando se tiene un individuo infectado, es posible que muera por complicaciones de la enfermedad, y esto ocurre con cierta tasa μ , lo cual implica que de la población infectada se eliminan μI individuos. Como los individuos nacen y mueren en la misma proporción, entran a la clase de individuos susceptibles $\mu(N - S)$ individuos nuevos. Anteriormente se había dicho que $N = S + I$ entonces $I = N - S$, de manera similar que en el modelo *SIR* al convivir en el mismo contexto, infecciosos y susceptibles es posible que éstos se infecten con cierta tasa β , βSI es

la población que pasa a la clase de infecciosos. La población que no fallece cuando está en la clase de infecciosos está dada por γI , la cual vuelve a entrar a la clase susceptible. Fenómenos como las enfermedades de transmisión sexual son bien representadas por este modelo (Liljeros et al. (2003)).

3.1.3. Número reproductivo básico

Para el modelo SIR , donde se tiene una población homogéneamente mezclada de N individuos que coexisten en algún contexto, con una dinámica representada por las ecuaciones (3.1, 3.2, 3.3), se puede realizar un cambio de variable, para simplificar las ecuaciones, donde $s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$, $r = \frac{R}{N}$. Ahora corresponde a s , i y r , la porción de la población total que se encuentra en las clases de susceptibles, infectados y recuperados respectivamente. Con ello las ecuaciones (3.1, 3.2, 3.3) pueden reescribirse de la siguiente forma:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si, \quad (3.9)$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i, \quad (3.10)$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i, \quad (3.11)$$

donde β y γ representan lo mismo que en las ecuaciones (3.1, 3.2, 3.3) y se asume que ambas son constantes.

Si la derivada de una función es positiva, por resultados del cálculo diferencial, se sabe que dicha función es creciente, entonces si $\frac{di}{dt} > 0$, significa que i está creciendo mientras transcurre el tiempo. Esto indica que la población de individuos infecciosos está aumentando y en cierto tiempo t^* ocurrirá una epidemia en la población.

Como $\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i$, se sigue que

$$\beta si - \gamma i > 0,$$

por lo cual

$$\beta si > \gamma i,$$

de donde se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\beta si}{\gamma} &> i, \\ \frac{\beta s}{\gamma} &> 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Al comenzar un brote infeccioso en la población, $s \approx 1$, pues la mayoría de las personas estarán sanas, posteriormente irán apareciendo algunos individuos infectados. Para el modelo anterior (ecuaciones 3.9, 3.10, 3.11), supóngamos que $s = 1$. Con esta suposición la ecuación (3.12) se expresa como:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1, \quad (3.13)$$

donde β es la tasa de transmisión y γ es la tasa de recuperación (o eliminación). En el otro caso, cuando la derivada de $\frac{di}{dt} < 0$ significa que la población de individuos infectados disminuye al transcurrir el tiempo. Así

$$\beta si - \gamma i < 0,$$

de modo que

$$\beta si < \gamma i,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\beta si}{\gamma} &< i, \\ \frac{\beta s}{\gamma} &< 1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Para $s = 1$, la ecuación (3.14), queda expresada de la siguiente manera:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} < 1, \tag{3.15}$$

esto significa que en algún momento (tiempo) la infección desaparecerá en la población N . Ahora bien, se puede expresar $\beta = \delta\phi$, donde δ es la probabilidad que tiene un individuo susceptible de infectarse si entra en contacto con un individuo infeccioso y ϕ es la probabilidad de que se dé un contacto entre un individuo infeccioso y un susceptible.

Al ser todas las tasas constantes, $\frac{1}{\gamma}$ es la duración esperada que tendrá la infección. Definiendo R_0 como el producto de la tasa de transmisión, el promedio de infección por contagio entre un individuo infeccioso y uno susceptible y la duración esperada de la infección:

$$R_0 = \delta\phi\gamma^{-1}. \tag{3.16}$$

R_0 recibe el nombre de *número reproductivo básico* (Heesterbeek (2002); Jones (2007)), y se define como *el número esperado de casos secundarios que produce un individuo infeccioso durante su tiempo de infecciosidad al ser introducido en una población completamente susceptible*, esto se debe al supuesto anterior de que $s = 1$.

El análisis anterior se refiere al caso más simple, cuando se tiene un solo individuo infeccioso en la población, pero también se presenta el suceso donde existen múltiples clases de poblaciones infecciosas, por tanto la definición anterior de R_0 ya no es suficiente al tener esta situación. A consecuencia de esto, se generalizó la definición del número reproductivo básico, con la idea de tener ahora el promedio del número esperado de nuevos infecciosos, suponiendo que en la población hay múltiples individuos infecciosos (humanos o animales). Considerando una población homogénea, la cual es dividida en n clases homogéneas y disjuntas, se puede aproximar por una cantidad de clases discretas, esto permite suponer que las probabilidades de transmisión entre las clases (estados) son constantes (Heffernan et al. (2005)).

Supongamos que $x = (x_1, \dots, x_n)$ donde $x_i \geq 0$ son el número de individuos de cada clase y $X_t = \{x \geq 0 \mid x_i = 0, i = 1, \dots, m\}$, es el conjunto de todos los estados libres de enfermedad. Sean

$$F = \left[\frac{\partial \mathbb{I}_i}{\partial x_j}(x_0) \right], V = \left[\frac{\partial \mathbb{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right],$$

matrices de $m \times m$ con $1 \leq i, j \leq m$, donde $F_i(x)$ es la tasa de aparición de nuevas infecciones en el compartimento i , $V_i(x) = \mathbb{V}_i(x)^- - \mathbb{V}_i(x)^+$ representa la transferencia directa de la infección de un compartimento a otro en el estado de equilibrio libre de enfermedad, $\mathbb{V}_i(x)^-$ es la tasa de transferencia de un individuo dentro del compartimento i por otros medios, $\mathbb{V}_i(x)^+$ es la tasa de transferencia de un individuo dentro del compartimento i por otros medios. Se supone que éstas funciones son continuamente diferenciables al menos dos veces en cada variable.

La entrada (j, k) de $\mathbb{V}_i(x)^-$ es el promedio de tiempo que el individuo k pasa en la clase j durante su vida útil, la entrada (i, j) de F es la tasa a la cual un individuo infeccioso en la clase j produce nuevos individuos infecciosos en la clase i , la entrada (i, k) es la entrada del producto de FV^{-1} que expresa el número esperado de nuevas infecciones en el compartimento i producido por un individuo infeccioso originalmente introducido en la clase k .

Definimos el número reproductivo básico como:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}), \quad (3.17)$$

donde $\rho(FV^{-1})$, es el radio espectral de la matriz (FV^{-1}) , es decir, el valor propio dominante. La matriz FV^{-1} es llamada *matriz de la siguiente generación* (Van den Driessche and Watmough (2002)).

Dicha matriz es no negativa, ésto garantiza que habrá un sólo y único valor propio positivo, real y estrictamente mayor que los demás valores propios (Van den Driessche and Watmough (2002)).

En los modelos epidemiológicos, es de especial interés el cálculo del parámetro umbral R_0 , ésta cantidad es adimensional.

Pasando por varias investigaciones y análisis de diversos modelos de enfermedades infecciosas los investigadores notaron que para ciertos valores de R_0 , se presentaban en el sistema ciertos comportamientos diferentes de los comúnmente esperados.

En especial para los modelos epidemiológicos, el cálculo del R_0 es importante, pues indica si la enfermedad persistirá en la población o se erradicará. También es de utilidad en el diseño de medidas de control. Diciendo cual será mas efectiva para que R_0 sea menor que uno. Ésto es importante para las iniciativas que emergerán de las políticas de salud pública y también es usado para saber el riesgo de epidemia o pandemia en un enfermedad infecciosa grave. Dicho lo anterior:

- ◆ Si $R_0 < 1$, en promedio un individuo infectado produce menos de un nuevo individuo infectado durante su periodo infeccioso y la infección no puede seguir. Para un tiempo suficientemente largo la enfermedad desaparece.

En el modelo, se dice que las soluciones tienden al equilibrio libre de enfermedad.

- ♦ Si $R_0 > 1$, cada individuo infectado produce en promedio más de un nuevo infectado, es decir, los individuos infectados aumentan con el paso del tiempo y la enfermedad se propaga (se genera una epidemia).
En el modelo, el equilibrio libre de enfermedad (DFE) pierde su estabilidad y existe un equilibrio endémico estable (*bifurcación hacia adelante*).

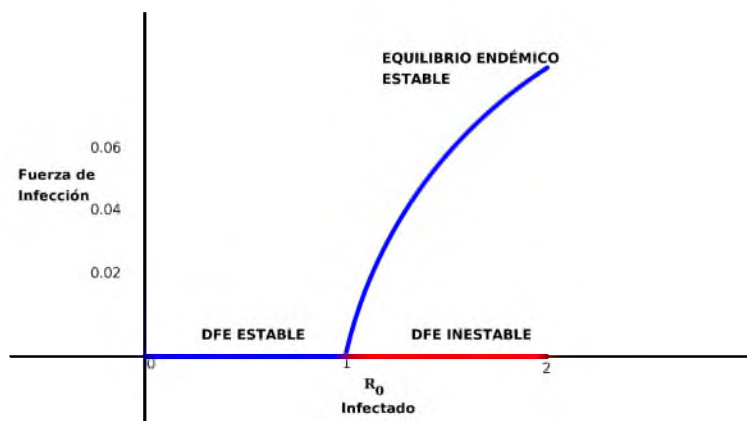


Fig. 3.1: Bifurcación Hacia Adelante (Gumel (2012))

3.1.4. Bifurcación Hacia Atrás

Para modelar enfermedades infecciosas es necesario tomar en cuenta varios aspectos importantes, con ello será posible mejorar el modelo; en estos fenómenos podemos considerar la fuerza de infección, la cual en el modelo se representa por una función que describe la transición de la enfermedad, otro aspecto a considerar es la intervención que se lleva a cabo para contrarrestar la enfermedad, por ejemplo: tratamientos, vacunas, o campañas de salud (Buonomo and Lacitignola (2011)).

Si en los modelos derivados del modelo *SIR* (Gumel (2012); Castillo-Chavez and Song (2004); Gumel and Moghadas (2003)) se incluye algún parámetro que represente la vacunación en la población (representado la mayoría de las veces como una transferencia lineal entre los individuos recuperados y susceptibles); el modelo puede presentar *biestabilidad* y **bifurcación hacia atrás**.

Cuando ocurre la bifurcación hacia atrás (Buonomo and Lacitignola (2011)), la condición de $R_0 < 1$ ya no es suficiente para decir que la enfermedad desaparecerá en cierto tiempo, al contrario de cuando se presenta bifurcación hacia adelante en donde al tener la condición $R_0 < 1$ es necesario y suficiente para garantizar la desaparición de la enfermedad. Pero si se presenta bifurcación hacia atrás, es necesario reducir aún más R_0 para evitar estados endémicos y poder garantizar la eliminación de la enfermedad. En este caso un equilibrio endémico existe para $R_0 < 1$ y está relacionado con la aparición de estados endémicos múltiples. Si el número de reincidentes es mayor que un valor umbral, involucra la existencia de una bifurcación (transcrítica subcrítica) en $R_0 = 1$ y de una bifurcación nodo silla en $R_0 = R_0^{sn} < 1$.

Dicho fenómeno es indeseable en los modelos epidemiológicos y tiene importancia en la salud pública. En general, al ocurrir bifurcación hacia atrás (Fig 3.2), se tiene (en la vecindad del uno):

- ◆ Para $R_0 < 1$, un equilibrio estable libre de enfermedad coexiste con dos equilibrios endémicos:
 1. un equilibrio endémico inestable (más pequeño); en él la población tiene un número pequeño de individuos infectados, y
 2. un equilibrio endémico estable, en él la población tiene un gran número de individuos infectados.

Estos equilibrios, desaparecen en una bifurcación nodo silla cuando R_0 decrece por debajo del valor crítico $R_0^{sn} < 1$.

- ◆ Para $R_0 > 1$ existen sólo dos equilibrios,
 1. un equilibrio inestable; el cual es el equilibrio libre de enfermedad, y
 2. un equilibrio estable, que es el equilibrio endémico más grande.

Si R_0 está por debajo de uno, entonces el control de la enfermedad depende fuertemente del tamaño inicial de los compartimentos del modelo.

Al reducir R_0 debajo de R_0^{sn} , puede provocar la eliminación de la enfermedad, lo que garantiza siempre que el equilibrio libre de enfermedad es globalmente asintóticamente estable. Donde el subumbral R_0^{sn} tiene una importancia en el control de la enfermedad.

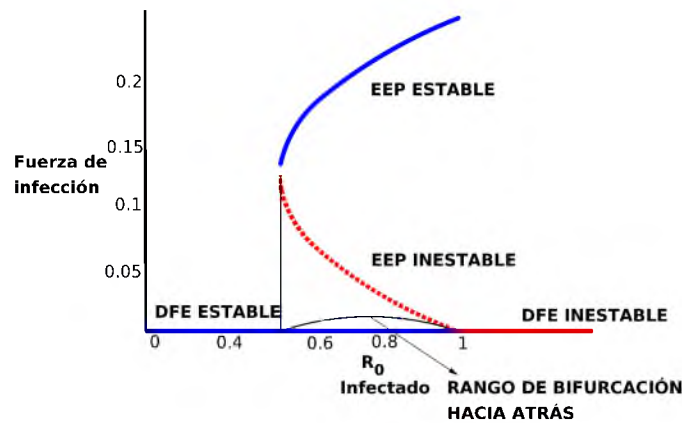


Fig. 3.2: Bifurcación Hacia Atrás (Gumel (2012))

En Gumel (2012) la aparición de bifurcación hacia atrás se dio por la interacción de tres mecanismos biológicos que fueron incluidos en el modelo: un método de vacunación (caracterizado por la tasa de vacunación y su efectividad), tratamiento y transmisión. En este mismo artículo se identifican características en los modelos estándar de transmisión de enfermedades tipo Kermack-McKendrick que pueden provocar la presencia de ésta bifurcación, los cuales se describen a continuación:

CAPÍTULO 3. INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN DE FENÓMENOS SOCIALES

- ◆ Reinfeción por causas externas (de individuos con infección latente).
- ◆ Vacunación:
 - la vacuna no ofrece inmunidad completa,
 - la inmunidad de la vacuna disminuye más lento que la inmunidad natural,
 - la vacuna falla y excede cierto umbral.
- ◆ Mortalidad (modelos de propagación de la enfermedad transmitida por vectores de nacimiento).
- ◆ Susceptibilidad diferencial en modelos de transmisión de enfermedades estructurado por el riesgo.

Capítulo 4

Modelo Matemático con Presión Social Positiva

4.1. Presentación del Modelo

Se construyó un modelo a partir de los modelos *SIR* y *SIS*, el cual involucra la presión social. En él se presenta la influencia de los individuos recuperados sobre las personas que padecen algún tipo de trastorno o problema antisocial.

La población total $N(t)$ se divide en tres clases:

- ◆ x son los individuos susceptibles a padecer algún trastorno o problema antisocial, y que nunca han padecido alguno de éstos,
- ◆ y son los individuos recuperados, los cuales recibieron algún tratamiento para superar algún problema antisocial,
- ◆ z son los individuos con un problema social, como: bulimia, alcoholismo, entre otros.

Nuestra población total $N(t)$ queda expresada como la suma de éstas tres poblaciones, es decir, $N(t) = x(t) + y(t) + z(t)$, además suponemos que es constante.

El sistema está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - \beta xz \equiv f_1(x, y, z), \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = l(z)y - \mu y \equiv f_2(x, y, z), \quad (4.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = \beta xz - l(z)y - \mu z \equiv f_3(x, y, z). \quad (4.3)$$

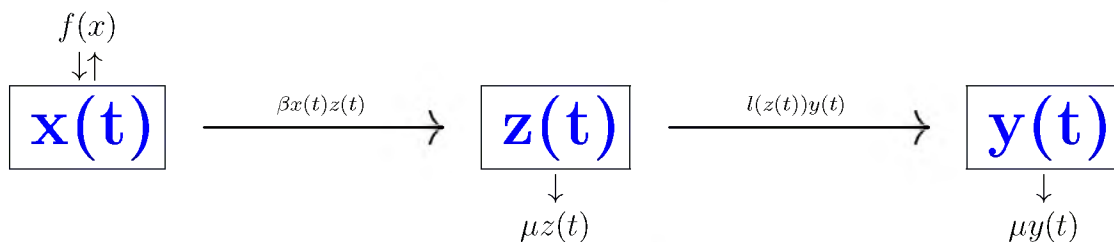
Donde:

- ◆ $\beta > 0$ es la tasa de influencia efectiva, que se da entre la clase de personas con problemas antisociales y los individuos de la clase susceptible,

CAPÍTULO 4. MODELO MATEMÁTICO CON PRESIÓN SOCIAL POSITIVA

- ◆ μ es la tasa de nacimiento/muerte,
- ◆ $l(z)$, es la función que representa la presión social entre las clase, donde $l(z) \in C^1(\mathbb{R})$,
- ◆ $f(x)$ describe dos fenómenos; en primer lugar, el reclutamiento de la clase susceptible y en segundo lugar, la muerte de los individuos susceptibles.

Éste modelo considera un mecanismo entre los individuos recuperados e individuos con algún tipo de problema antisocial. Se muestra a continuación representado en un diagrama.



En el diagrama anterior se observa la transición que ocurre en las distintas clases de población $N(t)$. Obsérvese que individuos entran y salen de la clase susceptible $x(t)$ en una cantidad $f(x)$. Además, el término $\beta x(t)z(t)$ describe el número de nuevos individuos con conductas antisociales. Esto es debido a que los individuos susceptibles a presentar conductas antisociales, $x(t)$, cuando están en contacto con individuos con estos problemas, $z(t)$, con cierta probabilidad β realizarán comportamientos que son considerados comportamientos antisociales (esto por unidad de tiempo). El término $l(z(t))y(t)$ describe a los individuos con conductas antisociales que dejan esta clase debido a que la clase de recuperados entró en contacto con los individuos con problemas antisociales y reciben de ellos una presión positiva. Aquí $l(z(t))$ describe la presión positiva ejercida del grupo de recuperados en la población $y(t)$. Finalmente, se supone que en cada clase mueren naturalmente individuos a una tasa μ . Así, el término, $\mu y(t)$ y $\mu z(t)$ describen el número de muertes en las clases $y(t)$ y $z(t)$. Para iniciar con el estudio del modelo propuesto, el primer paso a realizar es la obtención de los puntos críticos del sistema de ecuaciones diferenciales (4.1,4.2, 4.3), es decir, cuando se iguala a 0 la parte derecha de cada ecuación del sistema. En consecuencia:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{dz}{dt} = 0. \tag{4.6}$$

Particularmente se tiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$f(x) - \beta xz = 0, \tag{4.7}$$

$$l(z)y - \mu y = 0, \tag{4.8}$$

$$\beta xz - l(z)y - \mu z = 0. \quad (4.9)$$

Obsérvese que en ausencia de individuos con conductas antisociales; visto de otra manera, cuando $z^*(t) = 0$ se tiene $l(0) = 0$. Así, $l(0)y(t) = 0$, de donde, en la segunda ecuación (4.8), se sigue que $y^*(t) = 0$. Por ende, en la primera ecuación (4.7) se debe satisfacer que $f(x^*) = 0$ para que $(x^*, 0, 0)$ sea un punto de equilibrio del sistema. De ser éste el caso, el punto $E_0 = (x^*, 0, 0)$ es llamado *equilibrio libre de conductas antisociales*.

Los casos no triviales serán analizados de manera específica cuando las funciones $f(x)$ y $l(z(t))$ estén dadas.

4.2. Análisis de Bifurcación en el Equilibrio Libre de Conductas Antisociales

Se realizará el análisis de bifurcación del modelo cuando $R_0 = 1$. Para éste fin, el modelo propuesto que se rige por las ecuaciones (4.1, 4.2, 4.3), será aproximado por su mejor aproximación lineal en una vecindad de E_0 . Para esto se obtendrá la matriz Jacobiana asociada al modelo, la cual queda expresada de la siguiente forma:

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} f'(x) - \beta z & 0 & -\beta x \\ 0 & l(z) - \mu & yl'(z) \\ \beta z & -l(z) & \beta x - yl'(z) - \mu \end{bmatrix}.$$

Es importante recordar, que en el caso $E_0 = (x^*, 0, 0)$ se tiene una población de susceptibles x^* , no se tienen individuos con problemas sociales ni individuos que se hayan recuperado de algún problema social; este punto crítico sucede cuando $f(x^*) = 0$. Evaluaremos el punto de equilibrio E_0 en la matriz Jacobiana de nuestro sistema,

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} f'(x^*) & 0 & -\beta x^* \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \beta x^* - \mu \end{bmatrix}.$$

Obteniendo el polinomio característico asociado a la matriz J evaluada en E_0 , el cual será denotado por $P(\lambda)$, se tiene lo siguiente:

$$P(\lambda) = \det(J(E_0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} f'(x^*) - \lambda & 0 & -\beta x^* \\ 0 & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \beta x^* - \mu - \lambda \end{vmatrix}.$$

Así, $P(\lambda) = (f'(x^*) - \lambda)(-\mu - \lambda)(\beta x^* - \mu - \lambda)$. Cuyos valores propios asociados al punto de equilibrio libre de conductas antisociales son:

$$\lambda_1 = f'(x^*), \quad \lambda_2 = -\mu, \quad \lambda_3 = \beta x^* - \mu.$$

Ahora bien, para que el criterio del Teorema 2.5.17 pueda ser utilizado supondremos que $f'(x^*) < 0$.

Obsérvese que para el valor de λ_3 , existen tres casos;

- ◆ $\lambda_3 < 0$,
- ◆ $\lambda_3 = 0$,
- ◆ $\lambda_3 > 0$.

Ahora, definimos el número reproductivo básico como:

$$R_0 = \frac{\beta x^*}{\mu}. \quad (4.10)$$

Considerando los tres casos posibles para el valor de λ_3 , es de importancia centrar el análisis en el caso $\lambda_3 = 0$. Nótese que $\lambda_3 = 0$, cuando $R_0 = 1$. De esta manera, si $R_0 = 1$ se presenta un punto de bifurcación del sistema. Conociendo el comportamiento del sistema en este caso se conocerá cual será el comportamiento en una vecindad del punto de bifurcación.

Para analizar con más detalle el caso cuando $R_0 = 1$, nótese que $R_0 = 1$, si $\beta^* = \frac{\mu}{x^*}$. Defínase R_0 para $\beta^* = \frac{\mu}{x^*}$ como $R_0^* \equiv \frac{\beta^* x^*}{\mu}$.

Posteriormente evaluamos la matriz Jacobiana en (E_0, R_0^*) , se tiene que

$$J(E_0, R_0^*) = \begin{bmatrix} f'(x^*) & 0 & -\beta^* x^* \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que la matriz Jacobiana tiene una fila de ceros (J es una matriz triangular superior), por tanto uno de sus valores propios es cero, $\lambda_1 = 0$ y los otros son: $\lambda_2 = f'(x^*) < 0$, $\lambda_3 = -\mu$.

Respecto a lo anterior, se puede aplicar el Teorema 2.5.17 para conocer la dinámica local alrededor de E_0 para R_0^* . En primer lugar se calcularán el vector propio derecho (W) y el vector propio izquierdo (V) correspondientes a la matriz J , donde $W^t = [w_1, w_2, w_3]$ y $V = [v_1, v_2, v_3]$. El vector propio derecho se obtiene de resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} f'(x^*) & 0 & -\beta^* x^* \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o equivalente de resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f'(x^*)w_1 - \beta^* x^* w_3 &= 0, \\ -\mu w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Resulta que $w_2 = 0$. Por tanto el vector propio derecho está dado por;

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\beta^* x^*}{f'(x^*)} w_3 \\ 0 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta^* x^*}{f'(x^*)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_3.$$

CAPÍTULO 4. MODELO MATEMÁTICO CON PRESIÓN SOCIAL POSITIVA

Calculando el valor propio izquierdo para la matriz J se tiene

$$[v_1 \quad v_2 \quad v_3] \begin{bmatrix} f'(x^*) & 0 & -\beta^* x^* \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0].$$

O equivalentemente se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f'(x^*)v_1 &= 0, \\ -\mu v_2 &= 0, \\ -\beta^* x^* v_1 &= 0. \end{aligned}$$

De aquí, se sigue que $v_1 = v_2 = 0$. El vector propio izquierdo está dado por

$$V^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_3.$$

Por lo tanto si $w_3 = 1$ y $v_3 = 1$ se tiene que W y V son ortornormales, ya que se cumple $\langle V, W \rangle = 1$. Calculando los parámetros a y b , de acuerdo a la definición del Teorema 2.5.17 se tiene

$$a = v_3 w_1 w_3 \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z} + v_3 w_3 w_1 \frac{\partial^2 f_3}{\partial z \partial x},$$

$$a = w_1 \beta^* + w_1 \beta^*,$$

$$a = 2 \frac{(\beta^*)^2 x^*}{f'(x^*)} < 0,$$

y

$$b = x^*$$

puesto que $v_3 w_3 = 1$, $v_1 = 0$, $w_2 = 0$, y

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} = 0.$$

Se tiene $a < 0$ y $b > 0$, lo que significa que estamos en el cuarto caso del Teorema (2.5.17), por lo tanto, se concluye que el modelo presenta una bifurcación hacia adelante cuando $R_0^* = 1$. A continuación se analizará el modelo propuesto para dos funciones específicas $f(x(t))$ y $l(z(t))$.

4.2.1. Análisis Particular del Modelo

Para un análisis más específico proponemos la función $f(x) = \mu(1 - x)$. En éste caso, se tiene que individuos llegan a la clase susceptible de manera constante a una tasa μ y que mueren individuos susceptibles de manera proporcional a la clase con la misma tasa μ . Obsérvese que para ésta función específica $f(x)$, el equilibrio libre de comportamiento anti-social, E_0 , está dado por $E_0=(1, 0, 0)$, es decir, $x^* = 1, y = 0, z = 0$. Con estos valores la función $f(x^*)$ satisface que

- ◆ $f(x^*) = 0$,
- ◆ $f'(x^*) = -\mu < 0$.

La función $l(z(t))$ será representada por la siguiente ecuación específica

$$l(z) = \frac{rz}{s + tz}, \quad (4.11)$$

donde $r, s, t > 0$. De esta manera, $l(0)$ cumple $l(0) = \frac{r0}{s+t0} = 0$. Sin pérdida de generalidad el sistema se escribe como:

$$\frac{dx}{dt} = \mu(1 - x) - \beta xz, \quad (4.12)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{rz}{s + tz}y - \mu y, \quad (4.13)$$

$$\frac{dz}{dt} = \beta xz - \frac{rz}{s + tz}y - \mu z. \quad (4.14)$$

La matriz Jacobiana queda expresada de siguiente manera:

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta z & 0 & -\beta x \\ 0 & \frac{rz}{s+tz} - \mu & y \frac{sr}{(s+tz)^2} \\ \beta z & \frac{-rz}{s+tz} & \beta x - \mu \end{bmatrix}.$$

Evaluando el Jacobiano en el punto de equilibrio de conductas antisociales se tiene

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \beta - \mu \end{bmatrix}.$$

Calculamos para $J(E_0)$ el polinomio característico, el cual es:

$$P(\lambda) = \det(J(1, 0, 0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -\beta \\ 0 & \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \beta - \mu - \lambda \end{vmatrix},$$

$$P(\lambda) = (-\mu - \lambda)^2(\beta - \mu - \lambda).$$

De esta manera, los valores propios están dados por

$$\lambda_{1,2} = -\mu,$$

$$\lambda_3 = \beta - \mu.$$

Defínase $R_0 = \frac{\beta}{\mu}$. Tenemos los siguientes resultados:

- ◆ Si $\mu > \beta$, $R_0 < 1$, $\lambda_3 < 0$, todos los valores propios son negativos, entonces, el punto de equilibrio libre de conductas antisociales es localmente asintóticamente estable.
- ◆ Si $\beta > \mu$, $R_0 > 1$, $\lambda_3 > 0$, existen dos valores propios negativos y uno positivo, entonces, el punto de equilibrio libre de conducta antisocial es inestable, particularmente, es un punto silla.
- ◆ Si $\beta = \mu$, $R_0 = 1$, entonces, se tienen dos valores propios negativos y uno igual a cero, por lo que no se puede conocer su estabilidad. Sin embargo se está en condiciones de aplicar los resultados del Teorema 2.3.63.

4.2.2. Simulación

En ésta sección se mostrará gráficamente el comportamiento que presenta el modelo, en los casos:

1. $\mu > \beta$, es decir, cuando $R_0 < 1$,
2. $\beta > \mu$, es decir, cuando $R_0 > 1$ y
3. $\beta = \mu$, es decir, cuando $R_0 = 1$,

que se presentaron en el análisis de la subsección anterior.

Se utilizó el método de Euler para la simulación numérica del sistema de ecuaciones (4.12, 4.13, 4.14), con las funciones particulares analizadas en la subsección anterior, las cuales están dadas por:

$$f(x) = \mu(1 - x),$$

y

$$l(z) = \frac{rz}{s + tz}.$$

Dependiendo de los valores que tomen los parámetros r , s y t la función tiene distinto comportamiento, por ejemplo si r es grande y los valores de s y t son muy pequeños, $l(z)$ crece demasiado rápido para tiempos cortos, lo que significaría que la presión positiva ejercida por los recuperados hacia los individuos con conductas antisociales es muy grande al inicio del fenómeno, sin embargo al ser $l(z)$ una función acotada por $\frac{r}{t}$, para tiempos grandes la presión ejercida por los recuperados sobre los individuos con conductas antisociales se estabiliza y ya no es tan efectiva. En el caso que r sea pequeño y s y t grandes la función tiene un

comportamiento análogo al caso anterior.

Para la simulación se tomaron valores de $r = 0.21$, $s = 0.001$, $t = 0.99$, los cuales fueron tomados de un modelos analizado por Villavicencio-Pulido (2017). A continuación se muestra la gráfica de la función $l(z)$. Se observa que la función con éstos parámetros es casi constante para tiempos muy grandes. En el contexto de presión social quiere decir que a pesar de que el número de recuperados sea cada vez mayor, el efecto de ésta presión no varía demasiado para tiempos grandes.

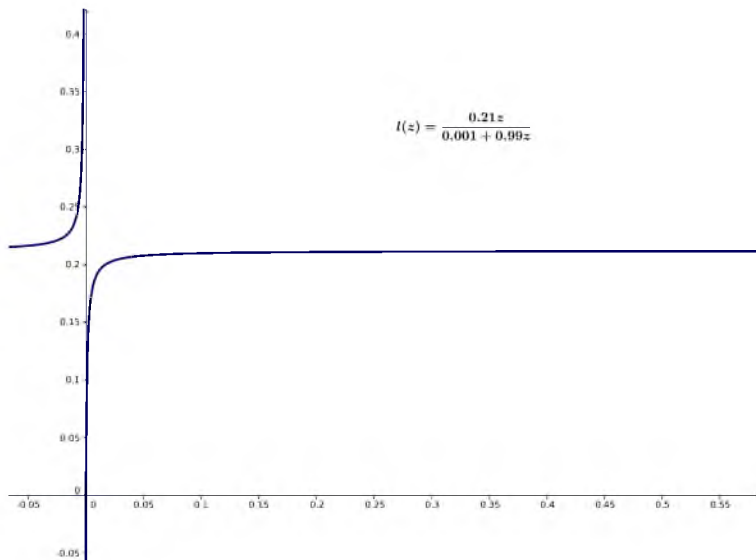


Fig. 4.1: Gráfica de la función $l(z)$.

El método de Euler (Braun (1990)) consiste en obtener una aproximación de la solución $y(t)$ de un problema de valor inicial (en general no es posible resolver analíticamente);

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (4.15)$$

con

$$y(t_0) = y_0.$$

Si tomamos la función $y(t)$ como una función que en cada intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ se puede expresar como una función lineal que une a los puntos (t_j, y_j) y (t_{j+1}, y_{j+1}) , dicha función se plantea por medio de la siguiente ecuación:

$$\hat{y} = y_j + \frac{1}{h}(t - t_j)(y_{j+1} - y_j), \quad (4.16)$$

con

$$t_j \leq t \leq t_{j+1}.$$

Conociendo solamente que $y(t)$ es solución de la ecuación diferencial (4.15) y que su valor en $t = t_0$ es y_0 , de manera iterativa obtendremos los valores aproximados de y_1 en $t = t_1 = t_0 + h$. Con éste valor se calculará y_2 cuando $t = t_2 = t_1 + h$, así sucesivamente hasta y_n con $t = t_n = t_{n-1} + h$, para un valor de h fijo, muy pequeño.

Éste método es el más sencillo para obtener los valores aproximados de y_1, \dots, y_n en los tiempos t_1, \dots, t_n y está expresado en el siguiente algoritmo que podemos encontrar en (Borrelli and Coleman (2002)). Para un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, con condiciones iniciales, se tiene

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ x_n &= x_{n-1} + hf(t_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \\ y_n &= y_{n-1} + hf(t_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \\ z_n &= z_{n-1} + hf(t_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \end{aligned}$$

A continuación se mostrará el comportamiento del sistema utilizando el método numérico para la realización de la simulación.

Las siguientes figuras muestran el cambio que sufren las variables x, y, z respectivamente y las órbitas en cada uno de los casos.

1. $\mu > \beta$, es decir, $R_0 > 1$:

Para la simulación se le asignó a μ el valor de 1 ($\mu = 1$) y a β el valor de 0.6 ($\beta = 0.6$). Se nota claramente en la figura 4.12 que el punto crítico E_0 .

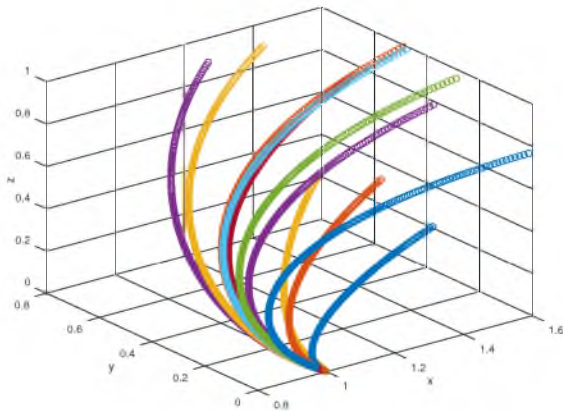


Fig. 4.2

En ésta gráfica se puede apreciar una familia de órbitas, las cuales son atraídas hacia el punto libre de conductass antisociales $(1, 0, 0)$.

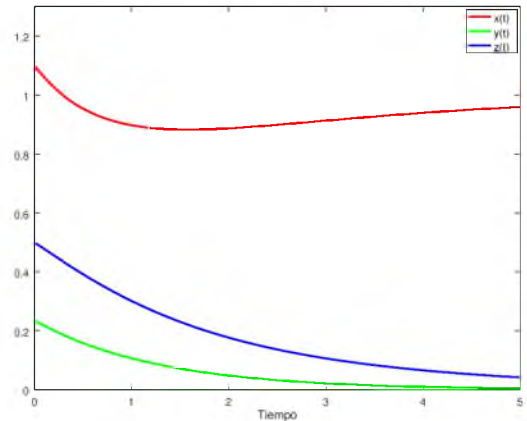


Fig. 4.3

Gráfica de las variables x, y, z .

CAPÍTULO 4. MODELO MATEMÁTICO CON PRESIÓN SOCIAL POSITIVA

En las siguientes figuras observamos el comportamiento de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

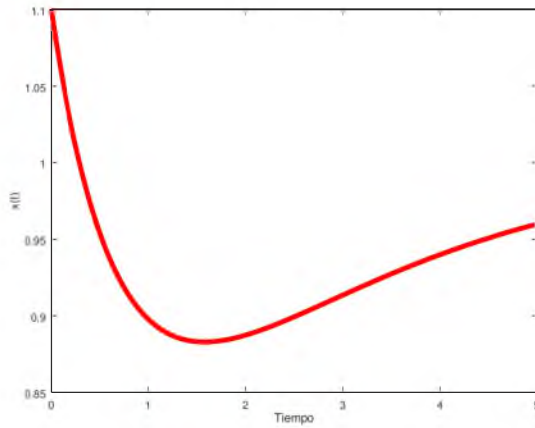


Fig. 4.4

Notese que la población $x(t)$ disminuye rápido en el tiempo; es fácil notar que en el intervalo $[1,2]$ llega a un mínimo e instantaneamente comienza a incrementar pero lentamente.

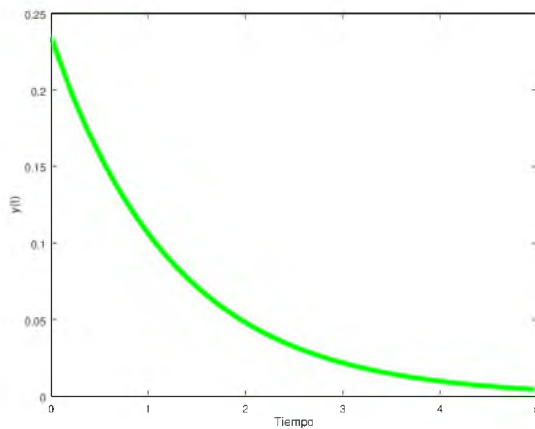


Fig. 4.5

La función $y(t)$ decrece asintóticamente a cero.

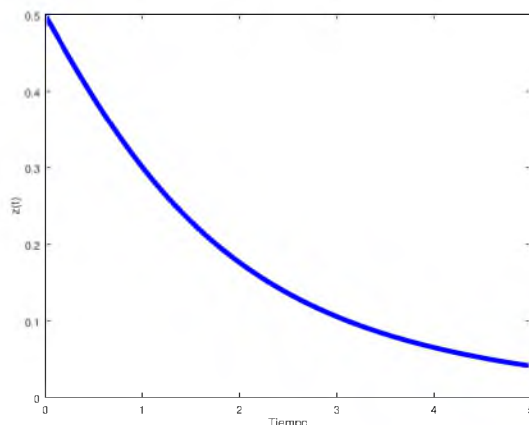


Fig. 4.6

Al igual que la función anterior, el número de recuperados $z(t)$ decrece asintóticamente a cero.

2. $\beta > \mu$, es decir, cuando $R_0 > 1$:

Para el análisis de la simulación se le asigno a μ el valor de 0.6 ($\mu = 0.6$) y a β el valor de 1 ($\beta = 1$). En la figura 4.7 se muestra que el punto crítico E_0 , es un punto repulsor, lo que quiere decir que las soluciones se alejan de él. En éste segundo caso, cuando $R_0 > 1$, la solución tiende a irse al punto de equilibrio no trivial, el cual llamaremos $E_T = (\mu, 0, 1 - \frac{\mu}{\beta})$, al sustituir los valores de μ y β , el punto queda expresado como $(0.6, 0, 0.4)$.

Se analizará a continuación la estabilidad del punto de equilibrio no trivial, de la misma forma que se hizo anteriormente para el punto de equilibrio libre de comportamiento antisocial.

Evaluamos el punto no trivial E_T en el Jacobiano, de ésta manera

$$J(E_T) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta(1 - \frac{\mu}{\beta}) & 0 & -\mu \\ 0 & \frac{r(1-\frac{\mu}{\beta})}{s+t(1-\frac{\mu}{\beta})} - \mu & 0 \\ \beta - \mu & -\frac{r(1-\frac{\mu}{\beta})}{s+t(1-\frac{\mu}{\beta})} & 0 \end{bmatrix}.$$

Posteriormente obtenemos el polinomio característico, el cual tiene la siguiente expresión

$$P(\lambda) = -(\mu) \frac{r(1-\frac{\mu}{\beta})}{s+t(1-\frac{\mu}{\beta})} - \mu - \lambda(\beta - \mu) + -\lambda(\frac{r(1-\frac{\mu}{\beta})}{s+t(1-\frac{\mu}{\beta})} - \mu - \lambda)(-\mu - \beta(1 - \frac{\mu}{\beta}) - \lambda).$$

Cuyos valores propios son:

- ◆ $\lambda_1 = \frac{r(1-\frac{t}{\beta})}{s+t(1-\frac{t}{\beta})} - \mu = -0.7884,$
- ◆ $\lambda_2 = -0.6 < 0,$
- ◆ $\lambda_3 = -0.4 < 0,$

Por lo tanto, concluimos que el punto de equilibrio no trivial es localmente asintóticamente estable.

A continuación se muestra la gráfica de la familia de orbitas de la solución del sistema y la gráfica de las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ juntas.

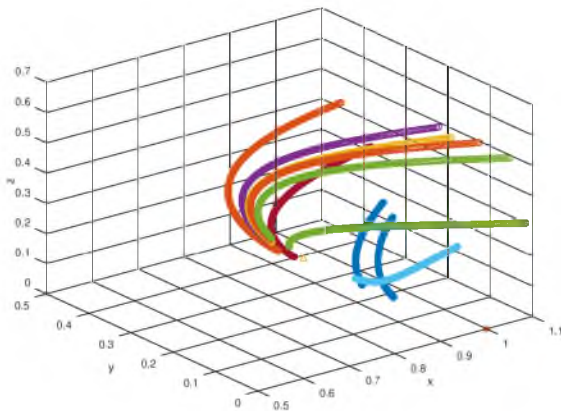


Fig. 4.7

Ésta figura muestra una familia de órbitas, que se está alejando del punto libre de conductas antisociales (1,0,0) y se acerca al punto (0.6, 0, 0.4).

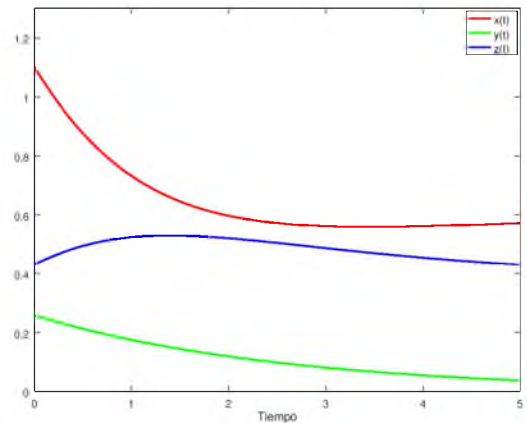


Fig. 4.8

Gráfica de las variables x , y , z .

CAPÍTULO 4. MODELO MATEMÁTICO CON PRESIÓN SOCIAL POSITIVA

Las siguientes figuras muestran el comportamiento de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

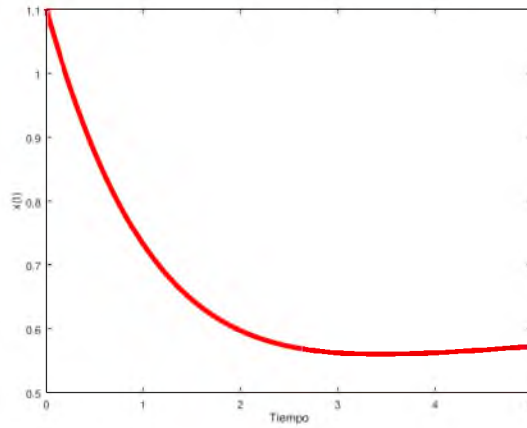


Fig. 4.9

Observamos que $x(t)$ disminuye rápidamente hasta llegar a un mínimo, posteriormente la función crece muy lentamente acercándose a 0.6.

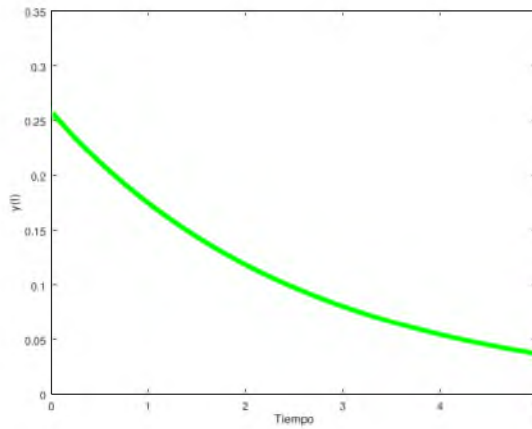


Fig. 4.10

Notamos que la función $y(t)$ en éste caso decrece rápidamente y se acerca a cero.

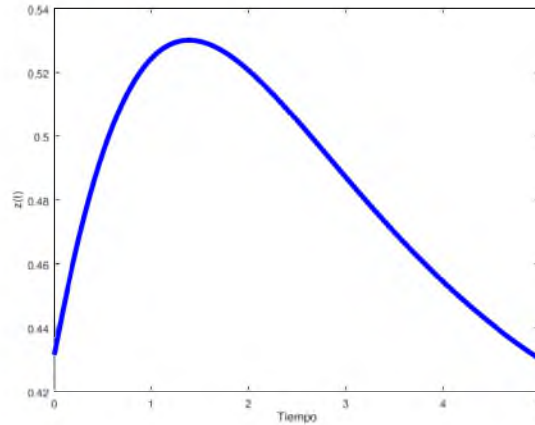


Fig. 4.11

En ésta gráfica la función $z(t)$ aumenta rápidamente hasta alcanzar un máximo en el intervalo $[1,2]$ y después comienza a decrecer exponencialmente acercándose a 0.4.

3. $\mu = \beta$, es decir, $R_0 = 1$:

Para la simulación se le asigno a μ el valor de 0.6 ($\mu = 0.6$) y de igual manera a β el mismo valor ($\beta = 0.6$). En la figura se observa el comportamiento en el punto de bifurcación, en dicho punto no es posible conocer cual será el comportamiento del sistema.

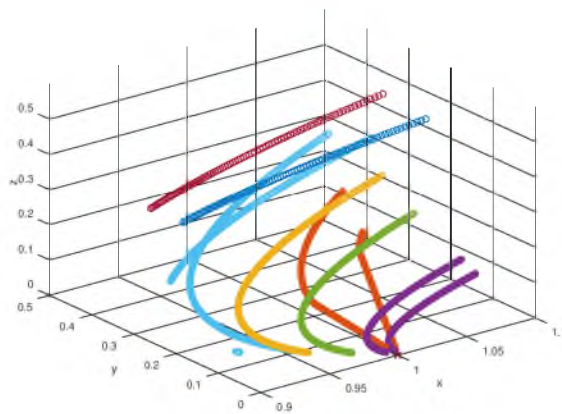


Fig. 4.12

Nótese que las órbitas son atraídas hacia el punto libre de conductas antisociales $(1,0,0)$, similar a la figura 4.2, pero las órbitas no tienen la misma curvatura que las anteriores.

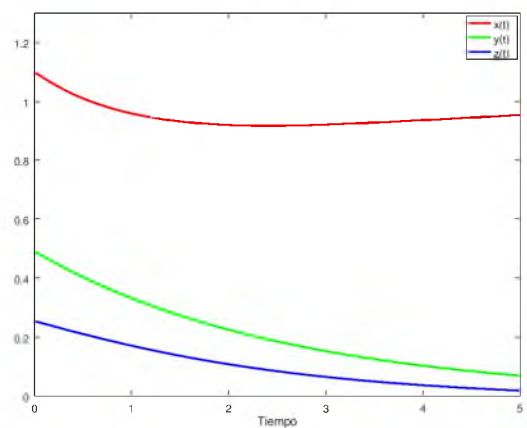


Fig. 4.13

Gráfica de las variables x , y , z .

CAPÍTULO 4. MODELO MATEMÁTICO CON PRESIÓN SOCIAL POSITIVA

A continuación se muestra el comportamiento de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

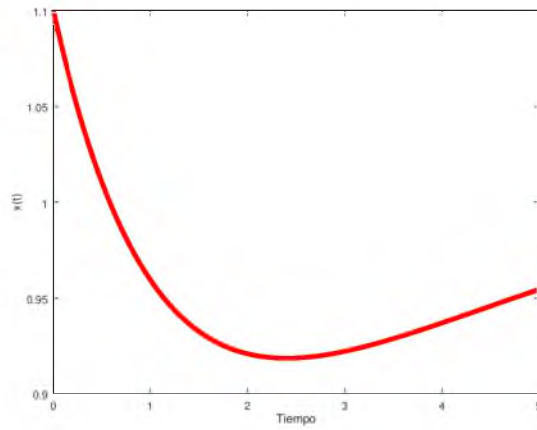


Fig. 4.14

La función decrece muy rápido hasta alcanzar un mínimo en el intervalo $[1,3]$, después de llegar a su mínimo comienza a crecer lentamente.

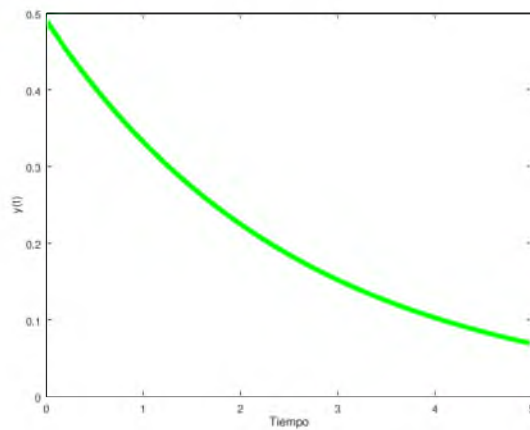


Fig. 4.15

Obsérvese que la función decrece exponencialmente.

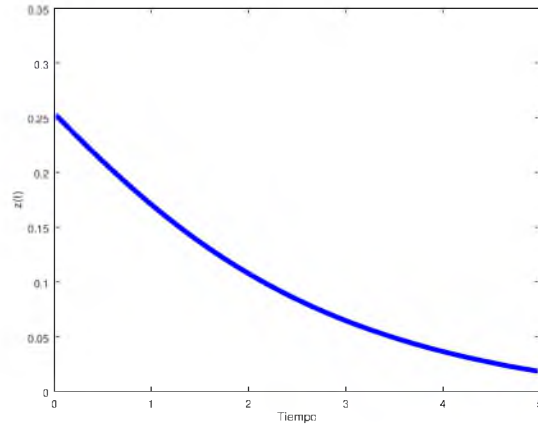


Fig. 4.16

En ésta gráfica podemos apreciar como decrece $z(t)$, se encuentra en un máximo y posteriormente comienza a decrecer acercándose a cero.

Capítulo 5

Conclusiones

En trabajos anteriores donde se consideran modelos con presión social negativa, la dinámica del modelo presenta bifurcación hacia atrás, es decir, los individuos recuperados vuelven a reincidir retomando nuevamente conductas antisociales.

Durante el desarrollo de éste trabajo se revisaron conceptos de álgebra lineal, teoría de sistemas dinámicos y métodos numéricos. Además se consultaron artículos relacionados con presión social.

En esta tesis se propone un modelo que involucra la presión social positiva, la cual es ejercida por los individuos recuperados de un comportamiento antisocial hacia los individuos que presentan algún comportamiento antisocial, ésto generó en el comportamiento dinámico del sistema una bifurcación hacia adelante, lo que quiere decir, que si el número reproductivo básico es menor que la unidad es posible que la conducta antisocial desaparezca en la población.

Es importante notar que la presión social positiva permite que el equilibrio trivial sea globalmente asintóticamente estable, ésto recalca la importancia de que las personas ejerzan una influencia positiva hacia sus pares, de este modo las ayudarán a contrarrestar el comportamiento antisocial que presenten.

Bibliografía

- Borrelli, R. L. and Coleman, C. S. (2002). *Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelación*. Oxford University Press, oxford university press edition.
- Braun, M. (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Buonomo, B. and Lacitignola, D. (2011). On the backward bifurcation of a vaccination model with nonlinear incidence. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 16(1):30–46.
- Burt, S. A. and Donnellan, M. B. (2009). Development and validation of the subtypes of anti-social behavior questionnaire. *Aggressive Behavior: Official Journal of the International Society for Research on Aggression*, 35(5):379–398.
- Castillo-Chavez, C. and Song, B. (2004). Dynamical model of the tuberculosis and their applications. *Mathematical biosciences and engineering*, 1(2):361–404.
- Coburn, B. J., Wagner, B. G., and Blower, S. (2009). Modeling influenza epidemics and pandemics: insights into the future of swine flu (h1n1). *BMC medicine*, 7(1):30.
- Earn, D. J., Dushoff, J., and Levin, S. A. (2002). Ecology and evolution of the flu. *Trends in ecology & evolution*, 17(7):334–340.
- González, B., Huerta-Sánchez, E., Ortiz-Nieves, A., Vázquez-Alvarez, T., and Kribs-Zaleta, C. (2003). Am i too fat? bulimia as an epidemic. *Journal of Mathematical Psychology*, 47(5-6):515–526.
- Gumel, A. B. (2012). Causes of backward bifurcations in some epidemiological models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 395(1):355–365.
- Gumel, A. B. and Moghadas, S. M. (2003). A qualitative study of a vaccination model with non-linear incidence. *Applied Mathematics and Computation*, 143(2-3):409–419.
- Guo, S. and Wu, J. (2013). *Bifurcation theory of functional differential equations*, volume 38. Springer.
- Heesterbeek, J. A. P. (2002). A brief history of r_0 and recipe for its calculation. *Acta biotheoretica*, 50(3):189–204.

- Heffernan, J. M., Smith, R. J., and Wahl, L. M. (2005). Perspectives on the basic reproductive ratio. *Journal of the Royal Society Interface*, 2(4):281–293.
- Hirsch, M. W., Smale, S., and Pérez, C. F. (1983). *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Alianza Editorial.
- Hoffman, K., Kunze, R., and Finsterbusch, H. E. (1973). *Álgebra lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Johnson, E. L. (2012). Parenting styles, peer pressure, and the formation of antisocial behavior. Master's thesis, The University of Southern Mississippi.
- Jones, J. H. (2007). Notes on r_0 . *California: Department of Anthropological Sciences Stanford University*.
- Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. Royal Society of London*, 115:700–721.
- Liljeros, F., Edling, C. R., and Amaral, L. A. N. (2003). Sexual networks: implications for the transmission of sexually transmitted infections. *Microbes and Infection*, 5(2):189–196.
- Martcheva, M. (2015). *An introduction to mathematical epidemiology*, volume 61. Springer.
- McMillon, D., Simon, C. P., and Morenoff, J. (2014). Modeling the underlying dynamics of the spread of crime. *PloS one*, 9(4):e88923.
- Perko, L. (2008). *Differential Equations and Dynamical Systems*, volume 7. Springer.
- Sánchez, F., Wang, X., Castillo-Chávez, C., Gorman, D. M., and Gruenewald, P. J. (2007). Drinking as an epidemic—a simple mathematical model with recovery and relapse. In *Therapist's Guide to Evidence-Based Relapse Prevention*, pages 353–368. Springer.
- Song, B., Castillo-Garsow, M., Ríos Soto, K. R., Mejran, M., Henso, L., and Castillo-Chavez, C. (2006). Raves, clubs and ecstasy: the impact of peer pressure. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 3(1):249.
- Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal*. Reverté, editorial reverté, s.a. edition.
- Tassier, T. (2013). *The economics of epidemiology*. Springer edition.
- Van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical biosciences*, 180(1-2):29–48.
- Villavicencio-Pulido, J. G. (2017). Positive peer pressure avoids existence of multiple endemic states in mathematical models applied to sociological phenomena. *Manuscrito no publicado*.