



**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN**

**CAMPUS LOMA BONITA**

**INGENIERÍA EN MECATRÓNICA**

**DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN OSCILADOR  
CAÓTICO PARA SU APLICACIÓN EN EL CONTROL DE  
UN ROBOT MÓVIL AUTÓNOMO**

**Tesis profesional para obtener el título de  
INGENIERO EN MECATRÓNICA**

Presenta:

**MARTIN BRAVO PEREZ**

Asesor de tesis:

**Dr. Mauro Sánchez Sánchez**

Co-asesor de tesis:

**Dr. Francisco Gutiérrez Zainos**



# UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

## INGENIERIA EN MECATRONICA

LA PRESENTE TESIS TITULADA “DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN OSCILADOR CAÓTICO PARA SU APLICACIÓN EN EL CONTROL DE UN ROBOT MÓVIL AUTÓNOMO” PRESENTADA POR EL SUSTENTANTE DE LICENCIATURA C. MARTIN BRAVO PEREZ BAJO LA DIRECCION DEL DR. MAURO SANCHEZ SANCHEZ, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITE EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO EN MECATRÓNICA.

M. en C. José Luis Nájera Sánchez  
Jefe de la carrera de Ingeniería en  
Mecatrónica



Dr. Mauro Sánchez Sánchez  
Asesor de tesis

Dr. Francisco Gutiérrez Zainos  
Presidente

Dr. Hiram Nezahualcoyotl García Lozano  
Secretario

Dr. Mauro Sánchez Sánchez  
Vocal

## Dedicatoria

A **Dios** todopoderoso por haberme permitido llegar hasta este momento.

A mis padres, **Epifanio Bravo Avellaneda** y **Gloria Pérez Adame**, por darme la vida, a mi madre por haberme sacado adelante y apoyarme en todo momento.

A mis hermanos: **Jessica, Lisbi, Franklin, Minah Daisy, Nico** y **Aldo**, por el amor, cariño y apoyo incondicional en todo momento de mi vida y mi carrera.

A mi familia que siempre me apoyo en todo momento para darme el amor, cariño, el calor de una familia y que siempre están para apoyarme.

A mis amigos (**Chotin, Ema Santos, Gladys, Ivan, Juan Báez, Manu, Olga, Osamín, Pepe, Rafael Arenas, Rojas, Rudy, Wilfrido**, entre otros) que han estado a mi lado para compartir momentos buenos y momentos difíciles, los cuales nunca se olvidan.

A **Hetipachi**, mis mejores amigos porque ellos son parte importante de mi desarrollo como profesionista y de esa parte de mi vida, donde me enseñaron el valor de la amistad, y donde fui aprendiendo día a día a su lado. **Heriberto Hernández Reyes, Silvano Cruz Prieto, Bacilio Ahuja Montaña**. "Por el gusto de ser y de no ser porque si las cosas fueran fáciles de hacer...", ustedes me entenderán.

A **Escarlet Morales Pitalua** que se ha vuelto parte importante de mi vida y de mi formación como persona, de la cual he aprendido cosas maravillosas, con la que he compartido momentos inolvidables.

A mi tío **Rogelio Mora Elvirez** con el cual me he formado hasta donde estoy como persona y como profesionista.

Al **Ing. Hilario López González** ya que es parte importante en el desarrollo en mi formación como profesionista, que me oriento en los momentos más difíciles de mis estudios.

¡Gracias!

MARTIN BRAVO PEREZ

## Agradecimientos

*No hay palabras para describir o decir lo que en este momento siento, solo me queda darle las gracias a todas aquellas personas maravillosas que he conocido y que me han apoyado en todo momento en desarrollo para mi formación como persona y profesionalista.*

*A mi asesor **Dr. Mauro Sánchez** por depositar su confianza en mí, por apoyarme en todo momento hasta la culminación de mi carrera, por haberme brindado los conocimientos necesarios para seguir mi desarrollo como profesionalista y por nunca dejar de apostar por mí.*

*A mis sinodales **Dr. Hiram N. García, M.C. Rafael F. González y Dr. Francisco Gutiérrez**, por todo su apoyo y tiempo brindado para completar este trabajo.*

*A mis amigos quienes han estado en los buenos y malos momentos para apoyarme, brindándome su confianza y cariño.*

*A todas esas personas que desde el inicio de mi carrera no dejaron de confiar en mí, que me apoyaron y me brindaron parte importante de mi conocimiento (Profe. **Mauro** "hay se ve", Profe. **Hiram** "muchachos muchachos", Profe. **Rafita** "que pacho martincillo", Dr. **Owen** "que paso chamacón", Profe. **Nájera**, Profe. **Álvaro**, Profe. **Zainos** y Profe. **Edmundo**). Y a todas aquellas personas que no lo hicieron de igual forma gracias pues ustedes fueron parte importante para lograr esto ya que fueron la motivación para salir adelante, para demostrar que si puedo y de que soy capaz.*

*A todas las personas que de algún u otra forma han aportado un granito de arena para el logro de esta etapa, agradezco de todo corazón su valiosa colaboración y tiempo.*

*Gracias a todos y a Dios.*

# Índice

<b>Dedicatoria</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Capítulo I: Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción general . . . . .	1
1.2 Planteamiento del problema . . . . .	1
1.3 Justificación . . . . .	2
1.4 Objetivos . . . . .	3
1.4.1 Objetivo general . . . . .	3
1.4.2 Objetivos específicos . . . . .	3
1.5 Organización de la tesis . . . . .	3
<b>Capítulo II: Sistemas caóticos</b>	<b>4</b>
2.1 Introducción . . . . .	4
2.2 Caos . . . . .	4
2.2.1 Atractores de caos . . . . .	5
2.2.2 Oscilador caótico . . . . .	6
2.3 Indicadores de caos . . . . .	7
2.3.1 Entropía de Kolmogorov . . . . .	7
2.3.2 Exponentes de Lyapunov . . . . .	8
2.3.3 Espectros de potencias . . . . .	9
2.3.4 Superficies de secciones de Poincaré . . . . .	9
2.4 Modelos de circuitos caóticos . . . . .	10
2.4.1 Modelo de Chua . . . . .	11
2.4.2 Modelo de Zhong (circuito modificado de Chua) . . . . .	12
2.4.3 Modelo de Yü (circuito modificado de Chua) . . . . .	13

2.4.4 Modelo generalizado de Chua con función diente de sierra . . .	13
2.4.5 Modelo de serie no lineal de funciones saturadas (SNLF) . . .	14
2.5 Generación de números aleatorios . . . . .	15
<b>Capítulo III: Modelado del sistema caótico</b>	<b>17</b>
3.1 Introducción . . . . .	17
3.1.1 Amplificador operacional . . . . .	17
3.1.2 Amplificador operacional retroalimentado por corriente . . .	20
3.1.3 Amplificadores operacionales de transconductancia . . . . .	21
3.2 Modelado del sistema caótico . . . . .	21
3.3 Método numérico de integración . . . . .	25
3.4 Simulación del modelo en variables de estado . . . . .	26
<b>Capítulo IV: Control móvil</b>	<b>29</b>
4.1 Introducción . . . . .	29
4.2 Locomoción . . . . .	29
4.2.1 Ackerman . . . . .	29
4.2.2 Triciclo clásico . . . . .	30
4.2.3 Tracción diferencial . . . . .	31
4.2.4 Síncrona . . . . .	32
4.3 Modelo cinemático . . . . .	32
4.4 Control del robot móvil autónomo . . . . .	34
4.4.1 Generación de trayectorias . . . . .	34
4.4.2 Control del modelo cinemático . . . . .	36
<b>Capítulo V: Resultados y conclusiones</b>	<b>38</b>
5.1 Resultados . . . . .	38
5.2 Conclusiones . . . . .	46
5.3 Trabajos futuros . . . . .	47
<b>Referencias</b>	<b>48</b>
<b>Apéndice</b>	<b>51</b>

<b>A. Código en <i>Matlab</i><sup>®</sup> para la simulación de un sistema caótico y obtención de los exponentes de Lyapunov.</b>	<b>51</b>
<b>B. Diagramas del diseño del oscilador caótico en el software Proteus 8.1 Professional.</b>	<b>53</b>
<b>C. Código en <i>Matlab</i><sup>®</sup> para realizar la prueba de monobit.</b>	<b>54</b>
<b>D. Diagrama en <i>Simulink</i><sup>®</sup> del control lineal del sistema caótico.</b>	<b>55</b>
<b>Lista de figuras y tablas</b>	<b>58</b>

## Abstract

Currently n-scroll chaotic oscillators has been realized for application in autonomous mobile robots. There are several models of chaotic oscillators such as model of Chua, Zhong, Yu, saturated nonlinear function series (SNLF), generalized Chua's circuits with saw-tooth function, and others. This work it will focus in the model of saturated nonlinear function series of double scroll with at least one positive exponent of Lyapunov as this is can view the chaotic behavior, which will be verified through monobit method that guarantees a random motion. Using the Euler integration method to perform the numerical simulation of the model state variables. This chaotic system has been realized that operational amplifier (OpAmp), because they are the most commonly electronic applications. The signal generated by the chaotic oscillator is employed in generating path that will be the control input, this cause the mobile robot having unpredictable behavior, the control will be based on a law of linear approximation, allowing a wide margin of work. The mobile robot can be developed based on the theory of chaotic oscillators to give complete autonomy in running.

## Resumen

Actualmente se han realizado diseños de osciladores caóticos de n-enrollamientos para la aplicación en robots móviles autónomos. Existen varios modelos de osciladores caóticos, como el modelo de Chua, Zhong, Yu, serie no-Lineal de funciones saturada (SNLF), generalizado de Chua con función diente de sierra, entre otros. Este trabajo se enfocará en el modelo de series no-Lineal de funciones saturadas de 2 enrollamientos con al menos un exponente de Lyapunov positivo ya que con ello es posible ver el comportamiento caótico, el cual será comprobado mediante el método de monobit que garantiza un movimiento aleatorio. Se hará uso del método de integración de Euler para realizar la simulación numérica del modelo en variables de estado. Este sistema caótico es realizado con amplificadores operacionales (OpAmp), ya que son los más empleados para aplicaciones electrónicas. La señal generada por el oscilador caótico se empleará en la generación de trayectoria, la cual será la entrada de control, esto hace que el robot móvil tenga un comportamiento impredecible, el control estará basado en una ley de aproximación lineal, lo que permitirá un amplio margen de trabajo. El robot móvil puede ser desarrollado con base en la teoría de los osciladores caóticos para darle completa autonomía en el funcionamiento.

# Capítulo I: Introducción

## 1.1 Introducción general

Actualmente los sistemas caóticos juegan un papel importante en el área de ingeniería, al igual que en otras disciplinas, ya que todo sistema caótico es muy sensible a las condiciones iniciales y genera un comportamiento aparentemente aleatorio pero a la vez completamente determinista. Los sistemas caóticos tienen la particularidad de que tienen múltiples áreas de aplicación, como el diseño de nuevos dispositivos electrónicos con mejores características (menor consumo, mayor rapidez de funcionamiento y/o ancho de banda, compatibilidad electromagnética mejorada, etc.), el análisis y modelado de comportamientos caótico y/o transitorios de dispositivos electrónicos convencionales, el análisis de señales biomédicas, la generación de números aleatorios, la criptografía, la robótica móvil, entre otras [1, 2].

La robótica móvil es un campo de estudio de interés ya que con esta se pueden realizar tareas que facilitan la vida al ser humano, así como evitar el riesgo que estas conllevan. El uso de esta tecnología se ha ido incrementando en áreas como la industria, actividades civiles y militares [3, 4, 5, 6]. Las áreas de mayor interés están en el transporte industrial, dispositivos para limpieza de pisos y dispositivos anti-incendios. La autonomía en los robots móviles es conseguida por un sistema de navegación, donde se programan tareas que el móvil debe realizar.

Las aplicaciones de los robots móviles en el área militar son en vigilancia de terrenos, exploración de terreno para búsqueda de explosivos, materiales peligrosos o patrullaje [3, 4, 5, 6].

Existe un sinnúmero de estrategias de control en los robots móviles, como P, PI, PD, PR, PID, aproximación lineal, entre otras, en este trabajo se ocupará un control de aproximación simple.

## 1.2 Planteamiento del problema

En la actualidad los sistemas de vigilancia necesitan abarcar el área total de un terreno determinado, también son necesarios sistemas impredecibles para realizar algunas tareas industriales, entre las más comunes se encuentran: vigilancia, limpiadores y equipo anti-incendios. Los sistemas caóticos son de interés para la realización de diversas tareas debido a su sensibilidad a condiciones iniciales y su comportamiento dinámico, este

comportamiento puede ser empleado en un robot móvil, en el campo de la robótica existen un sinnúmero de estrategias para lograr que un robot simule ser autónomo, ya que solo se cuenta con un número limitado de investigaciones en el diseño de un robot móvil autónomo basado en el uso de osciladores caóticos de doble enrollamiento, se plantea la necesidad de realizar el diseño e implementación de un oscilador caótico de 2 enrollamientos, para aplicarlo como una señal de control en un robot móvil.

### **1.3 Justificación**

Las aplicaciones de la robótica móvil en la industria y en la vida cotidiana son más exigentes en cuanto a autonomía, así como en el ámbito militar, ya que deben hacer exploraciones de terrenos para lograr una máxima seguridad de las tropas [3, 4, 5, 6]. Para que el robot móvil pueda satisfacer una necesidad de vigilancia debe cumplir con dos objetivos principales:

1. Impredecibilidad de trayectoria
2. Escaneo completo del terreno

Los objetivos anteriores permitirán elegir un diseño de robot móvil basado en sistemas o circuitos caóticos, debido a su dinámica de impredecibilidad. Los sistemas no-lineales tienen comportamientos dinámicos, mostrando una variedad de fenómenos caóticos. Este comportamiento caótico es la razón por la cual los sistemas no lineales son usados en muchos otros campos de la ingeniería como las comunicaciones, robótica móvil, criptografía, generador de bits aleatorios y redes neuronales.

La autonomía en los robots móviles basados en sistemas caóticos o circuitos caóticos es conseguida por los controladores, lo cual asegura el movimiento aleatorio y permiten guiar a los robots móviles autónomos. La parte más importante de los sistemas caóticos es su impredecibilidad.

Por su complejidad, dinámica impredecible y extrema sensibilidad a condiciones iniciales, hacen de los sistemas caóticos excelentes candidatos para emplearse como un buen planeador de trayectorias usando una señal caótica mediante la generación de números aleatorios y conseguir una amplia área en un espacio de prueba.

## 1.4 Objetivos

### 1.4.1 Objetivo general

- Diseñar e implementar un oscilador caótico para su aplicación en el control de un robot móvil autónomo.

### 1.4.2 Objetivos específicos

- Conocer el funcionamiento de un oscilador caótico.
- Diseñar un oscilador caótico con OpAmps.
- Diseñar un generador de números aleatorios basado en un oscilador caótico.
- Aplicar una ley de control para un robot seguidor de trayectorias basado en oscilador caótico.

## 1.5 Organización de la tesis

A continuación se menciona como se encuentra organizado este trabajo:

En el capítulo 2, se da una introducción a los conceptos básicos referentes al caos, también se hablará sobre algunos modelos caóticos en los cuales se explica de manera general como saber si existe caos en un sistema o como comprobar si un sistema es caótico, así como de la generación de los números aleatorios.

En el capítulo 3, se abordará el modelado del sistema caótico en cuestión, mediante el método de integración de Euler se buscará la solución al sistema que servirá para obtener la simulación del modelo en variables de estado mediante el uso del software *Matlab*<sup>®</sup>.

En el capítulo 4, se hará referencia a conceptos básicos del modelado del robot móvil tipo síncrono, así como la generación de la trayectoria que debe seguir el robot móvil, empleando alguna estrategia de control.

En el capítulo 5, se expondrán los resultados obtenidos de la implementación del oscilador caótico como generador de trayectorias en el robot móvil, conclusiones referentes al trabajo realizado, así como de trabajos futuros.

# Capítulo II: Sistemas caóticos

## 2.1 Introducción

La principal característica de los sistemas con comportamiento caótico es que siendo sistemas completamente determinístico, exhiben un comportamiento completamente errático e impredecible, aparentemente aleatorio. Actualmente los sistemas caóticos son uno de los temas de estudio, debido a que muestran un comportamiento dinámico no lineal, el cual tiene una relación con el mundo real, en una amplia variedad de sistemas, como en sistemas mecánicos, biológicos, químicos, físicos, problemas meteorológicos, estudio de población, entre otros. Los sistemas caóticos presentan comportamientos altamente complicados. La salida del sistema no lineal considerado para este trabajo funcionará como la entrada de control de un robot móvil, obteniendo así un sistema autónomo. Esto se puede modelar o representar mediante un sistema de ecuaciones dinámicas.

## 2.2 Caos

La teoría del caos se fortalece día a día y ha encontrado cabida en ambientes de investigación científica, como economía, biología, matemáticas, telecomunicaciones, robótica, entre otras [7].

Las siguientes son algunas de las características del caos:

Según [8, 9, 10], el caos es un comportamiento dinámico e impredecible, sensible a condiciones iniciales debido a que un pequeño cambio en el punto de inicio puede causar un resultado diferente, así como ser un sistema determinista puesto que su comportamiento está descrito por ecuaciones no lineales.

El término caos se refiere a una interrelación subyacente que se manifiesta en acontecimientos aparentemente aleatorios. La ciencia del caos se centra en modelos ocultos, en la sensibilidad de las cosas y en las reglas sobre cómo lo impredecible conduce a lo nuevo. La idea del caos favorece nuevos modos de pensar y de conocer la realidad [6].

En los sistemas caóticos su comportamiento futuro es extremadamente sensible a las condiciones iniciales, ya que nunca se repiten exactamente. Además de que los sistemas caóticos sean aperiódicos, la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales significa que no es posible determinar la condición actual de manera lo suficientemente exacta

como para predecir el futuro. La importancia de este concepto radica en que explica cómo un sistema puede ser gobernado por un conjunto de ecuaciones y aun resultar impredecible [11].

De las anteriores definiciones no hay alguna que se acepte universalmente pero algunas de estas coinciden en algunos puntos.

- Sensible a condiciones iniciales. Con un mínimo cambio en los valores iniciales puede tener comportamientos diferentes.
- Comportamiento no lineal. Cuando las respuestas no son directamente proporcionales a una variable dada o cuando las interrelaciones entre las cantidades implicadas se expresan mediante ecuaciones, algunas de las cuales no son lineales.
- Comportamiento impredecible. Debido a que con un cambio en las condiciones iniciales puede cambiar el comportamiento.
- Deterministas. Debido a que su comportamiento está basado por medio de ecuaciones siendo estas no lineales.
- Conducta completamente complicada. Debido a ser no lineal la solución es más compleja por lo que lo hace un sistema complicado. (se incrementa la complejidad de la solución del sistema).
- Comportamientos dinámicos. Cambian conforme al tiempo.

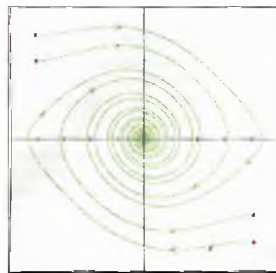
### **2.2.1 Atractores de caos**

Una manera de visualizar el movimiento caótico, o cualquier tipo de movimiento, es hacer un diagrama de fases del movimiento. En tal diagrama, el tiempo es implícito y cada eje representa una dimensión del estado. Algunas veces el movimiento representado con estos diagramas de fases no muestra una trayectoria bien definida, sino que ésta se encuentra alrededor de algún movimiento bien definido.

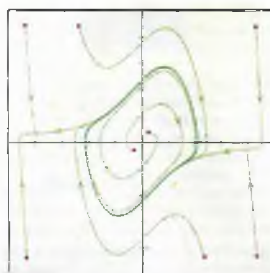
Cuando esto sucede se dice que el sistema es atraído hacia un tipo de movimiento, es decir, que hay un atractor [12].

Los siguientes son tipos de atractores que pueden aparecer en un sistema dinámico [13]:

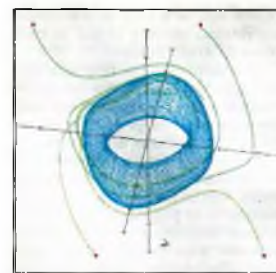
- Punto fijo. Este atractor corresponde a un péndulo con rozamiento debido a que el péndulo llega siempre al punto de reposo independiente del modo en que empezó a oscilar ver Fig. 2.1a.
- Ciclo límite. Describe oscilaciones estables, como el movimiento de un reloj de péndulo y el latido del corazón ver Fig. 2.1b.
- Toro invariante. Generalización del ciclo límite a varias dimensiones Fig. 2.1c.
- Atractor extraño. Atractor que exhibe una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales. Ejemplos: modelo de Lorenz, atractor de Rössler, ver Figs. 2.1d y 2.1e.



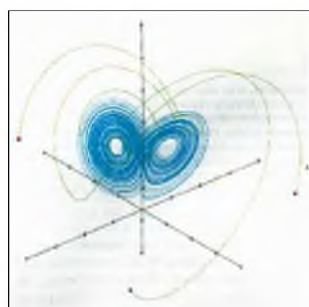
(a) Atractor punto fijo



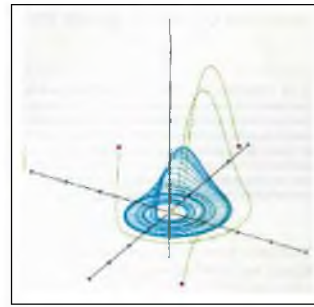
(b) Atractor ciclo limite



(c) Atractor toro invariante



(d) Atractor de Lorenz



(e) Atractor de Rössler

Figura 2.1: Tipos de atractores.

### 2.2.2 Oscilador caótico

Un oscilador periódico se caracteriza por tener una forma de onda bien definida que está en constante repetición de acuerdo con un período y nunca se establece en un solo valor. Un oscilador caótico es producido por un sistema caótico y no tiene ningún período.

Los sistemas caóticos se refieren a un tipo de sistema dinámico complejo que posee algunas características muy especiales, como ser extremadamente sensible a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales y parámetros, teniendo trayectorias delimitadas en el espacio de fase, pero con un máximo exponente de Lyapunov positivo [14].

## 2.3 Indicadores de caos

Si bien, los sistemas caóticos son comportamientos complicados, una forma de saber si un sistema es caótico, es utilizando los indicadores de caos, los cuales se mencionan a continuación.

### 2.3.1 Entropía de Kolmogorov

La teoría de información de Shannon define a la entropía como:

$$S = -k \sum_{i=1}^n P(i) \log_2(P(i)) \quad (2.1)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann y  $P(i)$  la probabilidad de tener al sistema en el estado  $i$ . En la teoría de la información de Shannon  $S$  interpreta como la cantidad de información necesaria para determinar el estado del sistema [15].

Kolmogorov utiliza como indicador de caos la pérdida media de información que tiene lugar a medida que este evoluciona en el tiempo. Para ello realiza una partición del espacio de fase en celdas de tamaño  $\varepsilon^d$ , donde  $d$  es el número de grados de libertad (o dimensiones) del sistema. Cada trayectoria queda definida, dentro de la precisión impuesta por  $\varepsilon^d$ , consignando la secuencia de celdas en la que se encuentra el sistema a intervalos regulares de tiempo  $\Delta t$  que se describe el sistema. Luego define:

$$K_n = - \sum_{i_0 \dots i_n} P(i_0 \dots i_n) \log_2 [P(i_0 \dots i_n)] \quad (2.2)$$

$K_{(n+1)} - K_n$  es la información adicional necesaria para especificar la siguiente celda a la que llegará la trayectoria cuando se conoce la historia anterior.

$$K = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta \varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{n \Delta t} \sum_{\substack{i_0 \dots i_n \\ \text{en la trayectoria}}} P(i_0 \dots i_n) \log [P(i_0 \dots i_n)] \quad (2.3)$$

Las propiedades del sistema condicionando el valor de  $K$  de la siguiente forma:

- Si el sistema es regular,  $K = 0$ , por lo que el sistema no pierde información.
- Si es aleatorio  $K = \infty$
- Si es caótico,  $0 < K < \infty$ , por lo que el sistema pierde información.

### 2.3.2 Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov son una medida asintótica que caracteriza la tasa media de crecimiento (o decremento) de pequeñas perturbaciones a las soluciones de un sistema dinámico. Estos proporcionan una medida de la sensibilidad de los sistemas dinámicos a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales. Algunos artículos [16, 17] describen el cálculo de los exponentes de Lyapunov mediante la siguiente expresión:

$$\lambda(x_0; r) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left\| \frac{\partial f(x; r)}{\partial x} \right\| \quad (2.4)$$

En los osciladores de tiempo continuo, el número de exponentes de Lyapunov es igual al número de variables de estado. Además si al menos uno de los exponentes es positivo, existe indicio de caos. Considerando un sistema dinámico de  $n$ -dimensiones, el modelo en variables de estado es como sigue:

$$\dot{x} = f(x) \quad t > 0 \quad x(0) = x_0 \in R^n \quad (2.5)$$

donde  $x$  y  $f$  son vectores de campo de  $n$ -dimensiones.

Un sistema dinámico que evoluciona según ec. 2.5 en un espacio de  $n$ -dimensiones, presentará un exponente de Lyapunov, el cual dependerá del punto de inicio  $x_0$ . Por otra parte, utilizando una matriz Jacobiana (formada por derivadas parciales de primer orden de una función y la cual aproxima linealmente a la función en un punto), se describe como una pequeña alteración en el punto de inicio el cual se propaga hasta un punto final, es decir, para determinar los  $n$ -exponentes de Lyapunov, se debe encontrar la evolución a largo plazo de pequeñas perturbaciones de una trayectoria descrita por:

$$\dot{y} = \frac{\partial f(x(t))}{\partial x} y = J(x(t)) y \quad (2.6)$$

donde  $J$  es el Jacobiano de la matriz  $f$  de tamaño  $n \times n$ .

Una solución al sistema con una perturbación se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$y(t) = Y(t)y(0) \quad (2.7)$$

De este modo se pueden obtener los exponentes de Lyapunov en tiempo continuo.

### 2.3.3 Espectros de potencias

El espectro de potencia de una señal muestra la distribución de la potencia de señal entre las diversas frecuencias. El espectro de potencia es la transformada de Fourier de la función de correlación y muestra información del comportamiento de la señal [18].

En general, cuanto más correlacionada o predecible la señal, más concentrado su espectro de potencia y por el contrario una señal más aleatorio o impredecible, su espectro de potencia estará más extendido. Por lo tanto el espectro de potencia de una señal se puede utilizar para deducir la existencia de estructuras repetitivas o patrones correlacionados en la señal. Esta información es crucial en la detección de problemas, toma de decisiones y de estimación, así como en el análisis de sistemas. Para llevar a cabo el análisis será necesario utilizar la FFT (por sus siglas en inglés transformada rápida de Fourier), y para realizar el cálculo se empleará la DFT (por sus siglas en inglés transformada discreta de Fourier). Donde la DFT se considera como sigue:

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) * \exp(-j(2\pi/N)mk); k = m = 0 \dots N - 1 \quad (2.8)$$

### 2.3.4 Superficies de secciones de Poincaré

Debido a la matemática compleja para describir las superficies de secciones de Poincaré, se abordará el tema de manera trivial sin tanto concepto.

Para interpretar la complejidad de los sistemas dinámicos se introduce una superficie de sección en el espacio de fase (ver Fig. 2.2), con la finalidad de no estudiar todas sus trayectorias se controlan solo los puntos de sus intersecciones con sus superficies. Con esto se obtiene una representación discreta, la sección de Poincaré [19, 20]. Dicho de otra forma en lugar de observar todos los estados iniciales, basta con observar solo unos puntos. Imaginando una superficie completa de estados iniciales, siguiendo la evolución de cada uno hasta que regrese y choque de nuevo contra la superficie, si el estado

regresa a su punto de partida se trata de una solución periódica. A dicha superficie se le conoce como sección de Poincaré.

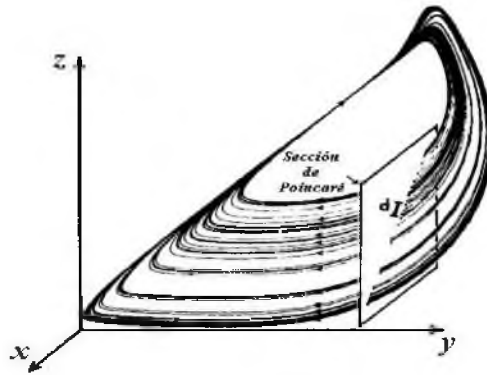


Figura 2.2: Superficie de sección de Poincaré.

La ventaja de emplear este método es que simplifica el problema de observación en los sistemas dinámicos ya que es un método gráfico el cual se muestra en la Fig. 2.3.



<i>Constante</i>	<i>Periódica</i>	<i>Cuasiperiódica</i>	<i>Caótica</i>	<i>Aleatoria</i>
$P_1^*$	$P_0$			

Figura 2.3: Visualización del comportamiento en las secciones de Poincaré.

Cabe mencionar que de lo expuesto anteriormente, este trabajo se desarrollará basado en los exponentes de Lyapunov debido a que se considera ser un método más preciso, ya que los otros métodos son aplicados en forma gráfica y por lo tanto, los resultados dependen de la apreciación del observador [20].

## 2.4 Modelos de circuitos caóticos

Existen diversos modelos en los cuales es posible observar el comportamiento caótico. Los osciladores caóticos se investigan para la generación de atractores de  $n$ -enrollamientos, que pueden ser modelados mediante piecewise-linear (PWL por sus siglas en inglés lineal a trozos), de modo que el problema de no linealidad se puede transformar en uno lineal. Estos osciladores son circuitos o dispositivos electrónicos que convierten la entrada de energía de una fuente de  $dc$  a una salida de energía  $ac$  con

forma de una onda conocida de frecuencia variante y amplitud desconocida, el objetivo es, orientarlo a la generación de un mayor número de enrollamientos [17].

Los siguientes son algunos modelos de osciladores caóticos de múltiples enrollamientos:

### 2.4.1 Modelo de Chua

El circuito de Chua es un sistema dinámico de los más estudiados [17, 21, 22], este es conformado por un inductor, una resistencia, dos capacitores y un elemento no lineal como se muestra en la Fig. 2.4a. Este elemento no lineal puede ser, por ejemplo, una resistencia, un diodo, los cuales pueden tener una función de respuesta como se muestra en la Fig. 2.4b.

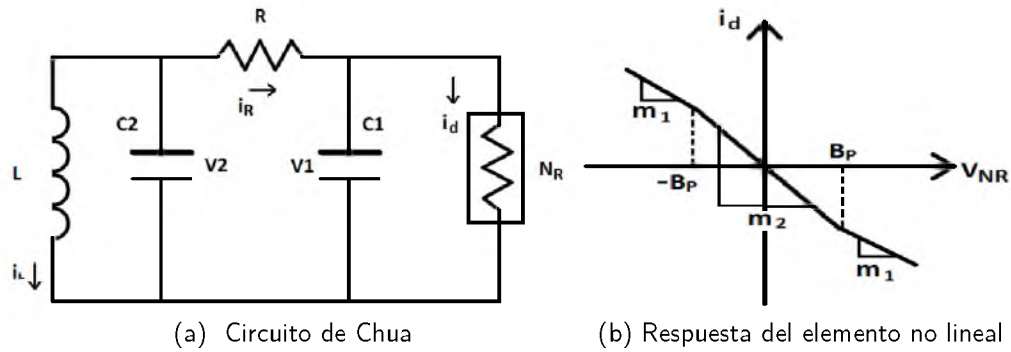


Figura 2.4: Modelo de Chua.

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito de la Fig. 2.4a, se obtienen las siguientes ecuaciones que describen el comportamiento dinámico:

$$\frac{dV_{c_1}}{dt} = \frac{G}{c_1}(V_{c_2} - V_{c_1}) - \frac{1}{c_1}f(V_{c_1}) \quad (2.9)$$

$$\frac{dV_{c_2}}{dt} = \frac{G}{c_2}(V_{c_1} - V_{c_2}) - \frac{1}{c_2}(i_L) \quad (2.10)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}V_{c_2} \quad (2.11)$$

donde  $G = 1/R$ ,  $V_{c_1}$ ,  $V_{c_2}$  son los voltajes en los capacitores  $c_1$  y  $c_2$  respectivamente,  $i_L$  la corriente en el inductor, y

$$f(V_{c_1}) = m_1 V_{c_1} + \frac{1}{2}(m_1 - m_2) [\|V_{c_1} + B_p\| - \|V_{c_1} - B_p\|] \quad (2.12)$$

es la función de respuesta del elemento no lineal. Donde  $m_1$  y  $m_2$  son las pendientes,  $B_p$  los puntos de ruptura, los cuales se muestran en la Fig. 2.4b. Realizando el cambio de variables  $x = \frac{V_{c1}}{B_p}$ ,  $y = \frac{V_{c2}}{B_p}$ ,  $z = \frac{RiL}{B_p}$ ,  $\tau = \frac{t}{c_2R}$ ,  $\alpha = \frac{c_2}{c_1}$ ,  $\beta = \frac{c_2R^2}{L}$ ,  $\bar{m}_1 = m_1R$ ,  $\bar{m}_2 = m_2R$  en las ecs. 2.9-2.12, el sistema puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(-x + y - f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y\end{aligned}\tag{2.13}$$

así mismo:

$$f(x) = \bar{m}_1x + \frac{1}{2}(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)(|x + 1| - |x - 1|)$$

#### 2.4.2 Modelo de Zhong (circuito modificado de Chua)

El modelo de Zhong es una modificación del circuito de Chua, mostrado en la Fig. 2.4a, en este se reemplaza la función del elemento no lineal como se ilustra en la Fig. 2.5 de la ec. 2.13, que es usado para generar  $n$ -enrollamientos la cual se muestra a continuación [17, 23]:

$$f(V_R) = m_{i+1}V_R + \frac{1}{2}(m_i - m_{i+1})(|V_R + B_i| - |V_R - B_i|)\tag{2.14}$$

donde  $m_i$  son las pendientes de la función  $f(V_R)$ ,  $B_i$  son los puntos de ruptura,  $V_R$  es el voltaje.

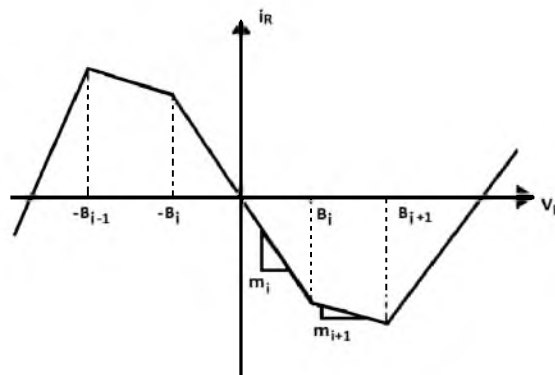


Figura 2.5: Comportamiento del elemento no lineal de Zhong.

### 2.4.3 Modelo de Yü (circuito modificado de Chua)

El modelo de Yü es una modificación del circuito de Chua. La ec. 2.14 permite calcular los puntos de ruptura, esto genera atractores de  $n$ -enrollamientos de manera iterativa. La ec. 2.15 permite calcular los puntos de ruptura, solo es necesario conocer el primer punto de ruptura de la función PWL para poder calcular los demás puntos [17]. La respuesta del elemento no lineal se comporta como se muestra en la Fig. 2.6.

$$B_{i+1} = \frac{2 * \sum_j^i (m_j + m_{j-1}) B_j}{1 + m_i} - B_i \quad (2.15)$$

donde  $B_i$  son los puntos de ruptura de las pendientes  $m$ .

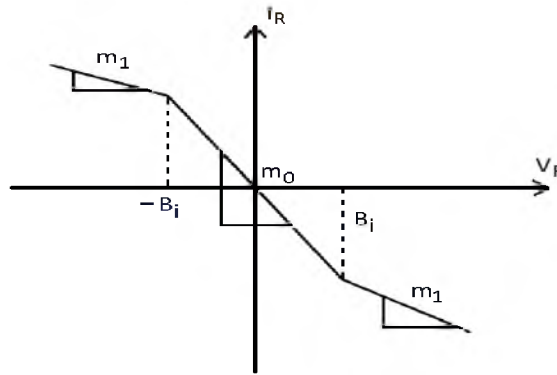


Figura 2.6: Respuesta del elemento no lineal del modelo de Yü.

### 2.4.4 Modelo generalizado de Chua con función diente de sierra

El circuito de Chua puede generalizarse en diferentes formas: una de ellas es por medio de una función no lineal con pendientes negativas y positivas. Lo cual agrega más puntos de ruptura para el diodo de Chua mediante una función diente de sierra u otro método no linealizado a trozos (ver Fig. 2.7). Para este caso de interés, el circuito generalizado de Chua queda descrito por la ec. 2.16 donde  $f_1(x_1)$ , está dada por la ec. 2.17, para el caso de generación de enrollamientos pares y mediante la ec. 2.18 para generar enrollamientos impares [17, 24].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha (\dot{x}_2 - f_1(x_1)) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

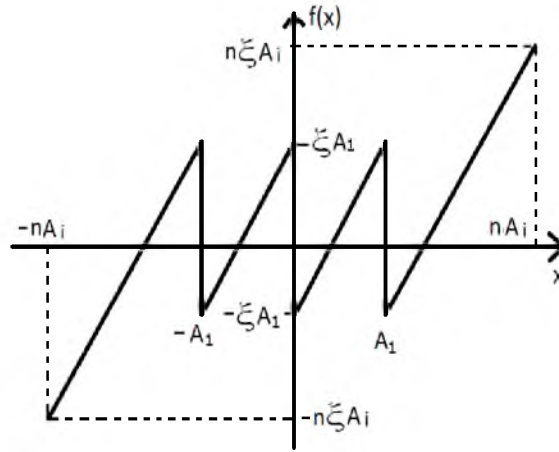


Figura 2.7: Comportamiento del elemento no lineal del modelo generalizado de Chua.

$$f_1(x_1) = \xi \left\{ x - A_1 \left[ -\text{sgn}(x) + \sum_{i=0}^{N-1} (\text{sgn}(x + 2iA_1) + \text{sgn}(x - 2iA_1)) \right] \right\} \quad (2.17)$$

$$f_1(x_1) = \xi \left\{ x - A_1 \left[ \sum_{i=0}^{N-1} (\text{sgn}(x + (2i+1)A_1) + \text{sgn}(x - (2i+1)A_1)) \right] \right\} \quad (2.18)$$

Donde  $N$  depende del número de enrollamientos que se desean, el periodo de la función está definido por  $A_1$  y su amplitud por  $2\xi A_1$

#### 2.4.5 Modelo de serie no lineal de funciones saturadas (SNLF)

Otro generador de atractores de  $n$ -enrollamientos, es el basado en un circuito PWL. Este tiene la particularidad de que el elemento no lineal está regido por la ec. 2.19.

$$f(x; k, h, p, q) = \begin{cases} (2q+1)k & \text{si } x > qh+1 \\ s(x-ih) + 2ik & \text{si } x-ih \leq 1, -p \leq i \leq q \\ (2i+1)k & \text{si } ih+1 < x < (i+1)h-1, -p \leq i \leq q-1 \\ -(2p+1)k & \text{si } x < -ph-1 \end{cases} \quad (2.19)$$

donde  $k$  es la pendiente de la función saturada,  $q$  y  $p$  son enteros reales positivos donde su valor depende del número de enrollamientos y  $h$  es un tiempo de retardo saturado.

La generación de la SNLF es realizada con algunos dispositivos electrónicos. La ecuación anterior puede extenderse para generar múltiples atractores de  $n$ -enrollamientos (ver Fig. 2.8) [17, 21].

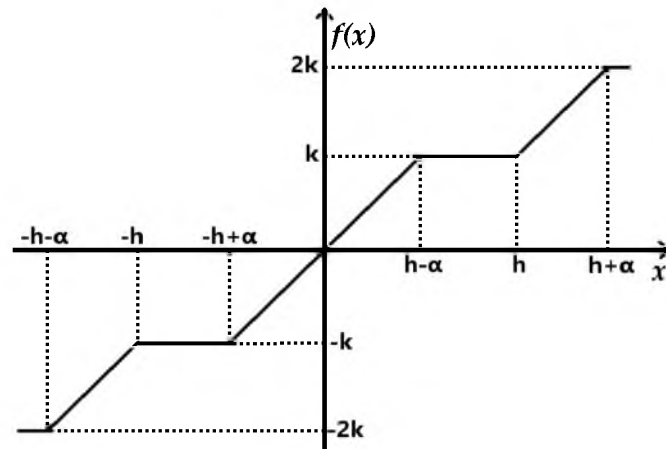


Figura 2.8: Respuesta del elemento no lineal de la SNLF.

## 2.5 Generación de números aleatorios

La generación de números aleatorios se realiza mediante la comparación de 2 niveles de voltaje con alguna de las 3 señales de salida del oscilador caótico. Esta señal aleatoria, será la señal de entrada de control del robot móvil autónomo. Para tal efecto se tomará como 1 para  $c_2 < x < c_1$ , en otro caso se tomará como 0. Esto se muestra en la Fig. 2.9.

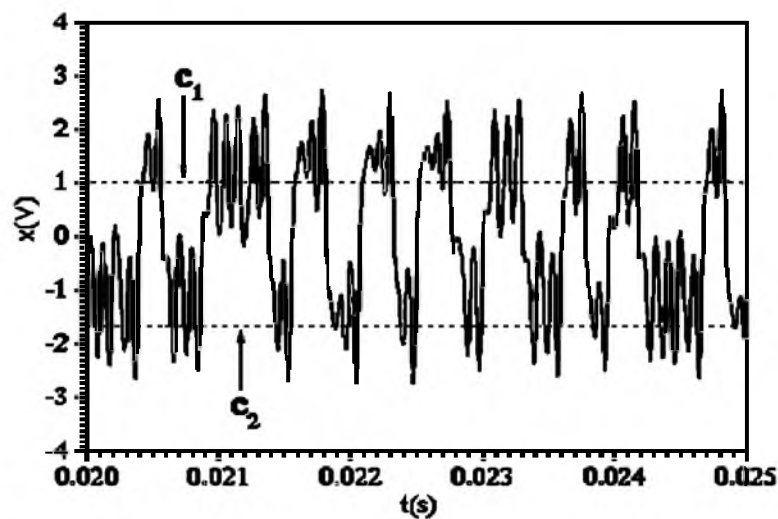


Figura 2.9: Señal caótica con niveles de comparación.

Una vez obtenidos los números con este proceso, se realiza una evaluación para saber si cumple con la condición de números aleatorios. El análisis se efectúa mediante el método de frecuencia (monobit), el cual se explica a continuación. El método se basa en la proporción de ceros y unos de toda la secuencia. El propósito de esta prueba es determinar si el número de ceros y unos en una secuencia es aproximadamente el mismo que se esperaría para una secuencia verdaderamente aleatoria. La prueba evalúa la cercanía de los unos en una fracción de  $1/2$ , es decir, el número de unos y ceros debe ser aproximadamente la misma.

Descripción de la prueba:

Primero se convierten los ceros y unos, de una secuencia de entrada  $\varepsilon$ , en valores de  $-1$  y  $+1$  los cuales son sumados para producir  $S_n$  donde:

$$S_n = X_1 + X_2 \cdots X_n \quad (2.20)$$

$$X_i = 2 * \varepsilon_i - 1 \quad (2.21)$$

A continuación se realiza la prueba estadística  $S_{obs} = \frac{|S_n|}{\sqrt{n}}$ , siendo  $n$  el número total de bits de la prueba.

Por último se procesa la regla de decisión  $P - value = erfc(S_n/\sqrt{2})$ , donde  $erfc$  es definida mediante la siguiente ecuación:

$$erfc(z) = \frac{1}{\pi} \int_z^\infty e^{-u^2} du \quad (2.22)$$

$erfc$  es el error complementario de la función, el cual puede calcularse utilizando *Matlab*<sup>®</sup>.

#### **Regla de decisión:**

En el cálculo de la prueba si  $P - value < 0.01$  se concluye que la secuencia es no aleatoria, en otro caso es aleatorio [25].

# Capítulo III: Modelado del sistema caótico

## 3.1 Introducción

Los sistemas caóticos se realizan mediante dispositivos electrónicos, como los amplificadores operacionales, OTA (por sus siglas en inglés amplificador operacional de transconductancia) o CFOA (por sus siglas en inglés amplificador operacional retroalimentado por corriente), los cuales se pueden emplear para la representación de un sistema caótico. Estos dispositivos son utilizados, por varias razones, algunas de ellas son: accesibilidad, costo y modo de operación. A continuación se da una descripción de los amplificadores operacionales:

### 3.1.1 Amplificador operacional

Un OpAmp (del inglés Operational Amplifier) es un amplificador de tipo diferencial que tiene ganancia infinita y respuesta a la frecuencia infinita, con alta impedancia de entrada y baja impedancia de salida. Los usos típicos del OpAmp son proporcionar cambios en la amplitud del voltaje (amplitud y polaridad), en osciladores, en circuitos de filtrado y en muchos tipos de circuitos de instrumentación. Un OpAmp contiene varias etapas de amplificadores tipo diferencial para alcanzar una muy alta ganancia de voltaje [26, 27].

La Fig. 3.1 muestra un amplificador operacional básico con dos entradas y una salida. Cada entrada produce ya sea la misma polaridad de salida o una polaridad (o fase) opuesta, dependiendo de si la señal se aplica a la entrada no inversora (+) o la entrada inversora (−) respectivamente.

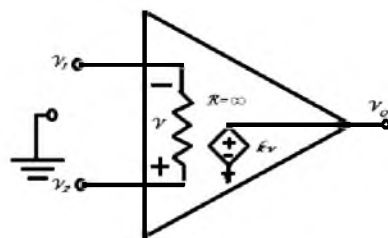


Figura 3.1: Modelo del OpAmp.

En un OpAmp se deben tener en cuenta 2 reglas importantes [26, 27]:

1. Nunca fluye corriente hacia las terminales de entrada.
2. No existe diferencia de tensión entre las dos terminales de entrada.

A continuación se muestran algunas de las configuraciones básicas del OpAmp.

### Configuración inversora

La Fig. 3.2 muestra la configuración inversora de voltaje, en la que al aplicarle la ley de Kirchhoff de corriente se obtiene la ec. 3.23 que expresa la relación entre el voltaje de salida con respecto al voltaje de entrada [26, 27].

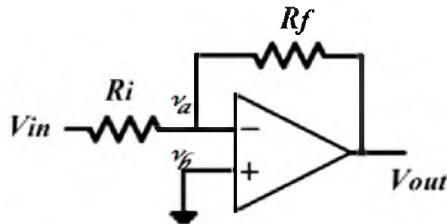


Figura 3.2: Configuración inversor de voltaje.

$$v_{out} = -v_{in} \frac{R_f}{R_i} \quad (3.23)$$

### Configuración sumador inversor

En la Fig. 3.3 se muestra la configuración sumador inversor, en la que a partir de  $n$  señales de entrada se obtiene la señal de salida, de tal forma que aplicando la ley de Kirchhoff de corriente en la entrada inversora se obtiene la ec. 3.24 que guarda una relación entre el voltaje de salida con respecto al voltaje de entrada [26, 27].

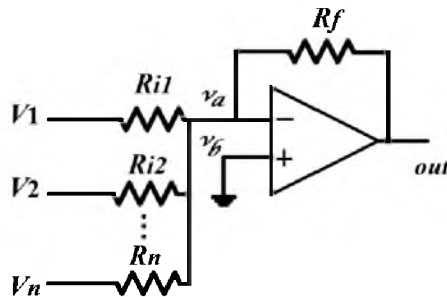


Figura 3.3: Configuración sumador inversor.

$$v_{out} = -R_f \left( \frac{v_1}{R_{i1}} + \frac{v_2}{R_{i2}} + \dots + \frac{v_n}{R_{in}} \right) \quad (3.24)$$

### Configuración integrador inversor

En la Fig. 3.4 se muestra la configuración en modo integrador inversor. Aplicando la ley de Kirchhoff de corriente en la entrada inversora se obtiene la ec. 3.25, en donde la señal de salida, depende de la integral del voltaje de entrada, por lo que tendrá una señal proporcional a la integral del voltaje de entrada, con una ganancia  $\frac{1}{RC}$ , en [26, 27] se ha demostrado prácticamente que se obtiene a la salida la integral de la señal de entrada.

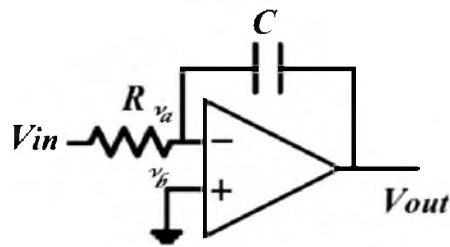


Figura 3.4: Configuración integrador inversor.

$$v_{out} = \frac{1}{RC} \int v_{in}(t) dt \quad (3.25)$$

### Configuración de transferencia

Esta configuración es usada en algunos sensores como acondicionador de señal, en los que se realiza una conversión de corriente a voltaje, en la cual la salida es proporcional a la intensidad de entrada. La Fig. 3.5 muestra la configuración amplificador de transferencia las cuales se comportan de acuerdo a la ec. 3.26 [16, 26].

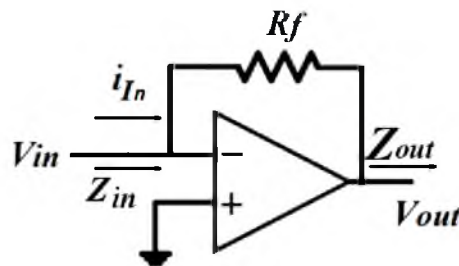


Figura 3.5: Configuración de transferencia.

$$Z_{in} = 0 \quad Z_{out} = 0 \quad V_{out} = -R_f i_{I_n} \quad (3.26)$$

### Configuración seguidor de voltaje

La Fig. 3.6 muestra el seguidor de voltaje, también conocido como seguidor de fuente, amplificador de ganancia unitaria o amplificador de aislamiento. La relación de voltaje de salida con respecto al de la entrada se muestra en la ec. 3.27 [26, 27].

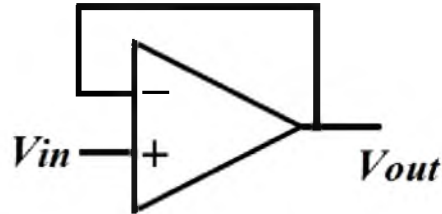


Figura 3.6: Configuración seguidor de voltaje.

$$V_{out} = V_{in} \quad (3.27)$$

El voltaje de salida iguala al voltaje de entrada tanto en magnitud como en signo, por lo que la ganancia del voltaje es 1.

### 3.1.2 Amplificador operacional retroalimentado por corriente

Actualmente el CFOA (por sus siglas en inglés Current Feedback Operational Amplifier) ha cobrado un especial interés por ser un dispositivo muy versátil de cuatro terminales, el cual ofrece alternativas en el diseño de bloques analógicos que permiten la implementación de circuitos en modo voltaje y modo corriente. Adicionalmente, posee ventajas muy significativas sobre el OpAmp convencional, entre las cuales se incluyen: un amplio ancho de banda independiente a su ganancia en lazo cerrado, un excelente desempeño en velocidad y la fácil realización de diversas funciones con el menor número posible de elementos externos.

La ec. 3.28 describe el comportamiento del CFOA como dispositivo activo de cuatro terminales.

$$\begin{bmatrix} V_x \\ I_y \\ I_z \\ V_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ V_y \\ V_z \\ I_w \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

La representación esquemática del CFOA se ilustra en la Fig. 3.7, donde la arquitectura del amplificador está basada en la conexión en cascada de un conductor de corriente positiva (CCII+) y un seguidor de voltaje [28, 29].

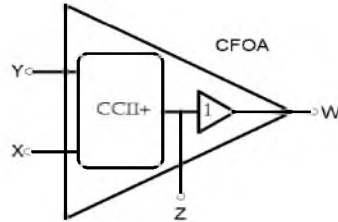


Figura 3.7: Descripción esquemática del CFOA.

### 3.1.3 Amplificadores operacionales de transconductancia

Un OTA (por sus siglas en inglés Operational Transconductance Amplifier) amplificador operacional semejante a un OpAmp con la particularidad de proporcionar una corriente de salida, de ahí su nombre, ya que la respuesta en el puerto de salida es una corriente y la señal en el puerto de entrada es un voltaje. Su función de transferencia será  $H(j\omega) = \frac{I_{out}}{V_{in}}$ , es decir, la transconductancia. El símbolo que lo representa se muestra en la Fig. 3.8a y su macromodelo en la Fig. 3.8b [30].

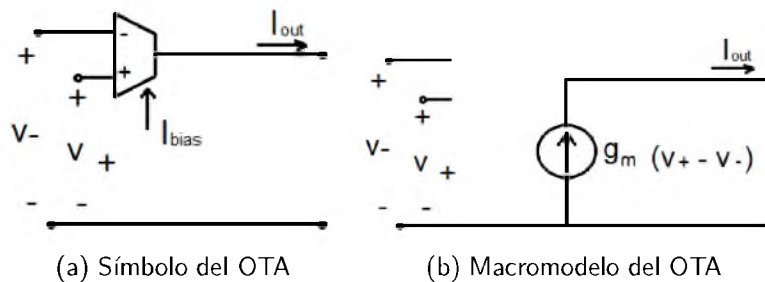


Figura 3.8: Representación del OTA.

En este trabajo se empleará el OpAmp, con el cual se desarrolla el sistema dinámico bajo estudio. Debido principalmente a su bajo costo y accesibilidad.

## 3.2 Modelado del sistema caótico

En este trabajo se estudia un oscilador caótico basado en la SNLF, de modo que el modelo para la generación de  $n$ -enrollamientos es descrito por el sistema en variables de estado dado en la ec. 3.29.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y \\
 \dot{y} &= z \\
 \dot{z} &= -ax - by - cz + df(x; k, h, p, q)
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

este es un sistema autónomo no-lineal de 3D. Donde:

$k \geq 2$  que es la pendiente de la SNLF.  $x, y, z$  son las variables de estado.  $a, b, c, d$  son constantes reales positivas, que para cumplir la condición de caos debe satisfacer que  $0 < a, b, c, d < 1$ . Esto debido a dos factores, uno por que los dispositivos electrónicos se saturan en frecuencia y otro a que en trabajos anteriores [16, 17] se ha comprobado que los valores están entre 0 y 1.  $h$  es el retraso saturado del centro de las pendientes y debe estar de acuerdo con  $h_i = \pm mk$ .

Donde:  $i = 1, \dots, [(\text{enrollamientos}-2)/2]$  y  $m = 2, 4, \dots, (\text{enrollamientos}-2)$  para enrollamientos impares.  $i = 1, \dots, [(\text{enrollamientos}-1)/2]$  y  $m = 1, 3, \dots, (\text{enrollamientos}-2)$  para enrollamientos pares.  $p$  y  $q$  son enteros positivos [17, 29].

Al simular la ec. 3.29 mediante *Matlab*<sup>®</sup> se obtiene el comportamiento caótico para 3 enrollamientos (ver Fig. 3.9).

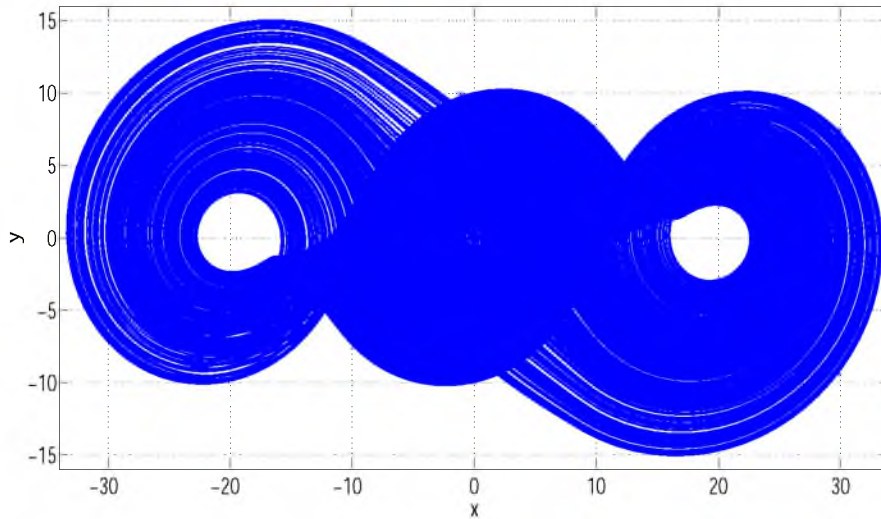


Figura 3.9: Atractor de 3 enrollamientos.

En la figura anterior se observa que los niveles de voltaje son demasiado grandes comparado con los niveles máximos soportados por los dispositivos electrónicos reales ya que estos van de un rango de  $\pm 18V$ . Debido a lo anterior se realiza un escalamiento de voltaje en la SNLF.

La ec. 3.29 se reescribe como se indica en la ec. 3.30, al observar esta, se nota que para un atractor de 2 enrollamientos no es necesario realizar el escalamiento puesto que los rangos de voltaje siempre serán pequeños debido a que la SNLF solo tiene 2 niveles de voltaje, en otros casos cuando tiene más puntos de saturación  $nk$  y más pendientes, como se observó en la Fig. 2.8, será necesario realizar el escalamiento.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -ax - by - cz + df(x; \alpha, k, h, p, q)\end{aligned}\tag{3.30}$$

El factor  $\alpha$  permite que el valor de  $k$  sea menor que 1, debido a que la condición aplica para la nueva pendiente, donde  $s = \frac{k}{\alpha}$ , esto permite que  $\alpha$  pueda seleccionarse para valores menor que 1 y por lo tanto  $s$  sea igual o mayor a 2.

La representación matricial de la ec. 3.30 se muestra en la ec. 3.31

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ df(x; \alpha, k, h, p, q) \end{bmatrix}\tag{3.31}$$

Empleando integradores en la ec. 3.31 se obtiene el diagrama a bloques para la generación de  $n$ -enrollamientos (ver Fig. 3.10).

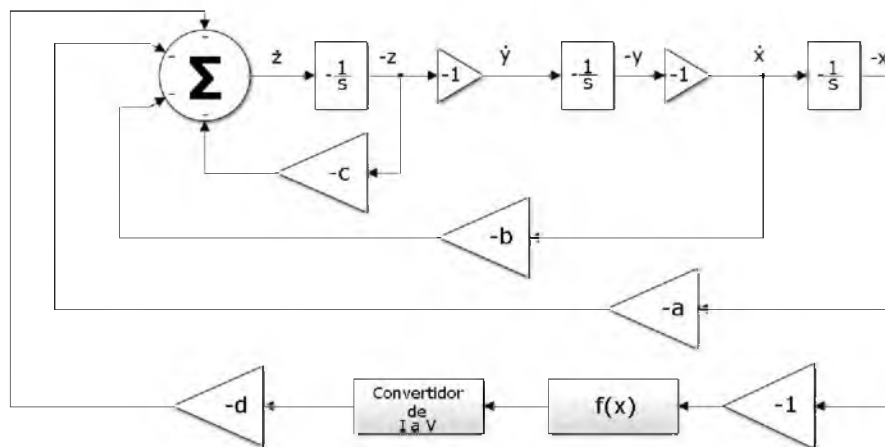


Figura 3.10: Diagrama a bloques del oscilador caótico de  $n$ -enrollamientos basado en la SNLF.

Empleando la SNLF junto con las configuraciones antes mencionadas de los OpAmp se construye el oscilador caótico de  $n$ -enrollamientos como en la Fig. 3.11.

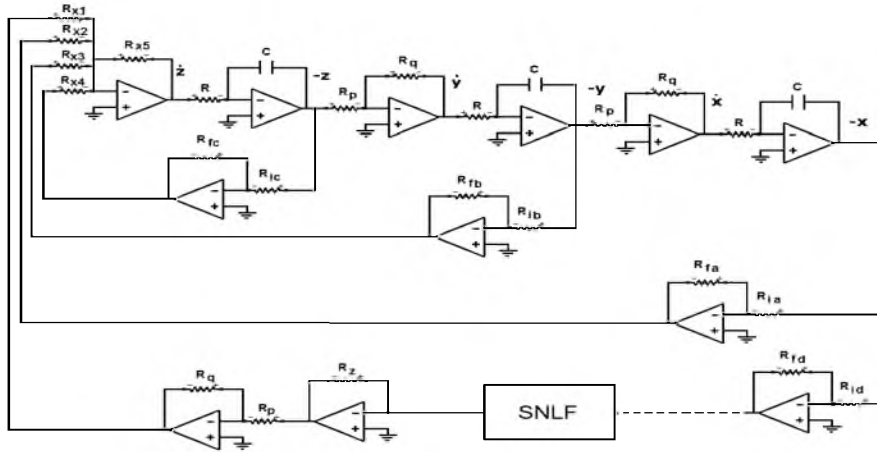


Figura 3.11: Implementación del oscilador caótico con OpAmps para la generación de  $n$ -enrollamientos.

La Fig. 3.12 muestra una conexión en paralelo de los amplificadores operacionales, la cual satisface al bloque de la SNLF. Determinar el número de amplificadores operacionales utilizados en el circuito, depende del número de enrollamientos a generar. Si se tiene  $n$  enrollamientos, se emplearán  $n - 1$  amplificadores lo cual puede expresarse como:

$$\text{Número de OpAmp} = n - 1 \quad (3.32)$$

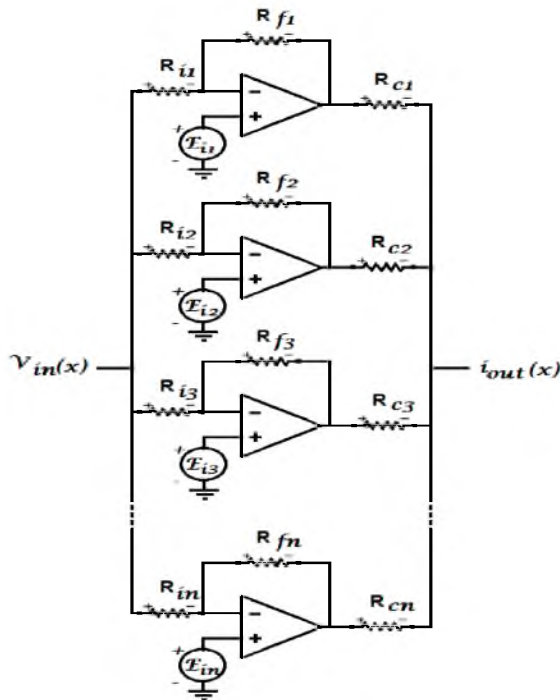


Figura 3.12: Representación de la SNLF con OpAmp.

Donde los términos  $E_{in}$  representan fuentes de alimentación, el subíndice  $n$  dependerá de si el número de enrollamientos es par o impar. Los valores requeridos para los otros parámetros en la generación de la SNLF se obtienen a partir de las ecs. 3.33.

$$k = R_{ix} * I_{sat} \quad ; \quad \alpha = \frac{R_i |V_{sat}|}{R_d} \quad ; \quad s = \frac{k}{\alpha} \quad ; \quad I_{sat} = \frac{V_{sat}}{R_c} \quad ; \quad h \approx E_i \quad (3.33)$$

### 3.3 Método numérico de integración

Para encontrar la solución al oscilador caótico descrito por la ec. 3.30, se utilizará el método de Euler para aproximar la solución del sistema caótico basado en la SNLF.

Este método se aplica para encontrar la solución a ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, cuando la función involucra solo una variable independiente:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.34)$$

De forma general el método se basa en la estimación de la pendiente de la función para extrapolar desde un valor anterior a un nuevo valor [31]:

$$y_{(i+1)} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (3.35)$$

de esta manera, la ec. 3.35, se aplica paso a paso para encontrar un valor en el futuro y así trazar la trayectoria de la solución. La Fig. 3.13 muestra el procedimiento aplicado con la ec. 3.35

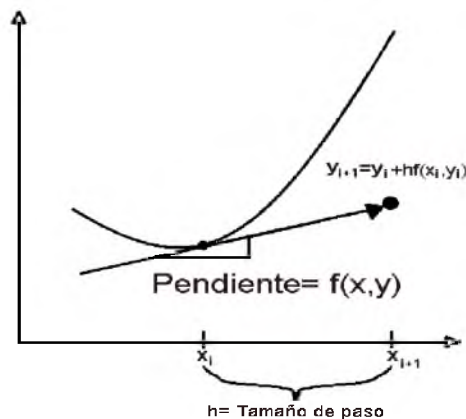


Figura 3.13: Método de Euler para la aproximación a la solución.

### 3.4 Simulación del modelo en variables de estado

En este trabajo el estudio se realiza sobre un oscilador caótico de 2 enrollamientos basado en la SNLF. De esta forma es posible observar, de manera gráfica, el comportamiento caótico de los atractores. A partir de la ec. 2.19, la cual es la representación general de la función SNLF, se puede obtener la función para dos enrollamientos, esta se muestra en la ec. 3.36. El comportamiento de la ec. 3.36 se puede ver en la Fig. 3.14.

$$f(x; k, \alpha) = \begin{cases} k & \text{si } x > \alpha \\ s(x) & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha \\ -k & \text{si } x < -\alpha \end{cases} \quad (3.36)$$

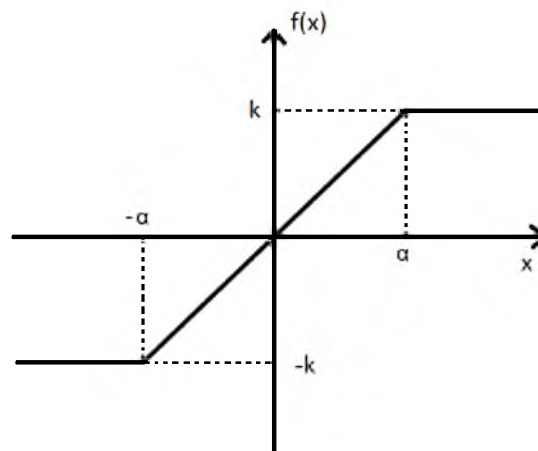
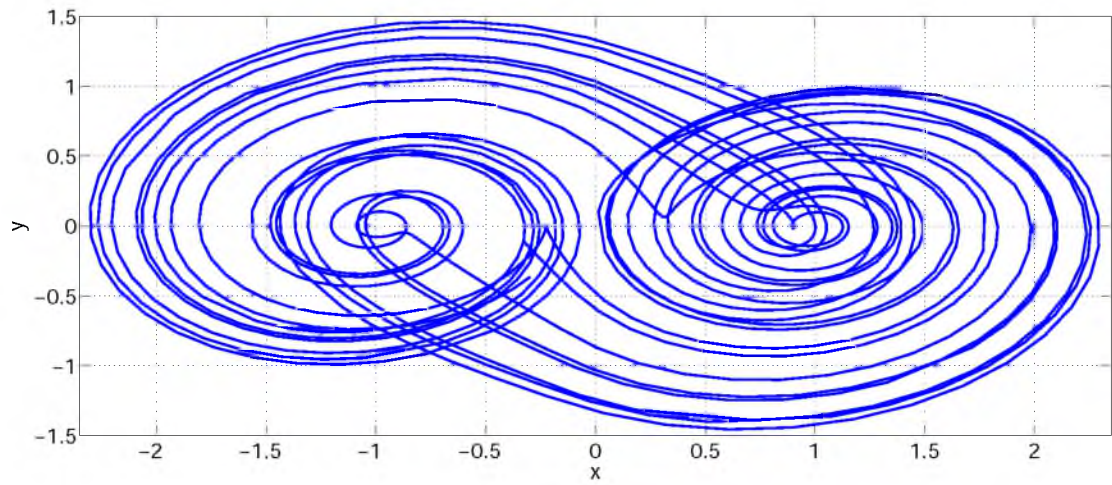
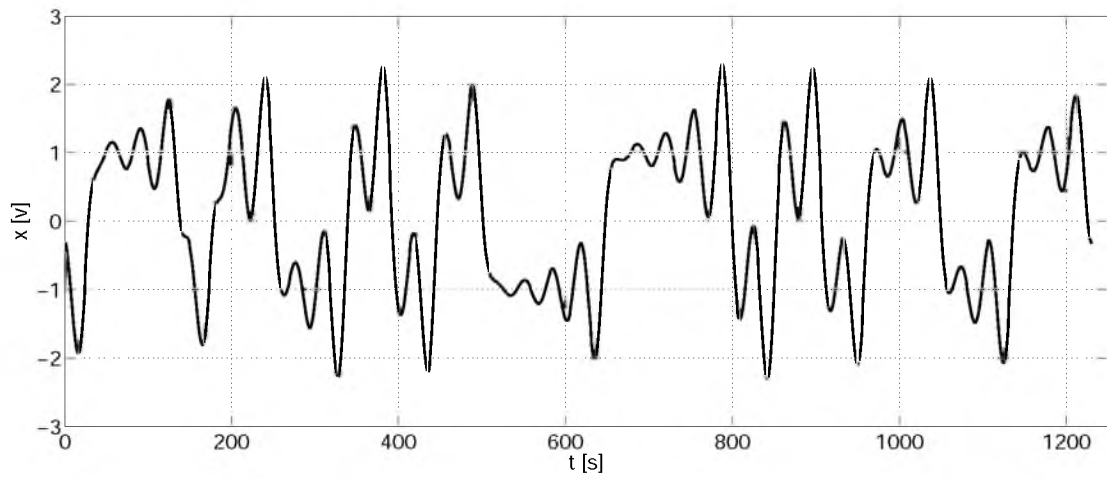


Figura 3.14: Comportamiento de la SNLF con dos niveles de saturación.

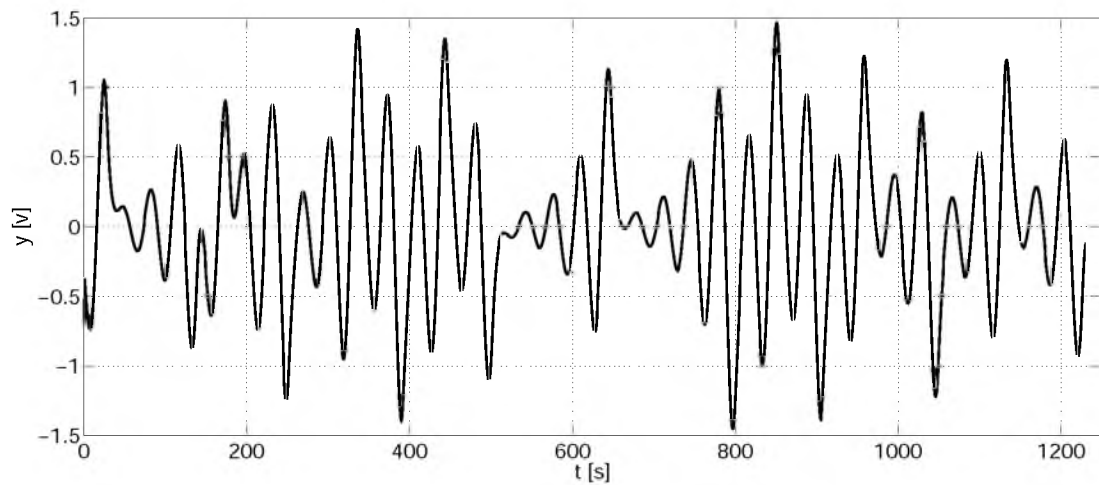
En la Fig. 3.15a se muestran los resultados de la simulación realizada en *Matlab*<sup>®</sup> para la generación del atractor de 2 enrollamientos, donde se aprecia que la señal no sale del rango de operación del OpAmp por tal motivo no será necesario realizar un escalamiento, pues solo son 2 niveles de saturación. En las Figs. 3.15b y 3.15c se muestran los valores de cada señal con las cuales se obtiene el espectro de fase. Para la simulación se ocuparon los valores de  $\alpha = 0.1$ ,  $k = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $a = b = c = d = 0.7$ , ya que se ha demostrado en [16] que estos valores proporcionan el mejor resultado.



(a) Atractor de 2 enrollamientos, donde  $x$  e  $y$  son salidas generadas por el sistema caótico



(b) Comportamiento del sistema de la salida  $x$  con respecto al tiempo



(c) Comportamiento del sistema de la salida  $y$  con respecto al tiempo

Figura 3.15: Sistema caótico.

Mediante el uso de *Matlab*<sup>®</sup> (ver Apéndice A), se realiza la simulación de los exponentes de Lyapunov, en donde se observa la evolución del sistema y por lo tanto se puede predecir el comportamiento dinámico entre los diferentes valores de los exponentes, con este análisis se puede comprobar que el sistema es caótico. De forma gráfica se puede observar el comportamiento caótico. Los resultados se pueden ver en la Fig. 3.16.

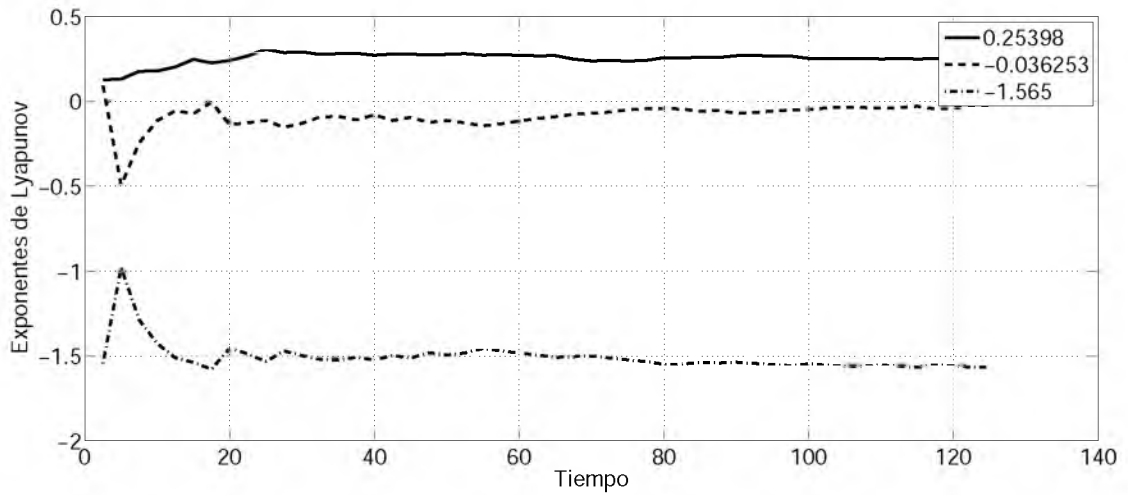


Figura 3.16: Comportamiento dinámico de los exponentes de Lyapunov.

## Capítulo IV: Robótica móvil

### 4.1 Introducción

Actualmente la robótica es un tema de investigación interesante debido a la necesidad de evitar la intervención humana en algunos procesos en los cuales se pone en riesgo la integridad. Cabe mencionar que en esta línea de investigación se desea obtener un sistema autónomo en los cuales el robot tenga la capacidad de toma de decisión, así como también erradicar por completo la intervención humana en la que se planifican tareas o trayectorias que el robot debe seguir adecuadamente. A partir de las restricciones de movilidad de los sistemas surgen los sistemas basados en robots móviles, donde el sistema se desplaza en un terreno suficientemente duro y libre de obstáculos, que permiten al robot desplazarse a velocidades elevadas. El problema ahora es crear estrategias de control que permitan tener un sistema estable, óptimo y eficiente [32, 33]. Este trabajo se enfocará en los robots móviles con locomoción mediante ruedas.

### 4.2 Locomoción

Los robots móviles necesitan sistemas de locomoción que les permitan desplazarse libremente en un ambiente de trabajo. Algunos de estos tratan de imitar movimientos de sistemas biológicos. Generalmente los robots móviles terrestres se desplazan mediante ruedas o algún número de patas articuladas. Esta última técnica es un poco más compleja debido a que requiere mayores grados de libertad por lo que normalmente se opta por ocupar ruedas, por tener mayor movilidad y estabilidad [32, 33].

Los robots con locomoción mediante ruedas generalmente son diseñados para que todas las ruedas estén en contacto con la superficie, en el caso de ser una superficie irregular se necesita la dotación de sistemas de suspensión que le permita mantener sus ruedas en contacto con el suelo. Como se menciona en [32, 33] existen diversos tipos de configuraciones de robots móviles que permiten el desplazamiento en el área de trabajo, ejemplo de estos son:

#### 4.2.1 Ackerman

Este es un sistema locomoción de cuatro ruedas el cual se ilustra en la Fig. 4.1, donde la rueda delantera interior gira un ángulo ligeramente superior al de la exterior ( $\theta_0 > \theta_1$ )

con el fin de eliminar el deslizamiento. Las prolongaciones de los ejes de las dos ruedas delanteras intersectan en un punto sobre la prolongación del eje de las ruedas traseras. El lugar de los puntos trazados sobre el suelo por los centros de los neumáticos son circunferencias concéntricas con centro el eje  $P_1$ . Si no se tiene en cuenta las fuerzas centrífugas, los vectores de velocidad instantánea son tangentes a estas curvas.

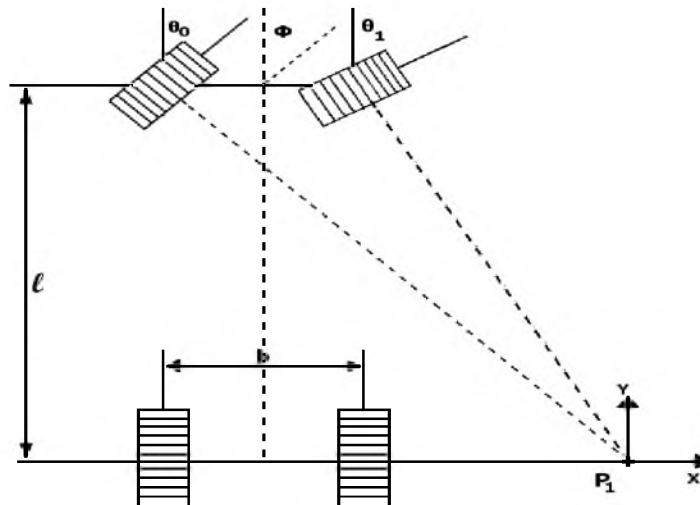


Figura 4.1: Sistema locomoción Ackerman.

#### 4.2.2 Triciclo clásico

Este sistema locomoción de tres ruedas se ilustra en la Fig. 4.2, en donde la rueda delantera sirve para tracción y dirección. El eje trasero está conformado por dos ruedas pasivas que se mueven libremente. Este sistema tiene mayor maniobrabilidad que la configuración anterior, pero puede presentar problemas de estabilidad en terrenos difíciles o irregulares. El centro de gravedad tiende a modificarse cuando el vehículo se desplaza por una pendiente, causando la pérdida de tracción.

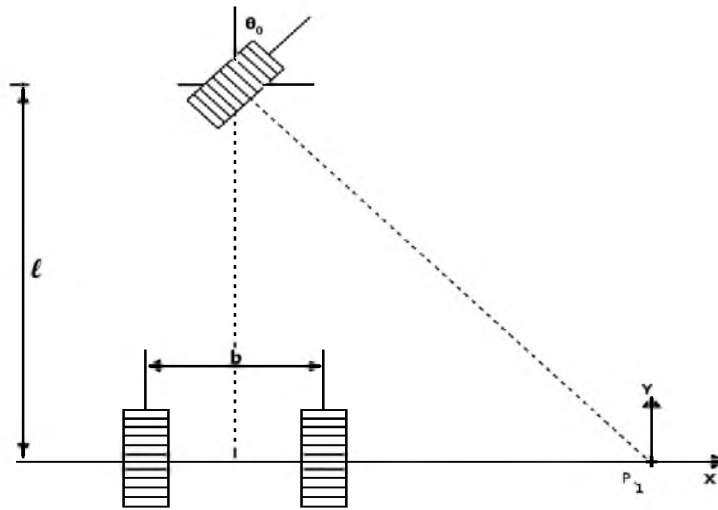


Figura 4.2: Sistema locomoción triciclo clásico.

### 4.2.3 Tracción diferencial

En el sistema mostrado en la Fig. 4.3 el direccionamiento viene dado por las velocidades de las ruedas laterales. La tracción se consigue también con estas mismas, donde existe una o más ruedas de apoyo. Este sistema de locomoción es el más frecuente en robots para espacios cerrados.

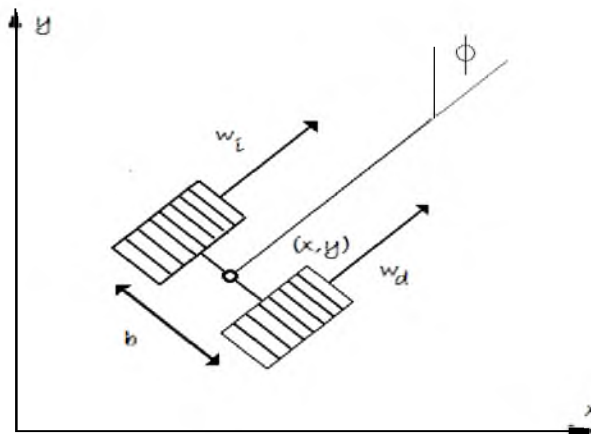


Figura 4.3: Sistema diferencial.

#### 4.2.4 Síncrona

En la Fig. 4.4 se muestra el sistema de locomoción síncrona o "synchro-drive", en donde el sistema está compuesto por tres ruedas que giran de forma síncrona, en esta configuración la traslación se realiza por medio de correas o coronas de engranes (synchro-drive).

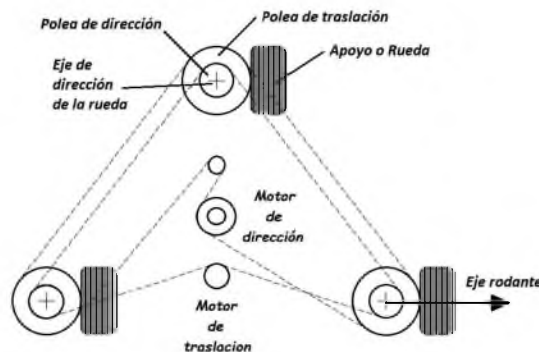


Figura 4.4: Sistema de locomoción síncrona. El móvil puede desplazarse en cualquier dirección.

La configuración de traslación síncrona es un arreglo popular dentro de las aplicaciones de los robots móviles con ruedas. Esta es interesante debido a que a pesar de utilizar tres ruedas para dirigir y trasladarse, solo se utilizan dos motores en total, como se muestra en la Fig. 4.4.

El motor de traslación ajusta la velocidad de las tres ruedas y el motor de dirección hace girar todas las ruedas sobre cada uno de sus ejes de dirección vertical individual.

### 4.3 Modelo cinemático

El modelo cinemático se basa en las ecuaciones de movimiento en el espacio de algún robot, sin importar las fuerzas que lo producen, existen dos modelos cinemáticos los cuales se muestran a continuación:

#### a) Modelo cinemático directo

El modelo cinemático directo es una forma de poder conocer la posición y orientación de un robot móvil en un plano con respecto a un sistema de referencia fijo, a partir de la velocidad angular y la velocidad lineal. Cabe mencionar que este trabajo, se enfocará

en la configuración síncrona con las ecuaciones ya definidas, las cuales cumplen con las restricciones no holónomicas. A partir de la configuración mostrada en la Fig. 4.3, se realiza un análisis de simplificación en la que el robot se considera como un monociclo, esto se puede ver en la Fig. 4.5.

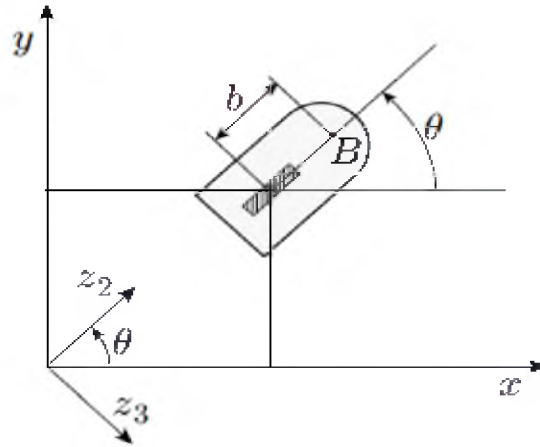


Figura 4.5: Coordenadas generalizadas de un monociclo.

Según [34, 35] a partir del modelo del monociclo se obtiene las siguientes ecuaciones cinemáticas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos(\theta) \\ \dot{y} &= v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde  $x$  e  $y$  son las coordenadas en el plano con respecto a un sistema fijo,  $\theta$  es la orientación,  $\omega$  y  $v$  son la velocidad angular y la velocidad lineal respectivamente. La representación matricial de la ec. 4.37 es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

donde se define a  $P = [x \ y \ \theta]^T$  como el vector de coordenadas globales,  $q' = [v \ \omega]^T$  es el vector de variables de entrada, y  $J(P)$  es el Jacobiano. La ec. 4.38 se puede expresar de la siguiente forma:

$$P' = J(P)q' \quad (4.39)$$

## b) Modelo cinemático inverso

El modelo cinemático inverso se emplea cuando se tiene la problemática en la que se desconocen los valores deseados de las variables de la posición y la orientación del robot. Para resolver ese problema se necesita conocer la inversa del Jacobiano, por lo que al ser una matriz no cuadrada se ocupa la pseudoinversa, por lo que la ec. 4.39 se transforma a la ec. 4.40, con lo cual se obtiene la representación del modelo cinemático inverso [32].

$$q' = J(P)^T P' \quad (4.40)$$

Ahora se puede representar el sistema de la ec. 4.38 de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

## 4.4 Control del robot móvil autónomo

En la mayoría de los sistemas actuales se pretende que un robot siga una trayectoria previamente planificada o que pueda reaccionar de manera adecuada a la percepción del entorno, en donde no tenga intervención de un usuario. A partir de este punto se aborda la generación de trayectoria, así como el control del robot móvil.

### 4.4.1 Generación de trayectorias

Para poder realizar el control de un móvil se debe realizar una generación de trayectoria, lo cual le permita al móvil desplazarse en un camino de forma adecuada. En este caso hay que tomar en cuenta las restricciones no holónomicas del robot móvil para poder seguir dicho camino. En la Fig. 4.6 se puede ver que las señales generadas por el modelo caótico son señales suaves, con puntos muy cercanos entre sí. Esto permite utilizar el oscilador caótico como generador de trayectorias.

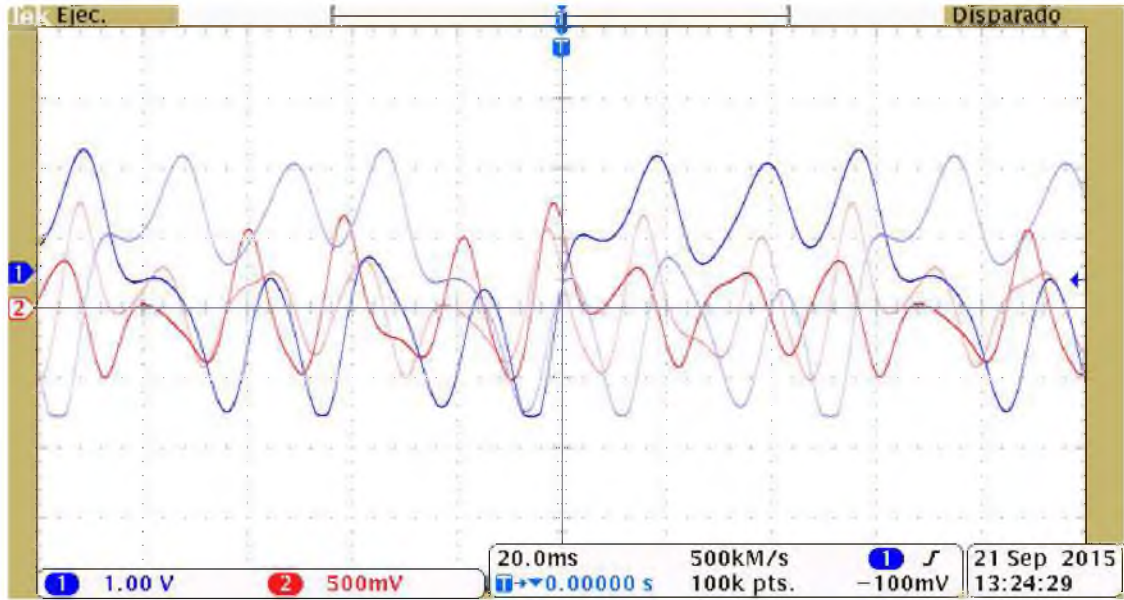


Figura 4.6: Señal de salida del oscilador caótico.

Utilizando una estrategia de control como en [4], para el sistema representado por la ec. 3.30, el parámetro  $z$  se considera como la posición angular  $\theta$ , así la velocidad angular del robot está dada por:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{dz}{dt} \quad (4.42)$$

sustituyendo la ec. 4.42 en las ecuaciones de movimiento del móvil se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= v \cos(nz) \\ \frac{dY}{dt} &= v \sin(nz) \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde  $(X, Y)$  son las coordenadas del robot móvil en el área de trabajo,  $v$  es la velocidad lineal del móvil, la cual se define como constante y  $n$  es un factor de normalización para la amplitud del parámetro  $z$ .

Según [34] para encontrar una solución al seguimiento, es necesario que la trayectoria deseada  $(x_d(t), y_d(t))$  satisfaga las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= v_d \cos(\theta_d) \\ \dot{y}_d &= v_d \sin(\theta_d) \\ \dot{\theta}_d &= \omega_d \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde se seleccionan los valores de las velocidades deseadas,  $v_d$  y  $\omega_d$ .

Comparando la posición del estado deseado  $q_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ \theta_d(t)]^T$  con la medición del estado actual  $q(t) = [x(t) \ y(t) \ \theta(t)]^T$ , es posible calcular el vector de error, será la entrada del controlador, sin embargo, en lugar de utilizar directamente la diferencia entre  $q_d$  y  $q$ , es conveniente definir el error de seguimiento como sigue:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

el error debido a la posición viene dada por el error cartesiano  $e_p = [x_d - x \ y_d - y]^T$  expresado en un marco de referencias que está alineado con la orientación actual de  $\theta$ . Diferenciando  $e$  con respecto al tiempo y combinando con las ecs. 4.37 y 4.44 se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= v_d \cos(e_3) - v + e_2 \omega \\ \dot{e}_2 &= v_d \sin(e_3) - e_1 \omega \\ \dot{e}_3 &= \omega_d - \omega \end{aligned} \quad (4.46)$$

usando la transformación de entrada [34] se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} v &= v_d \cos(e_3) - u_1 \\ \omega &= \omega_d - u_2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

la cual se puede comprobar que es invertible, la siguiente expresión se obtiene para la dinámica del error de seguimiento:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(e_3) \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & -e_2 \\ 0 & e_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

El primer término de la dinámica es lineal, mientras que el segundo y tercero son no lineal. Por otra parte el primer y segundo términos son en general variantes en el tiempo debido a las entradas de referencia  $v_d$  y  $\omega_d$ .

#### 4.4.2 Control del modelo cinemático

El enfoque más simple para el diseño de un control de seguimiento consiste en utilizar la linealización aproximada de la dinámica del error alrededor de una trayectoria deseada

en la que el error es 0. Esta aproximación, cuya precisión aumenta a medida que el error de seguimiento ( $e$ ) disminuye, se obtiene a partir de la ec. 4.48, donde  $\sin(e_3) = e_3$ . Ahora evaluando la matriz de entrada en la trayectoria [32, 34]. El resultado es:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

la aproximación del sistema es aún variante en el tiempo. Considerando ahora la retroalimentación lineal se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$u_1 = -k_1 e_1 \quad (4.50)$$

$$u_2 = -k_2 e_2 - k_3 e_3 \quad (4.51)$$

Las ecuaciones anteriores conducen a una dinámica linealizada del error en lazo cerrado la cual queda expresada de la siguiente manera:

$$\dot{e} = A(t) e = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} e \quad (4.52)$$

donde  $A$  es la matriz. Con la que se obtiene el polinomio característico  $P(\lambda)$ , definido como:

$$P(\lambda) = \det [\lambda I - A] = \lambda (\lambda + k_1) (\lambda + k_3) + \omega_d^2 (\lambda + k_3) + v_d k_2 (\lambda + k_1) \quad (4.53)$$

De [32] y [34] se determina que  $k_1 = k_3$ , si se sustituye esta relación en la ec. 4.53 se obtiene el siguiente polinomio:

$$P(\lambda) = (\lambda + k_1) (\lambda^2 + k_1 \lambda + \omega_d^2 + v_d k_2) \quad (4.54)$$

donde las ganancias de retroalimentación  $k_1$  y  $k_2$  están expresadas como sigue:

$$k_1 = 2\zeta\omega_n \quad (4.55)$$

$$k_2 = \frac{\omega_n^2 - \omega_d^2}{v_d} \quad (4.56)$$

donde  $\zeta$  es el factor de amortiguamiento y  $\omega_n$  es la frecuencia natural no amortiguada.

# Capítulo V: Resultados y conclusiones

## 5.1 Resultados

La obtención de la SNLF para atractores de 2 enrollamientos, puede ser realizada con algunos dispositivos electrónicos como se mostró en la Fig. 3.12, para obtener resultados óptimos se tomaron los siguientes valores para cada uno de los parámetros:  $a = 0.165$ ,  $b = 0.227$ ,  $c = 0.394$ ,  $d = 0.363$ ,  $k = 1.65$ ,  $\alpha = 64e - 3$ ,  $s = 25.7675$ ,  $h \approx 0.01$ . Estos valores permitieron realizar la prueba experimental, cuyos resultados se observan en la Fig. 5.1. En esta figura se observan los 2 niveles de saturación, los cuales para este trabajo se consideran son los adecuados para la generación de la señal SNLF.

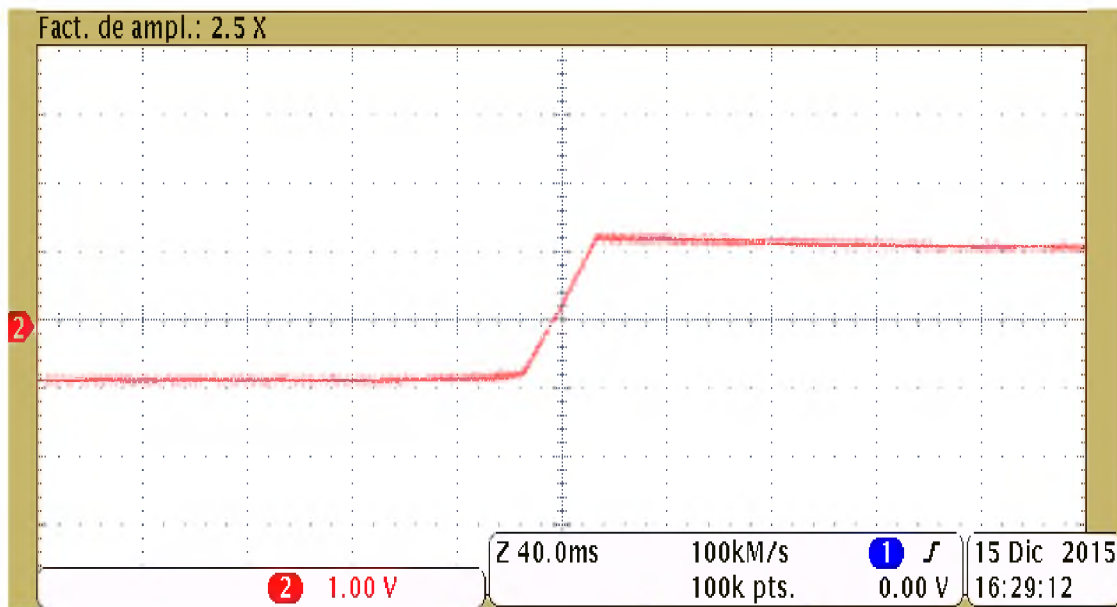
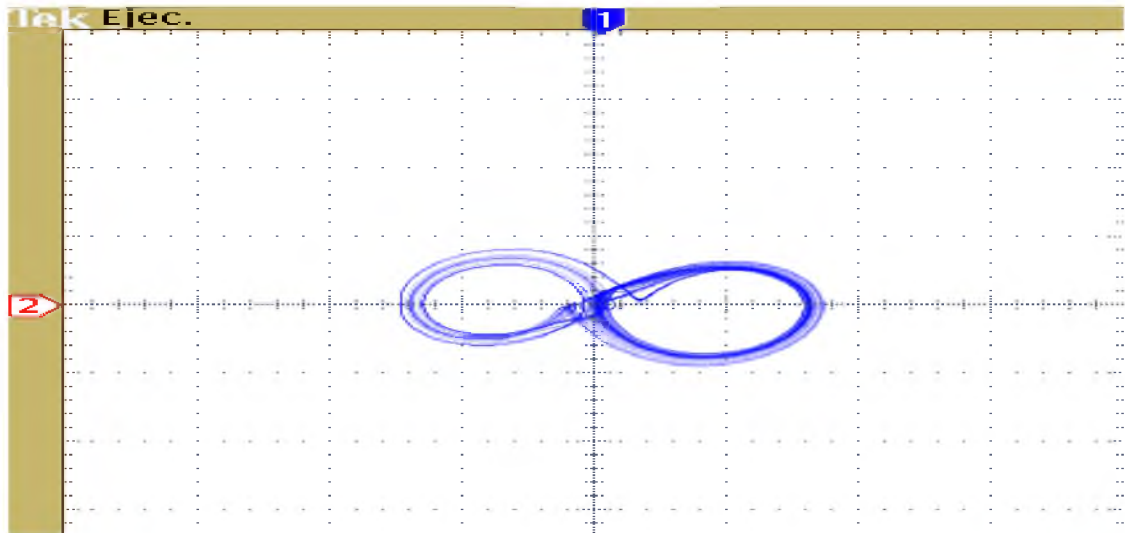
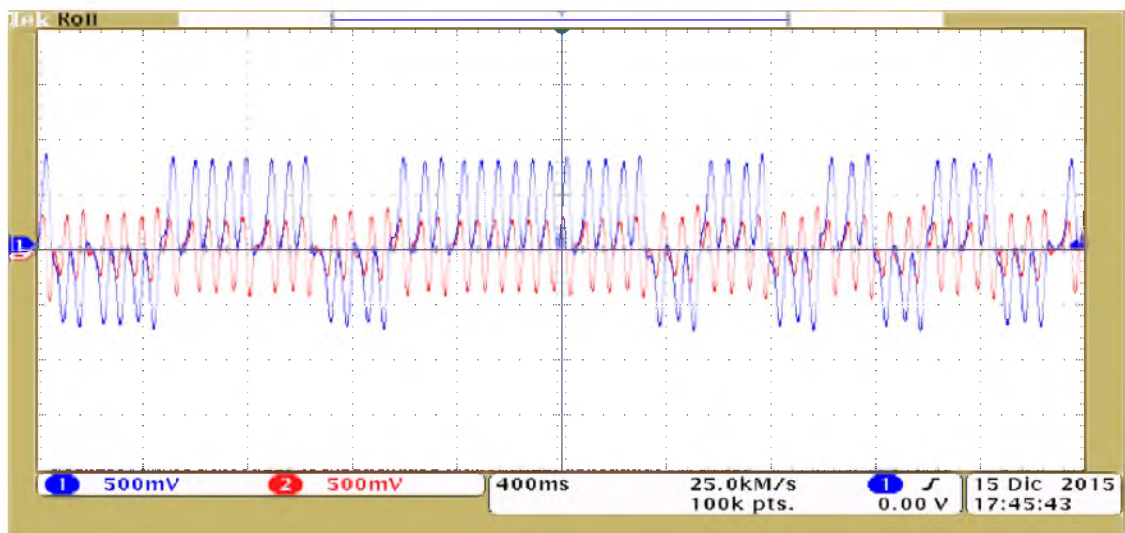


Figura 5.1: Señal de la SNLF.

A partir del análisis de un oscilador caótico de 2 enrollamientos y realizando el arreglo experimental mostrado en la Fig. 3.11 se obtuvieron los resultados del oscilador caótico, dichos resultados se muestran en las Figs. 5.2a y 5.2b, en donde se ven los dos enrollamientos deseados bien definidos. Los parámetros y valores de los elementos empleados en el arreglo experimental fueron los siguientes (ver Apéndice B):  $I_{sat} = 20mA$ ,  $V_{sat} = 6.2v$ ,  $R_{ix} = 82.456\Omega$ ,  $R_f = 207.64\Omega$ ,  $R_c = 308.34\Omega$ ,  $C = 10nF$ ,  $R = 150k\Omega$ ,  $R_{ia} = R_{ib} = R_{ic} = R_{id} = 10k\Omega$ ,  $R_{fa} = 1.55k\Omega$ ,  $R_{fb} = 2.27k\Omega$ ,  $R_{fc} = 3.94k\Omega$ ,  $R_{fd} = 3.63k\Omega$ .



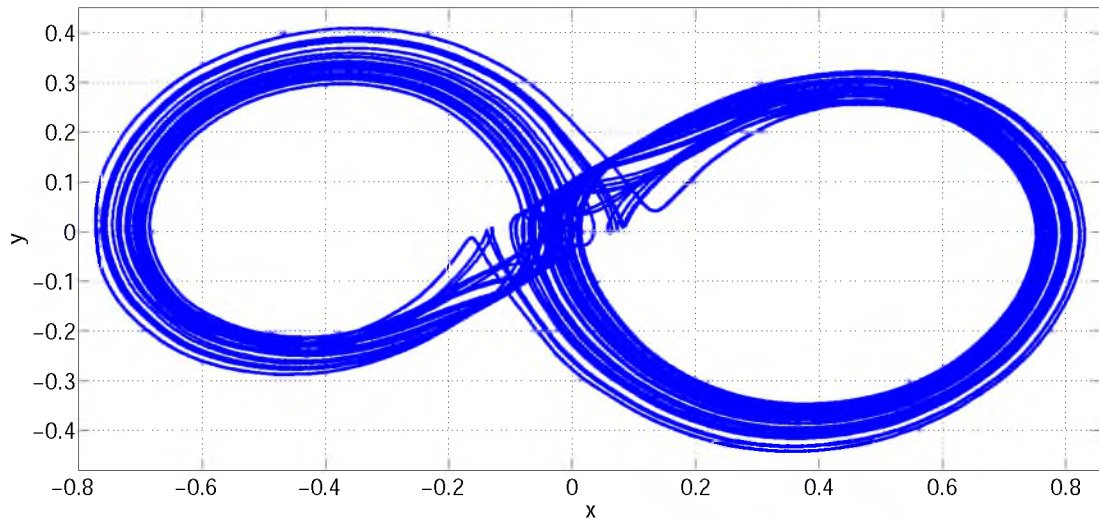
(a) Resultado experimental del atractor caótico de 2 enrollamientos



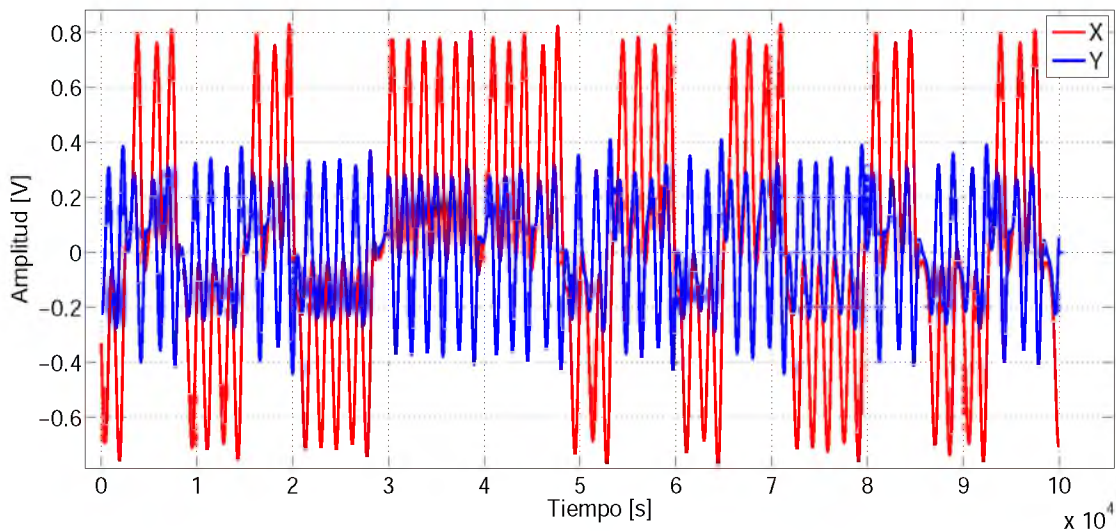
(b) Resultado experimental de las salidas  $x$  e  $y$  del oscilador caótico

Figura 5.2: Comportamiento del sistema caótico de 2 enrollamientos.

Con los resultados obtenidos del circuito del oscilador caótico se procedió a determinar la aleatoriedad del oscilador caótico. En la Fig. 5.3a se puede observar el comportamiento de fases de las señales y en la Fig. 5.3b se puede observar el comportamiento aleatorio del oscilador caótico, la simulación se realiza mediante *Matlab*<sup>®</sup>.



(a) Diagrama de fase. Donde  $x$  e  $y$  son salidas generadas por el sistema caótico



(b) Gráfica de los datos adquiridos con respecto al tiempo

Figura 5.3: Simulación en *Matlab*<sup>®</sup> de los datos adquiridos mediante el uso del osciloscopio.

Mediante el uso del método de monobit y empleando el software *Matlab*<sup>®</sup> (ver Apéndice C), se analizan los datos obtenidos experimentalmente para poder determinar si el sistema es aleatorio. En base a los resultados observados en la Fig. 5.4, donde  $P - value > 0.01$ , se puede decir que el sistema es aleatorio, condición necesaria para poder utilizar esta señal como entrada de control del robot móvil autónomo con comportamiento caótico.

```

Command Window

tan =

    100000

Pvalue =

    1.8295

unoc =

    1537

cerco =

    98463

Aleatorio

```

Figura 5.4: Prueba de Monobit.

Como se mencionó anteriormente, una de las señales de salida del oscilador caótico funcionará como la entrada en velocidad angular del robot móvil. En este caso se cuenta con 3 señales de salida del oscilador caótico, por lo que se podría tomar cualquiera de ellas como entrada de control, el cual es un control linealizado. Con el uso del software *Matlab*<sup>®</sup> se realizó el diagrama a bloques del control lineal que servirá para la simulación del control del sistema caótico, como se muestra en la Fig. 5.5, el cual se encuentra detallado en el Apéndice D:

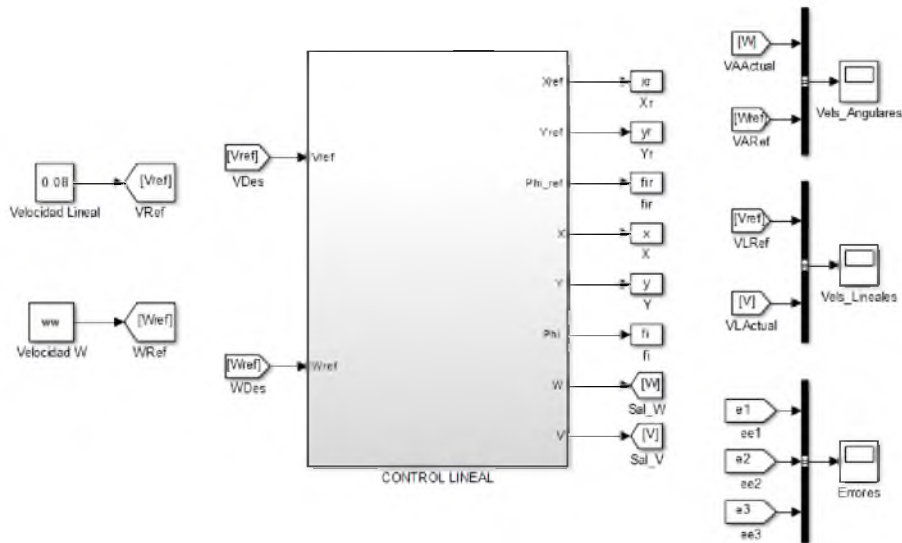


Figura 5.5: Diagrama a bloques del control lineal aplicado para el sistema caótico.

La salida del circuito del oscilador caótico, funcionará como la velocidad angular. En el diagrama a bloques se considera como  $WW$ , mientras que la velocidad lineal se considera constante con un valor de 0.8. Los valores de las condiciones iniciales del robot, así como las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  del controlador están dadas como sigue:  
posición inicial del robot:

$$q_i(0.5, 0.8, \pi/6)$$

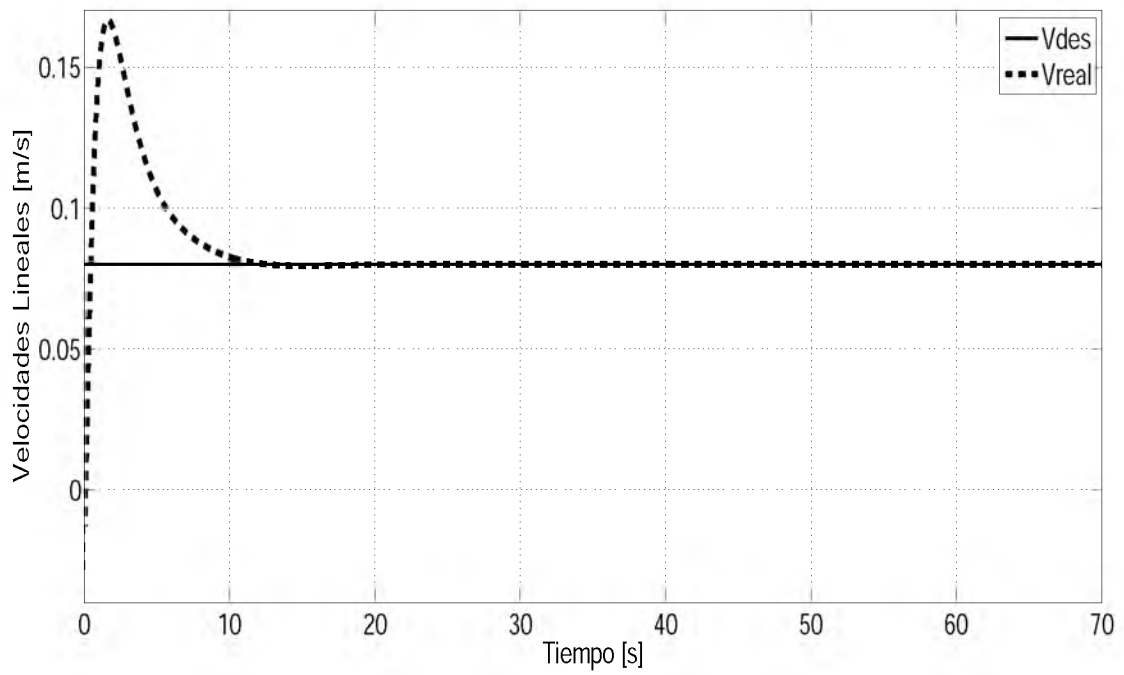
valores de las constantes:

$$k_1 = 0.65$$

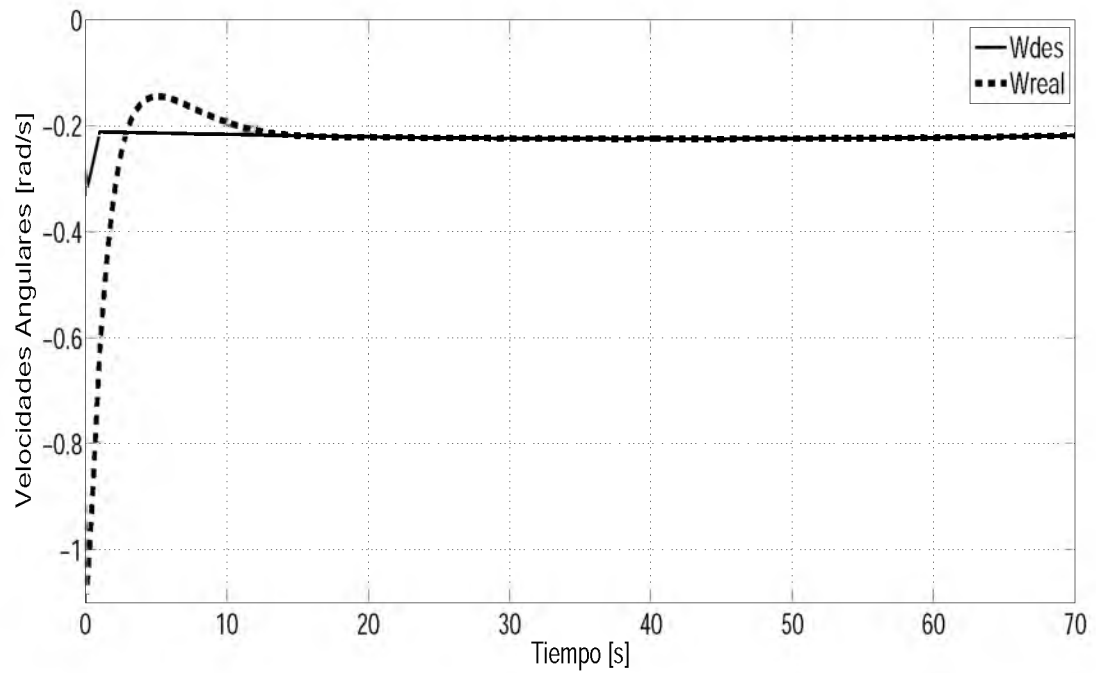
$$k_2 = 1.65$$

$$k_3 = 0.65$$

Estos valores utilizados en la simulación del control, permiten realizar una comparación entre las velocidades angulares y lineales (ver Figs. 5.6a y 5.6b). En las figuras anteriores se observan la respuesta del control lineal, en donde se determina el tiempo en que el controlador alcanza al sistema o se estabiliza, esto es comparado con las velocidades deseadas. Debido a que el enfoque de la tesis está basado en la aplicación de un sistema caótico como entrada de control de un robot móvil, se optó por emplear uno de los controles más simples, donde se observó como el control alcanza al sistema en aproximadamente 15 s, lo cual es aceptable.



(a) Comparación de la velocidad lineal deseada vs real



(b) Comparación de la velocidad angular deseada vs la real

Figura 5.6: Simulación del control lineal de las velocidades del móvil. Tiempo de simulación= 70 s.

En la Fig. 5.7 se muestra la trayectoria que el móvil debe seguir, donde se observa que el control sigue la trayectoria deseada. En esta ocasión solo se observó un tiempo de simulación de 70 segundos debido a la gran cantidad de datos que proporciona la salida del oscilador caótico.

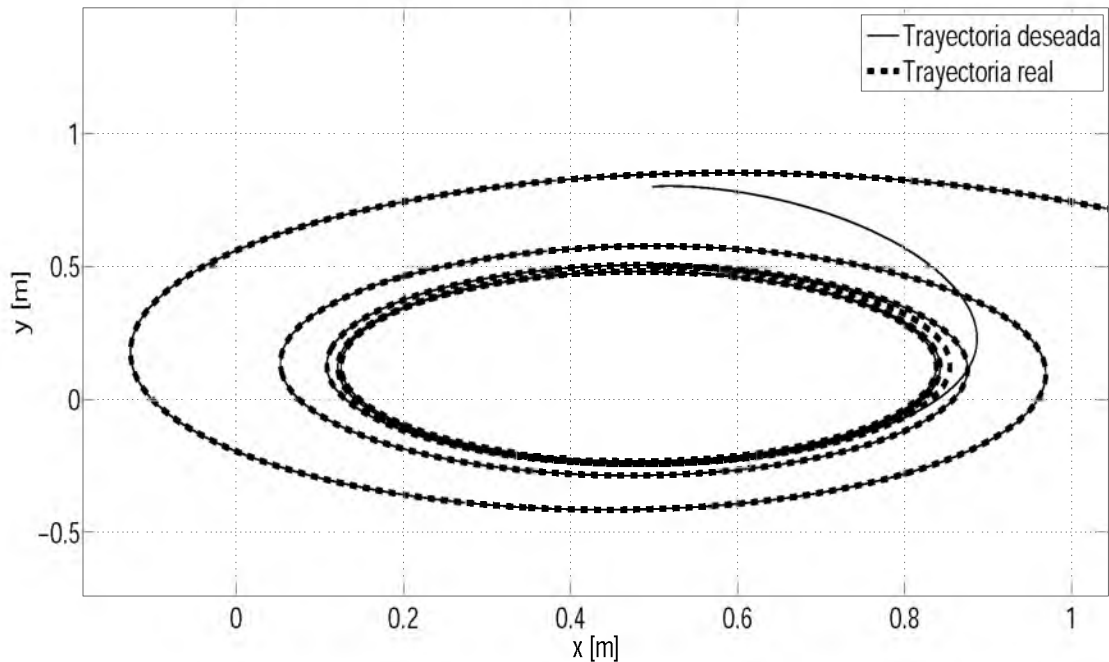
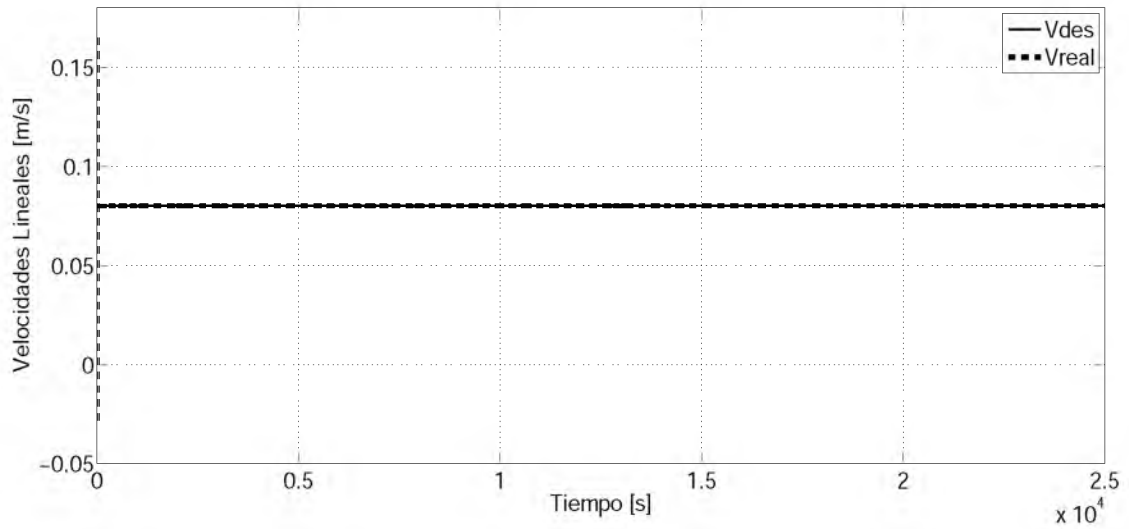
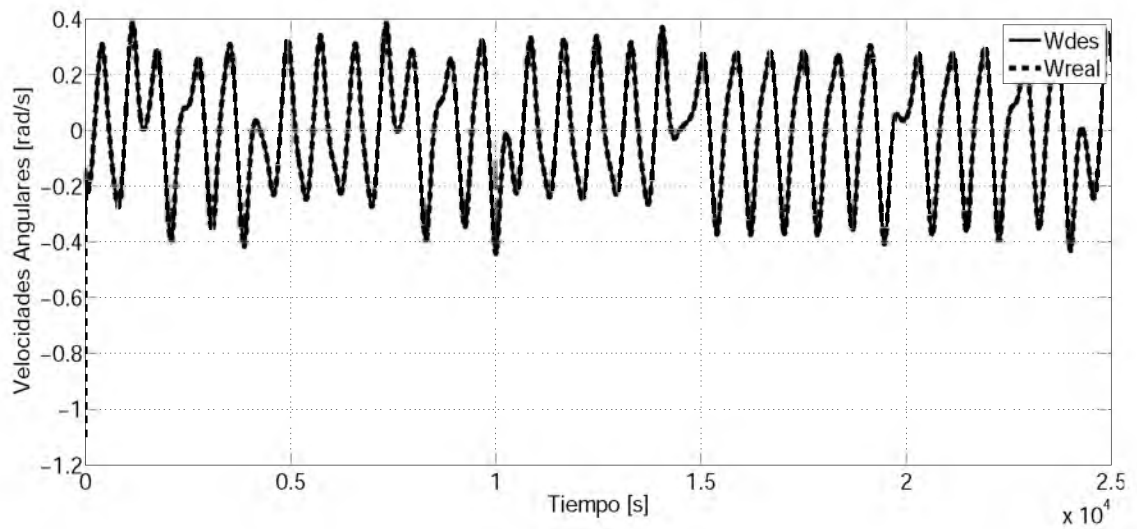


Figura 5.7: Simulación del seguimiento de la trayectoria del móvil. Tiempo de simulación= 70 s.

En las Figs. 5.8a y 5.8b se puede observar el comportamiento de seguimiento de los perfiles tanto de las velocidades deseadas como de las velocidades reales, en este caso se empleó un tiempo de simulación de 25000 s. A partir de esto se puede observar, que en todo momento el control lineal sigue a los perfiles de las velocidades deseadas.



(a) Comparación de la velocidad lineal deseada vs real.



(b) Comparación de la velocidad angular deseada vs la real.

Figura 5.8: Simulación de las velocidades. Tiempo de simulación= 25000 s.

En la Fig. 5.9 se muestran los resultados del seguimiento de trayectoria, donde el tiempo de la simulación se realizó durante 25000 s, para observar mejor el comportamiento caótico del sistema. De los resultados obtenidos se puede decir que el sistema sigue una trayectoria aleatoria la cual puede ser comparada con los resultados presentados en [4].

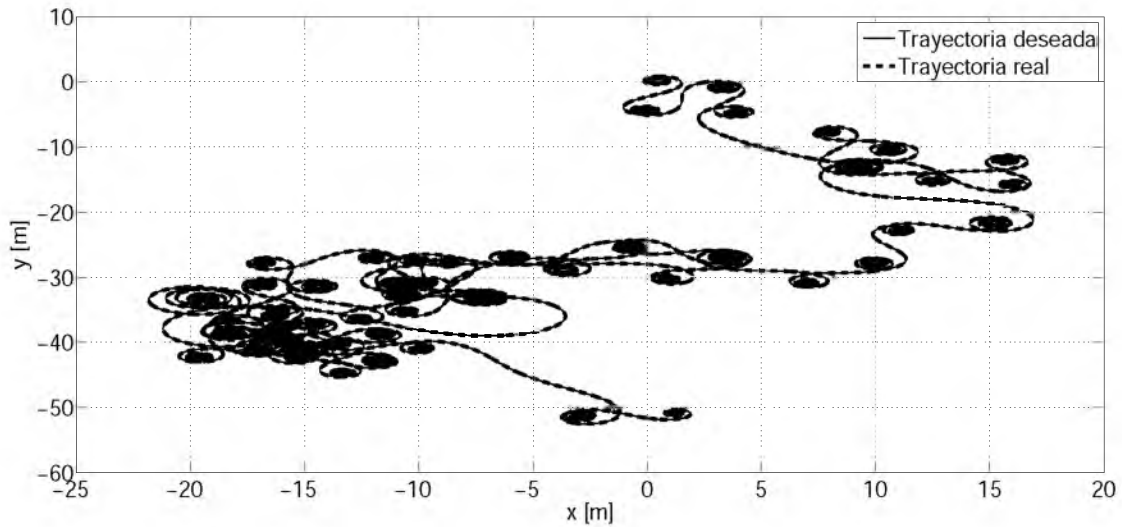


Figura 5.9: Simulación del seguimiento de la trayectoria del móvil. Tiempo de simulación= 25000 s.

## 5.2 Conclusiones

En este trabajo el caos es uno de los temas de estudio, en donde se presento la implementación del diseño de un oscilador caótico de 2 enrollamientos. Para poder realizar el diseño del oscilador, se utilizaron potenciómetros de precisión los cuales proporcionan una forma aceptable de poder sintonizar la señal y así obtener una salida adecuada. Los resistores empleados en el desarrollo de este trabajo son elementos con una precisión de  $\pm 2\%$ , con la finalidad de realizar un sistema más aproximado al ideal.

Se comprobó que no con cualquier valor de los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , se obtiene comportamiento caótico, por lo tanto para lograr esto se procedió a utilizar valores adecuados con los cuales se generan los 2 enrollamientos, estos se observan claramente. Se comprobó que las salidas del oscilador caótico son aleatorias.

En cuanto a la adquisición de datos se pudo constatar que es de gran importancia la duración del periodo de muestro ya que si el muestreo es muy rápido, este no podría determinar la diferencia de sensado entre valores muy próximos.

Una opción para realizar el control es eliminar los valores negativos de la velocidad angular, con lo que idealmente se pensaría que solo cambiaría la región de trabajo, se observó que cumple el mismo comportamiento. Pero para la aplicación del control se

piensa que se obtiene demasiada acumulación del error debido a el integrador, comparada con la suposición de cuando se tiene una señal sinusoidal de  $\pm 1$ , donde la integral es cero. Al modificar la señal desplazándola en el rango de 0 a 2, la integral ya no es 0, esta fue la principal razón por la que se empleo la salida obtenida directamente del oscilador caótico. Por otro lado de los resultados obtenidos se pudo observar que el control lineal es una buena opción para el caso de estudio, ya que sigue la trayectoria deseada. Por lo que podemos concluir que el oscilador caótico es una buena opción para ser utilizado como un de generador de trayectorias.

### **5.3 Trabajos futuros**

Se pretende en trabajos futuros realizar las siguientes actividades: a nivel de simulación numérica implementar osciladores caóticos con un numero mayor a 2 enrollamientos, debido a que con un número mayor de enrollamientos el sistema incrementa su impredecibilidad por lo tanto es más aleatorio, para su posible aplicación en diversas áreas, como por ejemplo en comunicaciones seguras. También sería conveniente implementar un oscilador caótico con valores optimizados para obtener una mejor respuesta del oscilador caótico. Otro posible trabajo sería la implementación practica del oscilador caótico aplicada a un robot móvil con el fin de observar el comportamiento aleatorio. Por otro lado es importante implementar y diseñar alguna otra estrategia de control.

## Referencias

- [1] Cisneros-Tamayo R., Escamilla-Bojorges N. y Plascencia-Pacheco D. 2010. *Sistemas caóticos aplicados en telecomunicaciones*. TesisL. México, D.F.
- [2] Carolino R. 2004. *Teoría del caos y el modelo educativo*. V Jornadas de investigación y posgrado. Barquisimeto-Venezuela.
- [3] Volos Ch. K., Kyprianidis I. M. y Stouboulos I. N. 2012. *A chaotic path planning generator for autonomous mobile robots*. *Robotics and autonomous systems* 60, 651–656.
- [4] Volos Ch. K., Bardis N. G., Kyprianidis I. M. y Stouboulos I. N. *Implementation of mobile robot by using double-scroll chaotic attractors*. *Applications of electrical and computer engineering*, 119-124. ISBN 978-1-61804-074-9.
- [5] Hofner C. y Schmidt G. 1995. *Path planning and guidance techniques for an autonomous mobile cleaning robot*. *Robotics and autonomous systems* 14 (1995), 199-212.
- [6] Martins-Filho L. S. y Macau E. E. N. 2007. *Patrol mobile robots and chaotic trajectories*. *Mathematical problems in engineering*.
- [7] Cornejo-Álvarez A. 2004. *Complejidad y caos, Guía para la administración del siglo XXI*.
- [8] Devaney R. L. 1992. *A first course in chaotic dynamical systems, Theory and experiment*. Ed. Perseus books publishing, L.L.C. 1ra. ed. Boston, Massachusetts, EUA.
- [9] Rocha R., Andruccioli G. L. D. y Medrano-T R. O. 2010. *Experimental characterization of nonlinear systems, A real-time evaluation of the analogous Chua's circuit behavior*. *Nonlinear dyn* 62, 237–251.
- [10] Leiva-Reyes A. 2003. *Teoría del caos, globalización y las relaciones internacionales*. Viña del Mar, Chile.
- [11] Miguel A. E., Torres J. C., Maldonado P. y Solís N. *La teoría de la complejidad y el caos en la ciencia regional*. 1ra. ed. Oaxaca, México.

- [12] Durán-Ruiz E. 2009. Teoría del caos, Atractores. [http://recursostic.educacion.es/.../teoria\\_del\\_caos\\_2.html](http://recursostic.educacion.es/.../teoria_del_caos_2.html).
- [13] <http://www.lanais.famaf.unc.edu.ar/cursos/caos/Caos02.pdf>.
- [14] Carbajal-Gómez V. H. 2011. Optimización de osciladores caóticos aplicando algoritmos evolutivos. TesisM. Tonantzintla, Puebla.
- [15] Martínez-Pons J. A. y Vinagre-Benito F. A. La entropía de Kolmogorov; su sentido físico y su aplicación al estudio de lechos fluidizados 2D. Madrid, España.
- [16] Pano-Azucena A. D. 2013. Verificación experimental de osciladores caóticos con exponentes de Lyapunov optimizados. TesisL. Puebla, México.
- [17] Trejo-Guerra R., Tlelo-Cuautle E., Muñoz-Pacheco J. M., Sánchez-López C. y Cruz-Hernández C. 2010. On the relation between the number of scrolls and the Lyapunov exponents in PWL-functions-based  $n$ -scroll chaotic oscillator. *International journal of nonlinear sciences & numerical simulation* 11(11), 903-910.
- [18] Vaseghi S. V. 2000. *Advanced digital signal processing and noise reduction*. Ed. John Wiley & sons Ltd. 2da. ed.
- [19] Hernández De La Sota C. 2004. Control inteligente de sistemas dinámicos caóticos. TesisD. Madrid, España.
- [20] Espinosa-Contreras A. E. 2004. El caos y la caracterización de series de tiempo a través de técnicas de la dinámica no-lineal. México, D.F.
- [21] Lü J., Chen G., Yu X. y Leung H. 2004. Design and analysis of multiscroll chaotic attractors from saturated function series. *IEEE Transactions on circuit and systems* 12 (51), 2476-2490 .
- [22] Lü J., Chen G. 2006. Generating multiscroll chaotic attractors, Theories, methods, and applications. *International journal of bifurcation and chaos* 16 (4), 775-858.
- [23] Zhong G.-Q., Bargar R. y Halle K. S. 1994. Circuit for voltage tuning the parameters of Chua's circuit, Experimental application for musical signal generation. *Journal of the Franklin institute* 331B (6), 743-784.

- [24] Yu S., Tang K. S. y Chen G. 2007. Generation of  $n \times m$ -scroll attractors under a Chua-circuit framework. *International journal of bifurcation and chaos* 17 (11), 3951-3964.
- [25] Rukhin A., Soto J., Nechvatal J., Smid M., Barker E., Leigh S., Levenson M., Vangel M., Banks D., Heckert A., Dray J. y Vo S. 2010. A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications. National institute of standards and technology. Gaithersburg, MD., EUA.
- [26] Coughlin R. F. y Driscoll F. F. 1993. *Amplificadores operacionales y circuitos lineales*. Ed. Prentice-Hall hispanoamericana, S.A. 4ta. ed. México, D.F.
- [27] Hayt W. H. Jr., Kemmerly J. E. y Durbin S. M. 2007. *Análisis de circuitos en ingeniería*. Ed. McGraw-Hill. 7ma. ed. México, D.F.
- [28] Peña-Pérez A. 2007. *Diseño de un CFOA compatible con un CMOS y su aplicación en filtros analógicos*. *IEEE latin america transactions* 2 (5), 072-076.
- [29] Carbajal-Gómez V. H. 2009. *Diseño de osciladores caóticos para comunicaciones seguras*. TesisL. Puebla, México.
- [30] Jiménez-Urbe J. R. 2007. *Filtro de impedancia con característica de magnitud máximamente plana*. TesisM. Puebla, México.
- [31] Chapra S. C. y Canale R. P. 2007. *Métodos numéricos para ingenieros*. Ed. McGraw-Hill. 5ta. ed. México, D.F.
- [32] Ollero-Baturone A. 2001. *Robótica, manipuladores y robots móviles*. Ed. Marcombo. 1ra. ed. Barcelona, España.
- [33] Siegwart R. y Nourbakhsh I. R. 2004. *Introduction to autonomous mobile robots*. Ed. Massachusetts institute of technology. 1ra. ed. Massachusetts, EUA.
- [34] Siciliano B., Sciavicco L., Villani L. y Oriolo G. 2009. *Robotics, Modelling, planning and control*. Ed. Springer-Verlag London limited. 1ra. ed. Londres, Inglaterra.
- [35] Aranda-Bricaire E., Salgado-Jiménez T. y Velasco-Villa M. 2002. *Control no lineal discontinuo de un robot móvil*. *Computación y sistemas, número especial*, 042-049.

## Apéndice

### A. Código en *Matlab*<sup>®</sup> para la simulación de un sistema caótico y obtención de los exponentes de Lyapunov.

Programa principal para la simulación y calculo de los exponentes de los exponentes de Lyapunov.

```
clear all
global scroll
scroll=2; % número de scroll (máx 10)
coef=[0.7 0.7 0.7 0.7];
CI=[0.1,0,0]; %% CI iniciales originales
%%Tiempo de prueba para generar CI dentro del atractor
t_CI=50;
step=0.1; %% Tamaño de paso de integración
TO=50*step; %% Periodo de Ortonormalización
Ttotal=100; %% Tiempo total de integracion
tic
[TExp,EL,xgraf,DL]=parsat3(coef,CI,t_CI,step,TO,Ttotal);
toc
Dim=DL(end)
figure
plot(xgraf(:,1),xgraf(:,2))
grid
figure
plot(TExp,EL);
title('Dynamics of Lyapunov exponents');
xlabel('Time'); ylabel('Lyapunov exponents');
la1=EL(end,1);
la2=EL(end,2);
la3=EL(end,3);
hleg1=legend(num2str(la1),num2str(la2),num2str(la3));
grid
figure
```

```

plot(Texp,DL)
title( ' Dinámica de la dimensión de Kaplan–Yorke ');
xlabel( ' Tiempo '); ylabel( ' Dimension de Kaplan–Yorke ');
dl=DL(end);
hleg2=legend(num2str(dl));
grid
fprintf( ' lambda_1=%2.6f\nlambda_2=%2.6f\n , ...
lambda_3=%2.6f\n' ,EL(end,1) ,EL(end,2) ,EL(end,3))
%% Calcu_Entropy
[estimate , nbias , sigma , descriptor]=entropy(xgraf(:,1)');
entropy=estimate

```

**B. Diagramas del diseño del oscilador caótico en el software Proteus 8.1 Professional.**

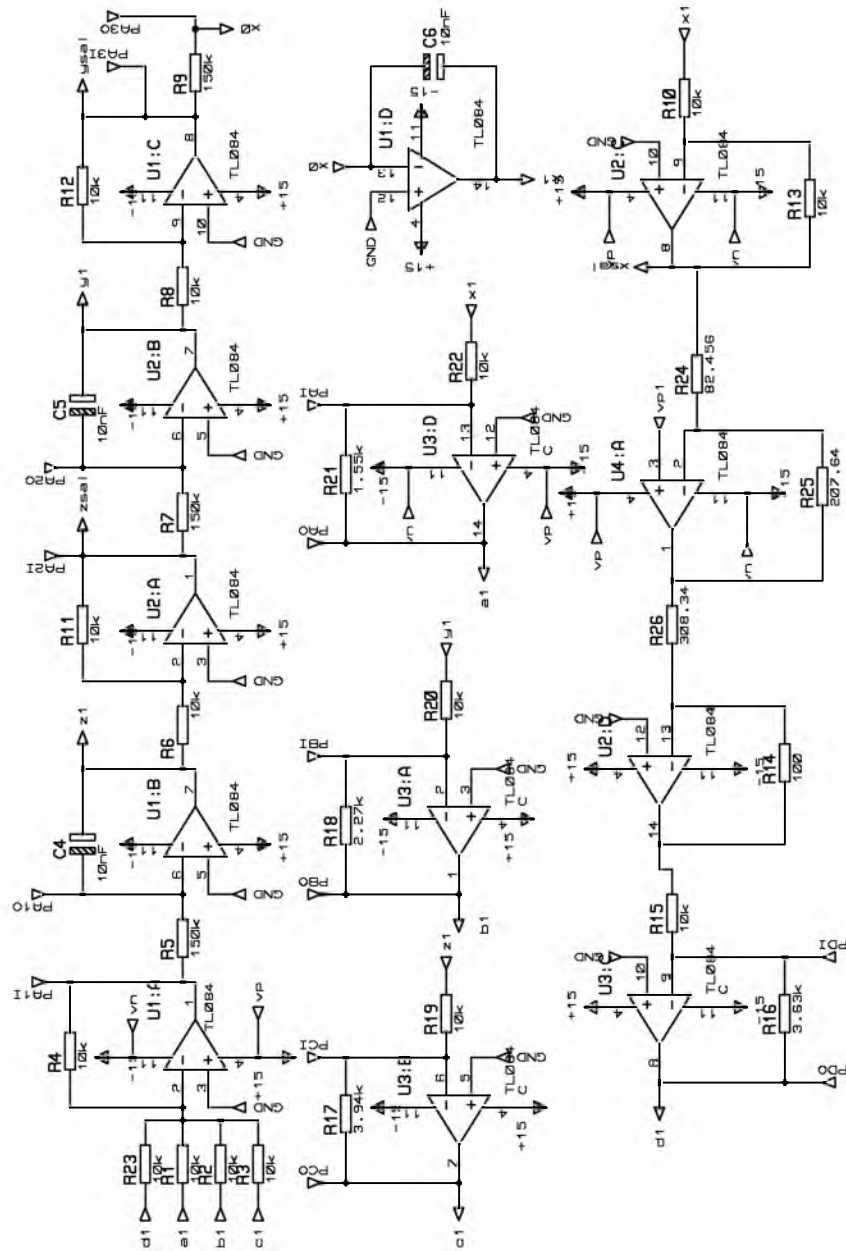


Figura B.1: Diseño del oscilador caótico de 2 enrollamientos.

### C. Código en *Matlab*<sup>®</sup> para realizar la prueba de monobit.

```
%Programa Monobit
sig=[];
sig=tab1(:,2);
aux=sig;
San=0;
[unoo ,ceroo ,aux]=converzeros(sig);
Sobs=0;
onezero=sn(aux);
tam=length(onezero);
for i = 1:tam
San = San + onezero(i);
end
Sobs=(San/sqrt(tam));
Pvalue = erfc(Sobs)
if(Pvalue < 0.01)
    input('No-Aleatorio ')
else
    unoo
    ceroo
    input('Aleatorio ')
end
```

## D. Diagrama en *Simulink*® del control lineal del sistema caótico.

La representación principal del control lineal se puede observar en la Fig. D.1.

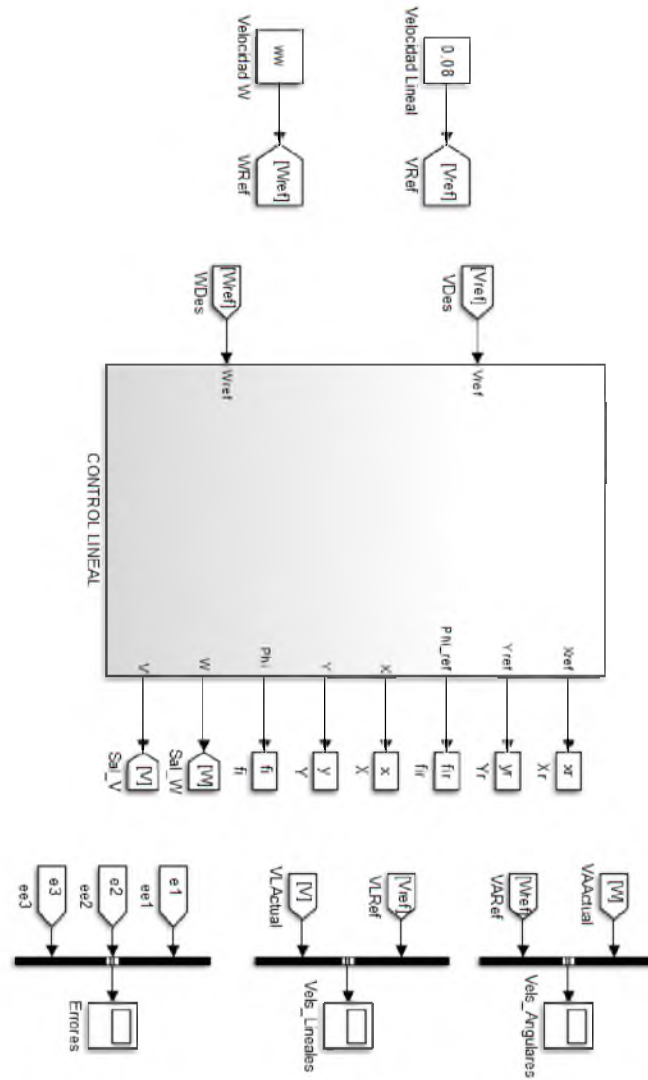


Figura D.1: Diagrama principal para la simulación del control lineal.

En la Fig. D.2 se muestra la representación en subdiagrama a bloques del control lineal.

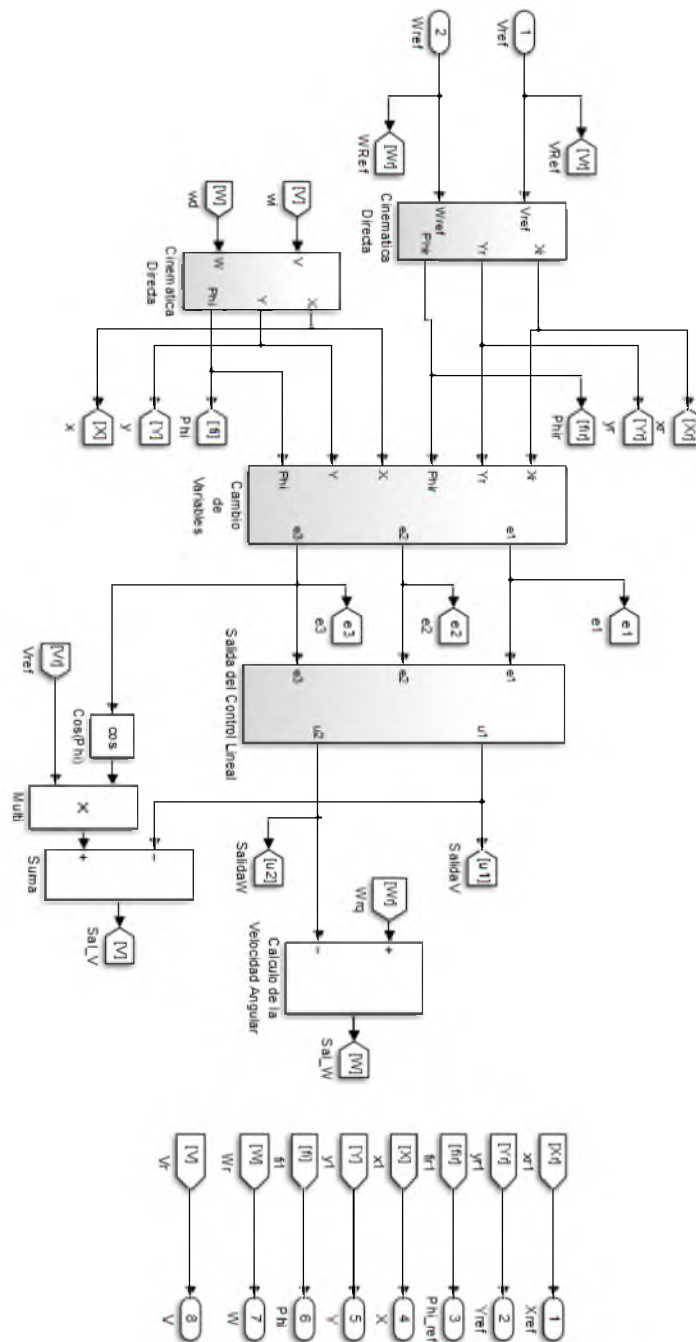


Figura D.2: Subdiagrama del control lineal.

El subdiagrama para realizar el cambio de variables, donde se lleva a cabo el calculo

del error se muestra en la Fig. D.3.

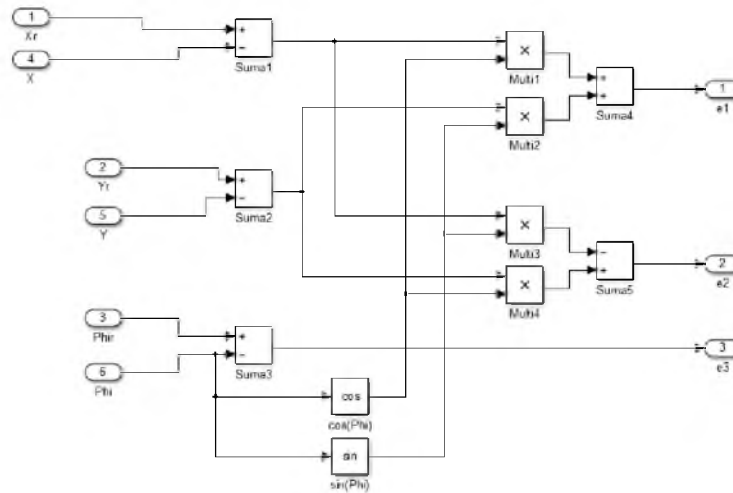


Figura D.3: Subdiagrama para el calculo de las variables del error.

El subdiagrama para el calculo de las salidas de control  $u_1$  y  $u_2$ , donde se calculan las ganancias  $k_1, k_2, k_3$ , se pueden apreciar en la Fig. D.4.

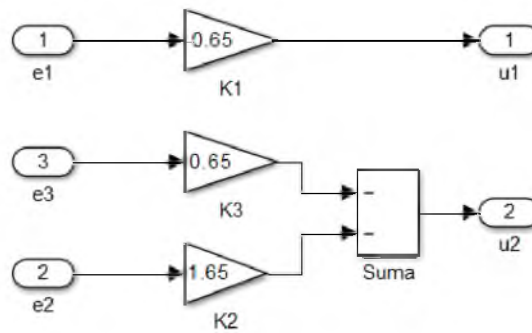


Figura D.4: Subdiagrama para el calculo de las salidas del control.

## Índice de figuras

2.1. Tipos de atractores. . . . .	6
2.2. Superficie de sección de Poincaré. . . . .	10
2.3. Visualización del comportamiento en las secciones de Poincaré. . . . .	10
2.4. Modelo de Chua. . . . .	11
2.5. Comportamiento del elemento no lineal de Zhong. . . . .	12
2.6. Respuesta del elemento no lineal del modelo de Yü. . . . .	13
2.7. Comportamiento del elemento no lineal del modelo generalizado de Chua. . . . .	14
2.8. Respuesta del elemento no lineal de la SNLF. . . . .	15
2.9. Señal caótica con niveles de comparación. . . . .	15
3.1. Modelo del OpAmp. . . . .	17
3.2. Configuración inversor de voltaje. . . . .	18
3.3. Configuración sumador inversor. . . . .	18
3.4. Configuración integrador inversor. . . . .	19
3.5. Configuración de transferencia. . . . .	19
3.6. Configuración seguidor de voltaje. . . . .	20
3.7. Descripción esquemática del CFOA. . . . .	21
3.8. Representación del OTA. . . . .	21
3.9. Atractor de 3 enrollamientos. . . . .	22
3.10. Diagrama a bloques del oscilador caótico de $n$ -enrollamientos basado en la SNLF. . . . .	23
3.11. Implementación del oscilador caótico con OpAmps para la generación de $n$ -enrollamientos. . . . .	24
3.12. Representación de la SNLF con OpAmp. . . . .	24
3.13. Método de Euler para la aproximación a la solución. . . . .	25
3.14. Comportamiento de la SNLF con dos niveles de saturación. . . . .	26
3.15. Sistema caótico. . . . .	27
3.16. Comportamiento dinámico de los exponentes de Lyapunov. . . . .	28
4.1. Sistema locomoción Ackerman. . . . .	30
4.2. Sistema locomoción triciclo clásico. . . . .	31

4.3.	Sistema diferencial. . . . .	31
4.4.	Sistema de locomoción síncrona. El móvil puede desplazarse en cualquier dirección. . . . .	32
4.5.	Coordenadas generalizadas de un monociclo. . . . .	33
4.6.	Señal de salida del oscilador caótico. . . . .	35
5.1.	Señal de la SNLF. . . . .	38
5.2.	Comportamiento del sistema caótico de 2 enrollamientos. . . . .	39
5.3.	Simulación en <i>Matlab</i> <sup>®</sup> de los datos adquiridos mediante el uso del osciloscopio. . . . .	40
5.4.	Prueba de Monobit. . . . .	41
5.5.	Diagrama a bloques del control lineal aplicado para el sistema caótico. . . . .	41
5.6.	Simulación del control lineal de las velocidades del móvil. Tiempo de simulación= 70 s. . . . .	43
5.7.	Simulación del seguimiento de la trayectoria del móvil. Tiempo de simulación= 70 s. . . . .	44
5.8.	Simulación de las velocidades. Tiempo de simulación= 25000 s. . . . .	45
5.9.	Simulación del seguimiento de la trayectoria del móvil. Tiempo de simulación= 25000 s. . . . .	46
B.1.	Diseño del oscilador caótico de 2 enrollamientos. . . . .	53
D.1.	Diagrama principal para la simulación del control lineal. . . . .	55
D.2.	Subdiagrama del control lineal. . . . .	56
D.3.	Subdiagrama para el calculo de las variables del error. . . . .	57
D.4.	Subdiagrama para el calculo de las salidas del control. . . . .	57