

**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN  
CAMPUS LOMA BONITA**

---

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**Diseño de un criterio de sintonización de controladores  
óptimo-robustos aplicado a un sistema no lineal.**

**T E S I S**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN OPTIMIZACIÓN Y CONTROL  
DE SISTEMAS**

**Presenta**

**Ángel Rodríguez Mariano**

**Dr. Jesús Carrillo Ahumada  
Director**

**Dr. Miguel Ángel García Alvarado  
Co-Director**

**Loma Bonita, Oaxaca , México. 2018**



# UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

## DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

OFICIO	DEP/2018/023
ASUNTO	Autorización de impresión de tesis

San Juan Bautista Tuxtepec, Oaxaca, México a 25 de abril de 2018


**L. P. YESENIA BARRIENTOS ARENAL**  
JEFA DE SERVICIOS ESCOLARES  
UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Sirva la presente para informarle que el jurado del examen para obtener el grado de Maestro en Optimización y Control de Sistemas del **C. Ángel Rodríguez Mariano**, matrícula 12070001, ha autorizado la impresión del manuscrito que lleva por título "**Diseño de un criterio de sintonización de controladores óptimo-robustos aplicado a un sistema no lineal**" para su posterior presentación y defensa por parte del sustentante.

Sin otro asunto en particular, me despido quedando atenta ante cualquier duda y deseándole suerte en todas sus actividades.

Atentamente

*terra uberrima, mens aperta*  
Bou Lo-tama, chí jí jú

  
**Dra. Sandra T. del Moral Ventura**  
Jefe de la División de Estudios de Posgrado



C.c.p. C. Ángel Rodríguez Mariano.  
C.c.p. Archivo



# UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

## MAESTRÍA EN OPTIMIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS

OFICIO	DEP/MOCS/2017/003
ASUNTO	Jurado asignado para examen de grado

San Juan Bautista Tuxtepec, Oaxaca, México a 10 de Noviembre de 2017

### C. ÁNGEL RODRÍGUEZ MARIANO

ESTUDIANTE DE LA MAESTRÍA EN OPTIMIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS  
UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Por este medio le informo que el jurado de su examen para obtener el grado de Maestría en Biotecnología estará integrado por los siguientes investigadores.

Dr. Hiram Ne. García Lozano	UNPA	Presidente
Dr. Gilberto Reynoso Meza	Pontificia Universidad Católica de Paraná Brazil	Vocal
M.C. Esteban Chávez Conde	UNPA	Secretario
Dr. Eduardo Sánchez Soto	UNPA	1er Suplente
Dr. Alvaro Cabrera Amado	UNPA	2º Suplente

Sin más por el momento, le envío saludos cordiales.

Atentamente

*terra uberrima, mens aperta*  
Bou Lo-tama, chí jí jú



**DR. MARIO VALERA ZARAGOZA**  
Director de la División de Estudios de Posgrado

**M. en C. HÉCTOR LÓPEZ ARJONA**  
Vice-rector Académico

Vo. Bo.



**VICE-RECTORIA ACADEMICA**

C.c.p. Dr. Jesús Carrillo Ahumada – Director de tesis.  
C.c.p. L. P. Yesenia Barrientos Arenal – Jefa de Servicios Escolares.  
C.c.p. Archivo.

CAMPUS TUXTEPEC  
C. Circuito central No. 200, Col. Parque Industrial.  
C.P. 38301, Tuxtepec, Oax.  
Tel. 01(287)8759240

[www.unpa.edu.mx](http://www.unpa.edu.mx)

CAMPUS LOMA BONITA  
Av. Ferrocarril S/N, Ciudad universitaria.  
C.P. 68400, Loma Bonita, Oax.  
Tel. 01(281)8729230

## **Dedicatoria**

*El presente esfuerzo esta dedicado a todos aquellos seres cercanos que con sus elevadas intensiones, han contribuido enormemente a la culminación de este pequeño pero importante ciclo:*

*En especial para mi esposa Ana y nuestra hija Valeria. Mis motores esenciales. A mis padres: Ángel y Petra. Quienes han hecho un trabajo excelente en su caminar por este mundo. Mi admiración y respeto para ustedes.*

*Dios bendiga a todos.*

## Agradecimientos

Quiero agradecer primero que nada a la Universidad del Papaloapan y a mi institución CBTIS90. Por otorgarme el privilegio de desarrollar este trabajo de investigación. La oportunidad ha valido la pena.

Al programa de mejoramiento del profesorado (PROMEP) por financiar parcialmente esta investigación mediante el proyecto *Análisis de estabilidad de procesos Químicos y alimentarios con controladores óptimo-robustos* (PROMEP/103.5/12/7959;UNPA-PCT-119). Así como por la beca recibida. Al proyecto interno aprobado UNPA *Análisis del desempeño de controladores lineales sintonizados en diferentes estados estacionarios del biorreactor de Cholette mediante técnicas de decisión multicriterio*.

A mis asesores Dr. Jesús Carrillo Ahumada , Dr. Miguel Ángel García Alvarado. Por su paciencia y comprensión a lo largo de estos cuatro años de trabajo intermitente. Al MC. Edmundo Mendieta, por su valiosa amistad en mi estancia como alumno del campus Loma Bonita.

A mi esposa Ana Beatríz, por entenderme y complementarme como ser humano; por estar conmigo incondicionalmente en todo momento. Muchas gracias Don José... Gracias María de Jesús, por confiarme esta inigualable oportunidad.

A nuestra pequeña hija Valeria, por su gran luz y espíritu de reflexión...Eres única. Todo lo mejor radica en ti.

También agradezco al puñado de nuevos amigos del MFC quienes han aparecido inesperadamente en esta etapa de mi vida. Entre café y café he aprendido algunas cosas que me hacían mucha falta. Ade, Santos, Jorge, Eli, Kevin y Daniela. Muchas gracias por compartir sus vidas.

A mis padres Ángel y Petra. No pude haber encontrado mejor concepto de vida para arribar a este lugar...

## Resumen

### ***Diseño de un criterio de sintonización de controladores óptimo-robustos aplicado a un sistema no lineal.***

Esta tesis presenta un nuevo criterio de análisis y síntesis de controladores lineales óptimo-robustos aplicado a sistemas con dinámica no-lineal. Se propone un método de análisis multicriterio que fundamenta la síntesis bajo el paradigma de control óptimo multiobjetivo MOOD, empleando la metodología generar primero escoger después GFCL (*Generate First Choose Later*, por sus siglas en inglés). Sintonizando un controlador PI en un sistema SISO con no-linealidad en el actuador.

El documento se encuentra dividido en seis partes. La primera corresponde a los *Fundamentos generales*, donde se cubre el marco conceptual requerido para el modelado de sistemas, teoría de control robusto y control óptimo.

La segunda parte, *Sistemas de aplicación*, introduce los sistemas de aplicación. El biorreactor de Cholette y un secador de alimentos del tipo batcheo (secador de charolas).

La tercera parte, *Diseño de un criterio de desempeño multiobjetivo*, presenta el diseño de los índices de desempeño/robustez, que componen la nueva métrica en el dominio del tiempo para el criterio de análisis/síntesis MOOD.

La cuarta parte, *Contribución al planteamiento multiobjetivo de análisis y síntesis*, contiene la metodología de análisis multicriterio; la cual presenta una nueva estrategia de asignación de preferencias y ponderaciones en la etapa de selección, mediante el método PROMETHEE (*Preference Ranking Organization Methods for Enrichment Evaluations*).

Este método direcciona un procedimiento de síntesis que aporta persistencia, completitud y simplicidad bajo el concepto de diseño multiobjetivo con la herramienta de visualización GAIA (*Graphical Analysis for Interactive Aid*).

La quinta parte *Conclusiones y expectativas*, se dedica a estimar los alcances y limitaciones del presente criterio, dentro de las técnicas de diseño de controladores lineales en sistemas no-lineales con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO, por sus siglas en inglés) bajo el paradigma de un planteamiento de optimización multiobjetivo (MOOP, por sus siglas en inglés). Los anexos se encuentran en la parte VI.

El presente criterio ha sido aplicado en su fase de análisis al biorreactor de Cholette. Categorizando las prestaciones de desempeño y robustez de un conjunto de controladores sintonizados con diferentes metodologías y en diferentes estados estacionarios. Estos resultados ya han sido publicados en la revista Mexicana de Ingeniería Química (ISSN:2395-8472). La fase de síntesis obtiene simulaciones numéricas para un controlador PI de un secador de charolas, cuyos resultados aún no han sido publicados.

El diseño del criterio consistió en las siguientes etapas:

- ❶ Se realizó un análisis comparativo de diferentes controladores lineales desarrollados para el biorreactor de Cholette en sus diferentes modelos y estados estacionarios. Para tal finalidad, se emplearon los índices de desempeño tradicionales IAE, ISE, ITAE, ISU e IADU.
- ❷ Se reformularon matemáticamente los índices tradicionales para tener una evaluación de desempeño más amplia. La cual puede ser aplicable a sistemas MIMO.
- ❸ Se evaluaron los índices tradicionales y se reformularon mediante técnicas de decisión multicriterio utilizando la metodología PROMETHEE.
- ❹ Se aplicó el nuevo criterio de síntesis para ajustar un controlador PI en un secador de charolas.

Los resultados demuestran la factibilidad del criterio formulado basado en el concepto de distancia de desempeño; proporcionando un método sistemático para la evaluación del desempeño de controladores lineales en sistemas estables e inestables y con multiplicidad de estados estacionarios. Mientras que en la etapa de síntesis se proporciona un esquema de articulación de las funciones objetivo mediante una métrica basada en la entropía de sistemas.

## Abstract

### ***Design of Optimal-Robust controllers tuning criteria applied to non-linear systems***

This work of thesis presents a new optimal-robust controllers tuning criteria applied to non-linear systems.

A methodology for multicriteria performance analysis is proposed to guide a tuning procedure under multiobjective optimal control paradigm MOOD, using generate first choose later technique GFCL. This procedure is used to tuning a SISO PI controller in a non linear plant.

This document is divided in six parts. First part *general backgrounds*, covers the conceptual frame required for system modelling, robust control and optimal control theory.

Second part *Application systems*, introduces two systems: Cholette's biorreactor and an electric batch dryer (try dryer).

Third part *Design of multiobjective performance criteria*, presents the design of performance/robustness indexes for integrate a new metric in time domain used in multicriteria analysis and multiobjective synthesis (MOOD).

Fourth part *Contribution to multobjective analysis and synthesis*, covers the fundamental methodology of multicriteria analysis, and presents the sistematical procedure for ponderation weights assignment in the selection stage using PROMETHEE methods (*Preference Ranking Organization Methods for Enrichment Evaluations*).

This methodology is used in a tuning stage, providing completitude and simplicity concepts under visual multiobjective tools like GAIA (*Graphical Analysis for Interactive Aid*).

Fifth part *Conclutions and expectatives*, is devoted to estimate factibility and limitations of this methodology used in multiobjective control tuning for non linear dynamics with multiple inputs and multiple outputs MIMO.

The Sixth part contains Annexes.

This performance criteria has been applied in the analysis stage for Cholette's bioreactor, ranking the performance and robustness skills of a controller set tuned with different methodologies and different stationary states. This results have been published in *Revista Mexicana de Ingeniería Química* (ISSN:2395-8472).

The tuning stage presents numerical simulations in one PI controller applied in a try dryer plant. This results have not been published yet.

The design stages of this work are:

- ① A comparative performance analysis of different linear controllers tuned for several Cholette's bioreactor models at different steady states, was realized. To this end, the traditional performance indexes IAE, ISE, ITAE, ISU and IADU were used.
- ② This traditional performance indexes were tailored for using multi-criteria decision techniques scenario (MCDM).
- ③ Both set of indexes. Traditional and Tailored. Were evaluated using multi-criteria decision techniques, coupling PROMETHEE methods.
- ④ The new performance criteria was applied for tuning a SISO PI controller in a try dryer plant.

The results show the feasibility of formulated criteria based on performance distance approach; providing a method for evaluating the performance of linear controllers used on stable and unstable systems with multiple steady states. The synthesis stage provides an articulation scheme of objective functions, through this time domain metric based on entropy of systems.

# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>13</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>15</b>
1. Lista de Acrónimos . . . . .	16
2. Introducción . . . . .	17
3. Planteamiento del problema . . . . .	21
4. Justificación . . . . .	22
5. Objetivos, estructura y contribución de esta tesis . . . . .	23
5.1. Objetivo general . . . . .	23
5.2. Objetivos específicos . . . . .	23
5.3. Estructura de la disertación . . . . .	24
5.4. Contribución de esta tesis . . . . .	25
5.5. Metodología y alcances . . . . .	26
5.6. Publicaciones de resultados del presente trabajo de tesis . . . . .	27
5.7. Proyectos finalizados mediante los resultados obtenidos de esta tesis . . . . .	27
<b>I Fundamentos generales</b>	<b>29</b>
<b>1. Fundamentos generales</b>	<b>31</b>
1. Introducción . . . . .	31
2. Modelado de sistemas . . . . .	36
3. Propiedades de los sistemas no lineales . . . . .	40
3.1. Multiplicidad de estados estacionarios . . . . .	41
3.2. Bifurcaciones . . . . .	42
3.3. Variaciones periódicas del estado (ciclos límite) . . . . .	43
3.4. Tiempos de escape infinito . . . . .	45
3.5. Sincronización . . . . .	45
4. Sistemas linealizados . . . . .	47
4.1. Propiedades de los sistemas linealizados . . . . .	49
5. Control robusto . . . . .	52
6. Antecedentes de control robusto . . . . .	58
6.1. El planteamiento formal $H_2/H_\infty$ . . . . .	62

6.2.	Enfoques alternativos de estabilidad y robustez . . . . .	66
7.	Control óptimo . . . . .	75
7.1.	Enfoque de diseño mediante técnicas de optimización . . . . .	76
7.2.	La etapa de decisión multi-criterio MCDM . . . . .	82
8.	Síntesis del capítulo . . . . .	85
<b>II</b>	<b>Sistemas de aplicación</b>	<b>87</b>
<b>2.</b>	<b>Antecedentes de los sistemas de aplicación</b>	<b>89</b>
1.	El biorreactor de Cholette . . . . .	90
1.1.	Modelado matemático del biorreactor de Cholette . . . . .	92
1.2.	Características no lineales importantes del biorreactor de Cholette . . . . .	95
1.3.	Modelos linealizados y estructuras de control . . . . .	97
2.	Secador eléctrico tipo charolas . . . . .	102
2.1.	Características del modelo linealizado . . . . .	107
3.	Síntesis del capítulo . . . . .	111
<b>III</b>	<b>Diseño de un criterio de desempeño multiobjetivo</b>	<b>113</b>
<b>3.</b>	<b>Índices de desempeño en criterios de sintonización multiobjetivo</b>	<b>115</b>
1.	Introducción . . . . .	115
2.	Articulación mediante índices básicos de desempeño . . . . .	116
3.	Métrica de desempeño multiobjetivo . . . . .	119
4.	Conformación de un perfil estratégico en la función objetivo . . . . .	124
4.1.	Función de costos con estrategias ordinalmente simétricas . . . . .	127
5.	Síntesis del capítulo . . . . .	128
<b>IV</b>	<b>Contribución al planteamiento multiobjetivo de análisis y síntesis</b>	<b>129</b>
<b>4.</b>	<b>Análisis de controladores mediante técnicas de decisión multicriterio</b>	<b>131</b>
1.	Introducción . . . . .	131
2.	La metodología PROMETHEE . . . . .	132
3.	Aplicación de la metodología en el biorreactor de Cholette . . . . .	139
3.1.	Análisis multi-criterio de controladores para el biorreactor de Cholette . . . . .	139
4.	Síntesis del capítulo . . . . .	146
<b>5.</b>	<b>Síntesis multiobjetivo MOOD de controladores lineales PI(D)</b>	<b>149</b>
1.	Introducción . . . . .	149
2.	Planteamiento del problema multiobjetivo MOOP . . . . .	150
2.1.	Estratificación exponencial multiobjetivo E-MOOP . . . . .	151

3.	Síntesis de un control PI en un secador de charolas . . . . .	160
4.	Síntesis del capítulo . . . . .	166
<b>V</b>	<b>Conclusiones y expectativas</b>	<b>169</b>
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y expectativas</b>	<b>171</b>
1.	Conclusiones generales . . . . .	171
2.	Expectativas de la investigación . . . . .	173
<b>VI</b>	<b>Apéndices y Anexos</b>	<b>175</b>
3.	Apéndice A1 . . . . .	177
4.	Apéndice A2 . . . . .	216
5.	Apéndice A3 . . . . .	219
6.	Apéndice A4 . . . . .	221
	<b>Bibliografía</b>	<b>223</b>
7.	Anexos . . . . .	235



# Índice de figuras

1.1.	Diagrama a bloques de un sistema de control automático empleando el enfoque de función de transferencia. $\mathbf{G}(s)$ es la planta y $\mathbf{K}(s)$ representa el controlador del sistema. $\mathbf{r}$ , $\mathbf{y}$ y $\mathbf{e}$ ; representan la consigna, la salida y el error del sistema respectivamente. ([82]) . . . . .	31
1.2.	Esquema simplificado de un proceso controlado por una plataforma digital (uP). La señal de reloj (Clock) refiere al periodo de muestreo $t_{samp}$ ; mientras que los bloques (A/D) y (D/A) indican la conversión analógico/digital, digital/analógico respectivamente [56]. . . . .	32
1.3.	Representación de la Multiplicidad de estados estacionarios <b>a)</b> Función de puntos críticos $Z(cf, ce)$ y <b>b)</b> Visualización de los 9 estados estacionarios . . . . .	42
1.4.	Diagrama de una bifurcación en el plano de fase . . . . .	42
1.5.	Trayectorias para la ecuación de Van der Pol (Brannan.J y Boyce.W 2011) <b>a)</b> Diagrama de fase $\mu = 0,2$ . Punto espiral inestable para $0 < \mu < 2$ y un nodo inestable para $\mu \geq 2$ <b>b)</b> Visualización de la solución en el dominio del tiempo . . . . .	44
1.6.	Trayectorias del estado para el sistema $\dot{x} = x^2$ (Zoran Vukic 2003) . . . . .	45
1.7.	<b>a), c) y e)</b> Representan la salida y el control en el dominio del tiempo para el sistema de Lorentz. <b>b), d) y f)</b> conforman una representación en Lissajous para apreciar el momento exacto de la sincronización. (Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum 2001). . . . .	46
1.8.	Esquema detallado de un sistema de control robusto de múltiples entradas y salidas MIMO conteniendo el concepto de control basado en el modelo MBC. . . . .	54
1.9.	a) Formulación de la incertidumbre multiplicativa b) Incertidumbre aditiva (Zhow.K y Doyle.J 1999). $\mathbf{G}_0$ representa el modelo nominal, $\mathbf{W}_\Delta$ es una matriz de ponderaciones y $\Delta$ es una matriz de acotamiento de la incertidumbre. ( $\mathbf{u}$ ) y ( $\mathbf{y}$ ) son los vectores de control y de salida descritos en Ec-1.37 . . . . .	58
1.10.	Marco general de transformaciones fraccionales lineales, para el análisis y síntesis de controladores robustos considerando las incertidumbres $\Delta$ y las funciones de ponderación $W_n$ dentro de $\mathbf{G}$ (Zhow.K y Doyle.J 1999) . . . . .	60
1.11.	<b>a)</b> Diagrama básico para el control $H_2/H_\infty$ (Doyle y col., 1989) <b>b)</b> Transformación fraccional LFT . . . . .	62
1.12.	Estabilidad en el sentido de Lyapunov. Para un punto trasladado al origen; se dice que tiene un equilibrio estable si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que: $\ x(0)\  < \delta \rightarrow \ x(t)\  < \varepsilon, \forall t \geq 0$ . . . . .	68
1.13.	<b>a)</b> Región de estabilidad definida por un cono en el plano complejo <b>b)</b> Aproximación interior convexa LMI de la región de estabilidad no convexa para un sistema de tercer grado ( Henrion-D., 2013) . . . . .	70
1.14.	Representación del criterio de sintonización ( $\mathcal{L}_{2+}/D$ ) fuente:(J.Carrillo-Ahumada 2011) [27] . . . . .	72

1.15. Proceso de diseño de controladores mediante métodos de optimización Fuente:[87] . Nota: *1,*2 y *3 propuesto en (Rodríguez-Mariano y col.,2015). . . . .	78
1.16. Concepto de dominancia mediante el frente de Pareto <b>a)</b> La solución A tiene una mejor función de costo para todos los objetivos planteados <b>b)</b> Frente de Pareto con 3 objetivos y 66 puntos. Fuente: (Logist Filip y col.,2010) . . . . .	79
1.17. Densidad de visualización de dos herramientas (Heinrich y Weiskopf., 2013 [50]) <b>a)</b> Gráfica de contorno (Bivariada) donde se muestran isocurvas para una densidad estimada usando un kernel Gaussiano en 2D. <b>b)</b> Coordenadas paralelas (multi-variada); donde se han agregado colores para incrementar las dimensiones visualizadas. . . . .	84
2.1. Representación conceptual del biorreactor de Cholette. <b>(c)</b> es la concentración del sustrato en el tanque, <b>(c<sub>e</sub>)</b> es la concentración del sustrato a la salida del reactor (variable controlada) y <b>(c<sub>f</sub>)</b> representa la concentración a la entrada (variable manipulada o de control) . . . . .	91
2.2. Representación de la multiplicidad de estados estacionarios <b>a)</b> Función de puntos críticos $Z(c_f, c_e)$ y <b>b)</b> Visualización de los 9 estados estacionarios . . . . .	94
2.3. <b>a) Descripción de la planta piloto:</b> 1).-Elemento calefactor, 2).-Entrada de aire, 3).-Salida de aire, 4).-Balanza de pesos 5).-Variador de frecuencia, 6).-Elemento sensor de temperatura 7).-Control de temperatura <b>b) Representación conceptual de modelado.</b> . . . . .	102
2.4. Esquema DTI del sistema de control basado en el modelo, propuesto para el secador de charolas. 103	103
3.1. Elementos de reversibilidad considerados para el diseño del criterio de desempeño/sintonización propuesto en este trabajo. El criterio incluye aportaciones dentro de las etapas señaladas (*). Este capítulo se ocupa del diseño de la métrica de desempeño/robustez, tratando las otras etapas en los capítulos IV y V. . . . .	118
3.2. Respuesta con transitorios alrededor del estado estacionario. . . . .	122
4.1. Criterio generalizado para las preferencias en la metodología PROMETHEE. (Brans, J.P., B. Mareschal y Ph. Vincke, Operational Research, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1984b). . . . .	135
4.2. Esquema básico de la metodología PROMETHEE . . . . .	136
4.3. Función preferencial Gaussiana Opción 6 (J.P. Brans y B. Mareschal 1982) . . . . .	137
4.4. Esquema general en Simulink del problema servo. Presentando el modelo lineal del biorreactor con el controlador Huang Chen 1999. $(r)$ representa la consigna de concentración requerida $(c_f)$ . La entrada exógena $(w)$ es cero para este caso. . . . .	139
4.5. Esquema general en Simulink del problema regulatorio. Presentando el modelo lineal del biorreactor con el controlador Huang Chen 1999. En este caso no existe consigna $(r) = 0$ , con la perturbación presente. . . . .	140
4.6. Modelo 5 <b>a)</b> Coordenadas paralelas con $\sigma$ como parámetro <b>b)</b> Coordenadas con índices normalizados (0-1). Para ambos casos puede verse que las desviaciones dentro de cada prestación evaluada $(J_{em2}, J_{um2}, J_{um3})$ del criterio-B son las menores. . . . .	144
4.7. Respuesta de los 4 controladores $(a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54})$ en el modelo no-lineal del Bio-reactor de Cholette <b>a)</b> salida del Bio-reactor <b>b)</b> Salida del controlador. El controlador $a_{52}$ presenta mejor desempeño y robustez. . . . .	145

5.1.	Enfoque de diseño adoptado en el presente trabajo, mediante el paradigma de control óptimo con la metodología generar primero escoger después (GFCL) (Reynoso Meza.G y col.,2013c). El subíndice <b>P</b> en la función objetivo <b>J<sub>P</sub></b> hace referencia a soluciones que aproximan al frente de Pareto, lo cual se pretende propiciar con el planteamiento E-MOOP. . . . .	150
5.2.	El planteamiento E-MOOP realiza una estructuración de las funciones objetivo no antagónicas mediante el concepto de la entropía del sistema y su interpretación mediante GAIA. Minimizando el aporte de cada $J_{em2}$ con la contribución de $J_{em1}$ y $J_{um2}$ en cada lazo. Gráfico adaptado de (Reynoso Meza.G y col.,2013c) . . . . .	154
5.3.	Visualización de una red GAIA mostrando seis características de diseño. La mejor opción es (52) en color verde. Siendo el polígono con mayor área. [22] . . . . .	156
5.4.	Visualización de la magnitud del desorden del sistema ( $\xi_c$ ) para 120 controladores, cuando se confrontan la energía de salida ( $V_1 J_{em1}$ ) contra la potencia de control ( $V_3 J_{um2}$ ). . . . .	157
5.5.	Comportamiento del frente de Pareto para 120 controladores con diferentes valores de ( $Kp, Ki$ ). La evolución de los índices en el espacio de decisión, marca una tendencia en la entropía del sistema ( $H_c$ ) y un rango para la constante entrópica ( $K_H$ ). . . . .	158
5.6.	Esquema básico del controlador PI SISO para la temperatura del aire en la cámara de secado. El modelo no lineal se presenta en el capítulo-II. . . . .	160
5.7.	Respuesta en la temperatura de la cámara con una consigna de 333K (60°C) para 120 controladores. La opción en azul representa una opción óptima bajo el criterio E-MOOP ( $Kp = 0,281, Ki = 0,0015$ ). . . . .	163
5.8.	Respuesta en la temperatura de la cámara para las opciones con mejor compromiso desempeño/robustez bajo el criterio diseñado. . . . .	165
5.9.	Respuesta de cuatro controladores de un espacio de 120. Se muestran las opciones con mejor robustez, mejor desempeño y óptimas bajo el criterio E-MOOP . . . . .	165
5.10.	<b>a)</b> Visualización de componentes antagónicos de la función objetivo y del comportamiento del índice del desorden del sistema $\xi_c$ . <b>b)</b> Región del frente de Pareto con tres indicadores de desempeño conteniendo mas de mil posibles ajustes (Contreras Leiva. M.P y col.,2016) [33].	166



# Índice de tablas

1.1.	Tipos de puntos de equilibrio de un sistema no-lineal y linealizado. . . . .	51
2.1.	Parámetros del modelo del biorreactor de Cholette. . . . .	91
2.2.	Descripción de los parámetros del modelo de Cholette (Sree y Chidambaram,2003a) . . . . .	93
2.3.	Estados estacionarios del biorreactor de Cholette y sus concentraciones . . . . .	94
2.4.	Resumen de los modelos linealizados y controladores desarrollados en estados estacionarios inestables del biorreactor de Cholette. . . . .	101
2.5.	Parámetros del modelo del secador de charolas. . . . .	105
2.6.	Valor nominal de los parámetros en el punto de trabajo considerado. Similares a los establecidos en [79] y [73]. . . . .	106
3.1.	Definición de los índices básicos de desempeño en forma discreta (Criterio-A) . . . . .	117
3.2.	Conformación de un criterio de evaluación de controladores con jerarquía analítica (ver Capitulo-IV) . . . . .	123
4.1.	Matriz de dominancia o de relaciones preferenciales ( $\Psi_D$ ). . . . .	133
4.2.	Procedimiento de asignación propuesto para funciones preferenciales y pesos dentro de la etapa de selección de controladores . . . . .	138
4.3.	Índices de desempeño para el Modelo 5 con el modelo linealizado . . . . .	140
4.4.	Configuración de pesos $w_j$ y asignaciones de $\sigma$ para el criterio preferencial Gaussiano en la evaluación de controladores con el criterio-B para el modelo-5 . . . . .	142
4.5.	Ranqueo en el nivel de compromiso bajo el criterio-B y relaciones preferenciales de salida ( $\phi^+$ ) y entrada ( $\phi^-$ ) para el escenario servo . . . . .	143
4.6.	Ranqueo en el nivel de compromiso bajo el criterio-B y relaciones preferenciales de salida ( $\phi^+$ ) y entrada ( $\phi^-$ ) para el escenario regulatorio . . . . .	143
5.1.	Categorización de <b>desempeño/robustez</b> para 20 controladores y relaciones preferenciales de salida ( $\phi^+$ ) y entrada ( $\phi^-$ ). Las ponderaciones fueron: ( $w = 3, P = \sigma$ ) para $J_{em1}$ ; ( $w = 3, P = \sigma$ ) para $J_{em2}$ y ( $w = 3, P = \sigma/2$ ) para $J_{um2}$ . . . . .	163
5.2.	Categorización (ranqueo) de 20 controladores en el nivel de compromiso ( <b>robustez</b> ) y relaciones preferenciales de salida ( $\phi^+$ ) y entrada ( $\phi^-$ ). Las ponderaciones utilizadas fueron: ( $w = 1, P = \sigma/2$ ) para $J_{em1}$ ; ( $w = 1, P = \sigma/2$ ) para $J_{em2}$ y ( $w = 3, P = \sigma/8$ ) para $J_{um2}$ . . . . .	164

## 1. Lista de Acrónimos

---

ARE	Algebraic Riccati Equation
CSTR	Continuous Steering Tank Reactor
FDLTI	Finite Dimensional Linear Time Invariant
FOPDT	First Order Plus Delay Time
GAIA	Graphical Analysis for Interactive Aid)
GFCL	Generate First, Choose Later
IAE	Integral of the Absolute value of Error
ITAE	Integral of the Time weighted Absolute value of Error
LCF	Left coprime factorization
LFT	Linear Fractional Transformation
LHP	LHP left-half plane $\text{Re}(s) < 0$
LMI	Linear Matrix Inequalities
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LQR	Linear Quadratic Regulator
LTI	Linear Time Invariant
MCDA	Multi-Criteria Desition Aid
MCDM	Multi-Criteria Desition Making
MIMO	Multi-Input Multioutput
MOOD	Multi-Objetive Optimization Design
MOOP	Multi-Objetive Optimization Problem
NLCF	Normalized left coprime factorization
NP	Nominal Performance
NRCF	Normalized right coprime factorization
NS	Nominal Stability
PI	Proportional-Integral
RCF	Right coprime factorization
RHP	RHP right-half plane $\text{Re}(s) > 0$
RMS	Root Mean Square Value
RP	Robust Performance
RS	Robust Stability
SISO	Single-Input Single-Output
SSV	Structured Singular Value
SVD	Singular Value Decomposition

---

## 2. Introducción

Existen en la industria una gran cantidad de procesos y sistemas controlados mediante la estructura clásica del controlador lineal PI(D) introducida alrededor de 1940 (Paraskevopoulos.N.P 2002)[82].

Por lo general, la forma de sintonizar los parámetros de los controladores PI(D) lineales, se efectúa para un determinado estado estacionario. Donde la estructura generalizada de este tipo de controladores ha proporcionado un adecuado desempeño del sistema en lazo cerrado para una gran variedad de aplicaciones, asegurando la reducción a cero del error del estado deseado (G.Alvarado y col.,2005) [45]. Pudiendo ser diseñado como óptimo multi-objetivo, al proporcionar un conjunto de especificaciones de robustez y desempeño (Bebrani e Hiyama.,2007) [17], (Reynoso Meza y col.,2013c) [89].

Otras variantes del control PI(D) son estructuras lineales con ponderación en el setpoint y estructuras no lineales (Sree y Chidambaram.,2003a [108], Carrillo-Ahumada y col., 2011 [27]); o control no-lineal (Sivaramakrishnan y col., 2008) [103].

Utilizándose procedimientos específicos de análisis y síntesis, para su correcto funcionamiento en sistemas con dinámica no lineal.

Ejemplos representativos de estas técnicas de sintonización son las de Ziegler-Nichols y Cohen-Coon [76]. Las cuales han sido utilizadas por más de siete décadas en una gama de aplicaciones lineales como sistemas de control de potencia, gobernadores de velocidad y control de temperatura. Donde el conocimiento del modelo del proceso es parcialmente conocido o aún completamente desconocido. No obstante, esta limitante impacta negativamente en el desempeño final del sistema (Bevrani y Bevrani.,2011) [18].

Fundamentalmente para los sistemas SISO, la literatura ha reportado buenos resultados con las técnicas de sintonización anteriormente citadas. Sin embargo en muchos de los casos donde interviene la incertidumbre paramétrica y de modelado, la comunidad de control enfrenta retos importantes para sintetizar controladores robustos. Donde el principal objetivo es diseñar un controlador con desempeño aceptable para una familia de plantas MIMO y fuentes de perturbación.

En este marco de diseño, el enfoque  $H_2/H_\infty$  ha representado la formulación más conveniente al emplear la descripción linealizada en el espacio de estados del sistema a controlar garantizando el equilibrio entre desempeño y robustez. En este sentido las aportaciones realizadas por (Doyle y col., 1989) [35] consiguen controladores con estructura PID sub-óptimos  $H_2/H_\infty$  empleando ecuaciones de Riccati. Formulaciones posteriores que emplean desigualdades lineales matriciales (LMI) se han resuelto mediante técnicas de optimización convexa (Bevrani e Hiyama., 2007 [17]). Otras técnicas de sintonización utilizan índices de desempeño en el dominio del tiempo o bien, obtenidos de manera analítica. Es conocido que los índices de desempeño basados en la integral del cuadrado del error son antagonistas de los índices de desempeño basados en la integral del cuadrado del control. Como lo muestra García Alvarado y col., (2010) [44], Carrillo-Ahumada y col., (2011) [27] y Vargas-González y col., (2013) [115]; un control óptimo-robusto es el resultado de una optimización multiobjetivos ( $I_{e,servo}$ ,  $I_{e,reg}$ ,  $I_{e,pulso}$ ,  $I_{u,servo}$ ,  $I_{u,reg}$ ,  $I_{u,pulso}$ ) que balancea los índices antagonistas del sistema en lazo cerrado. Al minimizar los  $I_e$  se minimiza el error del control (desempeño), pero al minimizar los  $I_u$  aumenta la tolerancia del desempeño ante errores de modelación (robustez); pues modera la acción de control y evita que el estado del proceso salga de los límites de validez del modelo. Se han probado distintos métodos para balancear estos índices, así como herramientas de visualización complementarios:

- Minimizando la máxima relación Im/Re de los valores propios de la matriz característica (García-Alvarado y col.,2010) [44] .
- Utilizando frentes de Pareto (Carrillo-Ahumada y col., 2011) [27] y (Carrillo-Ahumada y col., 2014) [26].
- Empleando el concepto de equilibrio de Nash (Vargas-González y col.,2013) [115].

En ninguno de estos casos se utiliza toda la información del sistema que puede evaluarse con índices de desempeño.

Por otro lado; los reactores de agitación continua tipo tanque (CSTR) han sido intenso objeto de estudio por la comunidad de control durante las pasadas dos décadas (Liu y Chien., 1991 [63], Kumar y Kulkarni., 1994 [62], Chidambaram y Reddy., 1996 [30], Sree y Chidambaram., 2003a [108], Ibarra-Junquera y Rosu., 2007 [53], Rajinikanth y Latha.,2012 [84], Ferramosca y col.,2013 [38]).

En los trabajos de Lo y Cholette ([64] y [65]), se hace referencia a los CSTR's con mezclado no ideal considerando el problema de multiplicidad de estados para sistemas compuestos por  $p$  reactores. Estos autores describen un CSTR con mezclado no ideal bajo condiciones operativas isotérmicas, donde se lleva a cabo una reacción enzimática de la forma  $\frac{k_1 c}{(1+k_2 c)^2}$ . Esta forma de la rapidez de reacción es similar a una función de Michaelis-Menten para bajas concentraciones de sustrato, pero a altas concentraciones se incluye en el modelo un parámetro de inhibición ( $k_2$ ).

Este biorreactor, es modelado generalmente por una ecuación diferencial y una algebraica (Chidambaram y Reddy.,1996) [30], (Sree y Chidambaram.,2002) [107], (Sree y Chidambaram., 2003a) [108],(Carrillo-Ahumada y col.,2011) [27] y (Rajinikanth y Latha.,2012) [84]). Aunque en algunos casos únicamente se utiliza la concentración de sustrato (Jhunjunwala y Chidambaram., 2001) [57], (Sree y Chidambaram., 2002) [107], (Sivaramakrishnan y col.,2008)[103]. Presentando multiplicidad de estados estacionarios en las concentraciones de alimentación, salida y de sustrato (estables e inestables) y gran sensibilidad ante parámetros de bifurcación (Carrillo-Ahumada y col.,2014) [25].

Las características mencionadas anteriormente, hacen de este biorreactor un sistema de estudio muy interesante para el diseño de diversos esquemas de control como el PI(D) (Chidambaram y Reddy.,1996 [30], Jhunjunwala y Chidambaram., 2001 [57], Sree y Chidambaram.,2002 [107], Sivaramakrishnan y col.,2008) [103], Carrillo-Ahumada y col.,2011 [27], Rajinikanth y Latha.,2012 [84] ), presentando comportamiento caótico en algunos casos (Ibarra-Junquera y Rosu, 2007 [53]).

Ante este escenario en la dinámica de los sistemas no lineales. Cuando el problema de sintonización de un controlador se aborda como multiobjetivo, es necesario especificar el intercambio de prestaciones deseado entre objetivos de diseño. Dichas especificaciones se suelen considerar mediante funciones de agregación antes de la fase de optimización (vectores de peso por ejemplo).

Una alternativa es considerar por separado cada uno de los objetivos de diseño y optimizarlos simultáneamente. En dicho caso, se suele calcular un conjunto de soluciones, llamadas Pareto óptimas.

Se habla de un conjunto de soluciones debido a que (generalmente) no existirá una solución que optimice todos los objetivos de diseño, sino varias soluciones con distinto grado de compromiso entre objetivos en conflicto.

En tal caso; el análisis en el intercambio de prestaciones se realiza sobre el conjunto calculado, en una fase de análisis y selección multicriterio (Multiple criteria decision aiding/making MCDA/M por sus siglas en inglés).

Desarrollar una metodología que capture la mayor cantidad de prestaciones en la etapa de análisis multicriterio, puede resultar beneficiosa debido al grado de involucramiento en el proceso MCDA/M ( Bonissone y *col.*,2009) [19]. Lo cuál es importante al abordar la etapa de síntesis de controladores multiobjetivo en sistemas con dinámica no-lineal.

### **3. Planteamiento del problema**

El estado del arte presenta diversas metodologías de sintonización de controladores lineales PI(D) para el biorreactor de Cholette, en sus diferentes puntos de operación (estados estacionarios). Aunque cabe señalar que estos no han sido evaluados en conjunto para observar sus prestaciones en el modelo no lineal.

Algunos de los comportamientos en la dinámica no-lineal de este sistema, incluyen los siguientes:

- Parámetros de bifurcación.
- Multiplicidad de estados estacionarios.
- Generación de ciclos límite.
- Comportamiento caótico.

El conformar una técnica de análisis multicriterio de controladores lineales que considere una reformulación conveniente de los índices de desempeño convencionales, podría describir adecuadamente las prestaciones otorgadas en un marco multiobjetivo en sistemas con esta clase de dinámica.

Es importante resaltar que dentro del paradigma de la optimización, el diseño de controladores mediante índices convencionales ha conceptualizado las múltiples influencias de control empleando esquemas de agregación y normalización en la estructura de las funciones objetivo. Enfrentar la naturaleza exponencial del problema MIMO requiere de planteamientos alternativos en el conjunto de funciones a optimizar, así como también al momento de seleccionar un vector de ponderación que ajuste el orden de magnitud de objetivos en conflicto, los cuales son mapeados comúnmente mediante frentes de Pareto multidimensionales.

El contar con nuevas herramientas de visualización que categoricen el conjunto de prestaciones, permitirá facilitar la selección de controladores con buen compromiso desempeño/robustez en escenarios de incertidumbre, junto con las restricciones físicas de los elementos finales de control.

#### 4. Justificación

La revisión bibliográfica realizada con respecto a los temas de control, biorreactores y herramientas de análisis multicriterio ha permitido considerar la inclusión del presente trabajo de tesis en el diseño de un criterio de análisis/síntesis de controladores óptimo-robustos, que permita utilizar toda la información para articular las prestaciones de las funciones objetivo (índices de desempeño antagonistas) en sistemas no-lineales. Partiendo de un análisis de desempeño multiobjetivo en el biorreactor de Cholette hasta la sintonización y evaluación de controladores PI para un secador de bandejas para la validación de la metodología.

La relevancia de este trabajo de investigación, consiste en proporcionar una nueva métrica y un método sistemático de decisión multicriterio para la evaluación del desempeño de controladores lineales en sistemas no-lineales con multiplicidad de estados estacionarios (estables e inestables).

El enfoque utilizado fundamenta una metodología de síntesis de controladores lineales óptimo-robustos, bajo el paradigma de control óptimo MOOD.

Se propone un planteamiento no antagónico en las funciones objetivo, mediante el concepto de la entropía y su interpretación mediante la red GAIA (*Graphical Analysis for Interactive Aid*). Aportando elementos de persistencia, completitud y simplicidad al diseño de controladores PI.

Para ello se han reformulado los índices de desempeño convencionales  $I_e$  e  $I_u$  como son la integral del valor absoluto del error (*integral absolute error*, IAE por sus siglas en inglés), la integral del cuadrado del error (*integral squared error*, ISE por sus siglas en inglés), integral del tiempo ponderado por el valor absoluto del error (*integral time-weighted absolute error*, ITAE por sus siglas en inglés) la integral del valor absoluto de la derivada de la señal de control (*integral of the absolute value of the derivative of the control*, IADU por sus siglas en inglés) para su evaluación con la herramienta de decisión PROMETHEE (*Preference Ranking Organization Methods for Enrichment Evaluations*).

## 5. Objetivos, estructura y contribución de esta tesis

Es importante mencionar que aunque el criterio de sintonización propuesto se encuentra dentro del paradigma de diseño de control óptimo MOOD, la aportación al diseño de algoritmos de optimización queda fuera del alcance del presente trabajo de tesis. Direccionando una metodología mediante algoritmos genéticos (GA) como parte de la técnica generar primero escoger después GFCL.

Los objetivos de este trabajo de tesis son los siguientes:

### 5.1. Objetivo general

Diseñar un criterio de sintonización de controladores óptimo-robustos aplicado a un sistema no lineal.

### 5.2. Objetivos específicos

- ① Diseñar una nueva métrica de desempeño mediante índices que evalúen el comportamiento de un sistema no lineal y linealizado.
- ② Proporcionar un método sistemático de decisión multicriterio (MCDM) basado en la metodología PROMETHEE.  
(*Preference Ranking Organization Methods for Enrichment Evaluations*).
- ③ Evaluar el desempeño de controladores lineales en dominio del tiempo.
- ④ Bajo el paradigma de la optimización, diseñar un procedimiento de síntesis de controladores PI óptimo/robustos en sistemas no lineales; cuyo concepto de articulación en la función objetivo dirija persistencia y simplicidad mediante el concepto de entropía de sistemas.

### 5.3. Estructura de la disertación

Esta tesis está dividida en seis partes y seis capítulos, donde los apartados III y IV contienen la contribución medular a los planteamientos de análisis y síntesis multiobjetivo de controladores lineales.

El apartado I, *Fundamentos generales*, cubre el marco conceptual del modelado de sistemas, teoría de control robusto y control óptimo. Presentando los preliminares para el desarrollo de la metodología.

El apartado II, *Sistemas de aplicación*, introduce los sistemas de aplicación con dinámica no lineal. Generalidades del biorreactor de Cholette, modelos linealizados y estructuras de control utilizados en el estado del arte para este sistema. Se presenta también un secador de batcheo con no-linealidad en el actuador.

El apartado III, *Diseño de un criterio de desempeño multiobjetivo*, expone el planteamiento multiobjetivo mediante índices de desempeño convencionales y su reformulación en una nueva métrica.

El apartado IV, *Contribución al planteamiento multiobjetivo de análisis y síntesis*, contiene dos capítulos:

El capítulo IV denominado *Análisis de controladores mediante técnicas de decisión multicriterio*, contiene la contribución al planteamiento de análisis en el biorreactor de Cholette; cuyos resultados se encuentran publicados en la Revista Mexicana de Ingeniería Química (ISSN:2395-8472) (Apéndice A1).

El capítulo V *Síntesis multiobjetivo MOOD de controladores lineales PI(D)*, presenta un nuevo procedimiento de síntesis multiobjetivo de controladores lineales PI óptimo-robustos, aplicado en un secador de bandejas.

En el apartado V se exponen las *conclusiones y expectativas* de este trabajo de tesis dentro del campo de control óptimo. Mientras que en el apartado VI se presentan los apéndices y anexos.

#### 5.4. Contribución de esta tesis

El presente trabajo de investigación se encuentra dentro de la teoría de control óptimo y toma de decisión multicriterio. Durante su desarrollo se ha presentado el siguiente aporte general:

- ❶ Aportación de una metodología de evaluación multicriterio (MCDM) para el desempeño de controladores lineales basada en índices de estrategia, evaluados mediante la herramienta PROMETHEE *Preference Ranking Organization Methods for Enrichment Evaluations* (Rodríguez-Mariano y col., 2015).
  
- ❷ Aportación de un procedimiento de diseño de controladores PI(D), bajo el paradigma de control óptimo multiobjetivo MOOD. El cual consiste en una articulación no antagónica en la estructura de las funciones objetivo, empleando índices de estrategia en el dominio del tiempo representativos de la entropía de sistemas. Cuya interpretación mediante la red GAIA (*Graphical Analysis for Interactive Aid*) otorga elementos de persistencia, completitud y simplicidad al diseño de controladores.

### 5.5. Metodología y alcances

La metodología de análisis y síntesis de controladores lineales con estructura PI(D) propuesta en el presente trabajo, se encuentra dentro del paradigma de control óptimo. Utilizando la metodología generar primero escoger después (GFCL). El aporte al diseño de algoritmos de optimización queda fuera del alcance del presente trabajo.

#### Metodología de análisis multicriterio

La etapa de análisis multicriterio es aplicada al biorreactor de Cholette, rediseñando un esquema de indicadores de desempeño en el dominio del tiempo (Capítulo III), que articulan el planteamiento de decisión dentro de un proceso gaussiano. Evitando inadecuados esquemas de asignación de ponderaciones. Para obtener la nueva métrica de desempeño, los indicadores son evaluados mediante simulaciones en el sistema linealizado y no lineal, usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con las funciones Matlab que describen los seis índices. Posteriormente los métodos PROMETHEE seleccionan el controlador con mejores prestaciones dentro del criterio.

#### Metodología de síntesis multiobjetivo

La metodología de síntesis de controladores PI(D), emplea simulaciones numéricas del sistema con no linealidad en el actuador. Utilizando como punto de partida un ajuste de  $K_p$  derivado de la síntesis LQR con el sistema linealizado, haciendo  $K_i=0$ .

A continuación, se define un vector de funciones objetivo compuestas por los índices de estrategia (Capítulo III). Considerando una métrica de la entropía de las señales de salida y control en los lazos del sistema no-lineal. Para obtener el espacio objetivo de controladores PI, las funciones objetivo son evaluadas en un esquema iterativo mediante Matlab con el sistema no lineal, empleando el método de Runge-Kutta de cuarto orden .

Posteriormente la etapa de análisis y selección multicriterio MCDM, determina las mejores prestaciones mediante un criterio gaussiano, empleando los métodos PROMETHEE.

## 5.6. Publicaciones de resultados del presente trabajo de tesis

- 1 **A. Rodríguez-Mariano, M.A. García-Alvarado y J. Carrillo-Ahumada.** *Diseño de un criterio de sintonización de controladores óptimo-robustos aplicado a sistemas no lineales en tiempo real.* Jornadas de Actualización en Investigación y Desarrollo de Alimentos, 11-13 de Febrero de 2015, Veracruz, Ver. (Congreso) (Apéndice A.2).

## 5.7. Proyectos finalizados mediante los resultados obtenidos de esta tesis

- 1 Análisis de Estabilidad de Procesos Químicos y Alimentarios mediante Controladores Óptimo-Robustos (PROMEP/103.5/12/7959) (Apéndice A.3).
- 2 Análisis del desempeño de controladores lineales sintonizados en diferentes estados estacionarios del biorreactor de Cholette mediante técnicas de decisión multi-criterio (FO-UNPA/0005/14) (Apéndice A.4).



## **Parte I**

# **Fundamentos generales**



# Capítulo 1

## Fundamentos generales

### 1. Introducción

Un sistema de control puede definirse como el conjunto de elementos dinámicamente relacionados entre si, que realizan una actividad para alcanzar un objetivo. Operan sobre entradas y proveen salidas procesadas, empleando algún tipo de algoritmo que ajusta los elementos finales de control para obtener el objetivo deseado o consigna. Estos sistemas pueden no encontrarse físicamente en el medio ambiente.

La taxonomía puede referir al numero de entradas y salidas que intervienen, al comportamiento dinámico de su evolución, a la morfología del esquema de retroalimentación o a la naturaleza continua o discreta con que se procesa el error del sistema (Paraskevopolous.P.N.,[82]).

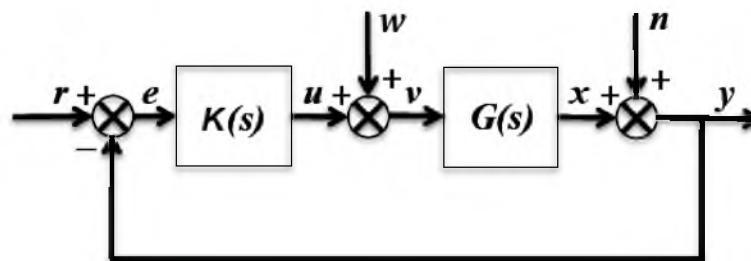


Fig. 1.1: Diagrama a bloques de un sistema de control automático empleando el enfoque de función de transferencia.  $G(s)$  es la planta y  $K(s)$  representa el controlador del sistema.  $r$ ,  $y$  y  $e$ ; representan la consigna, la salida y el error del sistema respectivamente. ([82])

La (Fig-1.1) presenta la siguiente función de transferencia de la salida considerando la consigna y la entrada exógena.

$$y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}r(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)}w(s) \quad (1.1)$$

Hoy en día es común encontrar un controlador de procesos ( $\mathbf{K}(s)$ ) como el ilustrado en la (Fig-1.1) implementado en plataformas con microcontroladores como en la (Fig-1.2). Este sistema retroalimentado influenciado por entradas exógenas  $\mathbf{W}(s)$ , con función de transferencia (Ec-1.1). Puede ser controlado por otro sistema inherentemente discreto mediante un muestreo en instantes regulares de tiempo ( $t_{s\text{amp}}$ ).

Donde el error del sistema viene definido como la diferencia entre el vector de consignas  $\mathbf{r}(\cdot)$  y el vector de salidas del sistema  $\mathbf{y}(\cdot)$ .

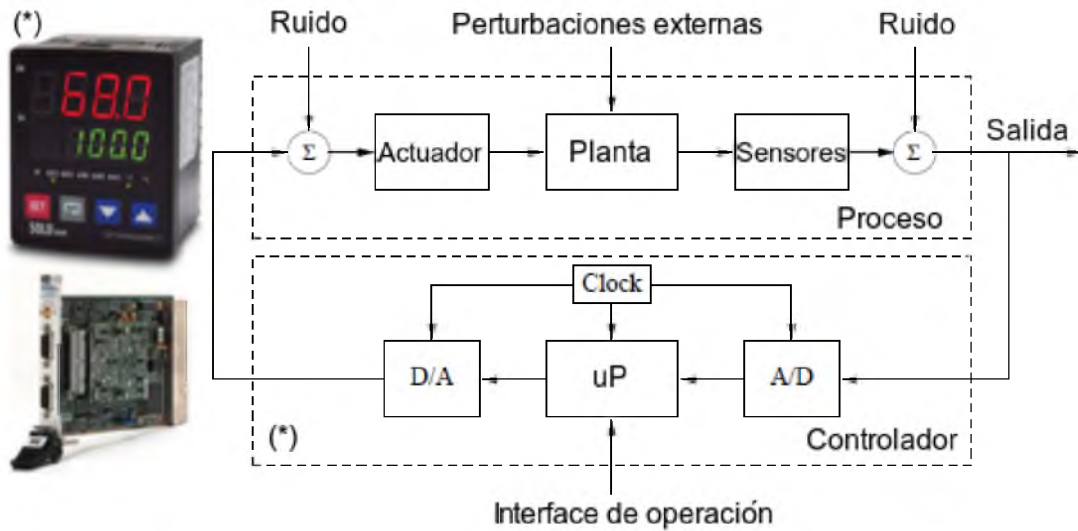


Fig. 1.2: Esquema simplificado de un proceso controlado por una plataforma digital (uP). La señal de reloj (Clock) refiere al periodo de muestreo  $t_{s\text{amp}}$ ; mientras que los bloques (A/D) y (D/A) indican la conversión analógico/digital, digital/analógico respectivamente [56].

Describir el comportamiento de un sistema puede implicar representaciones basadas en variados enfoques de modelado.

Por ejemplo; el de la función de transferencia (*relación de entradas/salidas*) (Ec-1.1) o el de espacio de estados (*evolución de las variables internas del sistema en el dominio del tiempo*). Utilizándose técnicas de análisis como la transformada de Laplace y la transformada-z para el caso de los sistemas lineales (LTI) continuos y discretos respectivamente [82]. Es importante señalar que la representación en el espacio de estados es preferible principalmente porque es aplicable a una amplia clase de sistemas:

- ❶ Sistemas con retardo en el tiempo.
- ❷ Sistemas no-lineales variantes en el tiempo.
- ❸ Sistemas no-lineales invariantes en el tiempo.
- ❹ Sistemas lineales variantes e invariantes en el tiempo.

Desde el punto de vista de la ingeniería de control, el manejar dicho sistema de tal manera que la salida o conjunto de estados cumpla con cierta descripción matemática, se consigue mediante un proceso de diseño denominado síntesis. Al respecto, la representación linealizada en el espacio de estados otorga mayor información sobre las características propias del sistema:

- ❶ Características de controlabilidad.
- ❷ Características de observabilidad.
- ❸ Representación de sistemas con múltiples entradas y salidas (sistemas MIMO).

Esta descripción matemática de la métrica bajo la cual se ajusta o sintoniza un controlador para acotar un conjunto de características, es denominado criterio de sintonización.

Pero por otro lado; si dicho criterio categoriza (o rankea) la operatividad de un controlador dentro de un conjunto de controladores previamente sintonizado, se habla entonces de un criterio de desempeño.

Bajo el paradigma de control clásico, la ubicación de los polos del sistema mediante técnicas como el lugar de las raíces, el margen de ganancia y de fase; además de los criterios de estabilidad de Routh-Hurwitz y el de Nyquist, han sido utilizados ampliamente en los criterios de sintonización de sistemas linealizados SISO.

Estas técnicas y criterios de estabilidad encuentran una limitante importante en los sistemas MIMO (Safonov. M (2012).,[94]). En este sentido, la teoría de control moderno refiere a un enfoque multi-objetivo (MOP) cuando la estrategia de análisis o síntesis permite explícitamente establecer un conjunto de prestaciones de manera simultánea mediante normas de señales o normas de sistemas aplicables a los casos SISO y MIMO. Como por ejemplo:

- 1 La norma  $H_2$ .
- 2 La norma  $H_\infty$ .
- 3 La norma espectral.
- 4 Indices de desempeño.

Encontrar la manera de conjugar adecuadamente los elementos señalados anteriormente en un criterio de sintonización de controladores lineales requiere de un marco teórico muy amplio. No obstante, existen procedimientos definidos que pueden enmarcar el comportamiento de un sistema.

Una alternativa de análisis y de síntesis para los sistemas de control retroalimentados es la enmarcación de dos escenarios principales [97].

- 1 El modo de operación Servo:  
Refiere a un buen seguimiento de la salida ante un vector de consignas (set-points).
- 2 El modo de operación regulatorio:  
Refiere a un comportamiento de estabilidad. Manteniendo la salida del sistema lo más cerca posible de la consigna, ante posibles perturbaciones.

Tomando la representación de un sistema en función de transferencia como (Ec-1.1). El caso servo considerará el vector de consignas únicamente, despreciando cualquier fuente de perturbación. De esta forma se analizará la respuesta dada por (Ec-1.2).

$$y_{sp}(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}r(s) \quad (1.2)$$

En el escenario regulatorio, el vector de consignas es un vector nulo. Analizando el comportamiento del sistema ante señales exógenas. Analizando la respuesta dada por (Ec-1.3).

$$y_{reg}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)}w(s) \quad (1.3)$$

De esta forma un diseño adecuado puede representar un controlador ajustado para seguir satisfactoriamente un vector de consignas y mantenerse estable ante una clase de perturbaciones. Sin embargo; estos intereses están en conflicto (Garpinger.O y Hagglund.T (2014).,[46]). Por lo que obtener criterios de diseño de controladores con características multiobjetivo es de gran importancia.

## 2. Modelado de sistemas

El análisis de la dinámica de los sistemas de control comienza con la descripción matemática en la interacción de los elementos individuales de la planta generalizada (Jagan.N.C.,[56]).

Bajo la representación en el espacio de estados, esta descripción del sistema estará gobernada por un conjunto de reglas que especifican valores discretos o continuos en función del tiempo ( $t$ ).

En el caso de una descripción discreta, esta evolución del sistema consiste de un conjunto de ecuaciones algebraicas de diferencia (mapeos de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  en función de los instantes de muestreo ( $k$ )).

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k + 1) &= \mathbf{f} [k, \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g} [k, \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]\end{aligned}\tag{1.4}$$

La descripción dada en (Ec-1.4). Es el mapeo que transforma el estado actual de un vector finito dimensional  $\mathbf{x}(k)$ , en un estado subsecuente del sistema  $\mathbf{x}(k + 1)$ ; ante la entrada de control  $\mathbf{u}(k)$ , tomando valores discretos del tiempo  $t_k$  y  $t_{k+1}$  respectivamente. Donde  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$ .

Para el caso continuo se emplean sistemas de ecuaciones diferenciales e integrales provenientes de principios fundamentales. Donde las entradas externas interactúan junto con la variación de los parámetros, conformando el modelado.

La naturaleza de muchos problemas que enfrenta la comunidad de control, son inherentemente no lineales; donde la aplicación del teorema de superposición no es significativa.

Un sistema no lineal continuo en el tiempo, descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales acoplado. Adopta la forma (Ec-1.5).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1 \dots x_n, t, w_1 \dots w_m, u_1 \dots u_c) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1 \dots x_n, t, w_1 \dots w_m, u_1 \dots u_c) \end{cases} \quad (1.5)$$

Donde  $\dot{x}_i$  representa la derivada del estado correspondiente  $x_i$  respecto al tiempo  $t$ .  $u_1, u_2, \dots, u_c$  son variables de entrada al sistema, identificadas como las entradas de control.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son los estados del sistema, los cuales representan la memoria que el sistema posee de un estado pasado.  $w_1, w_2, \dots, w_m$  corresponde a las entradas exógenas .

En una notación vectorial simplificada puede escribirse:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}, \mathbf{u}) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}, \mathbf{u}) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_c \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(x, t, w, u) \\ \vdots \\ f_n(x, t, w, u) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Donde  $\mathbf{f}$  es referido como el campo vectorial compuesto de funciones continuo-diferenciables.  $\mathbf{x}$  es el vector de estados usualmente acotado a una región  $\Omega_{\mathbf{x}}$ .  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ .  $\mathbf{u}$  es el vector de control perteneciente a otra región acotada  $\Omega_{\mathbf{u}}$ .  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^c$ .  $\mathbf{w}$  es el vector perteneciente a las entradas exógenas  $\Omega_{\mathbf{w}}$ .  $\mathbf{w} \in \mathcal{R}^m$ .  $\mathbf{y}$  es el vector de salidas.  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^r$ .

El sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales acopladas puede representarse como (Ec-1.6). Asociando una ecuación que define un vector de salidas, conformado por las variables de interés en el sistema. Las cuales pueden ser físicamente determinadas mediante sensores o transductores.

Al conjunto de ecuaciones (Ec-1.6 y Ec-1.7) se le conoce como representación en el espacio de estados. Ya que es en el espacio  $\mathcal{X}^n$  donde evoluciona el sistema. Mientras que el espacio  $\mathcal{X}^{(n+1)}$  dimensional ( $\mathcal{X}^n \times \mathcal{X}$ ); es referido como el espacio de estados extendido. Donde la dimensión adicional corresponde al tiempo  $t$  generalmente.

Esta es una de las herramientas fundamentales en el modelado de sistemas continuos finito dimensionales (FDLTI).

La existencia y unicidad de las soluciones para este sistema de ecuaciones (Ec-1.6), esta garantizada solamente bajo ciertas limitaciones del vector de funciones  $\mathbf{f}(t)$ .

Por solución al sistema de ecuaciones en el intervalo  $[0, T]$  se entiende que el vector  $\mathbf{x}(t)$  tiene derivadas en cualquier parte dentro de dicho intervalo y para las cuales el sistema es valido en cada  $t$ .

Por tal motivo, la limitación requerida es que el vector de funciones no lineales sea localmente Lipschitz.

El teorema de Lipschitz establece precisamente las condiciones requeridas para la existencia de soluciones a un sistema finito dimensional (Ec-1.6 y Ec-1.7) en un sentido local y global.

Teorema 1 ( **Existencia y unicidad local**) *La función  $\mathbf{f}$  se dice localmente Lipschitz para la variable  $\mathbf{x}(t)$ , si cerca del punto  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ; satisface el criterio de Lipschitz para todo  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  en la vecindad de  $\mathbf{x}_0$ . Donde  $k$  es una constante positiva y la norma  $\| \cdot \|$  es la norma Euclidiana.*

El criterio de Lipschitz es el siguiente:

$$\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}) \| \leq k \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \quad (1.9)$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \| \leq r \}, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Entonces, existe algún  $\delta > 0$  tal que el sistema descrito por con condición inicial, tiene solución única sobre  $[t_0, t_0 + \delta]$ .

Teorema 2 ( **Existencia y unicidad global**) *Si la función  $\mathbf{f}$  es continua a tramos en  $t$  y satisface*

$$\begin{aligned} \| \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}) \| &\leq k \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \\ \| \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \| &\leq h \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Entonces, el sistema con condición inicial tiene solución única sobre  $[t_0, t_1]$ .

### 3. Propiedades de los sistemas no lineales

Para determinar el comportamiento dinámico de un sistema no lineal, diversos factores cualitativos y cuantitativos deben ser considerados en las fases de análisis y síntesis (Luenberger.D.G.,[68]).

Un paradigma recurrente asume que siempre es posible linealizar un sistema adecuadamente. Sin embargo existen no linealidades discontinuas que carecen de un modelo que aproxime dicho comportamiento. A estas no linealidades se les conoce como no-linealidades duras. La fricción seca, la saturación, la zona muerta y la histéresis son ejemplos de ellas.

Definición de algunas no-linealidades duras:

Función signo:

$$f_{comp} = \text{signum}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Definición de saturación para un limite positivo r.

$$\text{sat}(x, r) = \begin{cases} r, & x \geq r \\ x, & -r < x < r \\ -r, & x \leq -r \end{cases} \quad (1.12)$$

Banda muerta Para un limite positivo r.

$$\text{dead}(x, r) = \begin{cases} 0, & |x| < r, \\ x - r, & r \leq x, \\ x + r, & x \leq -r, \end{cases} \quad (1.13)$$

Fricción seca:

$$\text{friction}(x, r) = \begin{cases} x + r, & |x| \geq r, \\ x - r, & r \leq x < 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

Desde el punto de vista matemático, el modelado de la fricción por ejemplo; ha representado un reto importante. Ya que por lo general, estos modelos involucran dinámicas no suaves (Fricción seca o de Coulomb). Algunos modelos de fricción son continuos pero presentan dinámicas no-Lipschitzianas.

### 3.1. Multiplicidad de estados estacionarios

Es bien sabido que para los sistemas lineales estables, su respuesta ante un escalón unitario tiende a cero.

Pero por otra parte; los sistemas no lineales pueden presentar varios puntos de equilibrio al depender de los parámetros del sistema, condiciones iniciales; etc. Por lo que el desempeño de un controlador puede verse deteriorado rápidamente en este tipo de plantas.

Definición 1 (*Punto de equilibrio en  $t_0$* ) Se dice que el punto  $x_0 \in \mathcal{X}^n$ . Es un punto de equilibrio en el tiempo  $t_0$  si:

$$f(x_0, t) = 0; \forall t > t_0 \quad (1.15)$$

Un sistema continuo no lineal cuya dinámica en lazo abierto puede ser descrita por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma Ec-1.6. Pero que también posee más de un punto de equilibrio. Se dice que presenta multiplicidad de puntos de equilibrio o de estados estacionarios.

Un ejemplo de este tipo de plantas es el biorreactor de Cholette. El cual representa a un reactor isotérmico tipo tanque agitado con mezclado no ideal, donde se lleva a cabo una reacción enzimática. Este sistema será estudiado a detalle en el capítulo II, ya que presenta una dinámica dependiente de las condiciones de trabajo que pueden llegar a degradar el comportamiento de un controlador lineal. A continuación puede observarse un mapeo de los múltiples puntos estacionarios de este reactor (Fig-1.3).

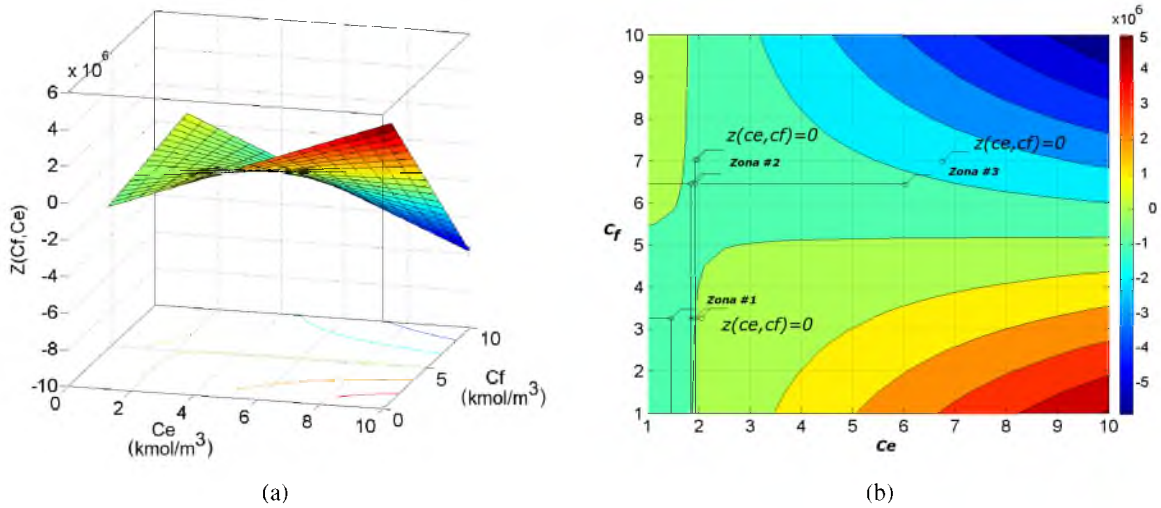


Fig. 1.3: Representación de la Multiplicidad de estados estacionarios a) Función de puntos críticos  $Z(cf, ce)$  y b) Visualización de los 9 estados estacionarios

### 3.2. Bifurcaciones

En los sistemas continuos no-lineales las bifurcaciones indican un cambio cualitativo en las características del sistema; tales como el número y tipo de soluciones bajo la variación de uno o mas parámetros del sistema considerado (Valores de bifurcación) (Guckenheimer y Holmes.,1983)[47]. En muchos casos, los parámetros del modelo solamente se conocen con cierto grado de aproximación. Por lo tanto es conveniente conocer como afectarán las variaciones de dichos parámetros en el comportamiento de las soluciones del sistema (Carrillo-Ahumaday *col.*, 2014)[25].

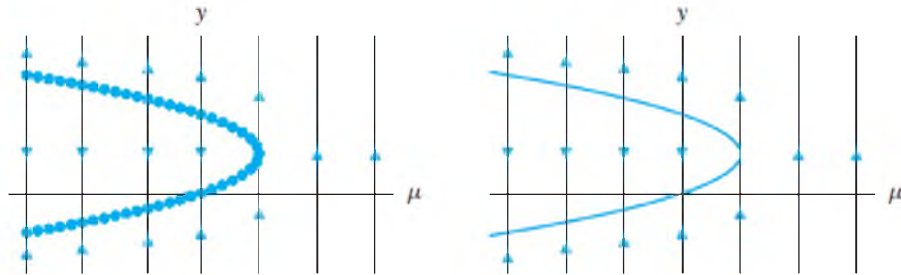


Fig. 1.4: Diagrama de una bifurcación en el plano de fase

Cuando las bifurcaciones ocurren en la vecindad de un punto fijo o una solución periódica del sistema; se hace referencia a una bifurcación local. Mientras que cualquier otro cambio cualitativo hará referencia a una bifurcación global. Por lo que es importante conocer las regiones de estabilidad estructural en el plano de parámetros y en el plano de fase, para asegurar que los estados del sistema permanezcan dentro de estas regiones. Evitando la transferencia a otro estado con comportamiento no acotado, degradando el desempeño de un controlador lineal.

### 3.3. Variaciones periódicas del estado (ciclos límite)

Los cambios en el comportamiento asintótico de los sistemas bajo variación de los parámetros; puede llevar a un comportamiento oscilatorio no deseado. Para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo LTI, la posibilidad de oscilaciones no amortiguadas, esta relacionada con la existencia de un par de polos sobre el eje imaginario de plano complejo. Donde la amplitud de las oscilaciones en este caso esta dada por las condiciones iniciales del sistema. Pero para los sistemas no lineales, es posible que se presenten oscilaciones cuya amplitud y frecuencia no dependen del valor de las condiciones iniciales. Tales oscilaciones son llamadas auto-oscilaciones o ciclos limite. Un ciclo limite se define como una curva integral cerrada, la cual tiene la propiedad de que atrae o repele curvas integrales cercanas. Esto en algunas ocasiones hace que se hable de una clasificación de ciclos límite como estables o inestables. Un ejemplo clásico es la ecuación de Van Der Pol .

$$\ddot{\mu} - \mu(1 - \mu^2)\dot{\mu} + \mu = 0 \quad (1.16)$$

Re-expresando (Ec-1.16) a un sistema acoplado y obteniendo los eigenvalores en función de  $\mu$ .

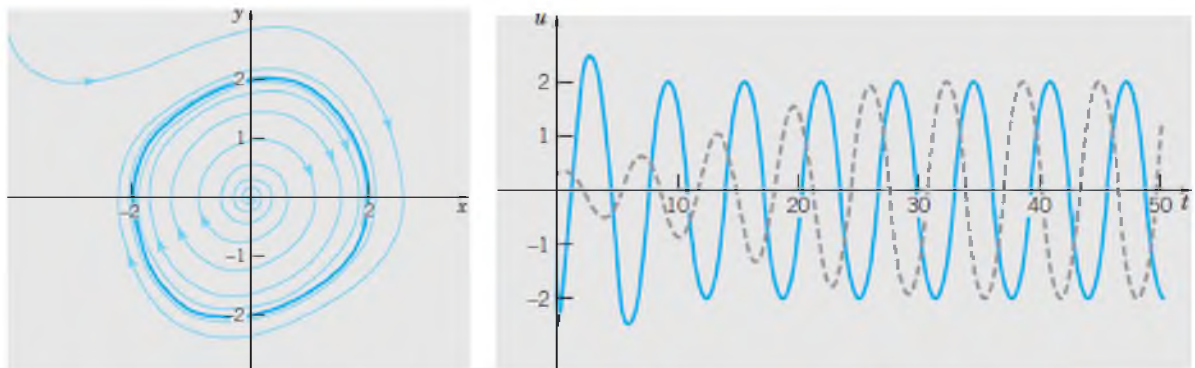
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + (1 - x^2)y \end{aligned} \quad (1.17)$$

Los eigenvalores son:  $(\mu \pm \sqrt{(\mu^2 - 4)})/2$ .

La (Fig-1.5) muestra el comportamiento del oscilador de Van Der Pol. Cabe mencionar que en el caso de un comportamiento de multiplicidad de estados estacionarios como en el biorreactor de Cholette. Se ha documentado que pueden generarse orbitas periódicas que emergen bajo la influencia de ciertas condiciones en los parámetros de controladores con estructura PI (Ibarra-Junquera y Rosu.,2007) [53].

Dichas bifurcaciones se caracterizan por un par de eigenvalores conjugados (bifurcaciones de Hopf) en los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado controlador PI/biorreactor; siendo las ganancias del controlador los parámetros de bifurcación.

Por este motivo; un criterio de sintonización de controladores lineales para el biorreactor de Cholette. Deberá incluir este tipo de información en algún nuevo índice de desempeño. O bien, reformular los índices de desempeño convencionales para capturar este comportamiento.



(a) Comportamiento del oscilador en el plano de fase

(b) Comportamiento en el dominio del tiempo

Fig. 1.5: Trayectorias para la ecuación de Van der Pol (Brannan.J y Boyce.W 2011) **a)** Diagrama de fase  $\mu = 0,2$ . Punto espiral inestable para  $0 < \mu < 2$  y un nodo inestable para  $\mu \geq 2$  **b)** Visualización de la solución en el dominio del tiempo

### 3.4. Tiempos de escape infinito

Bajo este comportamiento la salida de un sistema lineal inestable, se incrementa mas allá de los límites, conforme el tiempo se aproxima a infinito. Pero para el caso de los sistemas no lineales, la salida del sistema puede incrementarse sin límite en un tiempo finito.

Por ejemplo; la salida del sistema no-lineal con condición inicial descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{1.18}$$

Tiende a infinito para un  $t = 1/x_0$  como puede apreciarse en (Fig-1.6).

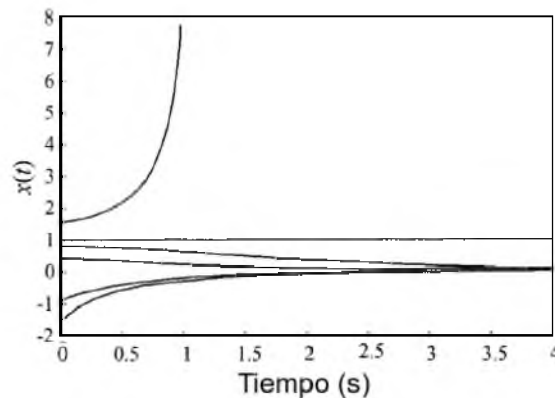


Fig. 1.6: Trayectorias del estado para el sistema  $\dot{x} = x^2$  (Zoran Vukic 2003)

Este comportamiento puede ser muy destructivo para cierto tipo de actuadores. Ya que en general; los elementos finales de control experimentarán una excursión máxima, intentando recuperar la estabilidad del sistema.

### 3.5. Sincronización

En forma práctica, el fenómeno de la sincronización podemos verificarlo en un péndulo doble con soporte común; tal como el experimento propuesto por Christian Huygens (1665). De manera análoga. Cuando la señal de control tiende a ser una señal de tipo sinusoidal de pequeña amplitud, la salida de un sistema no lineal puede contener oscilaciones subarmónicas.

Al incrementarse la amplitud de dicha señal, es posible que la frecuencia de salida experimente saltos a la frecuencia de la señal de control. Por lo que se habla de una sincronización.

La clave para identificar que el sistema entra en sincronización, es que la respuesta a la salida es idéntica a la señal de control, permaneciendo estable.

Un ejemplo es el sistema de Lorentz, cuya sincronización puede observarse mediante la forma de Lissajous (Fig-1.7 b), d) y f) ).

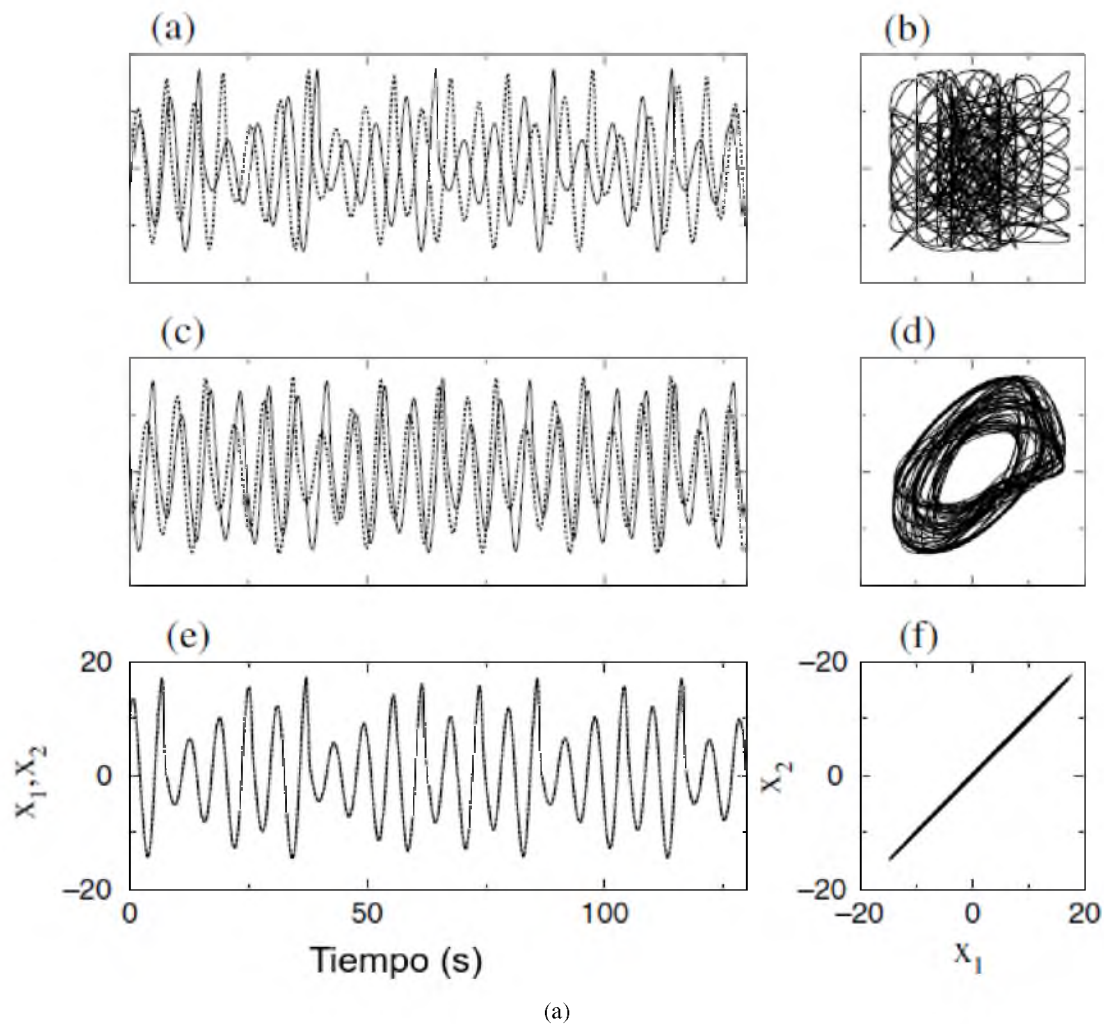


Fig. 1.7: **a)**, **c)** y **e)** Representan la salida y el control en el dominio del tiempo para el sistema de Lorentz. **b)**, **d)** y **f)** conforman una representación en Lissajous para apreciar el momento exacto de la sincronización. (Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum 2001).

#### 4. Sistemas linealizados

Los modelos lineales son normalmente preferidos sobre los no-lineales si el rango de operación del sistema es pequeño y las no linealidades involucradas son suaves.

La idea fundamental de linealización, es aproximar el comportamiento de las soluciones del sistema no-lineal cerca de un punto de equilibrio, empleando un sistema simplificado. Siendo válido al menos en un intervalo pequeño (Slotine y Li.,1991) [105]. Para la mayoría de los sistemas la información obtenida al estudiar el sistema linealizado es suficiente para inferir el comportamiento del sistema no-lineal.

Un procedimiento de linealización consiste en truncar la expansión en series de Taylor del sistema de ecuaciones. Por ejemplo; Para el sistema no lineal dado por (Ec-1.6 y Ec-1.7), la expansión en series de Taylor para el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, tomando solo el termino lineal es la siguiente:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{x_0, u_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^T} \Big|_{x_0, u_0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (1.19)$$

Donde:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^T} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0} \quad (1.20)$$

Es el Jacobiano de  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  evaluado en el estado estacionario  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ .

Definiendo incrementos de la siguiente forma:

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (1.21)$$

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (1.22)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{x_0, u_0} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^T} \Big|_{x_0, u_0} \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (1.24)$$

La expresión linealizada para el sistema de ecuaciones diferenciales es la siguiente:

$$\dot{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} + f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) - \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (1.25)$$

Mientras que para la ecuación de salida se tiene:

$$y \cong g(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{x_0, u_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}^T} \Big|_{x_0, u_0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0}, \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}^T} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \frac{\partial g_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \Big|_{x_0, u_0} \quad (1.27)$$

Y definiendo los incrementos:

$$y_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \quad \Delta \mathbf{y} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \quad (1.28)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{x_0, u_0} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}^T} \Big|_{x_0, u_0} \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (1.30)$$

Se tiene la ecuación linealizada para la salida:

$$\Delta y = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u} \quad (1.31)$$

Por lo tanto; el modelo no-lineal representado por (Ec-1.6) y (Ec-1.7) ha sido linealizado con parametros invariantes en el tiempo LTI alrededor de un estado estacionario.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Con función de transferencia en el dominio de Laplace dada por:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.33)$$

#### 4.1. Propiedades de los sistemas linealizados

Es importante reconocer que existe una variedad de estados mediante los cuales representar una misma planta. Por lo que suele decirse que la realización de los sistemas lineales MIMO finito dimensionales e invariantes en el tiempo (LTI) no es única (Skogestad., 2001) [104].

Primeramente porque existen realizaciones con el mismo comportamiento entrada-salida, pero con estados (o modos) no-observables y no-controlables. Además, aún para sistemas con realizaciones mínimas (Una realización con el menor numero de estados) existen representaciones alternativas. Por tal motivo se debe determinar cual es la mejor para el análisis y síntesis de un controlador lineal.

La característica mas importante de un sistema es lineal. Es que satisface las propiedades de aditividad (principio de superposición) y homogeneidad.

Definición 2 **Principio de superposición.**

Si  $E_1(t)$  y  $E_2(t)$  son las fuentes de excitación en experimentos diferentes con  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  como respuestas respectivas. Entonces la respuesta al único experimento con fuente de excitación  $[k_1E_1(t) + k_2E_2(t)]$

Será:

$[k_1y_1(t) + k_2y_2(t)]$ .

Aplicando el principio anterior; podemos prescindir de las condiciones iniciales y el conjunto de entradas del sistema. De esta forma solamente la matriz  $\mathbf{A}$  gobernará la respuesta.

Por lo tanto; los polos/ceros de las funciones de transferencia pueden analizarse. Siendo las contrapartes de los polos (eigenvalores de la matriz de transferencia  $\mathbf{A}$ ) quienes determinan la estabilidad del mismo. De lo anterior se desprende una cualidad importante.

Definición 3 ( **Punto de equilibrio de un sistema lineal homogéneo**)

Si  $\mathbf{A}$  es la matriz con determinante  $\neq 0$  para el sistema homogéneo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ . Entonces; el único punto de equilibrio para dicho sistema es el origen.

En este sentido. Si el vector de la función forzada o de control  $\mathbf{u}(t)$  viene dado en términos del estado  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ . Entonces es posible expresar el sistema linealizado como  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$ . Siendo  $\mathbf{b}$  un vector constante. De tal manera que el único punto crítico del sistema viene dado por la solución al sistema  $-\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ .

La existencia de una solución para un sistema lineal de múltiples entradas y salidas MIMO, puede determinarse mediante los eigenvalores de la matriz característica de lazo cerrado.

La descomposición en los valores singulares SVD, puede determinar de forma sistemática la direccionalidad de los sistemas. Este concepto forma parte de la maquinaria de análisis de los sistemas retroalimentados MIMO.

Por ejemplo; uno de los indicadores que proporciona una medida de la distancia de  $\mathbf{A}$  a un conjunto de matrices singulares o de rango reducido, es el denominado numero de condición  $\gamma$  o  $Cond(\mathbf{A})$  (Antsaklis y Michel.A.,2006) [7].

$$\gamma(\mathbf{A}) = \sigma_1 \mathbf{A} / \sigma_k(\mathbf{A}) = (\|\mathbf{A}\|)(\|\mathbf{A}^{-1}\|) \quad (1.34)$$

Donde  $\sigma_1, \sigma_k$  representan el máximo y mínimo de los valores singulares de  $\mathbf{A}$  respectivamente.

Un numero de condición grande indica una distancia cercana a la singularidad, pero también gran sensibilidad a la solución del problema  $\mathbf{Ax}(t) = \mathbf{b}$ . Por lo que es de utilidad en el acondicionamiento de un problema en lazo cerrado.

A continuación se presenta una descripción de la estabilidad de los sistemas linealizados, de acuerdo a las características de los valores singulares.

Eigenvalores para el sistema lineal	Estado de equilibrio (Sistema linealizado)	Estado de equilibrio (Sistema no-lineal)
Real y negativo	Nodo estable	Nodo estable
Real y positivo	Nodo inestable	Nodo inestable
Real y signo contrario	silla (inestable)	silla (inestable)
Complejo conjugado con parte real negativa	Foco estable	Foco estable
Complejo conjugado con parte real positiva	Foco inestable	Foco inestable
imaginario único	Centro	Indefinido

Tabla 1.1: Tipos de puntos de equilibrio de un sistema no-lineal y linealizado.

## 5. Control robusto

El conflicto desempeño/robustez, presente en el diseño de controladores lineales con múltiples fuentes de incertidumbre que emplean modelos con parámetros invariantes (LTI), ha adoptado diversos planteamientos para su solución.

No obstante, los controladores obtenidos están sujetos a una degradación del desempeño, cuanto mas lejano este el escenario de operación del punto de diseño considerado.

Puede decirse que el control robusto es aquel enfoque que direcciona el diseño de algoritmos de control no adaptivos. Donde el principal objetivo es garantizar la estabilidad del sistema, manteniendo un nivel de desempeño de uno o varios índices, bajo condiciones de incertidumbre de los parámetros y de modelado de la planta.

El desempeño se refiere a la habilidad del sistema para seguir un vector de referencia ( $\mathbf{r}$ ) perteneciente a una clase de señales y rechazar las perturbaciones ( $\mathbf{w}$ ). Mientras que la robustez, implica estabilidad ante las discrepancias de la planta nominal con la realidad.

En este sentido los conceptos de estabilidad y desempeño, adquieren la connotación de estabilidad robusta y desempeño robusto, al requerirse un controlador  $\mathbf{K}$  capaz de asegurar un buen desempeño en el conjunto posible de plantas resultantes. El controlador  $\mathbf{K}$  será el algoritmo que determine la excitación adecuada de los elementos finales de control (actuadores), basándose en la señal de error presente en el sistema, bajo las posibles perturbaciones.

Por lo tanto. Para lograr un buen diseño, es necesario contar con alguna información sobre las perturbaciones, las referencias y las características del modelo de la planta generalizada  $\mathbf{G}$  y perturbada  $\mathbf{G}_w$ . Por lo que será fundamental una descripción conveniente de la planta generalizada  $\mathbf{G}$  y el controlador  $\mathbf{K}$ .

Dicha planta generalizada puede estar representada por sistemas mecánicos, eléctricos, químicos, biológicos, sociales, económicos o una combinación de ellos. Siendo modelados en tiempo continuo o discreto bajo conveniencia del diseñador.

Un ejemplo de algoritmo de control **K** para una planta SISO, es el dado por las ecuaciones Ec-1.35 y Ec-1.36. El cual representa un algoritmo con estructura PID.

Descripción del control paramétrico lineal PID (**K**) definido en el dominio del tiempo y en el de Laplace :

$$u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{\tau_i} \int_0^t e(t) dt + k_p \tau_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (1.35)$$

$$\frac{u(s)}{e(s)} = k_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + s \tau_d \right) \quad (1.36)$$

Donde:  $u(\cdot)$  es la acción de control,  $e(\cdot)$  es la señal de error,  $k_p$  es la ganancia proporcional,  $\tau_i$  y  $\tau_d$  son las constantes de tiempo integral y derivativa respectivamente.

Es importante señalar que el algoritmo de control paramétrico PID ha resultado ser un caso particular de un controlador lineal general, que ha demostrado buenas características de desempeño y robustez en plantas no lineales (García-Alvarado y *col.*,2010) [45].

Tales características para sistemas SISO bajo el enfoque de control clásico, son descritas por importantes lineamientos y criterios de diseño como son: Las gráficas de Bode, el lugar de las raíces o los diagramas de Nyquist. Obteniéndose información sobre el desempeño y los márgenes de estabilidad. Sin embargo; estas técnicas no son completamente aplicables a los sistemas MIMO debido al efecto de interacción mutua entre las variables manipuladas y que influyen las salidas del sistema simultáneamente (Jones y Hengue.,2009) [59].

Ante el inconveniente de interacciones mutuas en los sistemas MIMO. La teoría de control lineal multivariable en sus fases de análisis y síntesis, ha empleado una serie de operadores basados en las matrices de transferencia del sistema ([92]). Donde los operadores mayormente involucrados han sido las normas y los valores singulares. Ya que estos describen la direccionalidad del mismo y sus magnitudes de influencia.

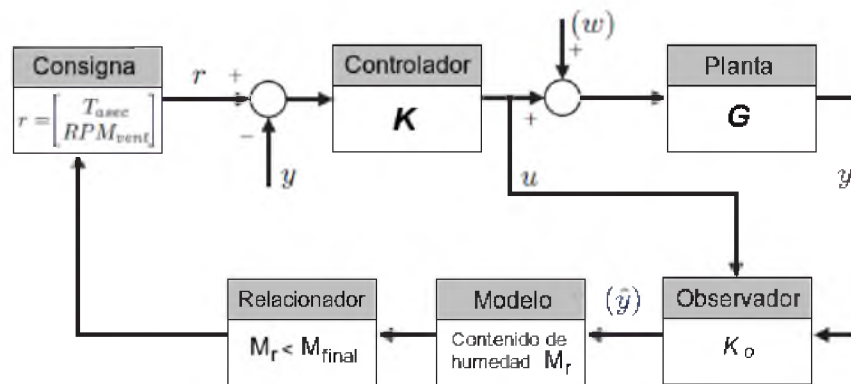


Fig. 1.8: Esquema detallado de un sistema de control robusto de múltiples entradas y salidas MIMO conteniendo el concepto de control basado en el modelo MBC.

Algunas relaciones matriciales importantes de los sistemas MIMO citadas en ([92]) son:

- Lazo abierto y razón de retorno  
 $L_i = \mathbf{K}\mathbf{G}$  ,  $L_o = \mathbf{G}\mathbf{K}$ .
- Diferencia de retorno  
 $F_i = \mathbf{I} + L_i$  ,  $F_o = \mathbf{I} + L_o$ .
- Sensibilidad  
 $S_i = F_i^{-1}$  ,  $S_o = F_o^{-1}$ .
- Sensibilidad complementaria  
 $T_i = \mathbf{I} - S_i$  ,  $T_o = \mathbf{I} - S_o$ .
- Sensibilidad del control  
 $N = \mathbf{K}S_o$ .

Debido a los atributos del algoritmo de control PID, sintonizados en sistemas SISO como en (Tan y col., 2002) [113]. Se ha extendido a sistemas MIMO, mediante representaciones matriciales como en (García-Alvarado y col.,2010) [44]. En esta se establece, que cualquier planta linealizada MIMO con acción de control PID con efectos de desacoplamiento implícitos, puede representarse como sigue Ec-1.37.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \dot{\xi} = \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}_1\mathbf{r} + \mathcal{B}_1\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}\xi + \mathcal{D}_1\mathbf{r} + \mathcal{D}_2\mathbf{y} \end{cases} \quad (1.37)$$

Donde:

$\mathbf{x}$  Es el vector de estados del proceso  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{nx1}$

$\xi$  Es el vector de estados del control  $\xi \in \mathcal{R}^{kx1}$

$\mathbf{u}$  Es el vector de variables de control  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^{cx1}$

$\mathbf{r}$  Es el vector de consignas (set-points)  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^{rx1}$

$\mathbf{y}$  Es el vector de salidas medibles (retroalimentación al controlador)

$\mathbf{y} \in \mathcal{R}^{rx1}$ , mientras  $\mathbf{w}$  es el vector de entradas exógenas  $\mathbf{w} \in \mathcal{R}^{mx1}$ .

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{D}_{11}$ ,  $\mathbf{D}_{12}$  son matrices de dimensión adecuada [44]. Mientras que  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  son matrices constantes para un controlador lineal invariante en el tiempo LTI donde el vector error está implícito  $\mathbf{e} \in \mathcal{R}^{rx1} = \mathbf{r} - \mathbf{y}$ . La planta linealizada y el controlador anteriores, definen un sistema en lazo cerrado con estado extendido  $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\mathbf{x}}, \dot{\xi}]$  dado por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{r} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{X} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.38)$$

Con matrices de lazo cerrado  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{D}_{11}$ ,  $\mathbf{D}_{12}$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{D}_{21}$ ,  $\mathbf{D}_{22}$ . Definidas por las matrices de la planta linealizada y el controlador [44].

En este ámbito MIMO, se han desarrollado criterios de sintonización de controladores PID, basados en los eigenvalores de la matriz característica de lazo cerrado, funciones de Lyapunov y el denominado control óptimo  $\mathcal{L}_{2+}/\mathcal{D}$  dado en (García-Alvarado y col.,2010) [44].

Dentro de la teoría de control multi-variable, una extensión del control óptimo-robusto que ha empleado los espacios normados de Hardy para sintonizar controladores lineales, es el enfoque de control  $H_2/H_\infty$ . Donde los estados del sistema pueden o no estar disponibles. En este último caso, la teoría de estimación atiende el problema de disponibilidad de los estados, integrando observadores dentro de las fases de diseño. Referidos como sistemas de control robusto basado en observador OBRC (Observer Based Robust Control).

Encontrando aplicaciones en diversos campos como la industria automotriz (Robert.N y col., 2013)[66]. Industria de alimentos (A.J Nabil y col., 2004) [3], [49]) y robótica (Farah Bouakrif., 2010 [20], Zhang Ancai y col., 2013 [121]). Dentro de las fases de diseño, algunas son independientes del enfoque seleccionado :

1. Plantear el modelo matemático de la planta generalizada y que describe aproximadamente el comportamiento de la planta real. Adoptando un enfoque discreto o continuo para las dinámicas involucradas.
2. Modelar la incertidumbre (Paramétrica y estructural) incorporando esta influencia en el descriptor del sistema (Sistema perturbado).
3. Linealizar el modelo alrededor de un punto de operación adecuado (punto estacionario). Por lo general empleando técnicas de linealización Tayloriana.
4. Sintetizar un controlador de estructura previamente definida, mediante los enfoques disponibles (enfoques  $H_2/H_\infty$ , LMI, técnicas de optimización de índices de desempeño., etc).
5. Simular el sistema y verificar su desempeño con el modelo no-lineal. Pudiéndose recurrir en esta fase de diseño a técnicas de decisión multi-criterio MCDM (Multicriteria Decision Making).
6. Implementación en la planta real. Retornando a la fases adecuadas de no ser satisfactorio el desempeño y robustez conseguido.

Para abordar el planteamiento y diseño de un criterio de sintonización de controladores óptimo-robustos aplicable a sistemas no-lineales; es de suma importancia comprender la dinámica de los sistemas.

Para tal efecto, las siguientes secciones presentan los fundamentos de algunos enfoques de la teoría de control lineal robusto. Iniciando con el enfoque mas representativo: El control lineal  $H_2/H_\infty$ .

Posteriormente se presentan algunos teoremas importantes de estabilidad, utilizados en enfoques alternativos dentro de la teoría de control robusto.

Seguidamente se introducen las definiciones importantes de los índices de desempeño requeridos para diseñar un criterio de sintonización de controladores lineales óptimo-robustos bajo el enfoque de la optimización multi-objetivo MOOP; apuntando la importancia de la etapa de decisión multi-criterio MCDM.

El apartado II, presenta los sistemas no lineales de estudio. Las generalidades del biorreactor de Cholette y de un secador de charolas con no linealidad en el actuador; además de los modelos linealizados y estructuras de control.

El apartado III, expone los índices de desempeño reformulados dentro del criterio propuesto. Finalmente en el apartado IV, se presentan los resultados de la aplicación de la metodología propuesta para dichos sistemas.

## 6. Antecedentes de control robusto

En las tres pasadas décadas se han experimentado cambios en los paradigmas de diseño de controladores lineales robustos (Zames.G.,1981 [120]; Doyle.J y col., 1989 [35]). Siendo el factor detonante, la degradación del desempeño experimentado en controladores con múltiples entradas y salidas MIMO, causado por las inesperadas discrepancias entre los modelos y la realidad (Safonov.M.,2012)[94].

Uno de los enfoques pioneros de control robusto fue el de (Zames.G.,1981) [120]. El cual introdujo el termino  $H_\infty$  en la comunidad de control, presentando el problema de la minimización de la sensibilidad para un sistema SISO. Extendiéndose a sistemas linealizados MIMO mediante la formulación  $H_2/H_\infty$  en el espacio de estados (Doyle.J y col., 1989) [35].

Donde las normas utilizadas  $H_2/H_\infty$  están definidas en el dominio de Laplace y vienen representadas por la matriz de transferencia del sistema o planta generalizada  $\mathbf{G}(s)$ . Cuyas magnitudes están asociadas con el desempeño, el rechazo a las perturbaciones y la estabilidad robusta de un sistema en lazo cerrado.

Bajo este enfoque de diseño; el problema tratado realmente involucra un conjunto de modelos.

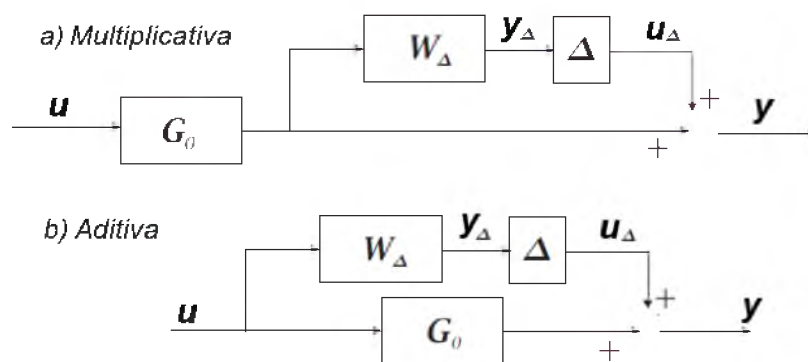


Fig. 1.9: a) Formulación de la incertidumbre multiplicativa b) Incertidumbre aditiva (Zhou.K y Doyle.J 1999).  $\mathbf{G}_0$  representa el modelo nominal,  $\mathbf{W}_\Delta$  es una matriz de ponderaciones y  $\Delta$  es una matriz de acotamiento de la incertidumbre. ( $\mathbf{u}$ ) y ( $\mathbf{y}$ ) son los vectores de control y de salida descritos en Ec-1.37

La incertidumbre paramétrica (Ackermann y *col.*,1993 [5] ; Barmish.,1994 [4]) representa el desconocimiento en los valores exactos en los parámetros del sistema bajo las condiciones de operación. Mientras que las incertidumbres estructurales vienen representadas por las dinámicas no modeladas. Por ejemplo; para un tipo de incertidumbre multiplicativa a la salida, el conjunto de plantas puede representarse como:

$$\mathbf{G}_{\text{mult}} = \left\{ (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{W}_{\Delta}(s)) \mathbf{G}_0(s) : \sigma |\Delta(s)| < 1, \Delta \in \mathbb{C}^{n \times n} \right\} \quad (1.39)$$

Donde:

$\mathbf{G}_{\text{mult}}$  representa el modelo de la planta, con incertidumbre multiplicativa.

$\mathbf{G}_0$  representa el modelo de la planta nominal.

$\mathbf{W}_{\Delta}$  es una matriz de ponderaciones.

$\Delta(s)$  es la matriz de acotamiento de la incertidumbre.

El error entre el modelo del proceso y el proceso mismo, puede ser conceptualizado como una única cota de incertidumbre (incertidumbre no estructurada); o como varias cotas dependientes de la frecuencia (incertidumbres estructuradas). Las principales fuentes de incertidumbre involucradas en la planta nominal  $\mathbf{G}$  pueden originarse en:

- Modificaciones en el punto de trabajo de la planta o con respecto al modelo nominal.
- Dinámica no lineal no considerada.
- Retardos de tiempo no considerados.
- Dinámica de alta frecuencia no considerada.
- Desconocimiento en los parámetros del modelo nominal.

Para estratificar los problemas de análisis y síntesis; la teoría de control robusto emplea un marco de transformaciones fraccionales lineales LFT (Fig-1.10). De tal forma que es posible plantear el problema de manera conveniente, tomando  $\mathbf{P}$  como la matriz de la planta aumentada (planta generalizada  $\mathbf{G}$ , mas cualquier función de ponderación) y  $\mathbf{K}$  como la matriz del controlador. Incluyendo vectores de influencia de dimensiones adecuadas.

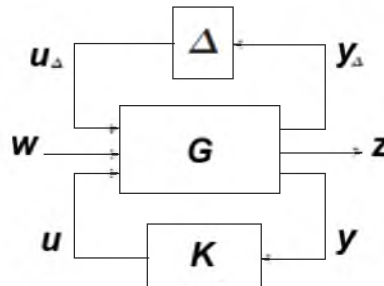


Fig. 1.10: Marco general de transformaciones fraccionales lineales, para el análisis y síntesis de controladores robustos considerando las incertidumbres  $\Delta$  y las funciones de ponderación  $W_n$  dentro de  $\mathbf{G}$  (Zhou.K y Doyle.J 1999)

Para dicha transformación fraccional LFT (Fig-1.10), los vectores involucrados son:

$\mathbf{w}$  es el vector que incluye entradas exógenas (ruidos, perturbaciones y referencias).

$\mathbf{z}$  es el vector de señales de interés en lazo cerrado (errores de seguimiento).

$\mathbf{u}$  es el vector de señales de control.  $\mathbf{y}$  es el vector de señales medibles.

En el dominio de Laplace, la norma  $H_2$  de la matriz de transferencia del sistema en lazo cerrado, viene definida como (Ec-1.40). Pudiéndose obtener caracterizaciones adicionales para dicha norma con experimentos hipotéticos de entrada/salida realizados sobre (Fig-1.10); representadas por la integral del cuadrado de la salida del sistema, ante una entrada tipo impulso.

$$\| \mathbf{G}(s) \|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traza} [\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)] d\omega} \quad (1.40)$$

Por otra parte. La norma  $H_\infty$  de la matriz de transferencia de un sistema en lazo cerrado  $\mathbf{G}$ , es una medida de la sensibilidad de la salida ante una entrada cualquiera. Cuya caracterización es el valor pico máximo, ante la entrada de peor distribución frecuencial. Por lo tanto puede ser utilizada como índice de robustez.

$$\| \mathbf{G}(s) \|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max} [\mathbf{G}(j\omega)] \quad (1.41)$$

Estas caracterizaciones correspondientes a las normas  $H_2$  y  $H_\infty$  establecidas por (Doyle.J y col., 1989) [35]; son de utilidad para definir espacios de matrices Hamiltonianas las cuales no poseen eigenvalores sobre el eje imaginario. No obstante; estas condiciones necesarias y suficientes se cumplen únicamente para sistemas regulares.

Bajo dichas condiciones, la existencia de un controlador internamente estable con norma  $H_2$  ó  $H_\infty$  menor que un numero positivo ( $\gamma$ ) definido previamente, está garantizada; y su solución viene dada en términos de dos ecuaciones algebraicas de Ricatti.

En donde el planteamiento del problema (Ec-1.44) para sistemas descritos por (Ec-1.42) y (Ec-1.43). Está basado en un enfoque de transformaciones fraccionales (LFT) que simplifica la interconexión de la planta generalizada  $\mathbf{G}$  y el controlador  $\mathbf{K}$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}(s) \\ \mathbf{y}(s) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{w}(s) \\ \mathbf{u}(s) \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}(s) \quad (1.43)$$

$$\exists \mathbf{K}(s) \rightarrow (\| \mathbf{T}_{zw}(s) \|_2 < \gamma_1 \wedge \| \mathbf{T}_{zw}(s) \|_\infty < \gamma_2) \quad (1.44)$$

Donde las matrices de transferencia involucradas son las siguientes:

$\mathbf{G}_{zw}$  es la matriz de transferencia de  $w$  a  $z$ .

$\mathbf{G}_{zu}$  es la matriz de transferencia de  $u$  a  $z$ .

$\mathbf{G}_{yw}$  es la matriz de transferencia de  $w$  a  $y$ .

$\mathbf{G}_{yu}$  es la matriz de transferencia de  $u$  a  $y$ . Mientras  $\| \mathbf{T}_{zw}(s) \|_2$  y  $\| \mathbf{T}_{zw}(s) \|_\infty$  son las normas 2 e infinita de dicha matriz respectivamente.

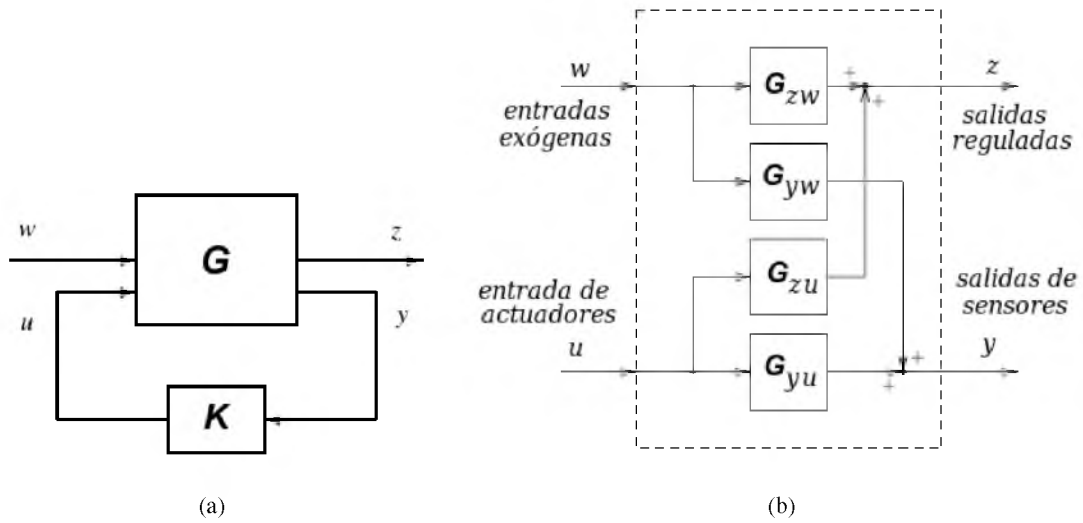


Fig. 1.11: a) Diagrama básico para el control  $H_2/H_\infty$  (Doyle y col., 1989) b) Transformación fraccional LFT

### 6.1. El planteamiento formal $H_2/H_\infty$

Sea el caso de una planta generalizada estrictamente propia ( $\mathbf{D}_{22} = 0$ ). Descrita mediante un conjunto de ecuaciones lineales con coeficientes constantes invariantes en el tiempo (Ec-1.45 - Ec-1.47) con matriz característica  $\mathbf{A}$  Hurwitz (todos sus eigenvalores el plano izquierdo).

Y cuya representación viene dada por transformaciones fraccionales LTF (Fig:1.11b):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \quad (1.47)$$

La matriz de transferencia de dicha planta es:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} (\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right] \quad (1.48)$$

Donde para esta representación dada por ( Ec-1.45 - Ec-1.47); se elige un algoritmo de control lineal descrito en el espacio de estados como en (Ec-1.37):

$$\dot{\xi} = \alpha\xi + \beta(\mathbf{y}_d - \mathbf{y}) \quad (1.49)$$

$$\mathbf{u} = \gamma\xi + \delta(\mathbf{y}_d - \mathbf{y}) \quad (1.50)$$

Cuya matriz del controlador ( $\mathbf{K}$ ) es la siguiente:

$$\mathbf{K}(s) = \gamma(\mathbf{I}s - \alpha)^{-1}\beta + \delta \quad (1.51)$$

$$\mathbf{K} = \left[ \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right] \quad (1.52)$$

Para resolver el problema de control estándar  $H_2/H_\infty$  además de establecer que la matriz característica de la planta generalizada  $\mathbf{A}$  es Hurwitz. La respuesta a un impulso unitario en  $\mathbf{z}_i(t)$  debe ser Lebesgue ( $\mathbf{z}_i \in \mathcal{L}_{2+}$ ). Ya que se considera una planta estrictamente propia ( $\mathbf{D}_{22} = 0$ ).

Esto garantiza que las matrices Hamiltonianas obtenidas en el problema de minimización de las normas  $H_2/H_\infty$ , pertenezcan al dominio del espacio de Ricatti.

Por lo tanto; las condiciones para  $\mathbf{G}(s)$  requeridas se presentan a continuación:

a).- $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$  es estabilizable y  $(\mathbf{C}_1, \mathbf{A})$  es detectable.

b).- $\mathbf{D}'_{12} [\mathbf{C}_1, \mathbf{D}_{12}] = [\mathbf{0}, \mathbf{I}]$

c).- $\mathbf{D}'_{12} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{D}_{21} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{array} \right]$

Por lo que encontrar un controlador admisible  $\mathbf{K}(s)$  que minimice una norma en cuestión ( $H_2$  o  $H_\infty$ ) deriva los siguientes planteamientos tratados uno a la vez.

- 1.- Minimizar  $\| \mathbf{T}_{zw}(s) \|_2$ . Para el caso  $H_2$ .
- 2.- Minimizar  $\| \mathbf{T}_{zw}(s) \|_\infty$ . Para el caso  $H_\infty$ .

Para el caso  $\| \mathbf{T}_{zw}(s) \|_2$ ; se plantean las siguientes matrices Hamiltonianas pertenecientes a los espacios de Riccati:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}_2\mathbf{B}'_2 \\ -\mathbf{C}'_1\mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}' \end{bmatrix}, \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & -\mathbf{C}'_2\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1\mathbf{B}'_1 & -\mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Definiendo  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{Ric}(\mathbf{H}_2)$  y  $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Ric}(\mathbf{J}_2)$  respectivamente; como matrices positivas definidas y que solucionan las ecuaciones algebraicas de Riccati:

$$\mathbf{A}'\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2\mathbf{A} - \mathbf{X}_2\mathbf{B}_2\mathbf{B}'_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{C}'_1\mathbf{C}_1 = \mathbf{0} \quad (1.54)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_2\mathbf{A}' - \mathbf{Y}_2\mathbf{C}'_2\mathbf{C}_2\mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{B}'_1 = \mathbf{0} \quad (1.55)$$

De tal forma que los subproblemas concretos a resolverse son:

$$\mathbf{G}_c(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{F2} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{C}_{1F2} & \mathbf{0} \end{array} \right], \mathbf{G}_f(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{L2} & \mathbf{B}_{1F2} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (1.56)$$

Con las matrices componente:  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{B}'_2\mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{L}_2 = -\mathbf{Y}_2\mathbf{C}'_2$ ,  $\mathbf{A}_{F2} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{A}_{L2} = \mathbf{A} + \mathbf{L}_2\mathbf{C}_2$ ,

$\mathbf{C}_{1F2} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{B}_{1L2} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{D}_{21}$  y  $\hat{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_2 + \mathbf{L}_2\mathbf{C}_2$ .

De donde el único controlador óptimo resultante es:

$$\mathbf{K}_{opt}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_2 & -\mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (1.57)$$

Cabe señalar que dentro del concepto de la minimización de las normas  $H_2$  y  $H_\infty$ . El valor de  $\gamma$  encontrado en el problema  $H_2$ , es utilizado como punto de partida para encontrar un  $\gamma$  en el problema de minimizar  $\| \mathbf{T}_{zw}(s) \|_\infty$ . Por lo que en realidad se generarán controladores con desempeño nominal sub-óptimo (sub-óptimo  $H_2$  y sub-óptimo  $H_\infty$ ). Así, un controlador sub-óptimo  $H_2$  tiene los siguientes arreglos en función de  $\gamma$ :

$$\mathbf{K}_{\text{sub}}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{B}_2 \mathbf{Q}_2 \mathbf{C}_2 & \mathbf{L}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{Q}_2 \\ \hline \mathbf{F}_2 - \mathbf{Q}_2 \mathbf{C}_2 & \mathbf{Q}_2 \end{array} \right] \quad (1.58)$$

Donde:  $\mathbf{Q}_2$  debe cumplir las siguientes condiciones en función de  $\gamma$ :  
 $\mathbf{Q}_2 \in \mathcal{RH}_2$ ,  $\| \mathbf{Q}_2 \|_2^2 < \gamma^2 - (\| \mathbf{G}_c \mathbf{B}_1 \|_2^2 + \| \mathbf{F}_2 \mathbf{G}_f \|_2^2)$ .

De tal forma que para el problema de encontrar un controlador  $\mathbf{K}(s)$  sub-óptimo  $H_\infty$  que minimice  $\| \mathbf{T}_{zw}(s) \|_\infty$ . Se definen los siguientes espacios de Riccati:

$$\mathbf{H}_\infty = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}'_1 - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}'_2 \\ -\mathbf{C}'_1 \mathbf{C}_1 & -\mathbf{A} \end{array} \right], \mathbf{J}_\infty = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A}' & \gamma^{-2} \mathbf{C}'_1 \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}'_2 \mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1 \mathbf{B}'_1 & -\mathbf{A} \end{array} \right] \quad (1.59)$$

Definiendo respectivamente  $\mathbf{X}_\infty = \mathbf{Ric}(\mathbf{H}_\infty)$  y  $\mathbf{Y}_\infty = \mathbf{Ric}(\mathbf{J}_\infty)$  como matrices positivas definidas y que solucionan las ecuaciones algebraicas de Riccati:

$$\mathbf{A}' \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} - \mathbf{X}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}'_1 - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}'_2) \mathbf{X}_\infty + \mathbf{C}'_1 \mathbf{C}_1 = \mathbf{0} \quad (1.60)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty \mathbf{A}' - \mathbf{Y}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{C}'_1 \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}'_2 \mathbf{C}_2) \mathbf{Y}_\infty + -\mathbf{B}_1 \mathbf{B}'_1 = \mathbf{0} \quad (1.61)$$

Con las matrices componente:  $\mathbf{F}_\infty = -\mathbf{B}'_2 \mathbf{X}_\infty$ ,  $\mathbf{L}_\infty = -\mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}'_1$ ,  $\mathbf{Z}_\infty = (\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{Y}_\infty \mathbf{X}_\infty)^{-1}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_\infty = \mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}'_1 \mathbf{X}_\infty + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty + \mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_2$ .

Y el controlador sub-óptimo viene dado por:

$$\mathbf{K}_{\text{sub}}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_\infty & -\mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \\ \hline \mathbf{F}_\infty & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (1.62)$$

## 6.2. Enfoques alternativos de estabilidad y robustez

La síntesis  $H_2/H_\infty$  planteada anteriormente, logra desempeños conservadores en casos donde solamente existe incertidumbre paramétrica.

Para este último caso (Packard y Doyle., 1993) [80], desarrollaron la síntesis  $\mu$  o análisis de incertidumbre estructurada. No obstante; el problema de estabilizar sistemas con dinámica no lineal ha requerido enfoques adicionales a la minimización de las normas de las matrices de transferencia.

Existen razones importantes para estudiar la robustez de sistemas no lineales desde enfoques diversos, puesto que la complejidad de su comportamiento es variado aún en ausencia de perturbaciones e incertidumbres.

Como podrá apreciarse en las siguientes secciones, la evolución de un sistema no-lineal depende de:

- Las condiciones iniciales.
- El valor de factores paramétricos.
- Retardos de tiempo no considerados.
- Magnitud de las acciones de control.

### Método de Lyapunov y las desigualdades lineales matriciales (LMI)

La teoría de Alexandr Mikhailovich Lyapunov, en su trabajo (*El problema general de la estabilidad del movimiento*) (1892) [40]. Incluyó dos métodos para analizar la estabilidad de los sistemas: El método de linealización y el método directo respectivamente (Slotine y Li.,1991) [105].

Como tal. El primer método de Lyapunov representa la justificación teórica del control lineal. Ya que se compone de los procedimientos usados de manera explícita en la solución de las ecuaciones diferenciales. Este método es apto para analizar únicamente la estabilidad local del sistema.

Por otro lado. El segundo método, conocido como el método directo. No está limitado a la estabilidad local. Con este método se analiza el comportamiento de una función escalar que está definida para el sistema dado y que debe cumplir ciertas propiedades desde el punto de vista energético.

Teorema 3 ( **Estabilidad en el sentido de Lyapunov**) *La energía total que almacena un sistema es una función cuadrática de las variables de estado, que para el caso de un sistema no forzado e invariante en el tiempo  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ , dicha función de energía dada por:*

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X} \quad (1.63)$$

Esta condición define un estado estacionario estable si  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  cumple lo siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(\mathbf{X}) > \mathbf{0} & \text{La energía total es positiva: } X \neq 0 \text{ y } \mathbf{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ -\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{X}) > \mathbf{0} & \text{El gradiente de energía es siempre negativo y } -\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{0}) = 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

Donde el gradiente viene expresado mediante dos matrices definidas positivas  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$ :

$$\frac{d(\mathbf{V}(\mathbf{X}))}{dt} = \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} \quad (1.65)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad (1.66)$$

Este teorema de estabilidad conocido generalmente como el segundo método; ha sido una de las herramientas fundamentales para el análisis y síntesis de sistemas no-lineales en la comunidad de control. Ya que permite verificar las características de estabilidad sin resolver el sistema de ecuaciones explícitamente (Rantzer. A.,2000) [86].

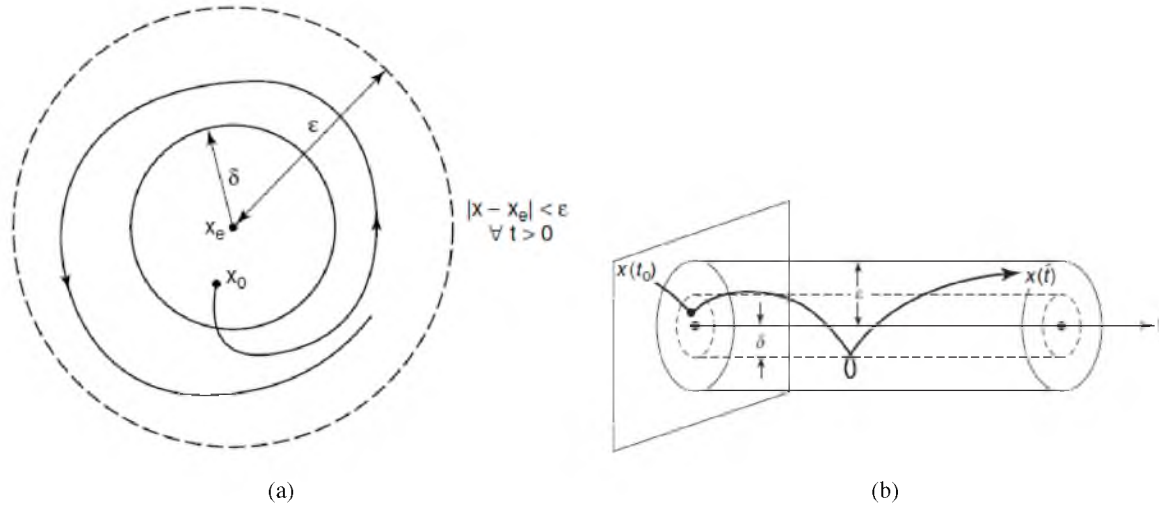


Fig. 1.12: Estabilidad en el sentido de Lyapunov. Para un punto trasladado al origen; se dice que tiene un equilibrio estable si para cada numero  $\varepsilon > 0$  existe un numero  $\delta > 0$  tal que:  $\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ .

Existen otros métodos utilizados para determinar la estabilidad de los sistemas no lineales. El de Krasovskii (1963) [61] para probar condiciones suficientes de estabilidad asintótica; el de Schultz-Gibson (1962) [101]; el de Luré-Postnikov (1940) o criterio del círculo [119]. Para los sistemas no-lineales y lineales variantes en el tiempo, la búsqueda de una función de control Lyapunov (LCF) se ha planteado como un problema de optimización. Haciendo que mediante la elección adecuada de una función de control  $u$ . El gradiente de dicha función  $V(x)$  sea negativo. Garantizando la estabilidad del sistema.

$$\inf_u [\mathbf{V}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{V}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}] < 0, \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad (1.67)$$

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_x(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}) \quad (1.68)$$

La técnica de diseño de controladores mediante funciones de control de Lyapunov (LCF), asegura la estabilidad del sistema en lazo cerrado y obtiene un acotamiento para los valores de los parámetros del controlador. Esto puede dejar un amplio margen de selección. Lo cual puede complementarse con técnicas de optimización de índices de desempeño. Cabe señalar que no existe un método concreto para la búsqueda de una función de control de Lyapunov de un sistema no lineal generalizado.

Adicionalmente. Dicho teorema ha sido utilizado para plantear problemas de control óptimo-cuadrático y control robusto mediante desigualdades lineales matriciales LMI (Chen y col., 2002 [29]; Ruíz-López., 2007 [93]). Donde una desigualdad lineal matricial es una restricción de la forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}) = \mathbf{M}_0 + v_1\mathbf{M}_1 + \dots v_k\mathbf{M}_k < 0 \quad (1.69)$$

Donde:

$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$  es un vector de escalares desconocidos. El cual es denominado también como vector de optimización o decisión. Mientras  $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_k$  son matrices simétricas conocidas.

Como la matriz resultante  $\mathbf{M}(\mathbf{v})$  es no convexa se debe resolver numéricamente. Para lo cual se ha utilizado el algoritmo del elipsoide.

Este planteamiento (Ec-1.69) puede introducir criterios de estabilidad asintótica, de minimización de tiempos de respuesta (o ubicación de polos) y de rechazo a perturbaciones basados en normas. Esto representa una mezcla de objetivos de desempeño. En tal consideración; para una función de transferencia  $\mathbf{T}_{q,\zeta}(s)$  (Ec-1.70) con realización mínima. El problema de diseño basado en LMI bajo la síntesis  $H_\infty$ , consiste en determinar los parámetros del controlador  $K_C$  y  $K_I$  tal que la función de transferencia de lazo cerrado este limitada dentro de un desempeño predefinido  $\|T_{q,\zeta}(s)\|_\infty < \gamma$ .

Dicho resultado es conocido como Bounded Real Lemma (Lema de acotamiento real, por sus siglas en inglés).

$$\mathbf{T}_{q,\zeta}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.70)$$

El lemma de acotamiento real establece la equivalencia entre las siguientes sentencias:

Si  $\|T_{q,\zeta}(s)\|_\infty < \gamma$  y  $\mathbf{A}$  es estable. Existe una solución  $\mathbf{P}$  simétrica positiva definida para la desigualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{P}\mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.71)$$

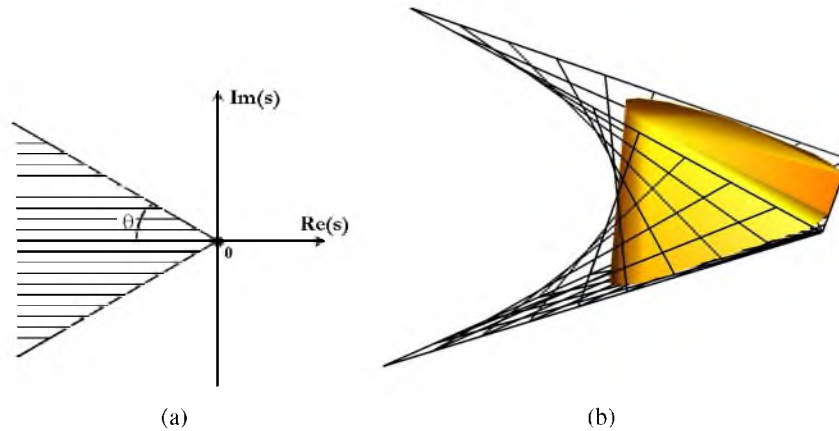


Fig. 1.13: a) Región de estabilidad definida por un cono en el plano complejo b) Aproximación interior convexa LMI de la región de estabilidad no convexa para un sistema de tercer grado ( Henrion-D., 2013)

### Criterios de robustez mediante métodos de optimización

García-Alvarado y col.,(2005) [45] propusieron un criterio para la síntesis de controladores robustos MIMO con arquitectura PID. Este planteamiento adquiere la forma de un problema de optimización, en el cual se minimiza la variación de un índice cuadrático empleando una función de Lyapunov con respecto a los parámetros dinámicos. Teniendo como restricción los eigenvalores de la matriz característica de lazo cerrado.

Como punto de partida. Los autores consideran que el tiempo de asentamiento puede ser minimizado si la parte real de los eigenvalores es maximizada. Por lo tanto el problema de encontrar los valores de las ganancias de un controlador  $\mathbf{K}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  con estructura PID (Ec-1.37), se plantea de la siguiente manera.

$$r_{min} = \text{Min} \{ \text{abs} [ \text{Re}(\lambda_i) ] \} ; r_{min} \rightarrow \text{Max} \quad (1.72)$$

Con la restricción de un sistema estable cuyo comportamiento dinámico está limitado por los eigenvalores de la matriz característica  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ .

Este planteamiento implica múltiples soluciones. Por lo que se introducen restricciones adicionales basadas en un índice de desempeño mediante una función de Lyapunov.

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{*T} \mathbf{P} \mathbf{x}^* \quad (1.73)$$

La minimización de un índice cuadrático de desempeño definido como:

$$\begin{aligned}
 I_L &= \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}) dt = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^{*T} \mathbf{d}^{*T} \mathbf{Q} \mathbf{d}^* \mathbf{x}^*) dt \\
 &= \mathbf{x}^{*T}(0) \mathbf{P} \mathbf{x}^*(0) - \mathbf{x}^{*T}(t) \mathbf{P} \mathbf{x}^*(t) \Big|_{t \rightarrow \infty}
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

Donde:  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{d}^{*T} \mathbf{Q} \mathbf{d}^*$ .

Si el sistema es estable; entonces la matriz  $\mathbf{P}$  existe y es simétrica y positiva definida. Además de que este índice cuadrático ( $I_L$ ), depende solamente de las condiciones iniciales siempre y cuando

$$\mathbf{x}^{*T}(t) \mathbf{P} \mathbf{x}^*(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \tag{1.75}$$

Por lo tanto, un criterio de desempeño óptimo viene dado por:

$$I_L \rightarrow Min \tag{1.76}$$

Sujeto a:

$$Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, (n + s). \tag{1.77}$$

Como puede observarse. Este criterio solamente refiere al desempeño del sistema; mientras que las características de estabilidad robusta no son consideradas. Los autores resuelven este inconveniente presentando un planteamiento alternativo respecto de la sensibilidad del índice ( $I_L$ ) respecto de los parámetros de la matriz del sistema ( $\mathbf{A}$ ).

El planteamiento simplificado es el siguiente:

$$\exists (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow I_L < \gamma_1, \phi_{max} < \gamma_2, \alpha < -\gamma_3 \tag{1.78}$$

Minimizar el índice considerado en García-Alvarado y col.,(2005) [45]:

$$I_L = \int_0^{\infty} (y^T Q y) dt = \int_0^{\infty} (x^{*T} d^{*T} Q d^* x^*) dt \quad (1.79)$$

$$= x^{*T}(0) P x^*(0) - x^{*T}(t) P x^*(t) |_{t \rightarrow \infty}$$

Minimizar la relación imaginario/real de los eigenvalores de la matriz característica de lazo cerrado:

$$\phi_{max} = \max \left| \frac{Im(\lambda_j)}{Re(\lambda_j)} \right| \quad (1.80)$$

Y finalmente la abcisa espectral:

$$\alpha = \left| \max [abs(Re(\lambda_j))] \right| \quad (1.81)$$

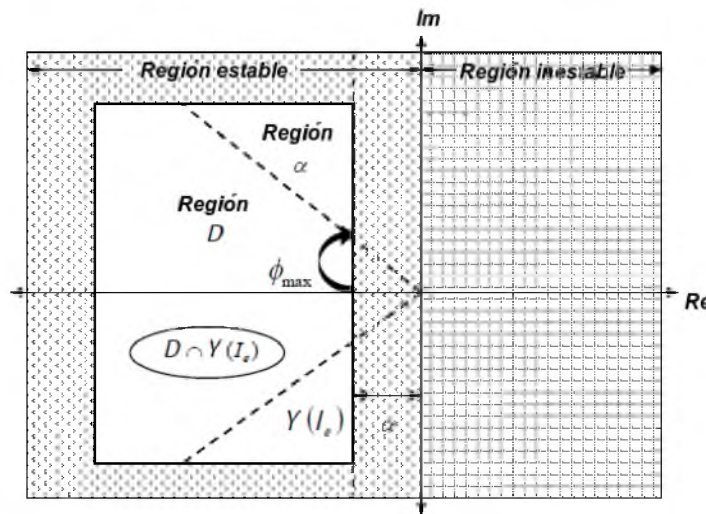


Fig. 1.14: Representación del criterio de sintonización ( $\mathcal{L}_{2+}/D$ ) fuente:(J.Carrillo-Ahumada 2011) [27]

Es así. Que las especificaciones establecidas en el proceso de diseño de un sistema de control, proporcionan una medida de la habilidad de desempeño que puede lograr en lazo cerrado ([28], [95]). Pudiendo expresarse tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

A continuación se definen algunos indicadores de desempeño en el dominio del tiempo, para la dinámica del error ( $e(t)$ ) y la señal de control ( $u(t)$ ) (Smith y Corripio.,1985) [106].

Los índices o entidades básicas de desempeño mostrados, han sido usados extensamente en la sintonización de controladores. Por ejemplo, la integral del cuadrado del error (integral squared error, ISE por sus siglas en inglés) (Shinskey, F.G., 1988 [102]; Morari.,1988 [72]; Silva y Salgado 2005)[96]).

ISE: (integral del cuadrado del error)

$$J_{ISE} = \int_0^T (e(t))^2 dt \quad (1.82)$$

IAE:(integral del valor absoluto del error)

$$J_{IAE} = \int_0^T \|e(t)\| dt \quad (1.83)$$

ITAE :(integral ponderada del tiempo por el valor absoluto del error)

$$J_{ITAE} = \int_0^T t \|e(t)\| dt \quad (1.84)$$

ITSE: (integral ponderada del tiempo por el cuadrado del error)

$$J_{ITSE} = \int_0^T t (e(t))^2 dt \quad (1.85)$$

ISU: (integral de la salida del control cuadrática)

$$J_{ISU} = \int_0^T t (u(t) - u_{ss})^2 dt \quad (1.86)$$

IADU: (integral de las desviaciones totales del control)

$$J_{IADU} = \int_0^T \left\| \frac{du}{dt} \right\| dt \quad (1.87)$$

Adicionalmente. Existen índices de desempeño calculables a partir de los planteamientos de las matrices en lazo cerrado de un sistema linealizado SISO o MIMO y que pueden ser evaluados analíticamente, siempre y cuando el algoritmo de control asegure estabilidad asintótica (García-Alvarado.,2010 [44]; Vargas-González y col., 2013 [115]).

En García-Alvarado.,(2010) [44], los índices de desempeño son expresados a partir de funciones de excitación conocidas en los casos servo , regulatorio y pulso respectivamente.

Es bien sabido que los índices de desempeño basados en la integral del cuadrado del error son antagonistas de los índices de desempeño basados en la integral del cuadrado del control. Por lo que el problema de sintonización de controladores mediante índices de desempeño, es una optimización multi-objetivo que debe balancear el antagonismo inherente desempeño/robustez mediante algún criterio.

## 7. Control óptimo

La generación de este nuevo marco conceptual dentro de la disciplina de control robusto, se centró en la optimización convexa como resultado de las investigaciones desarrolladas en la década de los 90 (Khargonekar y Rotea.,1991 [2]; Halder y col., 1997 [48]). En particular sobre las desigualdades lineales matriciales LMI (Gahinet y Apkarian., 1993 [41]; Chilali y col., 1999 [31]; Chilali y Scherer., 1997 [99]).

Como consecuencia, las formulaciones al problema de control  $H_2/H_\infty$  mediante ecuaciones de Ricatti y Lyapunov pasaron a ser consideradas como casos especiales de desigualdades lineales matriciales LMI (Chilali y Scherer., 1997 [100]; Marjaneh y Mohammad., 2007 [69]; Bedioui y col.,2008 [13]).

Se ha comprendido ahora que la solución al planteamiento  $H_2/H_\infty$  puede expresarse en términos de ecuaciones de Ricatti o de desigualdades lineales matriciales LMI. Requiriéndose técnicas de optimización convexa para resolver este último planteamiento (Karmarkar.N.,1984 [60]; Nesterov y Nemirovski., 1988 [74]; Gahinet y Apkarian.,1993 [43]; Bevrani e Hiyama., 2007 [17]; Lianghong.W y col.,2013[117]).

La formulación  $H_2/H_\infty$  encuentra planteamientos alternativos de optimización mediante el criterio  $\mathcal{L}_{2+}/\mathcal{D}$  de Garcia-Avarado y col.,2010 [44]. Sintetizando controladores mediante la optimalidad de Pareto como en Carrillo-Ahumada y col.,2011 [27], aplicándose satisfactoriamente a Bio-reactores de agitación continua y columnas de destilación.

Por otra parte, Gahinet y Apkarian.,(2011) [42] presentan el planteamiento  $H_\infty$  estructurado. Sintetizado controladores de estructura arbitraria, incluyendo observadores de estado (Apkarian y Noll.D., 2013) [10]. Lo anterior requiere de técnicas especiales de optimización no-suaves (Non-Smooth optimization) (Apkarian y Noll., 2006a [8]; Apkarian y col.,2007 [9]). Los desarrollos anteriores representan un marco conceptual donde el diseño de controladores con múltiples prestaciones puede tomar planteamientos variados bajo el enfoque de la optimización.

### 7.1. Enfoque de diseño mediante técnicas de optimización

El problema general de control óptimo para un sistema de la forma Ec-1.88 consiste en encontrar un controlador  $\mathbf{K}$  que proporcione una función  $u(t)$  que minimice una medida de desempeño dada por una función de costo de la forma:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t)] dt + \phi[x(t_f), t_f] \quad (1.88)$$

Donde  $L[x(t), u(t)]$  es la función de costo a minimizar; mientras que  $\phi[x(t_f), t_f]$  es la función que caracteriza el costo del estado final.

Dicho problema de control puede ser resuelto por métodos variacionales. Donde la formulación de Hamilton-Jacobi-Bellman representa una solución general y exacta. No obstante; la solución a dicho planteamiento es intratable en la mayoría de los casos (Primbs James A. y Doyle.J., 1999) [83].

La optimalidad con respecto a un solo criterio; puede no ser deseable para una determinada aplicación. Como se ha comentado, la estabilidad en lazo cerrado, buenos márgenes de ganancia y fase, así como la robustez ante las dinámicas no modeladas son requerimientos importantes.

Para un sistema linealizado de la forma (Ec-1.45) y (Ec-1.47) donde el único criterio es la minimización de la energía. Es posible obtener una solución analítica al problema de control óptimo regulatorio. Este problema es denominado como regulador lineal cuadrático (LQR).

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(\mathbf{t})\mathbf{Q}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{t})\mathbf{R}\mathbf{u}(\mathbf{t})] d\mathbf{t} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\mathbf{t}_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(\mathbf{t}_f) \quad (1.89)$$

Aquí, la función de costo a minimizar viene representada por la energía de la salida controlada y la energía de la señal de control respectivamente:

$$L[x(t), u(t)] = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T(\mathbf{t})\mathbf{Q}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{t})\mathbf{R}\mathbf{u}(\mathbf{t})) = \frac{1}{2}[\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t})] \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

Las matrices  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{S}$  son matrices de ponderación. Donde  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{S}$  son matrices positivas semidefinidas y  $\mathbf{R}$  positiva definida. Suponiendo una disponibilidad de los estados; una ley de control óptimo puede expresarse como la retroalimentación lineal del estado tal que:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (1.91)$$

Donde la matriz  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) \quad (1.92)$$

Mientras que  $\mathbf{P}(t)$ ; es la solución a la ecuación diferencial de Riccati, con  $\mathbf{P}_{tf} = \mathbf{S}$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} = -\dot{\mathbf{P}}(t) \quad (1.93)$$

Así. Para un horizonte infinito ( $t_f \rightarrow \infty$ ), la ecuación diferencial de Riccati tiende a un valor estacionario  $\mathbf{P}_\infty$  el cual caracteriza la solución de equilibrio. Este punto es referido como la solución a la ecuación algebraica de Riccati.

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}_\infty + \mathbf{P}_\infty\mathbf{A} - \mathbf{P}_\infty\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_\infty + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (1.94)$$

Cabe señalar que aunque la técnica LQR únicamente contempla el criterio de minimización de la energía. Se obtienen controladores que son estables y en ciertos aspectos poseen propiedades de robustez. Por otra parte, dentro de las soluciones no analíticas al problema de control óptimo, también es posible emplear métodos de programación heurísticos para encontrar un controlador comprometido con diferentes prestaciones. En este caso se habla de un proceso de optimización multi-objetivo (MOOP).

El problema de sintonizar controladores mediante técnicas de optimización multi-objetivo; involucra dos enfoques principales de solución (G.Reynoso Meza y col.,2013) [88]. El primero consiste en definir una función objetivo agregada (AOF); mientras que el segundo enfoque, es el de generar primero y escoger después (GFCL) Fig-1.15.

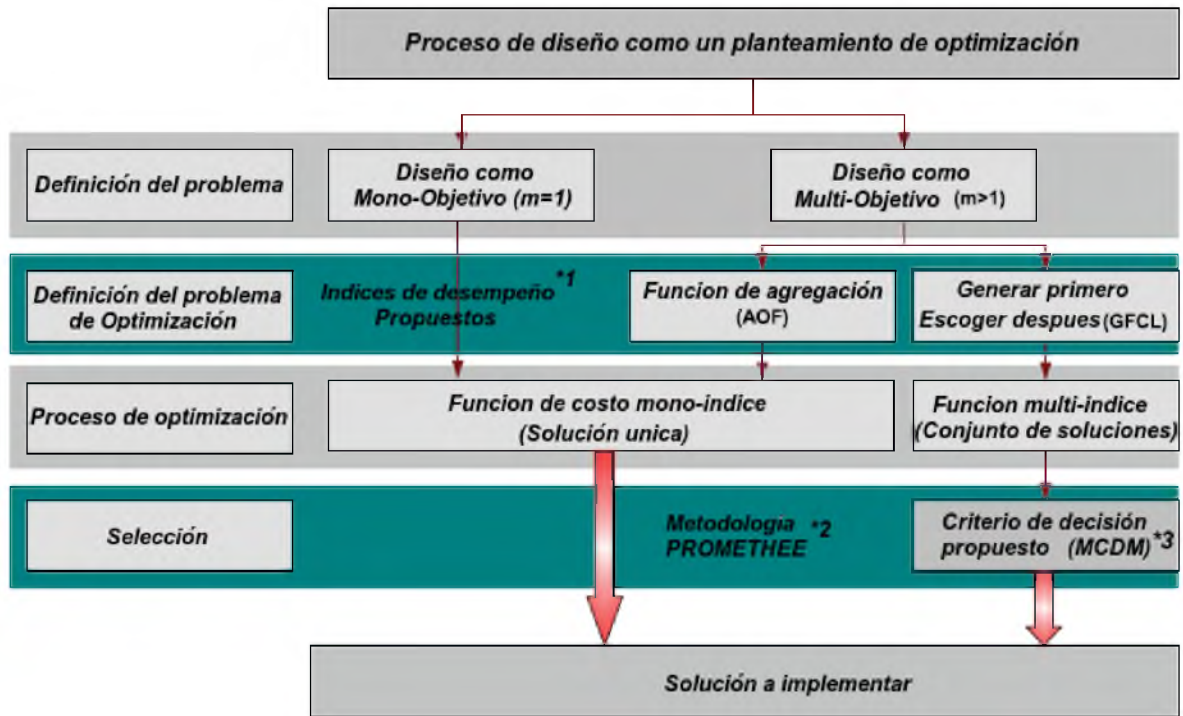


Fig. 1.15: Proceso de diseño de controladores mediante métodos de optimización Fuente:[87] . Nota: \*1,\*2 y \*3 propuesto en (Rodríguez-Mariano y col.,2015).

Dada la descripción de un sistema de la forma (Ec-1.45) y (Ec-1.47) y un conjunto de funciones objetivo  $\mathbf{J} = \left[ \mathbf{J}_1(\theta), \dots, \mathbf{J}_m(\theta) \right]$ , las cuales describen la dinámica de interés dentro de un espacio de decisión  $(\theta)$ , junto con un conjunto de restricciones.

Un problema de control con enfoque de optimización multi-objetivo tiene el siguiente planteamiento:

$$\min_{\theta \in \mathfrak{X}^n} \mathbf{J}(\theta) = \left[ \mathbf{J}_1(\theta), \dots, \mathbf{J}_m(\theta) \right] \in \mathfrak{R}^m \quad (1.95)$$

Sueto a:

$$\mathbf{g}(\theta) \leq \mathbf{0} \quad (1.96)$$

$$\mathbf{h}(\theta) = \mathbf{0} \quad (1.97)$$

$$\theta_1 \leq \theta_i \leq \theta_n, i = [1, \dots, n] \quad (1.98)$$

Para el planteamiento anterior  $\mathbf{J}(\theta)$  es el vector de objetivos; mientras  $\mathbf{g}(\theta)$  y  $\mathbf{h}(\theta)$  son los vectores de restricciones de desigualdad e igualdad, respectivamente.

Es importante señalar que dentro del planteamiento de optimización multi-objetivo (MOOP); el cual ha sido considerado para el diseño del criterio de sintonización propuesto. No existe solución única que sea la mejor para todos los objetivos. En contraste, existe un conjunto de soluciones con distinto grado de compromiso, denominado conjunto de Pareto.

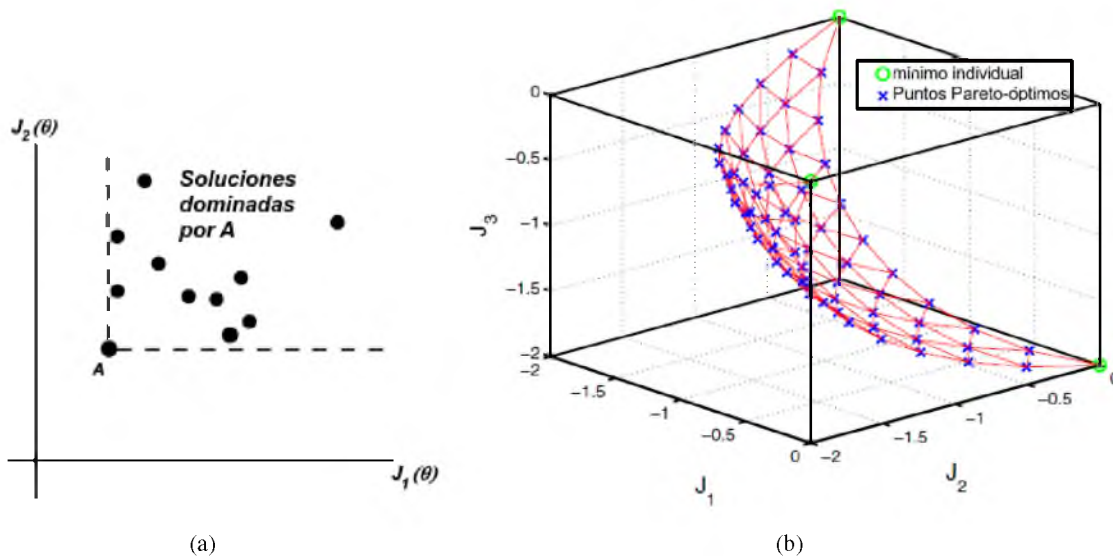


Fig. 1.16: Concepto de dominancia mediante el frente de Pareto a) La solución A tiene una mejor función de costo para todos los objetivos planteados b) Frente de Pareto con 3 objetivos y 66 puntos. Fuente: (Logist Filip y col.,2010)

En este sentido; la aproximación de frentes de Pareto y la fase de decisión (MCDA/M) para el ajuste y análisis de controladores es una herramienta usada ampliamente en la ingeniería de control (Reynoso-Meza y *col.*,2014 [87]).

Lo anterior no es una tarea trivial, ya que el análisis de un frente de Pareto de 4 o más objetivos conlleva a un análisis multidimensional de soluciones.

Tarde o temprano el diseñador deberá decidir la importancia relativa de cada uno de los objetivos dentro de la función a optimizar para obtener una solución preferida. De esta forma la articulación de la función objetivo puede realizarse en diferentes momentos.

- **Articulación a priori:** El diseñador selecciona un vector de ponderaciones ( $\mathbf{V}_w$ ) previo a ejecutar el algoritmo de optimización. Esto implica combinar los objetivos en una función escalar; lo cual convierte el problema multi-objetivo en uno mono-objetivo (El índice ITAE por ejemplo).
  
- **Articulación progresiva:** El diseñador interactúa con la optimización mediante una opción dentro del algoritmo; la cual actualiza las ponderaciones dentro del vector.
  
- **Articulación a posteriori:** En esta variante no se especifican las preferencias de los objetivos antes o durante el proceso de optimización. Esto puede obedecer a una etapa de decisión multi-criterio (MCDA/M) o a un algoritmo que proporciona soluciones candidatas eficientes.

Un claro ejemplo de un planteamiento de optimización multi-objetivo que emplea una función de costo compuesta de índices de desempeño analíticos obtenidos a partir del sistema linealizado en lazo cerrado, es el de (García-Alvarado *col.*, 2010) [44].

En este planteamiento, para un espacio de decisión  $\theta = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ . Se define una función objetivo a minimizarse:

$$J(\theta) = w_1 I_{y,servo} + w_2 I_{y,reg} + w_3 I_{u,servo} + w_4 I_{u,reg} + w_5 I_{y,pulso} + w_6 I_{u,pulso} \rightarrow \min \quad (1.99)$$

con restricciones:

$$\phi_{max} = \max \left( \frac{Im(\lambda_j)}{Re(\lambda_j)} \right) < 1, \forall_i = 1, 2, \dots, (n + k)$$

y  $\lambda_j : |\lambda_j I - \mathbb{A}| = 0$ .

Donde el balance entre desempeño y robustez se consigue ajustando el vector de ponderaciones

$$\mathbf{V}_w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \quad (1.100)$$

El trabajo de Carrillo-Ahumada *y col.*, 2011 [27], utiliza un algoritmo complejo compuesto de cuatro pasos básicos, empleando un planteamiento de optimización multi-objetivo con articulación a posteriori. Al respecto, el punto (3.2) de dicho algoritmo enuncia lo siguiente:

“Adicionalmente, el segundo subproblema indica que las integrales representadas por:  $I_{y,servo}, I_{y,reg}, I_{u,servo}, \dots, I_{u,pulso}$  pueden tener diferentes magnitudes. Por lo tanto, es necesario elegir las ponderaciones para que cada uno de los términos de  $J(\theta)$  tenga aproximadamente el mismo orden de magnitud”.

En este sentido la elección de los pesos toma como referente el valor mas alto de los seis índices, para definir los cinco restantes. No obstante;  $I_y$  e  $I_u$  están en conflicto. Significando que para minimizar  $I_y$  es necesario incrementar  $I_u$ . Lo que representa un conflicto entre desempeño y robustez.

## 7.2. La etapa de decisión multi-criterio MCDM

Dentro del proceso de diseño de controladores con técnicas de optimización. La etapa MCDA/M (Figueira y col., 2005) [39] consiste en el análisis del conjunto de soluciones y la posible selección de una alternativa de diseño (la más preferente desde el punto de vista del optimizador).

Comúnmente, dicho análisis y selección se desarrolla en un conjunto de soluciones Pareto óptimas, que aproximan un frente de Pareto (Miettinen., 1998) [71].

En las dos pasadas décadas, varias metodologías de decisión multi-criterio (MCDA) han sido propuestas por la comunidad científica para seleccionar adecuadamente las alternativas con mejor nivel de compromiso, que surgen en diversos campos de diseño de sistemas y aplicaciones de ingeniería (Brans.,1982 [22]; Vincke y Brans.,1985 [21]).

- **TOPSIS** Técnica para ordenamiento de preferencias por similitud a una solución ideal. (*Technique for Order Preferences by Similarity to an Ideal Solution*). (Hwang y Yoon., 1981) [52].
- **VIKOR** Técnica de optimización por el grado de compromiso. (*VlseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje*). (Opricovic.,2004 [77]; Ramachandran y col.,2013 [85]).
- **ELECTRE** Técnica de eliminación mediante relaciones de ranqueo. (*ELimination Et Choice Translating REality*) [81].
- **PROMETHEE** Metodos de Organización del ranqueo de preferencias para el enriquecimiento de evaluaciones. (*Preference Ranking Organization METHods for Enrichment Evaluations*). (Brans y col., 1984, 1985 [22], [21]).

Estas metodologías de decisión, realizan una búsqueda de aquellas soluciones con el mejor nivel de compromiso dentro de un conjunto de alternativas y escenarios. Donde comúnmente intervienen criterios en conflicto (Wiecek y col., 2008) [58].

En el caso de buscar el mejor controlador. Un planteamiento MCDM genera una matriz de decisión ( $\Psi$ ) de orden equivalente al numero de controladores evaluados por los índices o indicadores de desempeño involucrados. Donde se evalúan múltiples índices en conflicto (error-esfuerzo de control), con la finalidad de identificar el controlador con mejores prestaciones.

De manera general. El problema de decisión multi-criterio MCDM, deberá plantear la forma conveniente de identificar las mejores alternativas descritas por un conjunto de criterios. Donde pueden estar implícitas, las interacciones mutuas de las entradas en un sistema MIMO.

$$MCDM \begin{cases} \text{Min} \{c_1(a_1), c_2(a_2), \dots, c_j(a_i) \mid a_i \in A; c_j \in C\} & \text{Maximizar o Mininimizar} \\ A = \{a_i \mid i = 1, 2, \dots, m\} & \text{Es el conjunto de alternativas} \\ C = \{c_j \mid j = 1, 2, \dots, n\} & \text{Es el conjunto de criterios} \end{cases} \quad (1.101)$$

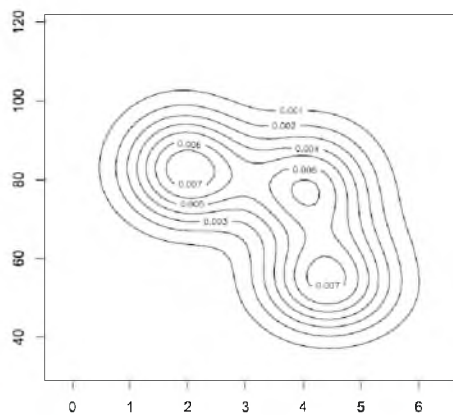
Un ejemplo de la matriz de decisión para  $i$  opciones de control con tres índices de desempeño del error ( $J_{em}$ ) y tres del control ( $J_{um}$ ); adquiere la siguiente forma:

$$\Psi = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1j} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{i1} & J_{i2} & \dots & J_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{em1}^{11} & J_{em2}^{12} & J_{em3}^{13} & J_{um1}^{14} & J_{um2}^{15} & J_{um3}^{16} \\ J_{em1}^{21} & J_{em2}^{22} & J_{em3}^{23} & J_{um1}^{24} & J_{um2}^{25} & J_{um3}^{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{em1}^{i1} & J_{em2}^{i2} & J_{em3}^{i3} & J_{um1}^{i4} & J_{um2}^{i5} & J_{um3}^{i6} \end{bmatrix} \quad (1.102)$$

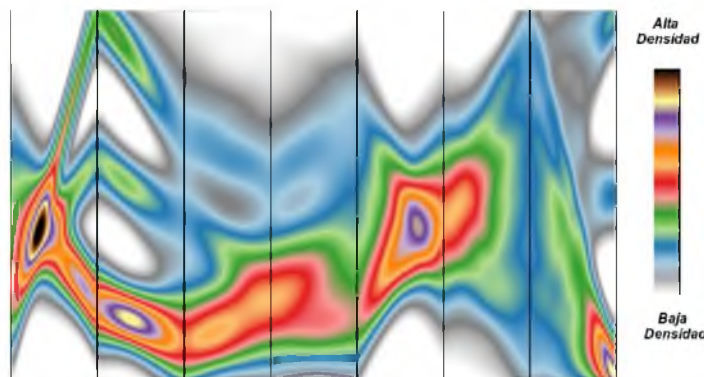
Trabajos referentes como el de (Reynoso-Mezay *col.*,2014) [87]; señalan la importancia del planteamiento multi-objetivo MOP (Multiobjective problem) así como también del proceso de decisión MCDM. Es decir; es necesario establecer un concepto de diseño tal que permanezca en la mente del diseñador.

Es ampliamente aceptado que las herramientas de visualización son valiosas en la etapa de análisis del conjunto de soluciones, previo a tomar una decisión (Lotov y Miettinen.,2008) [67].

Estas herramientas permiten apreciar el intercambio de prestaciones entre objetivos de diseño y el impacto que uno puede tener en los otros (Bonissone y col.,2009) [19]. Mientras que la visualización podría considerarse resuelta en 2 y 3 dimensiones para apreciar el intercambio de prestaciones, esto no se logra visualizar adecuadamente en mayores dimensiones. Por ello es crucial contar con herramientas para analizar datos multidimensionales y de ser posible visualizarlos.



(a)



(b)

Fig. 1.17: Densidad de visualización de dos herramientas (Heinrich y Weiskopf., 2013 [50]) a) Gráfica de contorno (Bivariada) donde se muestran isocurvas para una densidad estimada usando un kernel Gaussiano en 2D. b) Coordenadas paralelas (multi-variada); donde se han agregado colores para incrementar las dimensiones visualizadas.

## 8. Síntesis del capítulo

En el presente capítulo se ha realizado una revisión sobre los conceptos básicos que son utilizados durante el desarrollo del presente trabajo de tesis.

Dentro de este marco de referencia, se han observado diferentes áreas de oportunidad sobre control robusto, sistemas no lineales con multiplicidad de estados estacionarios y herramientas de evaluación y visualización del concepto de diseño de controladores.

En lo que se refiere a los lineamientos de un criterio de sintonización de controladores lineales aplicable a sistemas no-lineales. La búsqueda de un planteamiento adecuado mediante la optimización multi-objetivo MOOP es de gran interés. Ya que involucra un conjunto de disciplinas dentro del enfoque generar primero y escoger después GFCL.

El marco teórico de la síntesis de controladores lineales robustos aplicables a sistemas no-lineales, ha presentado diversas técnicas de diseño. Distinguiéndose dos enfoques a considerar:

1. El de planteamientos analíticos relacionados a la minimización de las normas del sistema (Minimización de las normas  $H_2, H_\infty$ , Método de Lyapunov y desigualdades matriciales LMI).
2. El de soluciones numéricas mediante la minimización de índices de desempeño dependientes del tiempo o de la frecuencia (Optimización mono-objetivo/multi-objetivo).

Es de importancia destacar la consistencia del criterio de síntesis  $\mathcal{L}_{2+}/\mathcal{D}$  propuesto por García Alvarado y Ruíz Lopez., 2010. Principalmente porque representa una alternativa atractiva para sintetizar controladores lineales robustos sin limitante en la estructura del sistema linealizado. Partiendo de índices de desempeño analíticos que no requieren de grandes recursos computacionales. Siendo equivalente al criterio de minimización de la norma  $H_\infty$  de Doyle y col., 1989.

Para encontrar un controlador óptimo-robusto este criterio ha recurrido a la optimalidad de Pareto, mapeando seis índices de desempeño de los casos servocontrol, regulatorio y pulso en  $\mathcal{R}^2$ . Empleándose algoritmos de optimización complex para minimizar la función objetivo.

Bajo esta consideración, el conflicto inherente desempeño/robustez de la función objetivo que optimiza la trayectoria del control y del estado del sistema perturbado. Podría encontrar cierta conciliación empleando una estructura o método de articulación que favorezca la convergencia de un algoritmo de optimización multi-objetivo. Así como también, facilitar la etapa de decisión multicriterio, evitando el conflicto de asignación del vector de ponderaciones.

**Parte II**

**Sistemas de aplicación**



## Capítulo 2

# Antecedentes de los sistemas de aplicación

En este capítulo se presentan las generalidades de los sistemas no lineales donde será aplicado el criterio de análisis/síntesis diseñado en este trabajo.

Primeramente se presenta el biorreactor de Cholette, el cual ha sido abordado por muchos autores en el campo de la ingeniería Química. Se expone una descripción de sus características no lineales además del interés de la comunidad de control automático sobre este sistema.

Un segundo sistema no-lineal de gran incertidumbre paramétrica, es un secador eléctrico de batcheo de tipo charolas. Presentandose el modelo no-lineal obtenido mediante el enfoque de espacio de estados, así como el modelo linealizado en un punto de trabajo. Los alcances del capítulo son:

- ① Presentar el modelo del biorreactor de Cholette y sus características no lineales.  
En este sistema será aplicada la metodología de análisis multicriterio (Capítulo IV).
- ② Mediante un enfoque de parámetros concentrados, presentar el modelo matemático de un secador de charolas.  
En este sistema se ejemplificará la metodología de síntesis multiobjetivo de controladores lineales PI(D) (Capítulo V).

## 1. El biorreactor de Cholette

Los reactores de agitación continua tipo tanque (CSTRs por sus siglas en inglés); han sido intenso objeto de estudio por la comunidad de control durante las pasadas dos décadas (Liou y Chien.,1991 [63]; Kumar y Kulkarni.,1994 [62]; Chidambaram y Reddy.,1996 [30]; Sree y Chidambaram.,2002 [108]; Ibarra-Junquera y Rosu.,2007 [53]; Rajinikanth y Latha.,2012 [84]).

Desde que el congreso de Amsterdam reconociera en el año de 1957 las tareas de diseño y control de reactores como actividades fundamentales en la ingeniería de la reacción Química, muchas publicaciones importantes como la de Van Heerden., (1953) [114] referentes al comportamiento de multiplicidad, se han realizado para reactores con mezclado idealizado y no idealizado.

El trabajo de Lo y Cholette ([64] y [65]) hace referencia a este tipo de bioreactores (CSTR) para reacciones exotérmicas con mezclado no idealizado, considerando el problema de multiplicidad de estados para sistemas compuestos por  $p$  reactores.

En Lo y Cholette.,(1978) [64] se describe el biorreactor de agitación continua con mezclado no ideal bajo condiciones operativas isotérmicas, donde se lleva a cabo una reacción enzimática de la forma:

$$\frac{k_1 c}{(1 + k_2 c)^2} \quad (2.1)$$

Esta forma de la rapidez de reacción es similar a una función de Michaelis-Menten para bajas concentraciones de sustrato, pero a altas concentraciones se incluye en el modelo un parámetro de inhibición ( $k_2$ ).

De tal manera que, un controlador destinado a mantener dicha reacción exotérmica, deberá considerar las concentraciones de entrada y salida del reactor. Manteniendo la estabilidad ante las condiciones de multiplicidad y entradas exógenas al sistema; como puede ser el flujo de alimentación, por ejemplo.

El biorreactor de Cholette con mezclado continuo no idealizado, portador de una reacción enzimática es representado en la (Fig-2.1).

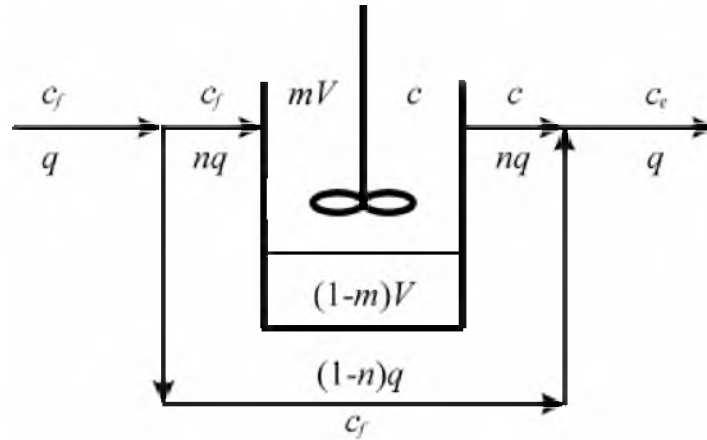


Fig. 2.1: Representación conceptual del biorreactor de Cholette. ( $c$ ) es la concentración del sustrato en el tanque, ( $c_e$ ) es la concentración del sustrato a la salida del reactor (variable controlada) y ( $c_f$ ) representa la concentración a la entrada (variable manipulada o de control)

Parámetro	Descripción básica	Unidades de medida
$c$	Concentración del sustrato en el tanque en la zona de mezclado.	$mol/l$
$c_e$	Concentración del sustrato a la salida del reactor (variable controlada)	$mol/l$
$c_f$	Concentración a la entrada (variable de control)	$mol/l$
$q$	Flujo de alimentación	$l/s$
$n$	Fracción del reactante alimentado en la zona de perfecto mezclado.	adimensional
$m$	Fracción del volumen total $V$ donde ocurre la reacción.	adimensional
$V$	Volumen del reactor	$l$
$(1 - m)$	Es la zona muerta	adimensional
$k_1$	Constantes de la velocidad de la reacción	$s^{-1}$
$k_2$	Constantes de inhibición de la reacción	$(mol/l)^{-1}$

Tabla 2.1: Parámetros del modelo del biorreactor de Cholette.

### 1.1. Modelado matemático del biorreactor de Cholette

Este biorreactor es modelado generalmente por una ecuación diferencial y una algebraica, como en los siguientes trabajos:

(Chidambaram y Reddy.,1996 [30]; Sree y Chidambaram 2002,2003a,2003b [108], [109], [110]; Carrillo-Ahumada y col.,2011 [27] y Rajinikanth y Latha., 2012 [84]).

El modelo simplificado que captura el comportamiento no ideal de mezclado, supone que todos los parámetros (Tabla-2.1) y propiedades fisicoquímicas son constantes y que la reacción enzimática ocurre en el reactor bajo condiciones operativas isotérmicas.

Considerando lo anterior; el cambio en la concentración inicial ( $c_0$ ) en la zona de mezclado activa ( $m$ ) dependiente de la fracción del flujo alimentado ( $nq$ ), puede establecerse como una diferencia. Donde en el segundo termino se ha considerado una alta concentración, introduciendo el factor de inhibición ( $k_2$ ) en un esquema similar a una función de Michaelis-Menten para bajas concentraciones de sustrato.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{qn}{Vm}(c_f - c) - \frac{k_1c}{(1 + k_2c)^2} \quad (2.2)$$

Considerando la morfología en el bypass del reactor, la concentración de salida ( $c_e$ ) se expresa como la contribución  $(1 - n)$  de la concentración de alimentación y la propia salida del reactor ( $c$ ).

$$c_e = nc + (1 - n)c_f \quad (2.3)$$

El modelo citado (Ec-2.2, Ec-2.3) corresponde a un sistema SISO no lineal, en donde el valor actual de la variable de salida dependerá de las condiciones iniciales del mismo y de los parámetros de influencia. En algunos casos; solo se utiliza la concentración de sustrato como (Jhunjhunwala y col., 2001 [57]; Sree y Chidambaram.,2003 [109]; Sivaramakrishnan y col.,2008 [103]).

Tabla 2.2: Descripción de los parámetros del modelo de Cholette (Sree y Chidambaram,2003a)

Variable	Valor nominal	unidades
$q$	$3.33 \times 10^{-5}$	$[m^3 s^{-1}]$
$V$	$1 \times 10^{-3}$	$[m^3]$
$n, m$	0.75	<i>adimensional</i>
$k_1$	10	$[s^{-1}]$
$k_2$	10	$[m^3 kg mol^{-1}]$

Dicho modelo aporta información sobre los puntos de multiplicidad, mediante una expresión polinómica (Ec-2.4) en función de las concentraciones  $c_f, c_e$ . Donde la condición en estado estacionario se cumple si  $Z(c_f, c_e) = 0$ .

$$Z(c_f, c_e) = p_0 (c_e + \alpha)^3 - p_1 (c_e + \alpha)^2 - p_2 (c_e + \alpha) - p_3 \quad (2.4)$$

Donde:  $\alpha, p_1, p_2$  y  $p_3$  son funciones de la concentración a la entrada del reactor  $c_f$ ; mientras que  $p_0$  corresponde al cuadrado del coeficiente de la velocidad de la reacción  $k_2$  y  $D$  corresponde al numero de Damkohler ( $D = k_1 V/q$ ).

$$\alpha = c_f (n - 1) \quad (2.5)$$

$$p_1 = nk_2 (\beta - 2) \quad (2.6)$$

$$p_2 = n^2 (2\beta - D) \quad (2.7)$$

$$p_3 = n^3 c_f \quad (2.8)$$

$$\beta = k_2 c_f \quad (2.9)$$

$$p_0 = k_2^2 \quad (2.10)$$

La dinámica evaluada para la concentración de sustrato, de alimentación y de salida se basa en parámetros utilizados comúnmente en la literatura (Tabla-2.2). El Mapeo de la función dada por la (Ec-2.4) es presentado en la (Fig-2.2) e identifica los estados estacionarios mediante zonas de interés en donde aplicar una ley de control para esta reacción enzimática (Zona 1, Zona 2 y Zona 3). El incremento en la función  $Z(c_f, c_e)$  respecto de pequeños incrementos en las concentraciones puede interpretarse mediante las curvas de nivel; sugiriendo la naturaleza inestable del sistema y orientando de manera práctica sobre los comportamientos estacionarios (estabilidad estática) en lazo abierto (Tabla-2.3); tomando  $c_f$  como la variable manipulada y  $c_e$  como variable de salida.

Tabla 2.3: Estados estacionarios del biorreactor de Cholette y sus concentraciones

Concentración de alimentación ( $c_f$ ) $kmolm^{-3}$	Concentración de sustrato ( $c$ ) $kmolm^{-3}$	Concentración de salida ( $c_e$ ) $kmolm^{-3}$
3.288	1.767, 1.303, 0.014	2.147, 1.80, 0.832
6.484	6.0, 0.238, 0.045	6.122, 1.80, 1.655
7.026	6.584, 0.184, 0.057	6.694, 1.894, 1.80

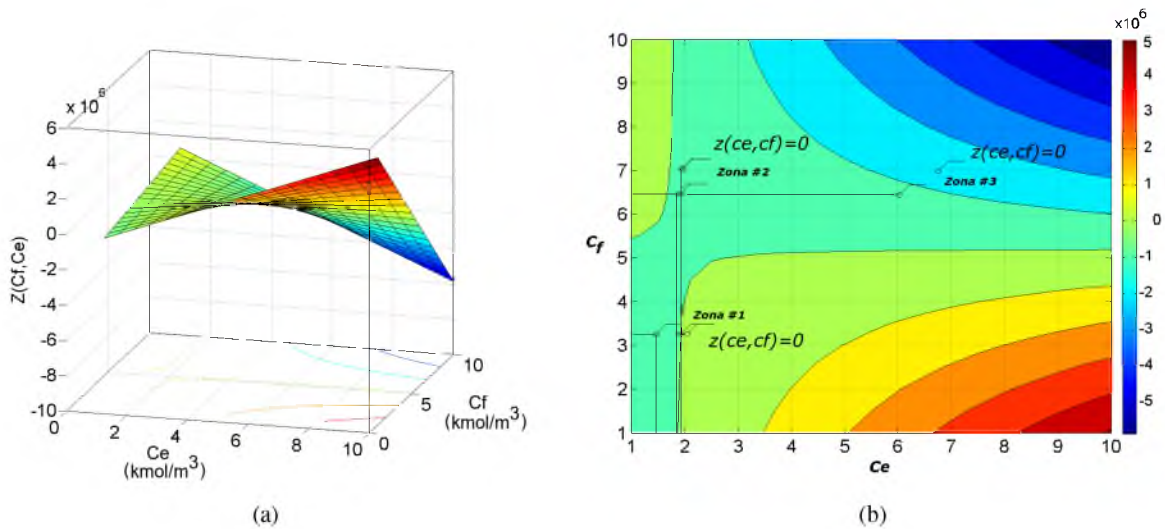


Fig. 2.2: Representación de la multiplicidad de estados estacionarios **a)** Función de puntos críticos  $Z(cf, ce)$  y **b)** Visualización de los 9 estados estacionarios

## 1.2. Características no lineales importantes del biorreactor de Cholette

Este comportamiento de multiplicidad en el biorreactor (Fig-2.2), puede generar orbitas periódicas que emergen bajo la influencia de ciertas condiciones en controladores PI (Ibarra-Junquera y Rosu., 2007) [53].

Dichas bifurcaciones se caracterizan por un par de eigenvalores conjugados (bifurcaciones de Hopf) en los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado (controlador-biorreactor), con las ganancias del controlador como parámetros de bifurcación.

Las condiciones de multiplicidad representan un reto importante para la síntesis de algoritmos de control; puesto que el sistema diseñado puede responder distintamente a cambios similares en la variable manipulada. Por tal motivo, algunos estados estacionarios pueden degradar el desempeño de un controlador. La consideración anterior en la dinámica acoplada (controlador-biorreactor) puede analizarse como un sistema generalizado Liénard partiendo de la (Ec-2.2) del modelo no lineal de Cholette y de la ley de control PI lineal (Ec-2.13).

El planteamiento bajo transformación viene dado por las ecuaciones (Ec-2.11) y (Ec-2.12).

$$\dot{c} = -c \left( \frac{nq}{mV} + \frac{k_1}{(1 + k_2 c^2)} \right) + \frac{nq}{mV} (-K_c(c - Ref) - K_i Y) \quad (2.11)$$

$$\dot{Y} = c - Ref \quad (2.12)$$

Donde:

$K_c$ : Es la ganancia proporcional.

$K_i$ : Es la ganancia integral.

$Ref$ : Es la referencia del controlador considerado (PI).

$Y$ : Representa el comportamiento dinámico del error.

$c_f$ : representa la variable de control  $u$ .

La ley de control PI considerada, viene dada por (Ec-2.13). Donde los autores han considerado la inclusión del signo negativo por conveniencia en la representación conceptual [118].

$$u \triangleq \left( -K_c e(t) - K_i \int e(t) dt \right) \quad (2.13)$$

Donde:

$K_c$  Es la ganancia proporcional.

$K_i$  Es la ganancia integral.

$e(t)$  Es el comportamiento dinámico del error.

$u(t)$  Es la salida del control.

El sistema de ecuaciones (Ec-2.11) y (Ec-2.12) es entonces re-expresado a la forma generalizada de Liénard (Ec-2.14) y (Ec-2.15) para su respectivo análisis (Xiao y Zhangh.,2008) [118].

$$\dot{X} = \phi(Y) - F(X) \quad (2.14)$$

$$\dot{Y} = -g(X) \quad (2.15)$$

Cuya condición de existencia viene dada por la siguiente desigualdad:

$$\left( K_p^H - 2 \frac{\sqrt{CK_i}}{C} \right) < K_p < K_p^H \quad (2.16)$$

Donde:

$K_p^H$ : Es la ganancia proporcional en condición de existencia de ciclos limite.

$K_i$ : Es la ganancia integral.

$K_p$ : Es la ganancia proporcional.

$C$  : Es el factor dado en términos de los parámetros del reactor  $nq/mV$ .

Estas características no lineales podrían ser medidas con algún índice de desempeño.

### 1.3. Modelos linealizados y estructuras de control

#### Modelos linealizados en diferentes puntos de operación

Generalmente los modelos del biorreactor son linealizados en un punto de operación estacionario para desarrollar una ley de control (Ver Capítulo I). Para obtener las matrices del sistema en lazo abierto ( $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$ ,  $D_1$  y  $D_2$ ) de las Ecs. (1.45-1.47), se emplea la linealización en serie de Taylor al sistema tomando el primer término de la expansión del modelo no-lineal.

$$\begin{aligned}
 A &= -\left(\frac{nq}{mV}\right) - \left(\frac{(1 + k_2c_s)^2 - 2(1 + k_2c_s)k_2k_1c_s}{(1 + k_2c_s)^4}\right) \\
 B_1 &= \left(\frac{n}{mV}\right)(c_{fs} - c_s) \\
 B_2 &= \left(\frac{nq}{mV}\right) \\
 C &= n \\
 D_1 &= 0 \\
 D_2 &= 1 - n
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Cuando se considera únicamente la Ec. (1.45),

$$\begin{aligned}
 A &= C - \left(\frac{nq}{mV}\right) - (1 + k_2c_s)^2 - 2(1 + k_2c_s)k_2k_1c_s \\
 B_1 &= D_2 = \left(\frac{n}{mV}\right)(c_{fs} - c_s) \\
 B_2 &= \left(\frac{nq}{mV}\right) \\
 D_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Cabe señalar que las funciones de transferencia con polos y ceros inestables se presentan comúnmente en el modelado de reacciones enzimáticas en un mezclado no-ideal. Adicionalmente, aparecen retardos generados por fenómenos de transporte y tiempos de sentido involucrados (Normey-Rico y Camacho.,2009) [75].

Los factores anteriormente mencionados, dificultan la formulación de una ley de control e influyen en el desempeño del mismo.

En el caso de una función de transferencia, tomando el primer término de la expansión Tayloreana del modelo no lineal dado por las ecuaciones (Ec-2.2) y (Ec-2.3) tenemos.

$$\Gamma(c, c_f, q) = \frac{dc}{dt} = \frac{qn}{Vm}(c_f - c) - \frac{k_1c}{(1 + k_2c)^2} \quad (2.19)$$

$$\left. \frac{\partial c'}{\partial t} \right|_{ss} = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial c} \right|_{ss}(c - c_s) + \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial c_f} \right|_{ss}(c_f - c_{fs}) + \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial q} \right|_{ss}(q - q_s) \quad (2.20)$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\Delta c(s) = \frac{\Delta c_e(s) - (1 - n)\Delta c_f(s)}{n} \quad (2.21)$$

Obtenemos la función de transferencia del sistema:

$$G(s) = \frac{kp(1 + p)}{(\tau s + 1)} = \frac{b_1 s + b_2}{(\tau s + 1)} \quad (2.22)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{1}{A_s} & k &= -\frac{B_{s2}}{A_s} & kp &= -C_s k - D_{s2} \\ p &= -\frac{D_{s2}\tau}{kp}; & b_1 &= kp; & b_2 &= pkp \end{aligned}$$

Estructuras de control propuestas en diferentes puntos de operación

Las leyes de control utilizadas para este sistema son:

Control Integral (I)

$$U(s) = \frac{K_i}{s}E(s) \quad (2.23)$$

Control Proporcional Integral (PI)

$$U(s) = K_p + \frac{K_i}{s}E(s) \quad (2.24)$$

Control Proporcional con parámetro de ponderación integral del error, menos la derivada de la salida (PwIDy)

$$U(s) = \left(K_p w + \frac{K_i}{s}\right)R(s) - \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s\right)Y(s) \quad (2.25)$$

Control Proporcional con parámetro de ponderación en el setpoint, integral derivativo del error (PwID)

$$U(s) = \left(K_p w + \frac{K_i}{s} + K_d s\right)R(s) - \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s\right)Y(s) \quad (2.26)$$

Control Proporcional con parámetro de ponderación en el setpoint, integral del error (PwI)

$$U(s) = \left(K_p w + \frac{K_i}{s}\right)R(s) - \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)Y(s) \quad (2.27)$$

Control Proporcional, integral y derivativo con filtro del error (PIDn)

$$U(s) = \left(K_p w + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{\frac{K_d s}{N} + 1}\right)R(s) - \left(K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{\frac{K_d s}{N} + 1}\right)Y(s) \quad (2.28)$$

Donde:

$U(s)$  es la señal de control,  $R(s)$  es el set-point,  $E(s)$  es el error,  $W(s)$  es la entrada exógena o de perturbación,  $Y(s)$  es la salida medida.

$$K_i = K_p/\tau_i \text{ y } K_d = K_p\tau_d$$

**Revisión de estructuras de control y parámetros de control utilizadas**

En la Tabla-2.4 se presentan los modelos lineales del biorreactor de Cholette junto con las estructuras y ganancias de los controladores que se han obtenido de referencias bibliográficas.

Los modelos considerados del biorreactor se clasifican como sistemas estables e inestables de primer orden y en algunos casos con retardo de tiempo (*first order plus delay time*, FOPDT por sus siglas en inglés). Donde las especificaciones de desempeño conseguidas son menos satisfactorias respecto de los sistemas FOPDT estables debido a la presencia de ceros dominantes (Sree y Chidambaram., 2003 [109] ; Hernández-Pérez y col.,(2013) [51] ).

Otro modelo del biorreactor de Cholette es el que utiliza  $c_{fs} = 3,288 \text{ kmol m}^{-3}$  y  $c_s = 1,316 \text{ kmol m}^{-3}$ , el cual tiene la forma:

$$G(s) = \frac{3,433}{103,1s - 1} e^{-20s}. \quad (2.29)$$

Normey-Rico y Camacho.,(2009) [75] utilizan un control por medio de un predictor de Smith de la forma:

$$C(s) = \frac{3,29(43,87s+1)}{43,87s}, F(s) = \frac{20s+1}{43,87s+1}, F_r(s) = \frac{(20s+1)^2(93,16s+1)}{(43,87s+1)(26s+1)^2}.$$

Un análisis comparativo con éste modelo es el que muestra Márquez-Rubio y col.,(2010) [70] utilizan un control PwI con ganancias  $K_p = 22,6$ ,  $K_i = 1,13$ ,  $w = 0,5$  y realizan el comparativo con el control sintonizado por Normey-Rico y Camacho.,(2009) considerando el conocimiento exacto de los parámetros y condiciones iniciales diferentes de cero.

Sivaramakrishnan y col. (2008) utilizan el modelo 4 (Tabla-2.4) para aplicar una ley de control no-lineal por modos deslizantes. Se ha realizado también la identificación en lazo cerrado mediante optimización para sintonizar una ley de control PID para el modelo 3 (Tabla 2.4) como se muestra en Sree y Chidambaram.,(2002) [109] .

Tabla 2.4: Resumen de los modelos linealizados y controladores desarrollados en estados estacionarios inestables del biorreactor de Cholette.

No	Modelo del sistema	Estado Estacionario (kmol m <sup>-3</sup> )	Estructura y ganancias del controlador	Referencia	Nomenclatura
1	$G(s) = \frac{0.2341s + 0.2734}{0.9364s - 1}$	$c_s = 0.05867$ $c_{fs} = 7.024$	$(Ki = 10)$	Reddy y Chidambaram (1996)	a11
			PI (LQR $Q = 1, R = 0.02$ ) ( $Kp = 3.54, Ki = 5$ )	(Propuesto)	a12
			PI (LQR $Q = 0.2, R = 1$ ) ( $Kp = 2.226, Ki = 5$ )	(Propuesto)	a13
2	$G(s) = \frac{1.12106}{33.635s - 1} e^{-10s}$	$c_s = 1.0439$ $c_{fs} = 3.288$	PID ( $Kp = 2.19, Ki = 1/35.35, Kd = 2.89$ )	Huang Chen (1999)	a21
			PID ( $Kp = 3.151, Ki = 1/53.85, Kd = 5.86$ )	Jhunjhunwala y Chidambaram (2003)	a22
			PID ( $Kp = 2.19, Ki = 1/35.35, Kd = 2$ )	(Propuesto)	a23
3	$G(s) = \frac{2.21(1+11.133s)}{98.3s - 1} e^{-20s}$	$c_s = 1.304$ $c_{fs} = 3.288$ $c_{es} = 1.8$	PI ponderado ( $Kp = 1.2, Ki = 1/94.74, w = 0.1517$ )	Sree y Chidambaram (2003b)	a31
			PI ponderado ( $Kp = 1.2, Ki = 1/94.74, w = 1$ )	Sree y Chidambaram (2003b)	a32
			PI ponderado ( $Kp = 2, Ki = 1/94.74, w = 0.1517$ )	(Propuesto)	a33
			PID ponderando	Sree y Chidambaram (2005)	a41
4	$G(s) = \frac{3.3226}{99.69s - 1} e^{-20s}$	$c_s = 1.3065$ $c_{fs} = 3.288$	PID ponderando ( $Kp = 1.486, Ki = 1/129.85, Kd = 11.644, w = 1$ )	Sree y Chidambaram (2003b)	a42
			PID ponderando ( $Kp = 1.486, Ki = 1/129.85, Kd = 11.644, w = 0.6894$ )	Chidambaram (2005)	a43
			PID (2DOF $Kp = 1.4715, Ki = 0.0147, Kd = 6.392, N = 10$ )	Chidambaram (2005)	a44
			PID (2DOF $Kp = 1.4715, Ki = 0.0228, Kd = 6.392, N = 10$ )	Chidambaram (2005)	a45
			PID ponderado ( $Kp = 1.486, Ki = 1/129.85, Kd = 11.644, w = 0.3447$ )	Normey-Rico y Camacho (2009)	a51
5	$G(s) = \frac{-0.1727(1-4.473s)}{3.1s - 1}$	$c_s = 0.2383$ $c_{fs} = 6.484$ $c_{es} = 1.8$	PI ponderando ( $Kp = -4.8615, Ki = 0.037, w = -0.113$ )	Sree y Chidambaram (2003a)	a52
			PI ponderando ( $Kp = -4.379, Ki = 0.090, w = -0.1044$ )	Carrillo-	a53
			PI ponderando ( $Kp = -4.235, Ki = 0.1663, w = 0.2773$ )	Ahumada y col. (2011)	a54
			PI ponderando ( $Kp = -4.7053, Ki = 1113, w = 0.1425$ )	Carrillo-	a54
			PI ponderando ( $Kp = -4.7053, Ki = 1113, w = 0.1425$ )	Ahumada y col. (2011)	a54

## 2. Secador eléctrico tipo charolas

El segundo sistema de aplicación consiste en un secador eléctrico de convección forzada de aire caliente, utilizado en procesos alimenticios de laboratorio.

Este secador es conocido comúnmente como secador de charolas o de bandejas; el cual se encuentra instalado en el taller de alimentos de la UNPA campus Tuxtepec. Posee 5 racks donde se depositan las charolas que contienen los sólidos vegetales a ser secados.

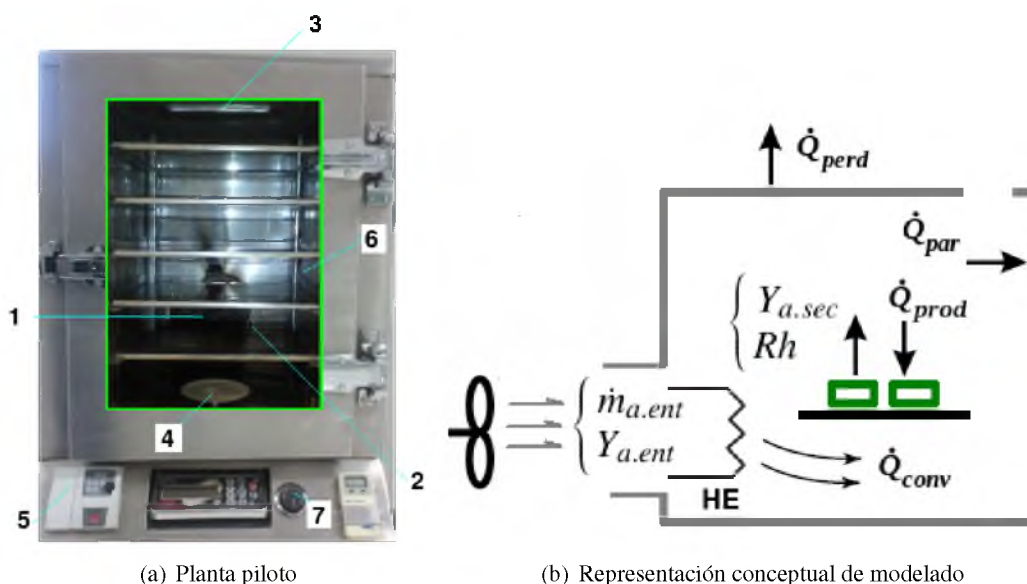


Fig. 2.3: a) **Descripción de la planta piloto:** 1).-Elemento calefactor, 2).-Entrada de aire, 3).-Salida de aire, 4).-Balanza de pesos 5).-Variador de frecuencia, 6).-Elemento sensor de temperatura 7).-Control de temperatura b) **Representación conceptual de modelado.**

La fuente de calor es un elemento calefactor de 1800 Watts a 220 Vca, con un ventilador centrífugo instalado en la parte posterior de la cámara refractaria (Fig-2.3).

En este trabajo el fenómeno de transferencia de energía se aborda caracterizando la influencia exógena de vaporización del producto como un escalón en la magnitud en el calor latente de vaporización en la cámara. El modelo de transferencia de masa (cinética de secado) permanece como un desarrollo futuro.

De manera similar al modelo obtenido por (Neaca.M y Neaca.A.,2010)[73] para un horno eléctrico. La representación conceptual (Fig-2.3 b), involucra la velocidad de transferencia de calor para las masas involucradas (aire, producto y paredes refractarias) ( $\dot{Q}_{conv}, \dot{Q}_{prod}, \dot{Q}_{par}$ ) respectivamente.

El elemento calefactor (HE) es manejado por un relevador de estado sólido 220 vca.

( $\dot{m}_{a.ent}$ ) es el flujo másico del aire de entrada cuya humedad evoluciona en la cámara dependiendo de la humedad cedida por la evaporación del producto (Ruíz Lopez y col., 2008)[73].

El esquema de control propuesto (Fig-2.4) pretende detener automáticamente el proceso, observando el estado de la temperatura del producto acoplándolo a la cinética de secado. El modelado de la cinética de secado queda fuera del alcance del presente trabajo. Presentando específicamente las simulaciones del modelo del secador con el proceso de sintonización de un control PI en la temperatura de la cámara (Capítulo V). La fase experimental se ha designado a trabajos futuros.

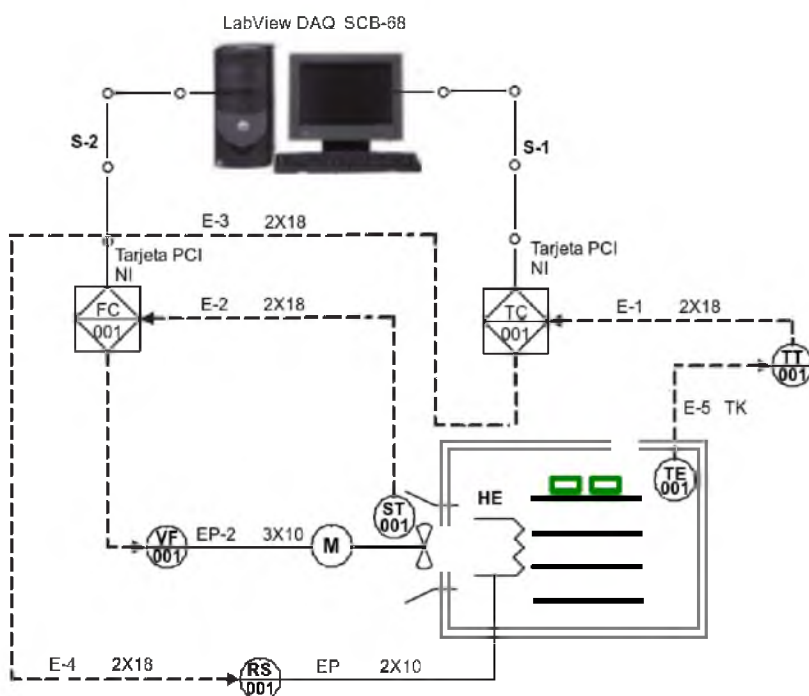


Fig. 2.4: Esquema DTI del sistema de control basado en el modelo, propuesto para el secador de charolas.

De acuerdo a los trabajos de modelado en (Neaca.M y Neaca.A.,2010)[73] y el de (Oueslati.H y col., 2012) [79] para un secador solar. Se ha utilizado el mismo enfoque de parámetros concentrados LPM (Lumped Parameter Model) en una adaptación para el modelo en espacio de estados del secador de charolas con sus parámetros (Tabla-2.5). Las asunciones son las siguientes:

- La densidad del aire es constante.
- La velocidad del aire es uniforme dentro del secador.
- La forma predominante de transferencia de calor en el interior del secador, es por convección.
- No existen cambios en las dimensiones iniciales del producto.
- El aire y vapor de agua son considerados como gases ideales.
- El fenómeno de evaporación de agua toma lugar en una capa delgada de la frontera del solido (Thin Layer Model) [73] .
- No existe condensación en las paredes internas del secador.
- La fuente única de calor viene representada por las resistencias eléctricas dentro del gabinete de secado.
- El sistema cumple con las condiciones de Biot para ser considerado bajo el enfoque de parámetros concentrados (LPM).

Los parámetros requeridos junto con su descripción aparecen a continuación (Tabla-2.5).

Tabla 2.5: Parámetros del modelo del secador de charolas.

Parámetro	Descripción básica	Unidades de medida
$\dot{Q}_{conv}$	Rapidez de transferencia de calor por convección	$J/s$
$\dot{Q}_{rad}$	Rapidez de transferencia de calor por radiación	$J/s$
$\dot{Q}_{alm}$	Rapidez de transferencia de calor almacenado	$J/s$
$T_{Rcal}$	Temperatura de la resistencia calefactora	$K$
$T_{asec}$	Temperatura del aire en la cámara de secado	$K$
$T_{prod}$	Temperatura del producto	$K$
$T_{par}$	Temperatura de las paredes refractarias	$K$
$m_{Rcal}$	Masa del elemento calefactor	$kg$
$m_{prod}$	Masa del producto a ser secado	$kg$
$S_{Rcal}$	Superficie de contacto calefactor-aire	$m^2$
$A_{prod}$	Area de vaporización del producto	$m^2$
$A_{par}$	Area de las paredes refractarias	$m^2$
$V_{asec}$	Volumen de la cámara de secado	$m^3$
$V_{par}$	Volumen de las paredes refractarias	$m^3$
$C_{p.Rcal}$	Calor específico del Kanthal (espiral calefactora)	$J/kgK$
$C_{p.prod}$	Calor específico del producto	$J/kgK$
$C_{p.par}$	Calor específico de las paredes internas	$J/kgK$
$\rho_{asec}$	Densidad del aire de secado	$kg/m^3$
$\rho_{par}$	Densidad de las paredes refractarias	$kg/m^3$
$h_{c.Rcal}$	Coefficiente de transferencia de calor calefactor-aire	$W/m^2K$
$h_{c.prod}$	Coefficiente de transferencia de calor aire-producto	$W/m^2K$
$h_{c.par}$	Coefficiente de transferencia de calor aire-paredes	$W/m^2K$
$h_{a.Rcal}$	Coefficiente de transferencia de calor aire-calefactor (promediado)	$W/m^2K$
$P_{rms}$	Potencia suministrada por el calefactor	$W$
$V_{rms}$	Voltaje RMS suministrado al calefactor	$volts$
$\dot{m}_{prod}$	Flujo másico de vaporización del producto	$kg/s$
$V_{CT}$	Voltaje de control del relevador de estado sólido	$volts$
$V_{RPM}$	Voltaje de control del variador de frecuencia	$volts$
$L_{vap}$	Calor latente de vaporización	$kJ/kg$

A continuación se presentan las ecuaciones del modelo de transferencia de energía con la influencia exógena de vaporización del producto, representada mediante un escalón en la magnitud del calor latente de vaporización.

<i>Ec</i>	Modelo de la planta piloto (secador de charolas eléctrico de convección forzada)
1	$\frac{dT_{Rcal}}{dt} = \frac{1}{m_{Rcal}C_{p,Rcal}} \left[ \frac{V_{rms^2_{(ct)}}}{R_{cal}} - \varepsilon C_n S_{Rcal} (T_{Rcal}^4 - T_{par}^4) - h_{Rcal} S_{Rcal} (T_{Rcal} - T_{asec}) \right]$
2	$\frac{dT_{asec}}{dt} = \frac{1}{\rho_{asec} C_{p,asec} V_{asec}} \left[ h_{a,Rcal} S_{Rcal} (T_{Rcal} - T_{asec}) + C_{p,asec} (\dot{m}_{aent} - \dot{m}_{a.sal}) (T_{a.ent} - T_{a.sal}) \right]$ $- \frac{1}{\rho_{asec} C_{p,asec} V_{asec}} \left[ A_{prod} h_{c,prod} (T_{asec} - T_{prod}) + A_{par} h_{c,par} (T_{asec} - T_{par}) - L_v \dot{m}_{prod} \right]$
3	$\frac{dT_{prod}}{dt} = \frac{1}{m_{prod} C_{p,prod}} \left[ A_{prod} h_{c,prod} (T_{asec} - T_{prod}) - L_v \dot{m}_{prod} \right]$
4	$\frac{dT_{par}}{dt} = \frac{1}{\rho_{par} C_{p,par} V_{par}} \left[ A_{par} h_{c,par} (T_{asec} - T_{par}) - A_{par} k_{par} (T_{par} - T_{amb}) \right]$

Tabla 2.6: Valor nominal de los parámetros en el punto de trabajo considerado. Similares a los establecidos en [79] y [73].

Parámetro	Descripción básica	Magnitud determinada y/o calculada (condiciones operativas)
$T_{prod}$	Temperatura del producto	339 K
$T_{asec}$	Temperatura del aire de secado	340 K
$T_{par}$	Temperatura de las paredes	332 K
$T_{Rcal}$	Temperatura de las resistencias calefactoras	566 K
$C_{p,Rcal}$	Calor específico del Kanthal	485 J/kgK
$C_{p,prod}$	Calor específico del producto	3450 J/kgK
$C_{p,par}$	Calor específico de las paredes internas	456 J/kgK
$h_{a,Rcal}$	Coficiente de transferencia de calor calefactor-aire	63.8 W/m <sup>2</sup> K
$h_{c,prod}$	Coficiente de transferencia de calor aire-producto	58.76 K W/m <sup>2</sup> K
$h_{c,par}$	Coficiente de transferencia de calor aire-paredes	53.5 W/m <sup>2</sup> K
$\dot{m}_{aent}$	Flujo másico del aire de entrada	0.055 kg/s
$\dot{m}_{asal}$	Flujo másico del aire de salida	0.025 kg/s
$\dot{m}_{prod}$	Flujo másico de vaporización del producto	6.1E - 5 kg/s
$H.R$	Humedad relativa promedio en la cámara	25 %
$P_{rms}$	Potencia RMS suministrada	842 W
$m_{Rcal}$	Masa del elemento calefactor	0.42 kg
$S_{Rcal}$	Superficie del elemento calefactor	4.52 × 10 <sup>-2</sup> m <sup>2</sup>
$A_{par}$	Area de las paredes refractarias del secador	3 m <sup>2</sup>
$V_{par}$	Volumen del material de las paredes refractarias	0.003 m <sup>3</sup>

## 2.1. Características del modelo linealizado

Para obtener el modelo lineal del secador es necesario determinar el punto de trabajo ( $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$ ) de la planta acoplada (Tabla-2.6); considerando como entrada exógena el flujo másico de vaporización ( $\dot{m}_{prod}$ ).

Este efecto se puede incluir en el modelo simplificado, mediante una entrada en escalón del flujo másico de vaporización, iniciando en un tiempo  $t$ .

Por conveniencia del objetivo de control perseguido, el modelo linealizado con parámetros invariantes desprecia la transferencia de calor por radiación; adquiriendo la siguiente forma generalizada TITO (*Two inputs two outputs*, por sus siglas en inglés):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2.30)$$

Con matrices derivadas del modelo no lineal:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B}_2 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{D}_{12} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \quad (2.34)$$

Y con las matrices exógenas:

$$\mathbf{B}_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{D}_{11} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \quad (2.36)$$

Con las variables de estado, control y entradas exógenas:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} T_{Rcal} - T_{Rcal.s} \\ T_{asec} - T_{asec.s} \\ T_{prod} - T_{prod.s} \\ T_{par} - T_{par.s} \end{pmatrix}; \mathbf{u} = \begin{pmatrix} V_{CT} - V_{CT.s} \\ V_{RPM} - V_{RPM.s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{m}_{prod} \\ \dot{m}_{prod} \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} T_{asec} - T_{asec.s} \\ \dot{m}_{aent} - \dot{m}_{aent.s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Matriz característica del modelo linealizado y matriz de control

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{h_{Rcal}S_{Rcal}}{m_{Rcal}C_{p,Rcal}}\right) & \left(\frac{h_{Rcal}S_{Rcal}}{m_{Rcal}C_{p,Rcal}}\right) & 0 & 0 \\ \frac{h_{aRcal}S_{Rcal}}{\rho_{asec}C_{p,asec}V_{asec}} & -\left(\frac{h_{aRcal}S_{Rcal}+A_{prod}h_{c,prod}+A_{par}h_{c,par}}{\rho_{asec}C_{p,asec}V_{asec}}\right) & \left(\frac{A_{prod}h_{c,prod}+m_{vap}}{\rho_{asec}C_{p,asec}V_{asec}}\right) & \left(\frac{A_{par}h_{c,par}}{\rho_{asec}C_{p,asec}V_{asec}}\right) \\ 0 & \left(\frac{A_{prod}h_{c,prod}}{m_{prod}C_{p,prod}}\right) & -\left(\frac{A_{prod}h_{c,prod}+m_{vap}}{m_{prod}C_{p,prod}}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{A_{par}h_{c,par}}{\rho_{par}C_{p,par}V_{par}}\right) & 0 & -\left(\frac{A_{par}(h_{c,par}+k_{par})}{\rho_{par}C_{p,par}V_{par}}\right) \end{pmatrix}$$

Donde:  $m_{vap} = \dot{m}_{prod}(C_{p,vap} - C_{p,liq})$

Los valores paramétricos de  $\mathbf{A}$  en el punto de trabajo considerado:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -22.9 \times 10^{-3} & 22.9 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 3 \times 10^{-4} & -21.2 \times 10^{-3} & 1.7 \times 10^{-3} & 19.2 \times 10^{-3} \\ 0 & 3.5 \times 10^{-3} & -3.5 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 34.9 \times 10^{-3} & 0 & -40.4 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Realizando las simplificaciones para un esquema TITO en la matriz de control  $\mathbf{B}_2$ :  
(Control de temperatura + control de flujo másico del aire de entrada.)

El voltaje eficaz de control:  $V_{rms} = 22V_{CT}$  volts (con  $0 \leq V_{CT} \leq 10$  Vcd). Y la velocidad del aire de entrada:  $v_{aent} = v_{ref}\left(\frac{360V_{RPM}}{RPM_{ref}}\right)$  (con  $0 \leq V_{RPM} \leq 10$  vcd). Incluyendo la primera aproximación de Ditus Boetler [79] en la matriz de control se tiene:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{968V_{CT}}{R_{cal}m_{Rcal}C_{p,Rcal}}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{360v_{aref}0.23S_{Rcal}(0.707)^{0.4}}{2\rho_{asec}C_{p,asec}V_{asec}RPM_{ref}}\left(\frac{L_{Rcal}}{v_{aent}}\right)^{\frac{4}{5}}(T_{Rcal} - T_{asec})\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores paramétricos de  $\mathbf{B}_2$  en el punto de trabajo considerado:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1.508 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 \times 10^{-3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El esquema de control TITO ha sido considerado en el caso de un ahorro de energía para el proceso de secado. Sin embargo; involucra gran incertidumbre paramétrica. Manteniendo constante el flujo de aire de entrada ( $\dot{m}_{aent}$ ), será el caso de un esquema SISO.

Las entradas exógenas del sistema acoplado pueden provenir de muchas fuentes operativas; aunque fundamentalmente el flujo de vaporización del producto ( $\dot{m}_{vap}$ ) contribuye con el calor latente, modificando el punto de trabajo original.

Matriz exógena  $\mathbf{B}_1$  y matriz de transferencia directa  $\mathbf{D}_{12}$

La matriz exógena ( $\mathbf{B}_1$ ) viene dada como:

$$\mathbf{B}_1 = \left( 0 \quad \frac{L_v}{(\rho_{asec} C_{pasec} V_{asec})} \quad -\frac{L_v}{(\dot{m}_{prod} C_{pprod})} \quad 0 \right)$$

Donde  $L_v$  es el calor latente de vaporización en la superficie del producto, dependiente del régimen de evaporación. Este efecto es simulado por un escalón unitario en la magnitud del flujo másico de vaporización ( $\dot{m}_{prod}$ )

Con entrada exógena  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{m}_{prod} \\ \dot{m}_{prod} \\ 0 \end{pmatrix}$

En el punto de trabajo considerado:  $\mathbf{B}_1 = \left( 0 \quad 32.54 \times 10^5 \quad -32.54 \times 10^5 \quad 0 \right)$

La matriz de transferencia directa  $\mathbf{D}_{12}$  es:

$$\mathbf{D}_{12} = \left( 0 \quad 360 \quad 0 \quad 0 \right)$$

con  $RPM = 360 V_{RPM}$  y  $0 \leq V_{RPM} \leq 10$  Vcd

Mientras que  $\mathbf{D}_{11} = \left( 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)$

La matriz de lectura de salidas es:  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

De acuerdo a la matriz característica del sistema, los eigenvalores lo catalogan como asintóticamente estable; ya que todos son estrictamente menores a cero. Es decir, el sistema posee estabilidad en el sentido de Lyapunov y además convergencia. Por lo que es internamente estable.

Por otra parte, las características de controlabilidad y observabilidad del estado, pueden determinarse con el rango de las matrices (**A**, **B**, **C**, **D**).

Eigenvalores del sistema son:

$$eig(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -0.0585 \\ -0.0231 \\ -0.0012 \\ -0.0052 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

El rango para la controlabilidad del vector de estado es:

$$rango[ \mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{4-1}\mathbf{B} ] = 4 \quad (2.39)$$

Y la observabilidad del vector de estado:

$$rango \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{4-1} \end{bmatrix} = 4 \quad (2.40)$$

Esto quiere decir que el sistema es estable y además es completamente observable a partir de la temperatura del aire en la cámara. Por lo que puede implementarse un observador para determinar la temperatura del producto.

### 3. Síntesis del capítulo

En este capítulo se ha realizado una revisión breve de los dos sistemas donde se aplicará el criterio de desempeño en sus fases de análisis y síntesis.

La literatura permite observar que aunque el biorreactor de Cholette es un sistema SISO. Este ha servido como modelo de referencia para el desarrollo de diversas estructuras de control, debido a que su comportamiento de multiplicidad puede desencadenar en inestabilidad mediante ciclos límite. Lo que representa un área de oportunidad para las técnicas de sintonización mediante el control óptimo.

Las estructuras de control utilizadas en diferentes puntos de operación del biorreactor de Cholette (estables e inestables). Presentan características de desempeño únicas. Por lo que una forma de evaluar dicho desempeño mediante un procedimiento sistemático, aún no se ha encontrado.

Para el secador de charolas se presenta un modelo desarrollado en el espacio de estados, con la finalidad de observar la evolución de la temperatura del producto y detener el proceso de secado de manera automática.

La validación del modelo se ha hecho mediante el ajuste de la curva de temperatura del aire sin producto en la cámara.

El modelo linealizado es controlable y completamente observable a partir de la temperatura del aire en la cámara de secado ( $T_{asec}$ ). Por lo que puede implementarse un observador de rango completo y obtener la evolución de la humedad en el sólido vegetal.

En la literatura la tarea de modelación de este tipo de plantas se ha enfrentado mediante técnicas de identificación debido a la gran cantidad de parámetros involucrados. (Danko Ján y col (2004);[34]) por ejemplo; realizan la identificación de la planta mediante el método de Hudzovic.

Cabe destacar que en la linealización del modelo  $\mathbf{D}_2 \neq \mathbf{0}$ . De acuerdo a las condiciones establecidas por [35], para que el problema de control pueda ser tratado como un problema de control estándar  $H_2/H_\infty$  se requiere que  $\mathbf{D}_2 = \mathbf{0}$ . Por lo que para la opción de control TITO, es necesario un criterio de sintonización alternativo.



## **Parte III**

# **Diseño de un criterio de desempeño multiobjetivo**



## Capítulo 3

# Índices de desempeño en criterios de sintonización multiobjetivo

### 1. Introducción

Evaluar las características de estabilidad y seguimiento de un controlador, dado un vector de consignas bajo condiciones de incertidumbre de la planta, es de gran importancia en la ingeniería de control. Pero adicionalmente, si dicho planteamiento de evaluación posee condiciones de reversibilidad para el ajuste del controlador, entonces es posible conformar un criterio de síntesis. Lo que representa una herramienta de valía en este campo.

El objetivo del presente capítulo es, formular un esquema de índices jerárquicos para establecer nuevas métricas de desempeño/robustez en los sistemas no-lineales.

Se presenta una descripción en el dominio del tiempo como fundamento para la sintonización de controladores mediante técnicas de optimización multiobjetivo (MOOP), dentro del enfoque generar primero escoger después (GFCL). Los alcances del capítulo son:

- 1 Describir índices de desempeño en el dominio del tiempo, en su forma discreta; con la finalidad de identificar las características evaluadas en técnicas de optimización.
- 2 Diseñar índices de desempeño en el dominio del tiempo, con estructura jerárquica. Utilizables en el planteamiento de diseño de controladores multiobjetivo (MOOD), siendo empleados convenientemente en la etapa de selección multicriterio MCDM.

## 2. Articulación mediante índices básicos de desempeño

Definir una métrica para describir el comportamiento desempeño-robustez de un sistema perturbado, es de gran importancia en el planteamiento de un problema de sintonización bajo el enfoque de optimización multiobjetivo MOOP.

Los sistemas no-lineales pueden exhibir inestabilidad, multiplicidad de estados estacionarios y comportamiento caótico bajo condiciones específicas. Lo cual es un comportamiento difícil de predecir y penalizar mediante algún índice de desempeño convencional. Anexando las incertidumbres paramétricas y asunciones realizadas en el proceso de modelado ([92]).

Un ejemplo de un criterio de sintonización que atiende características óptimas de desempeño, es el regulador lineal cuadrático (LQR). El cual busca minimizar una función objetivo compuesta de las energías de la salida controlada y de la señal de control en un horizonte infinito, para un sistema no perturbado. En este sentido la estrategia adoptada por simplicidad es la minimización de la energía.

En respuesta a requerimientos de robustez más rigurosos, el estado del arte plantea criterios donde la evaluación de una señal de control minimiza una función objetivo compuesta de índices de desempeño analíticos con restricciones de estabilidad adicionales en la matriz de lazo cerrado. Tal es el caso del criterio  $\mathcal{L}_{2+}/\mathcal{D}$  (García-Alvarado y col.,2010) [44].

Solucionar ambos planteamientos requiere de la ecuación algebraica de Riccati, la cual es representativa del campo de la teoría de juegos de suma cero ([16]).

Una métrica básica de desempeño (*denominada en este trabajo como Criterio-A*), puede estar compuesta por índices convencionales (ISE, ITAE, IAE, ISU, IADU, etc) (Tabla-3.1).

Estos índices también han sido utilizados extensivamente por la comunidad de control para la sintonización de controladores PI(D).

Por ejemplo; el ISE (integral squared error) (Chopra y col.,2014 [32]; Chen y col., 2000 [28] ; Salgado y col.,2007 [96]). Otro índice convencional basado en el error es el ITSE (Integral time squared error). El cual penaliza el tiempo de convergencia a un estado estacionario (*SSV*) (Carrasco y Salgado.,2009)[24].

Otro criterio de desempeño desarrollado por (Taeib y Chaari.,2013)[112]. Ha combinado factores de interés en el dominio del tiempo, minimizando una función objetivo  $J_{FIT}$  (Ec-3.1), cuya estructura atiende las características de la respuesta transitoria y del estado estacionario del error, para un sistema no-lineal.

$$J_{FIT} = \sum_{k=1}^N (1 - e^{(-\beta)}) (Mp_i + Ess_i) + e^{(T_{s_i} - Tr_i)} \quad (3.1)$$

Donde :  $i \in N$ , refiere a la  $i$ -ésima salida de aplicación del criterio.

$Mp$ : Es el máximo sobresalto.

$Tr$ : Es el tiempo de ascenso.

$T_s$ : Corresponde al tiempo de asentamiento.

$Ess$ : Es el error en estado estacionario.

$\beta$ : Es un factor de ponderación de la función objetivo  $J_{FIT}$ .

Esta función objetivo es minimizada por un algoritmo de optimización denominado PSO (*Particle swarm optimization*, por sus siglas en inglés ). Sintonizando controladores con estructura PI(D). El factor de ponderación  $\beta$ , es un parámetro ajustado por el diseñador en el proceso de optimización de la función objetivo  $J_{FIT}$  (Ec-3.1). El procedimiento es similar a las matrices de ponderación  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  utilizadas en el planteamiento LQR.

Tabla 3.1: Definición de los índices básicos de desempeño en forma discreta (Criterio-A)

Indicador básico	Expresión:	Característica
$ISE$	$J_{e1} = \sum_{k=0}^N e(k)^2$	Integral del error cuadrático
$ITSE$	$J_{e2} = \sum_{k=0}^N ke(k)^2$	Integral del tiempo por el error cuadrático
$IAE$	$J_{e3} = \sum_{k=1}^N  r_k - y_k $	integral del valor absoluto del error
$ISU$	$J_{u1} = \sum_{k=0}^N (u(k) - u_{ss})^2$	Integral de control cuadrático
$TVU$	$J_{u2} = \sum_{k=1}^N  u_k - u_{k-1} $	Integral de la variación total de control .
$T_s$	$SSV = 5\%, SSV = 2\%$	Tiempo de asentamiento (2% en este trabajo).

Los criterios presentados anteriormente dejan ver que dentro de la etapa de análisis de desempeño, un criterio de decisión que identifique un menor tiempo de asentamiento, menor error acumulativo, menor esfuerzo de control y una energía mínima de seguimiento podría definir un mejor controlador. Sin embargo; múltiples indicadores pueden estar en conflicto (Sun y Li.,2010)[111].

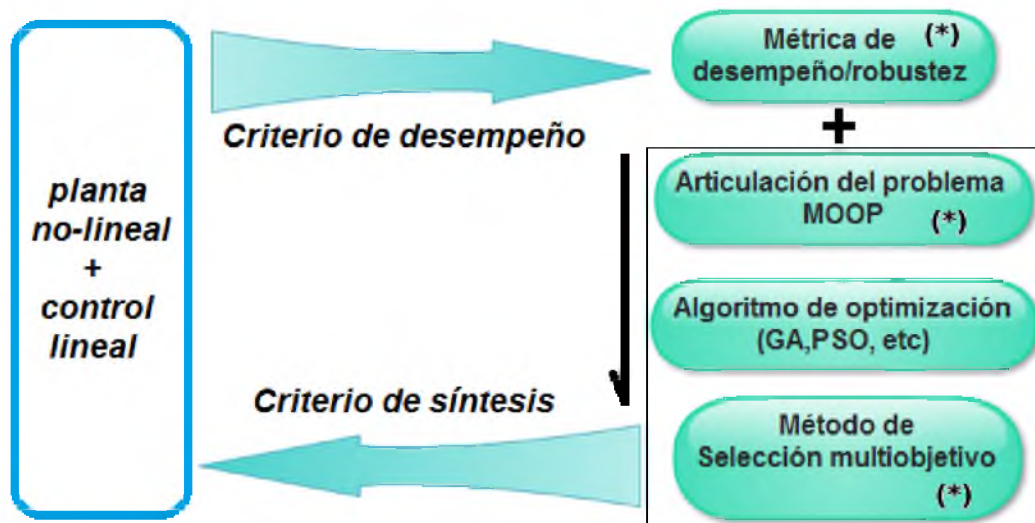


Fig. 3.1: Elementos de reversibilidad considerados para el diseño del criterio de desempeño/sintonización propuesto en este trabajo. El criterio incluye aportaciones dentro de las etapas señaladas (\*). Este capítulo se ocupa del diseño de la métrica de desempeño/robustez, tratando las otras etapas en los capítulos IV y V.

Todo lo anterior sugiere establecer una jerarquía analítica de la información (Dubois y Prade.,1988 ([36]; Dubois y col.,2013 [98]). Para fundamentar un criterio de desempeño con características de reversibilidad (análisis/síntesis) direccionadas en el esquema conceptual (Fig-3.1) .

Dicho criterio puede proponerse partiendo de índices convencionales, como se ha efectuado para otras metodologías multi-criterio como lo es TOPSIS (Awasthiy col.,2011 [11]; Behzadian y col., 2010 [15]).

Integrando una articulación adecuada del planteamiento multiobjetivo bajo el paradigma de la optimización MOOP.

### 3. Métrica de desempeño multiobjetivo

Para conformar un perfil de estrategia con  $m$  índices de desempeño como en (Ec-3.2), el potencial de información debe ser manipulado convenientemente por un algoritmo de optimización. Por tal motivo, se adoptará una forma discreta expresada en el dominio del tiempo, similar a los índices de desempeño convencionales (Tabla-3.1).

$$\mathcal{S}_i = \{s_1, s_2, \dots, s_m \mid m \in \mathcal{N}; s_m \in \mathfrak{R}_+\} \quad (3.2)$$

En (Ec-3.2)  $\mathcal{S}_i$ , es el conjunto de índices que componen la métrica (o perfil de estrategia) aplicada a la salida medible ( $y_i$ ) y de control ( $u_i$ ).

$i \in \mathcal{N}$ : Refiere a la aplicabilidad en el  $i$ -ésimo lazo del sistema.

$m$ : Indica el número de índices que conforman el perfil, dependiendo de las características perseguidas por la métrica.

Atendiendo a la estructura funcional que persigue la descripción del perfil (Ec-3.2). Se tomara en cuenta la definición de entropía de sistemas  $H_k$ . Introducida por Shanon en (1948) como una medida de la incertidumbre de un proceso aleatorio. Esta forma de  $H_k$  (Ec-3.3 y Ec-3.4) puede ser utilizada para integrar la información de los escenarios de entrada-salida de un sistema y articular convenientemente una función objetivo dentro del problema MOOP (Afshar.P y Wang.H.,2008) [6].

$$J = H_k(e) = \frac{1}{1 - \alpha} \log(V_{R\alpha}(e_k)) \quad (3.3)$$

$$V_{R\alpha}(e) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(e_k(i) - e_k(j)) \quad (3.4)$$

Donde  $H_k(e)$  es la medida de entropía en la evolución en la señal de salida.  $V_{R\alpha}(e_k)$  es el potencial de información (IP).  $N$  es el espacio de muestreo y  $K$  es el Kernel simétrico que satisface  $K(0) = 1$ .

Con el antecedente de los tres escenarios en la estructura del criterio  $\mathfrak{L}_{2+}/\mathfrak{D}$ , y sabiendo que en un horizonte finito la secuencia del error  $S e_n$  es no decreciente y converge a alguna cota superior tal que  $S e_n \leq c$ ; para todo  $n$  y para algún  $c$ . Se garantiza que cada indicador ( $s_m \in \mathfrak{R}_+$ ) dentro del perfil (Ec-3.2) que incluya las definiciones de los índices básicos (IAE, ITAE, ITSE, etc), generará términos no negativos en cada secuencia.

Para un primer escenario basado en la energía, puede recurrirse a la igualdad de Parseval (Ec-3.5) expresada en el dominio del tiempo  $f(k)$  y de la frecuencia  $F(p)$ . Interpretando un primer indicador de desempeño basado en la energía de seguimiento.

$$\sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} |F(p)|^2 \quad (3.5)$$

En el dominio del tiempo (Ec-3.5) determina la energía de una sucesión  $f(k)$  que para el presente criterio puede representar el escenario de la energía de seguimiento del error  $e(k)$  o del control  $u(k)$ .

Integrando esta energía de seguimiento en una función objetivo bajo el esquema dado por (Ec-3.3) y (Ec-3.4). Un primer índice dentro del perfil propuesto es el siguiente:

$$J_{em1} = (s_{i1})_{i \in \mathcal{N}} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=1}^N e_i(k)^2 \quad (3.6)$$

En (Ec-3.6)  $i \in \mathcal{N}$ , refiere al  $i$ -ésimo lazo de aplicación del indicador  $J_{em1}$ .

$T_s$ : Es el tiempo de evolución para el horizonte del problema de optimización.

$e_i(k)^2$ : Es la evolución del cuadrado del  $i$ -ésimo error.

O alternativamente  $(u(k) - u_{ss})^2$  para la energía de la señal de control.

$N$  es el espacio de muestreo.

Dentro de un enfoque discreto, la implementación de un controlador involucra un tiempo de muestreo del hardware ( $t_{samp}$ ) para cada acción de control en cada lazo. En este sentido la convergencia del estado al valor de interés ( $\bar{x}_i$ ), puede representar un segundo escenario. Una secuencia de esta convergencia puede escribirse como:

$$J_{em2} = (s_{i2})_{i \in \mathcal{N}} = \frac{t_{samp}N[e_i(N)]^2}{T_s} + \frac{t_{samp}(N-1)[e_i(N-1)]^2}{T_s} + \dots + \frac{t_{samp}[e_i(0)]^2}{T_s} \quad (3.7)$$

Donde:  $i \in \mathcal{N}$ , refiere al  $i$ -ésimo lazo de aplicación de  $J_{em2}$ .

$T_s$ : Es el tiempo de evolución para el horizonte del problema de optimización.

$t_{samp}$ : Es el tiempo de muestreo para el  $i$ -ésimo lazo de control.

$[e_i(N)]^2$ : Es la evolución del cuadrado del  $i$ -ésimo error dentro del espacio de muestreo  $N$ .

Por lo tanto; un segundo índice de estrategia que describe la característica de convergencia del error en la vecindad del estado estacionario ( $SSV$ ) se define como (Ec-3.8).

$$J_{em2} = (s_{i2})_{i \in \mathcal{N}} = \frac{t_{samp}}{T_s} \sum_{k=1}^N k[f(k, T_s)]e_i(k)^2 \quad (3.8)$$

Donde:  $i \in \mathcal{N}$ , refiere al  $i$ -ésimo lazo de aplicación de  $J_{em2}$ .

$T_s$ : Es el tiempo de evolución para el horizonte del problema de optimización.

$N$  es el espacio de muestreo.

$t_{samp}$ : Es el tiempo de muestreo para el  $i$ -ésimo lazo de control.

$e_i(k)^2$ : Es la evolución del cuadrado del  $i$ -ésimo error dentro del espacio de muestreo  $N$ ; mientras que  $f(k, T_s)$  es una función de ponderación que caracteriza los valores cercanos al estado estacionario.

La función  $f(k, T_s)$  es introducida para expresar el sentido de convergencia de la salida al estado estacionario. Siendo de utilidad en la evaluación de sistemas con retardo. Pudiéndose configurar caracterizaciones en forma de rampa o exponenciales. Su forma mas simple a tratar es considerar  $f(k, T_s) = 1$ .

Un tercer índice de estrategia que interpreta la estabilidad y homogeneidad del horizonte de control en el tiempo de evolución considerado  $T_s$ . Involucra las acciones consecutivas que contribuyen a la minimización de la potencia RMS del error de seguimiento o de control (Fig-3.2).

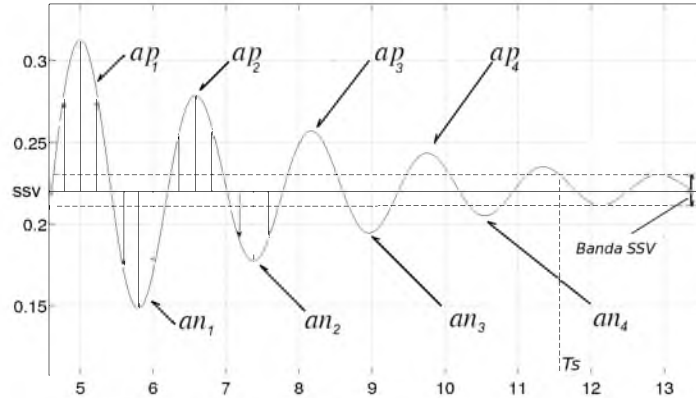


Fig. 3.2: Respuesta con transitorios alrededor del estado estacionario.

El número de transiciones sobre y bajo el estado estacionario; contrastan el valor efectivo (RMS) de la señal de control involucrada, cuando dentro de la no-linealidad del sistema existe una probable bifurcación que desencadena en un ciclo límite (Ibarra-Junquera y Rosu.,2007)[53]. Esto es un indicador de la robustez del sistema.

$$J_{um2} = (s_{i3})_{i \in \mathcal{N}} = (Nts + Ntu) \sqrt{\frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^N (u_i(k) - u_{ss})^2} \quad (3.9)$$

Donde:  $i \in \mathcal{N}$ , refiere al  $i$ -ésimo lazo de aplicación de  $J_{um2}$ .

$T_s$ : Es el tiempo de evolución para el horizonte del problema de optimización.

$N$  es el espacio de muestreo.

$Nts$ : Es el número de transiciones sobre el estado estacionario de la salida.

$Ntu$ : Es el número de transiciones bajo el estado estacionario del control.

$\sum_{k=0}^N (u_i(k) - u_{ss})^2$ : Es la energía involucrada en el esfuerzo de control.

Otro indicador del nivel de homogeneidad de las transiciones entre acciones de control, puede obtenerse promediando la energía de la salida de control ( $J_{um1}$ ) entre las variaciones totales efectivas. Es decir:

$$J_{um3} = J_{um1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T_s} \sum_{k=1}^N |u_k - u_{k-1}|}} \quad (3.10)$$

Donde:  $i \in \mathcal{N}$ , refiere al  $i$ -ésimo lazo de aplicación de  $J_{um3}$ .  $T_s$ : Es el tiempo de evolución para el horizonte del problema de optimización.  $N$  es el espacio de muestreo.

A continuación la (Tabla-3.2) presenta el resumen de los índices que componen el criterio.

Estos índices discretos se han basado en el concepto de entropía de sistemas. Fundamentando un criterio con jerarquía analítica (Sarrafy *col.*,2013 [98]; Dubois y *col.*,2013 [37]) para evaluar controladores lineales en sistemas no-lineales con multiplicidad de estados estacionarios (Chidambaram y Reddy.,1996 [30]; Sree y Chidambaram 2002,2003a [108], [109], [110]; Carrillo-Ahumada y *col.*,2011 [27] y Rajinikanth y Latha., 2012 [84]). Además de ciclos límite (Ibarra-Junquera y Rosu., 2007) [53].

Tabla 3.2: Conformación de un criterio de evaluación de controladores con jerarquía analítica (ver Capitulo-IV)

Índice de desempeño	Expresado como:	Característica
$J_{em1}$	$J_{em1} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=1}^N e(k)^2$	Energía de seguimiento promediada en $T_s$
$J_{em2}$	$J_{em2} = \frac{t_{smp}}{T_s} \sum_{k=1}^N k[f(k, T_s)]e(k)^2$	Característica de convergencia al $SSV$
$J_{em3}$	$J_{em3} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=1}^N  e(k) $	Error acumulativo promediado en $T_s$
$J_{um1}$	$J_{um1} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^N (u(k) - u_{ss})^2$	Esfuerzo de control promediado en $T_s$
$J_{um2}$	$J_{um2} = (Nts + Ntb) \sqrt{\frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^N (u(k) - u_{ss})^2}$	Norma en tendencia oscilatoria (Bifurcación de Hopf)
$J_{um3}$	$J_{um3} = J_{um1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T_s} \sum_{k=1}^N  u_k - u_{k-1} }}$	Energía representativa entre acciones de control

#### 4. Conformación de un perfil estratégico en la función objetivo

Bajo el enfoque de la teoría de juegos, Vargas-González y *col.*,(2013) [115], estudiaron la relación entre los parámetros de un controlador PI y los parámetros de un sistema de primer orden desde el enfoque del equilibrio de Nash [116]. Para demostrar que al menos un controlador con estructura PI en equilibrio de Nash es un elemento de  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$ , emplearon la suma cuadrática del error y del control como los jugadores, mientras que los parámetros de control ( $Kp, Ki$ ) fungieron como las estrategias. Este planteamiento necesitó definir previamente las matrices de ponderación  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  en la función objetivo.

Definición 4 (**El equilibrio de Nash**) *Un juego de Nash, consta de múltiples jugadores efectuando decisiones simultáneas, donde cada jugador obtiene un resultado que no puede mejorarse unilateralmente mediante un cambio de estrategia. Los jugadores están asignados a seguir una determinada estrategia basada en el conocimiento del modelo, los estados iniciales y la función a minimizar [116].*

Para una función de costo  $J_i = (t, x, u_1(t), \dots, u_N(t))$ , dada por:

$$J_i = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)] dt; i = 1, \dots, N \quad (3.11)$$

y sujeta a la dinámica de un sistema  $\dot{x} = f(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t))$  con estado inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Un conjunto de acciones  $(u_1^*, \dots, u_N^*)$  es una solución con equilibrio de Nash, si las siguientes desigualdades se cumplen para todo  $u_i \in \mathcal{U}_i, i \in N$ :

$$Eq.Nash \begin{cases} J_1^* = J_1(t, x, u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) \leq J_1(t, x, u_1, u_2^*, \dots, u_N^*) \\ J_2^* = J_2(t, x, u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) \leq J_2(t, x, u_1^*, u_2, \dots, u_N^*) \\ \dots \\ J_N^* = J_N(t, x, u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) \leq J_N(t, x, u_1^*, u_2^*, \dots, u_N) \end{cases} \quad (3.12)$$

En este sentido de un equilibrio especial, la teoría de juegos diferenciales (Isaacs. R 1956)[1] ha sido aplicada al diseño de controladores óptimos en sistemas dinámicos donde intervienen múltiples parámetros de entrada conocidos como jugadores y ciertas funciones de comportamiento que los jugadores intentarán maximizar (o minimizar), conocidas como objetivos del jugador. Este enfoque resulta conveniente para estudiar el inherente antagonismo desempeño/robustez en dinámicas no-lineales, donde no hay solución analítica a las integrales que enmarcan los escenarios de desempeño/robustez [44].

Definición 5 ( **Juego estático de información completa** ) En un juego estático de información completa y en la no dependencia del tiempo [116]. Un juego  $\Gamma_G$  en forma normal es especificado por:

Un conjunto de jugadores  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, i\}$ .

Un conjunto de estrategias  $\mathcal{S}_i$  para cada jugador  $i \in \mathcal{I}$ .

Una función de costo  $J_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^m$  asignada a cada perfil con  $m$  estrategias puras o componente  $\mathcal{S}_i = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ .

Un vector de pagos dado por  $\Pi(\mathcal{S}) = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_i)$ ; el cual especifica el pago para el  $i$ -ésimo jugador con el perfil  $\mathcal{S}_i$ .

$$\Gamma_G = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \Pi) \quad (3.13)$$

Aplicar el concepto de equilibrio de Nash a un sistema dinámico, implica establecer perfiles de estrategia  $\mathcal{S}_i$  que no provoquen una desviación unilateral para cualquiera de los jugadores  $(i, -i)$ , involucrados en una secuencia finita de acciones consecutivas, representadas en este caso por índices de desempeño. De acuerdo a la definición anterior, es posible descomponer un perfil de estrategias  $\mathcal{S}_i$  como acciones de los jugadores  $\mathcal{S}_i = (s_1, s_2, \dots, s_m)$  (Bukowski.M y Miekisz.J.,2004)[23]. Donde un perfil de estrategia será un equilibrio de Nash si:

$$\forall i \in \mathcal{I} : \mathcal{S}(s_{i^*}, s_{-i^*}) \geq \mathcal{S}(s_i, s_{-i^*}) \quad (3.14)$$

Como puede observarse, el planteamiento establecido por [115] representa un conflicto de intereses, en donde los jugadores tienen un antagonismo inherente (índices cuadráticos en este caso) con estrategias puras  $\mathcal{S}_i$ . Donde se minimiza el máximo pago de la energía involucrada de la trayectoria del estado  $x(t)$  y la función de control  $u(t)$ . Siendo las matrices de ponderación  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  quienes balancean dicho antagonismo.

No obstante, un planteamiento alternativo puede direccionarse mediante los índices diseñados en la sección anterior; conformando una métrica de estrategia para una función objetivo. Involucrando para ello, la teoría de juegos simétricos (Osborne M.J.,2003)[78].

Los juegos simétricos de dos jugadores por ejemplo; han sido estudiados debido a que pueden modelar situaciones entre agentes homogéneos que perciben funciones de pago idénticas [78].

La característica mas notable de estos juegos, es que pueden aplicarse para estudiar una determinada acción de estrategia sin asociarla con el resto de los jugadores. Por tal motivo, pueden ser útiles para caracterizar situaciones donde intervienen gran cantidad de pares de agentes o jugadores (Considerando para este caso, la trayectoria del estado y la entrada de control como dichos jugadores).

Definición 6 ( **Juego simétrico de información completa**) *Un juego  $\Gamma_G$  se dice que es simétrico, si para cada permutación de una  $N$ -tupla de jugadores, el conjunto de acciones para el jugador  $i$ ,  $\pi_i(s_1, s_2, ..s_m)$  es también óptima para el jugador  $(-i)$ . Por lo tanto:*

$$\pi_i(s_1, s_2, ..s_m) = \pi_{-i}(s_1, s_2, ..s_m) \quad (3.15)$$

El presente criterio propone articular una función objetivo de estructura no antagonica, con un conjunto de estrategias con perfil simétrico  $\pi_i(s_1, s_2, ..s_m)$ ; de acuerdo al equilibrio de Nash [23]. Direccionando de forma conveniente la estructura matemática de la función a optimizar, en la fase de síntesis multiobjetivo.

#### 4.1. Función de costos con estrategias ordinalmente simétricas

El teorema de John von Neumann [12] puede direccionar la estructura matemática de una función con estrategias mezcladas, considerando el caso simplificado de solo dos variables  $f(x, u)$ . Garantizando un punto de equilibrio.

Definición 7 ( **Punto de silla de una función arbitraria**  $f(x, u)$ ) *Una función  $f : C \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  de los conjuntos  $C$  y  $\mathcal{D}$ . Tiene al menos un punto de silla  $(x^*, y^*)$  con  $x^* \in C$  y  $y^* \in \mathcal{D}$  si:*

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y); \forall x \in C, y \in \mathcal{D}. \quad (3.16)$$

Las condiciones para alcanzar tal punto de equilibrio, vienen dadas por el teorema minimax de von Neumann. Donde adicionalmente interviene la cantidad de información disponible a los jugadores en un lazo cerrado.

Teorema 4 ( **Teorema Minimax de Von Neumann** ) *Sea  $f : C \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Donde los conjuntos  $C \subset \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  son convexos, cerrados y acotados. Suponga que  $x \rightarrow f(x, u)$  es concava y  $u \rightarrow f(x, u)$  es convexa. Entonces:*

$$v^+ = \min_{u \in \mathcal{D}} \max_{x \in C} f(x, u) = \max_{x \in C} \min_{u \in \mathcal{D}} f(x, u) = v^-. \quad (3.17)$$

Donde:  $v^-$  es la cantidad mas pequeña que el jugador 1 garantiza recibir y  $v^+$  es la cantidad mas grande que el jugador 2 puede perder.

Este teorema sugiere que para formular una función de costos con un punto de equilibrio; se requiere convexidad en el conjunto de estrategias; mientras que para la función de costos: Convexidad y concavidad. Este hecho direcciona la elección de los índices  $J_{em1}, J_{em2}$  y  $J_{um2}$  como candidatos para conformar una función objetivo con características de desempeño/robustez en el apartado IV.

## 5. Síntesis del capítulo

En el presente capítulo se desarrolló una reformulación de los índices de desempeño convencionales en el dominio del tiempo para obtener métricas de los comportamientos en sistemas no lineales.

Estos índices no son restrictivos y pueden utilizarse para evaluar cualquier sistema de control (lineal o no-lineal), formulando el planteamiento de una función de optimización dentro del problema MOOP; siendo la teoría de juegos, la que direcciona una articulación basada en características ordinalmente simétricas.

La desventaja inherente ante otros criterios analíticos, es el consumo de recursos de cómputo para su cálculo. Ya que el conjunto de índices que conforman una función objetivo deberá ser calculada en un bucle de optimización mediante el uso de algoritmos especializados.

Puede decirse que las condiciones de reversibilidad para el presente criterio de desempeño como criterio de síntesis. Se establecen teniendo en mente el problema de la articulación de la función objetivo. Ya que por lo general la estructura de las funciones es puramente antagónica.

Este problema es clásico al momento de elegir adecuadamente las matrices de ponderación en el problema LQR, así como el vector de ponderación en del criterio analítico  $\mathcal{L}_{2+}/\mathcal{D}$ .

Este problema será abordado por la metodología de selección (MCDM/A) propuesta en el siguiente apartado.

Cabe señalar que la inclusión de esta métrica, utilizada para sintonizar controladores lineales multivariable en sistemas no-lineales mediante el enfoque de optimización multiobjetivo. Merece un trabajo de investigación a profundidad. Principalmente porque implica diversas teorías como son los juegos diferenciales y el diseño de algoritmos de optimización heurísticos .

## **Parte IV**

# **Contribución al planteamiento multiobjetivo de análisis y síntesis**



## Capítulo 4

# Análisis de controladores mediante técnicas de decisión multicriterio

### 1. Introducción

El presente capítulo aplica la métrica de desempeño obtenida en el capítulo III, para evaluar controladores lineales en el biorreactor de Cholette.

Para estructurar el proceso de categorización (o ranqueo) de un controlador en diversos estados estacionarios del sistema, se propone un esquema sistemático de decisión multicriterio basada en la metodología PROMETHEE.

Esta metodología integra la segunda etapa de diseño bajo el esquema generar primero, escoger después (GFCL). Cuyos resultados se han publicado para el biorreactor de Cholette (Apéndice A1).

Los alcances del capítulo son:

- 1 Delimitar el grupo de controladores lineales sintonizados en diferentes estados estacionarios del biorreactor de Cholette, según el modelo y punto de linealización.
- 2 Emplear el criterio de desempeño diseñado para estudiar los casos servo y regulatorio. Categorizando los casos de sintonización con criterios básicos y multiobjetivo.
- 3 Aplicar los métodos de Runge-Kutta de cuarto orden en el modelo no lineal del sistema, para observar el comportamiento de los controladores comprometidos con el mejor desempeño y robustez en el sistema linealizado.

## 2. La metodología PROMETHEE

El enfoque general desde el punto de vista PROMETHEE (Brans., 1982 [22]; Brans y Vincke., 1986 [21]; Behzadian y col., 2009 [14]). Considera un conjunto finito  $A$  de alternativas a ser evaluadas mediante un conjunto de criterios  $C$  (Ec-4.1). Donde el objetivo es maximizar las ganancias o minimizar los costos, partiendo de relaciones binarias de preferencia  $P_j(a_i, a_j)$ . Implicando múltiples indicadores en conflicto (En este caso: error/esfuerzo de control).

Un problema de decisión multi-criterio suele plantearse como:

$$MCDM \begin{cases} \text{Min} \{c_1(a_1), c_2(a_2), \dots, c_j(a_i) \mid a_i \in A; c_j \in C\} & \text{Maximizar o Mininimizar} \\ A = \{a_i \mid i = 1, 2, \dots, m\} & \text{Es el conjunto de alternativas} \\ C = \{c_j \mid j = 1, 2, \dots, n\} & \text{Es el conjunto de criterios} \end{cases} \quad (4.1)$$

Este planteamiento multicriterio generará una matriz de decisión ( $\Psi$ ) de orden equivalente al número de controladores evaluados por el número de indicadores en las prestaciones (ver Capítulo-I). Interviniendo múltiples indicadores en conflicto (error  $J_{em}$  / esfuerzo de control  $J_{um}$ ).

$$\Psi = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1j} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{i1} & J_{i2} & \dots & J_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{em1}^{11} & J_{em2}^{12} & J_{em3}^{13} & J_{um1}^{14} & J_{um2}^{15} & J_{um3}^{16} \\ J_{em1}^{21} & J_{em2}^{22} & J_{em3}^{23} & J_{um1}^{24} & J_{um2}^{25} & J_{um3}^{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{em1}^{i1} & J_{em2}^{i2} & J_{em3}^{i3} & J_{um1}^{i4} & J_{um2}^{i5} & J_{um3}^{i6} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Atendiendo a esta metodología; el análisis del desempeño multi-criterio de las  $A$  alternativas (controladores involucrados), requiere de la asignación de los pesos  $w_j$  y funciones preferenciales  $P_j$  para cada criterio componente dentro del (criterio-B). Esta ha sido una tarea dependiente de las consideraciones del evaluador. Resultando polémico en algunas ocasiones.

No obstante. La formulación del criterio de desempeño presentado en el capítulo II; integrado por índices de estrategia (Criterio-B). Realizará una transformación en la matriz de decisión, como se ha efectuado para otras metodologías multi-criterio como lo es TOPSIS (Sarraf y col., 2013) [98].

Cabe señalar que como PROMETHEE es un método de categorización (ranqueo) basado en comparaciones binarias. El primer paso es obtener el grado de dominancia entre dos alternativas ( $a_x, a_i$ ) y para todas las características (o prestaciones) involucradas en el criterio  $C$ . Estos resultados parciales conforman la llamada matriz de dominancia ( $\Psi_D$ ).

Definición 8 (**Grado de dominancia**) (Brans y col., 1984) [22] definen el grado de dominancia de una alternativa sobre el resto  $\pi(a_x, a_i)$  de la siguiente manera.

$$\pi(a_x, a_i) = \sum_{j=1}^n w_j P_j(a_x, a_i); \begin{cases} \pi(a_x, a_x) = 0 \\ 0 \leq \pi(a_x, a_i) \leq 1 \\ 0 \leq \pi(a_x, a_i) + \pi(a_i, a_x) \leq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Donde:

$w_j$  es el peso o ponderación considerada para cada criterio (definida por el evaluador).  $P_j(a_x, a_i)$  Es la función de preferencia para el criterio considerado cuando la opción ( $a_x$ ) es comparada con la opción ( $a_i$ ).

Esta función de preferencia indica que tan preferible es la opción ( $a_x$ ) respecto de ( $a_i$ ) considerando todos los criterios.

A continuación; la matriz de relaciones preferenciales del problema multi-criterio adquiere la siguiente forma:

Tabla 4.1: Matriz de dominancia o de relaciones preferenciales ( $\Psi_D$ ).

Alternativas	( $a_1$ )	( $a_2$ )	...	( $a_i$ )
( $a_1$ )	0	$\pi(a_1, a_2)$	...	$\pi(a_1, a_i)$
( $a_2$ )	$\pi(a_2, a_1)$	0	...	$\pi(a_2, a_i)$
⋮	⋮	⋮	0	⋮
( $a_i$ )	$\pi(a_i, a_1)$	$\pi(a_i, a_2)$	...	0

Establecida la matriz de dominancia (Tabla-4.1). Es posible obtener un flujo de las relaciones preferenciales de una alternativa respecto del resto.

Es importante señalar que este flujo preferencial depende de un criterio afín a la metodología de preferencias y debe mantener una interpretación dotada de jerarquía analítica (Figueira y col., 2005) [39] .

Para tal propósito. Se aprovecha una función preferencial basada en una distribución gaussiana (Fig-4.1); que junto con los índices de desempeño diseñados en el capítulo II, definen una combinación viable.

Primeramente, porque una función gaussiana permite manejar una desviación estándar representativa respecto de un nivel de desempeño deseable para cada prestación de los controladores involucrados. Es decir, el criterio considerado estará compuesto de índices de desempeño representativos para el error y para el control.

**Definición 9 (Flujos preferenciales)** *Los flujos preferenciales indican que tan preferible o no preferible es una opción sobre otra para todas y cada una de las prestaciones dentro del criterio. Por lo que las relaciones de flujo se obtienen a partir de la matriz de dominancia.*

$$\phi^+(a_i) = \frac{1}{(n-1)} \sum_{a_x \in A} \pi(a_i, a_x); \text{ Es el flujo preferencial de salida.} \quad (4.4)$$

$$\phi^-(a_i) = \frac{1}{(n-1)} \sum_{a_x \in A} \pi(a_x, a_i); \text{ Es el flujo preferencial de entrada.} \quad (4.5)$$

Estos flujos preferenciales de entrada y salida son utilizados en el ranking del flujo completo  $\phi(a_i)$  ( PROMETHEE II).

$$\phi(a_i) = \phi^+(a_i) - \phi^-(a_i); \text{ Es el flujo preferencial neto.} \quad (4.6)$$

Dentro del análisis multi-criterio del desempeño de las  $A$  alternativas. La asignación de los pesos  $w_j$  y funciones preferenciales  $P_j$  para cada característica, deberá seguir un planteamiento conveniente.

Brans.,(1982) [22] propone un criterio generalizado para definir el nivel de preferencia  $P_j$  entre opciones, mediante seis funciones preferenciales.

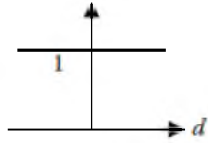
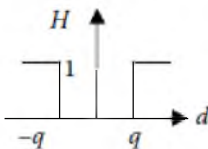
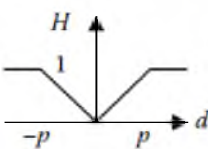
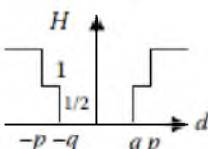
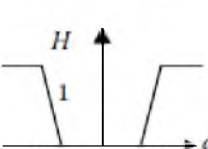
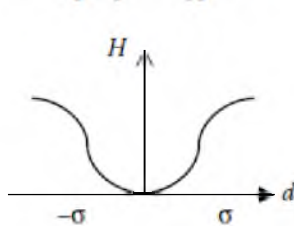
CRITERIOS	DEFINICIÓN ANALÍTICA	FORMA	PARÁMETRO
<b>Tipo I:</b> <b>Criterio usual</b>	$H(d) = \begin{cases} 0, & d = 0; \\ 1, &  d  > 0. \end{cases}$		NA
<b>Tipo II:</b> <b>Cuasi-criterio</b>	$H(d) = \begin{cases} 0, &  d  \leq q; \\ 1, & \text{de otra forma} \end{cases}$		$q$
<b>Tipo III:</b> <b>Criterio- forma V</b>	$H(d) = \begin{cases} \frac{ d }{p}, &  d  \leq p; \\ 1, &  d  > 0. \end{cases}$		$p$
<b>Tipo IV:</b> <b>Criterio- por nivel</b>	$H(d) = \begin{cases} 0, &  d  \leq q; \\ 1/2, & q <  d  \leq p; \\ 1, & \text{de otra forma} \end{cases}$		$q, p$
<b>Tipo V:</b> <b>Criterio- Lineal</b>	$H(d) = \begin{cases} 0, &  d  \leq q; \\ \frac{ d  - q}{p - q}, & q <  d  \leq p; \\ 1, & \text{de otra forma} \end{cases}$		$q, p$
<b>Tipo VI:</b> <b>Criterio Gaussiano</b>	$H(d) = 1 - \exp\left\{-\frac{d^2}{2\sigma^2}\right\}$		$\sigma$

Fig. 4.1: Criterio generalizado para las preferencias en la metodología PROMETHEE. (Brans, J.P., B. Mareschal y Ph. Vincke, Operational Research, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1984b).

La metodología de decisión multi-criterio PROMETHEE se resume como sigue (Fig-4.2):

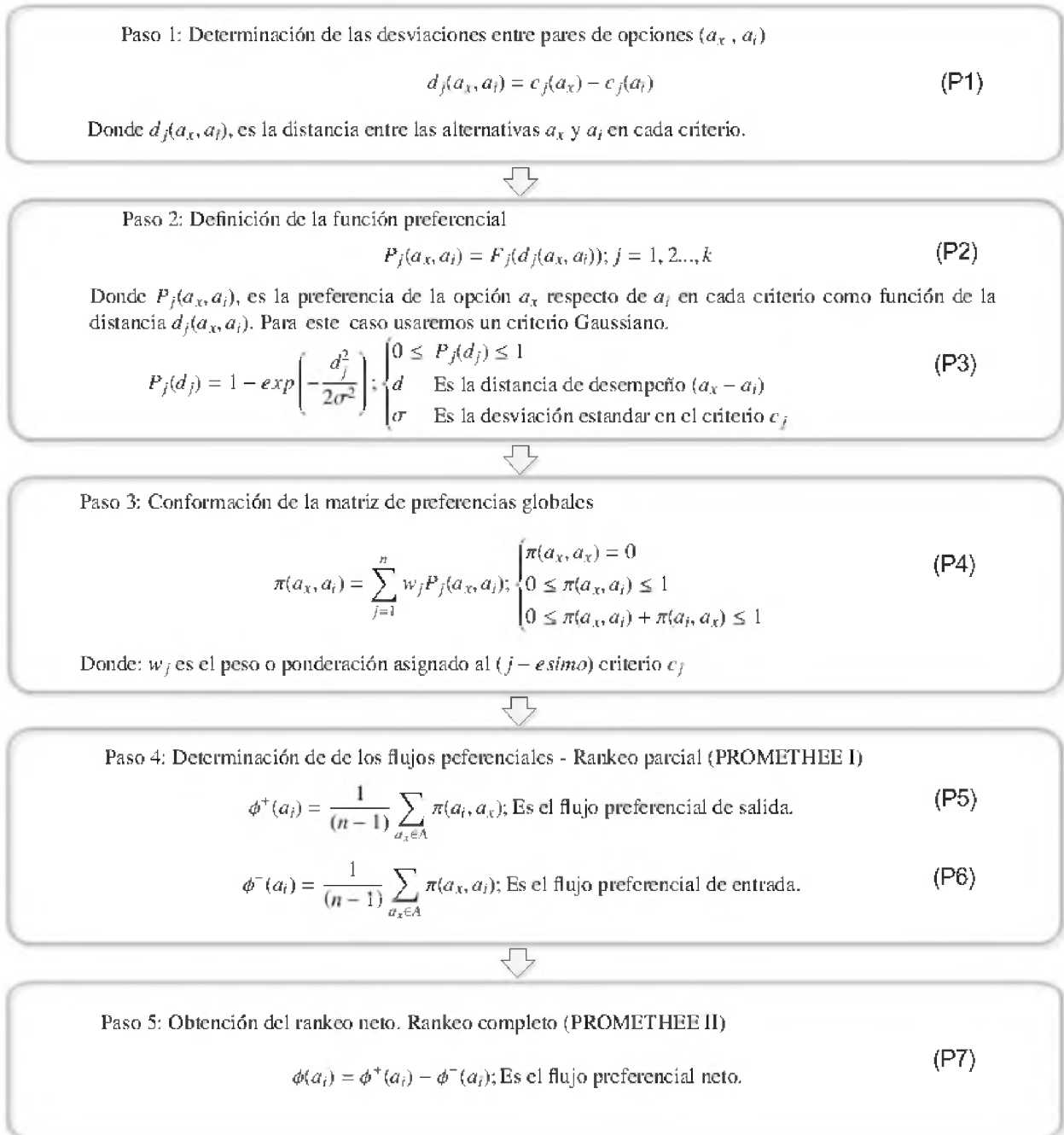


Fig. 4.2: Esquema basico de la metodología PROMETHEE

En este trabajo de investigación se propone un procedimiento de asignación basado en las características de la distribución Gaussiana para eliminar cualquier subjetividad del proceso de evaluación multi-criterio (Fig-4.3). Ya que algunas veces resulta ser polémico para la forma *a posteriori* (ver Capítulo I).

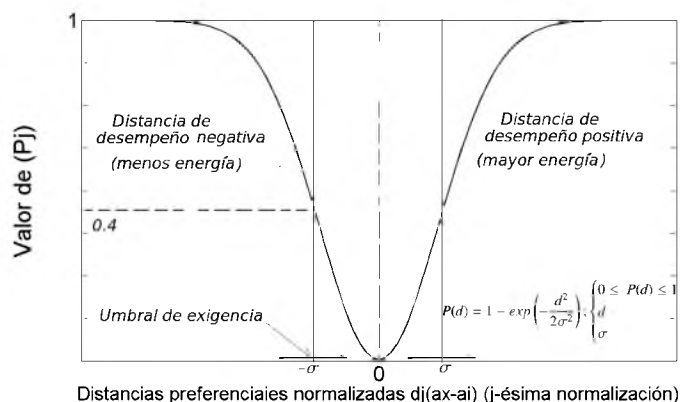


Fig. 4.3: Función preferencial Gaussiana Opción 6 (J.P. Brans y B. Mareschal 1982)

Definición 10 (**Distancia de desempeño**) *Las distancias de desempeño  $d_j(a_x - a_i)$  que resultan de la comparación binaria de múltiples opciones dentro de cada característica componente de un criterio C. Pueden transformarse para ser interpretadas mediante la (opción 6) de la metodología PROMETHEE (Fig-4.3) dentro de un proceso con distribución Normal-estándar  $(N(0, 1))$ .*

$$P(d_j) = 1 - \exp\left(-\frac{d_j^2}{2\sigma^2}\right); \begin{cases} 0 \leq P(d) \leq 1 \\ d \\ \sigma \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Es la distancia de desempeño} \\ \text{Desviación del criterio } c_i \end{array} \quad (4.7)$$

Donde:  $d_j(a_x - a_i)$  es la  $j$ -ésima distancia de desempeño para un controlador  $x$  dentro de cada característica componente del criterio  $C$  respecto del  $i$ -ésimo controlador. El umbral en  $1\sigma$  para dicha distancia, corresponde al punto de inflexión de la curva Gaussiana (campana inversa). En donde el grado de preferencia es de  $(1 - 0,6 = 0,4)$ .

La condición anterior en  $\sigma$  representará el caso de una evaluación con un umbral de exigencia del 60 % en una característica específica de los controladores.

Por tal motivo, es posible realizar objetivamente una selección, disminuyendo  $\sigma$  o aumentándola en el caso de que alguna característica dentro del criterio no sea de importancia trascendente para el sistema. O si para el  $i$ -ésimo lazo de control se requiere relajar los desempeños.

Esto proporciona una forma sistemática de ajuste en el umbral de interés (60 % =  $\sigma$ , 88 % =  $\sigma/2$ , 94 % =  $\sigma/3$ .etc) de acuerdo a la etapa de preferencias (Fig-4.1 (Ec-P3)).

A continuación se presenta el procedimiento de asignación de ponderaciones basado en la desviación estándar de los desempeños componente ( Opción 6 Tabla-4.2).

Caso Considerado	Pesos( $w_j$ ) (Relación propuesta)	Función preferencial ( $P_j$ ) (Función Gaussiana)	Condición a cumplir
Evaluación por Característica del Controlador	3 a 1 respecto de una no evaluada (equivalente a un umbral de ponderación ( $P_j w_j$ ) 2 a 1)	$\sigma=1$ (criterio EC-33) característica evaluada  $\sigma=2$ característica no evaluada	$\sum_{j=1}^n w_j = 1$

Tabla 4.2: Procedimiento de asignación propuesto para funciones preferenciales y pesos dentro de la etapa de selección de controladores

Combinando estas preferencias, es plausible categorizar los controladores con enfoque de diseño multi-objetivo.

Por ejemplo: comprometidos con la mejor estabilidad, la menor energía de seguimiento del error y la mejor convergencia; o los controladores que posean las mejores opciones en la energía de seguimiento y el menor error acumulativo comprometidos con el menor esfuerzo de control.

### 3. Aplicación de la metodología en el biorreactor de Cholette

Dentro del proceso de diseño de controladores mediante técnicas GFCL. La etapa de selección (MCDM/A) consiste en el análisis del conjunto de soluciones, generado en base a un conjunto de prestaciones de desempeño y robustez. Representado por índices analíticos o jerárquicos (Capítulo I y III). Esto depende del enfoque del diseñador y del sistema a ser evaluado.

#### 3.1. Análisis multi-criterio de controladores para el biorreactor de Cholette

Los controladores analizados corresponden a un conjunto de alternativas ( $A$ ) especificadas en la metodología PROMETHEE como  $a_{ij}$ . Donde el subíndice  $i$  representa el modelo del reactor considerado y el subíndice  $j$  es el ajuste del controlador en cuestión. Se analizarán los controladores para el modelo 5 en el caso servo. Una discusión de todos los modelos puede encontrarse en [91]. Las simulaciones correspondientes a los controladores para los modelos lineales y no-lineales del biorreactor de Cholette, generaron matrices de desempeño para el problema servo y regulatorio. De esta forma la etapa de análisis multi-criterio (MCDM) en las prestaciones, consiste en interpretar el nivel de compromiso en las matrices de decisión empleando los índices diseñados (Capítulo-III).

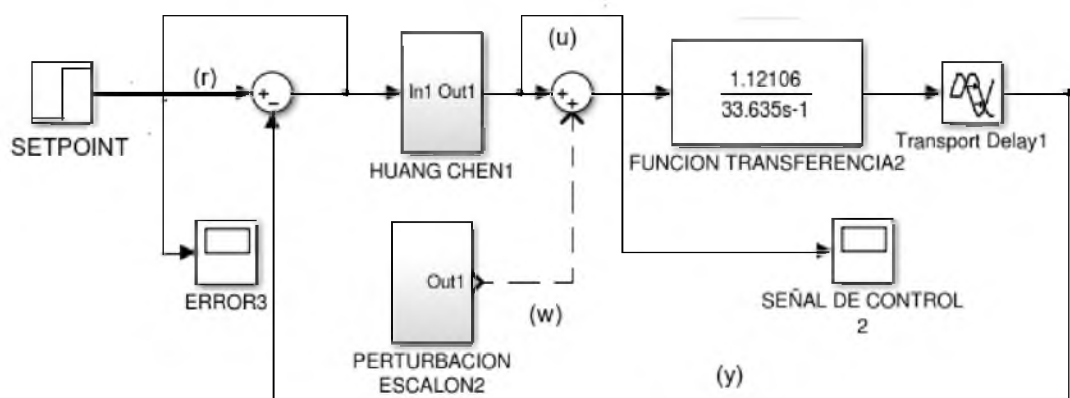


Fig. 4.4: Esquema general en Simulink del problema servo. Presentando el modelo lineal del biorreactor con el controlador Huang Chen 1999.  $(r)$  representa la consigna de concentración requerida ( $c_f$ ). La entrada exógena ( $w$ ) es cero para este caso.



Cabe señalar que el análisis del desempeño de los controladores lineales, puede efectuarse para los modelos linealizados o no-linealizados.

Esta consideración depende del evaluador.

Las matrices de decisión de acuerdo al criterio-B para el caso servo y regulatorio del modelo-5 (Ver Tabla-2.4 Capítulo-II). Se presentan a continuación:

Estas matrices ( $\Psi_{Servo-B}$ ) y ( $\Psi_{Regulatorio-B}$ ). Representan los escenarios básicos donde es introducida la metodología de decisión multi-criterio PROMETHEE, junto con el procedimiento de asignación de ponderaciones  $w_j$  y funciones preferenciales  $P_j$  (Ver Tabla-4.2).

La matriz de decisión para las simulaciones del servosistema es la siguiente:

$$\Psi_{Servo-B} = \begin{pmatrix} J_{em1} & J_{em2} & J_{em3} & J_{um1} & J_{um2} & J_{um3} \\ 24,90 & 81,87 & 29,48 & 639,20 & 50,56 & 1171,07 \\ 26,39 & 68,25 & 30,64 & 642,95 & 25,35 & 951,59 \\ 138,72 & 564,30 & 71,35 & 3292,12 & 114,75 & 2173,07 \\ 45,52 & 358,06 & 42,30 & 1290,34 & 287,37 & 1945,99 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Para el problema regulatorio la matriz de decisión es,

$$\Psi_{Regulatorio-B} = \begin{pmatrix} J_{em1} & J_{em2} & J_{em3} & J_{um1} & J_{um2} & J_{um3} \\ 28,32 & 491,42 & 40,58 & 867,14 & 58,89 & 1595,94 \\ 26,53 & 170,13 & 35,51 & 646,79 & 50,86 & 742,58 \\ 85,00 & 238,68 & 62,09 & 1707,39 & 82,64 & 1046,91 \\ 24,93 & 234,67 & 32,49 & 654,13 & 230,18 & 914,46 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Como puede observarse. Para el modelo 5 se tienen cuatro opciones de controladores para un estado estacionario correspondiente a la zona 1 (Ver Fig-2.2 Capítulo-II) y seis prestaciones que componen el criterio de evaluación (criterio-B) (Ver Tabla-3.2 capítulo-III).

Una evaluación de los controladores comprometidos con la mejor característica de convergencia en la salida ( $J_{em2}$ ) a un estado estacionario, mejores acciones consecutivas del controlador ( $J_{um3}$ ) y mejor estabilidad en el punto de operación ( $J_{um2}$ ). Define convenientemente las prestaciones de un controlador para un sistema con multiplicidad de estados estacionarios como es el bioreactor de Cholette.

Siguiendo el esquema de asignación de preferencias y ponderaciones dada en la (Tabla-4.2). Es posible configurar objetivamente el grado de exigencia del evaluador (nivel de  $\sigma$ ), en las prestaciones de un controlador desarrollado para el biorreactor de Cholette, para un estado estacionario específico.

Tabla 4.4: Configuración de pesos  $w_j$  y asignaciones de  $\sigma$  para el criterio preferencial Gaussiano en la evaluación de controladores con el criterio-B para el modelo-5

Indice componente	Ponderación $w_j$	Nivel de exigencia $\sigma$ en preferencias $P_j$
$J_{em1}$	$w_1=0.08$	$P_1 = 2\sigma$ (No evaluada)
$J_{em2}$	$w_2=0.25$	$P_2 = \sigma$ (Exigencia del 60 %)
$J_{em3}$	$w_3=0.08$	$P_3 = 2\sigma$ (No evaluada)
$J_{um1}$	$w_4=0.08$	$P_4 = 2\sigma$ (No evaluada)
$J_{um2}$	$w_5=0.25$	$P_5 = \sigma$ (Exigencia del 60 %)
$J_{um3}$	$w_6=0.25$	$P_6 = \sigma$ (Exigencia del 60 %)

Al contar con las matrices de decisión obtenidas de las simulaciones con los indicadores del criterio-B, junto con las ponderaciones y funciones preferenciales de la tabla anterior. Es momento de efectuar la metodología PROMETHEE para obtener las matrices de dominancia para los casos servo y regulatorio respectivamente. Obteniendo una categorización (o ranqueo) multi-criterio basado en los flujos preferenciales de entrada y salida para ambos escenarios.

Para el flujo preferencial de salida de la opción  $a_{51}$  se tiene:

$$\phi^+(a_{51}) = \frac{1}{(6-1)} \sum_{a_{5x} \in A} \pi(a_{51}, a_{5x}) = \frac{1}{(6-1)} \left( \pi(a_{51}, a_{52}) + \pi(a_{51}, a_{53}) + \pi(a_{51}, a_{54}) \right) \quad (4.10)$$

Mientras que para el flujo preferencial de entrada de la opción  $a_{51}$  se tiene:

$$\phi^-(a_{51}) = \frac{1}{(6-1)} \sum_{a_{5x} \in A} \pi(a_{5x}, a_{51}) = \frac{1}{(6-1)} \left( \pi(a_{54}, a_{51}) + \pi(a_{53}, a_{51}) + \pi(a_{52}, a_{51}) \right) \quad (4.11)$$

De tal forma que los flujos preferenciales de entrada y salida se calculan para cada una de las alternativas dentro de la matriz de decisión. Donde el flujo de salida mas grande  $\phi^+$  conjugado con un flujo de entrada mas pequeño  $\phi^-$  representa la mejor alternativa comprometida con las características evaluadas del criterio-B. Recordando que  $\pi(a_{51}, a_{51}) = 0$ .

Como puede observarse la alternativa  $(a_{52})$  tiene el flujo preferencial neto  $\phi$  mas positivo de los cuatro controladores analizados bajo los seis índices analíticos. Lo que representa un nivel de compromiso mas adecuado para el Bio-reactor de Cholette en el estado estacionario correspondiente.

$$\phi = \phi^+ - \phi^- \quad (4.12)$$

Los flujos preferenciales de entrada y salida para las cuatro opciones del escenario servo se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 4.5: Ranqueo en el nivel de compromiso bajo el criterio-B y relaciones preferenciales de salida ( $\phi^+$ ) y entrada ( $\phi^-$ ) para el escenario servo

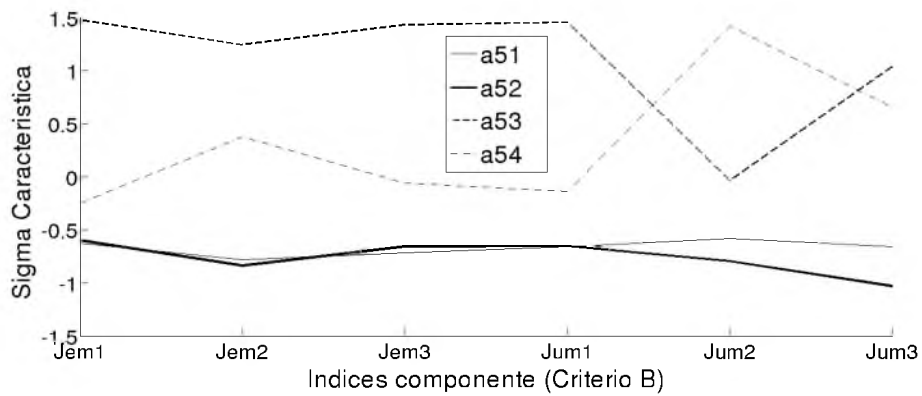
Opción de controlador	$\phi^+$	$\phi^-$	Ranqueo PROMETHEE II
$(a_{51})$	0.1059	0.0125	90.39 %
$(a_{52})$	0.1432	0.000	100 %
$(a_{53})$	0.0139	0.1275	59.65 %
$(a_{54})$	0.0091	0.1321	58.53 %

Tabla 4.6: Ranqueo en el nivel de compromiso bajo el criterio-B y relaciones preferenciales de salida ( $\phi^+$ ) y entrada ( $\phi^-$ ) para el escenario regulatorio

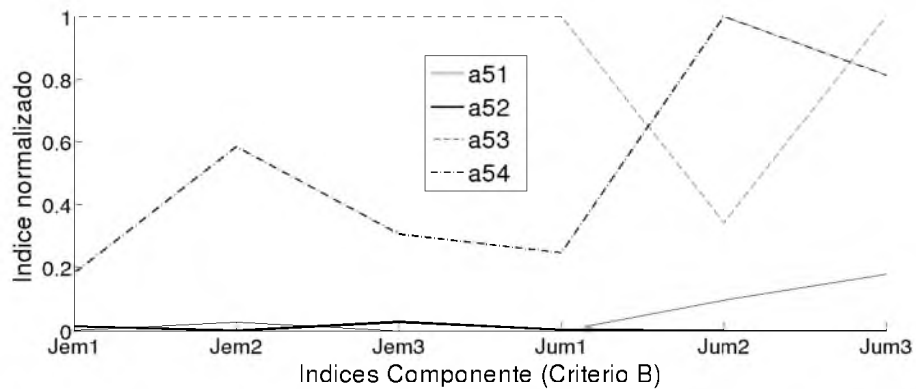
Opción de controlador	$\phi^+$	$\phi^-$	Ranqueo PROMETHEE II
$(a_{51})$	0.0264	0.0622	80.69 %
$(a_{52})$	0.0714	0.0000	100 %
$(a_{53})$	0.0309	0.0267	87.41 %
$(a_{54})$	0.0228	0.0626	80.04 %

El presente análisis PROMETHEE del desempeño de controladores lineales para el caso servo; puede corroborarse mediante herramientas de visualización como las coordenadas paralelas (Inselberg., 1985 y 1998 [55],[54]. Donde los seis ejes verticales representan las características componente del criterio-B.

Obsérvese que dos variantes para las coordenadas paralelas, indican que la opción ( $a_{52}$ ) tiene el mejor nivel de compromiso para el caso servo con las tres características de interés  $J_{em2}$ ,  $J_{um2}$ ,  $J_{um3}$  bajo el criterio-B. Donde para la opción (a) el parámetro indicador es la desviación estándar. Mientras que para la opción (b) son los valores normalizados entre 0-1.



(a)



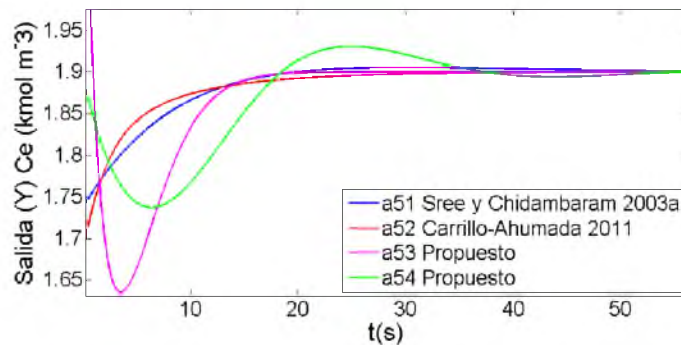
(b)

Fig. 4.6: Modelo 5 **a)** Coordenadas paralelas con  $\sigma$  como parámetro **b)** Coordenadas con índices normalizados (0-1). Para ambos casos puede verse que las desviaciones dentro de cada prestación evaluada ( $J_{em2}$ ,  $J_{um2}$ ,  $J_{um3}$ ) del criterio-B son las menores.

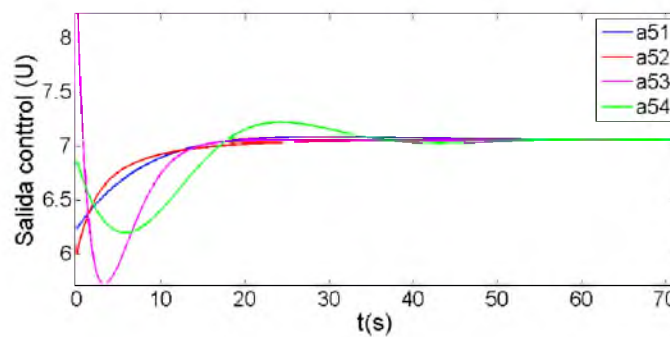
La metodología PROMETHEE junto con el criterio-B (Capitulo-III). Indican que el controlador ( $a_{52}$ ) diseñado en Carrillo-Ahumaday col., (2011) [27]; tiene un diseño comprometido con la estabilidad y las mejores acciones consecutivas del controlador que llevan a una convergencia más adecuada en la concentración de salida del biorreactor en el estado estacionario correspondiente.

Esto se debe a que dicho controlador emplea una metodología de sintonización óptimo-robusta basada en un algoritmo de optimización complex de una función objetivo compuesta por seis índices analíticos diseñados por García-Alvarado y col., (2010) [44]. Presentando optimalidad de Pareto entre desempeño y robustez.

Los controladores desarrollados para el Modelo-5 se han simulado con el modelo no-lineal del Bio-reactor. Las respuestas para la salida y el control se presentan a continuación.



(a)



(b)

Fig. 4.7: Respuesta de los 4 controladores ( $a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}$ ) en el modelo no-lineal del Bio-reactor de Cholette a) salida del Bio-reactor b) Salida del controlador. El controlador  $a_{52}$  presenta mejor desempeño y robustez.

#### 4. Síntesis del capítulo

En el presente capítulo se ha diseñado un esquema de evaluación multicriterio del desempeño de controladores implementados por la comunidad de control para el biorreactor de Cholette, con distintos modelos y estados estacionarios. Ejemplificando la metodología en el modelo-5 desarrollado por [27].

Para la etapa de decisión (MCDA/M) en el diseño de controladores óptimo-robustos bajo el enfoque generar primero y escoger después (GFCL). Se ha incorporado Visual-PROMETHEE (Brans y Mareschal 1982); empleando un nuevo criterio de evaluación, basado en índices de desempeño dotados de jerarquía analítica (Criterio-B).

El enfoque de distancia de desempeño  $d_j$  para cada característica dentro del criterio-B es canalizado convenientemente al considerar un proceso normalizado  $N(0, 1)$  en una función preferencial Gaussiana (tipo 6). Por lo que se ha propuesto un método sistemático para la asignación de las ponderaciones ( $w_j$ ) y funciones preferenciales ( $P_j$ ), interpretando niveles de exigencia requeridos por el evaluador ( $60\% = \sigma$ ,  $88\% = \sigma/2$ ,  $94\% = \sigma/3$ ..entre otros).

Esto es de gran utilidad al momento de decidir el tipo de controlador requerido en algún punto de trabajo específico de un sistema no lineal y para algún escenario de interés (servo o regulatorio).

La categorización de los controladores para el modelo-5 obtenido mediante las relaciones binarias de preferencia de la metodología y estratificadas por modelo. Puede ser corroborado con gráficos multi-dimensionales (coordenadas paralelas). Donde dos variantes confirman la categorización PROMETHEE y enriquecen la interpretación del enfoque de evaluación multicriterio por distancias de desempeño.

Se ha podido verificar que para el biorreactor de Cholette. Aquellos estados estacionarios cercanos al punto  $C_s = 1.304$ ,  $C_f = 3.288$  y  $C_e = 1.8$ ; presentan un mayor reto en el diseño de una ley de control.

Esto se debe a la inestabilidad de la reacción y a los tiempos de retardo involucrados. Siendo los controladores con arquitecturas PI ponderado los de mejor categorización de desempeño para el caso servo y regulatorio del modelo 5 (Opción ( $a_{52}$ )) sintetizado por (Carrillo-Ahumada y col., 2011).

Cabe señalar que este controlador PI con ponderación en el set-point, no logra el menor tiempo de asentamiento ( $T_s$ ). Sin embargo; tiene la mejor convergencia en la concentración de salida del biorreactor ( $J_{em2}$ ), junto con las mejores acciones consecutivas del controlador ( $J_{um3}$ ) que llevan a un compromiso con la mejor robustez del sistema ( $J_{um2}$ ) en el estado estacionario considerado.

Finalmente y a diferencia de otros trabajos de análisis del desempeño de controladores mediante técnicas multi-criterio como el de Sun y Le., (2010) [111]. Se proporciona un criterio de evaluación basado en la entropía de sistemas y un método sistemático de asignación de ponderaciones y preferencias para la evaluación multi-criterio del desempeño de controladores en sistemas no lineales con multiplicidad de estados estacionarios.



## Capítulo 5

# Síntesis multiobjetivo MOOD de controladores lineales PI(D)

### 1. Introducción

Este capítulo presenta un procedimiento de síntesis que aplica el criterio de desempeño propuesto en el apartado III, para ajustar un controlador PI en un secador de charolas.

El planteamiento multiobjetivo propone un nuevo método de articulación no antagónico basado en la entropía del sistema. Cuyo concepto de diseño direcciona la persistencia, completitud y simplicidad, mediante la visualización con GAIA (*Graphical Analysis for Interactive Aid*).

En este caso se sintetiza un controlador PI óptimo-robusto para un sistema SISO, que posee no-linealidad en el actuador. Los resultados se presentan mediante simulaciones numéricas y aún no han sido publicados. Los alcances del capítulo son:

- 1 Presentar los elementos que integran la metodología de sintonización multiobjetivo MOOD, aplicable a sistemas no-lineales.
- 2 Establecer un esquema de estratificación para extender el procedimiento SISO a sistemas MIMO, como direccionamiento de trabajos futuros.
- 3 Exponer los pormenores de la metodología ajustando un controlador PI para el secador de charolas. Señalando las ventajas y limitaciones sobre otras metodologías de sintonización.

## 2. Planteamiento del problema multiobjetivo MOOP

Una vez que la etapa de decisión multicriterio ha demostrado su objetividad en la categorización (o ranqueo) de controladores con la métrica propuesta; es momento de sistematizar un proceso de diseño de controladores lineales PI(D) óptimo-robustos con la metodología GFCL (Fig-5.1).

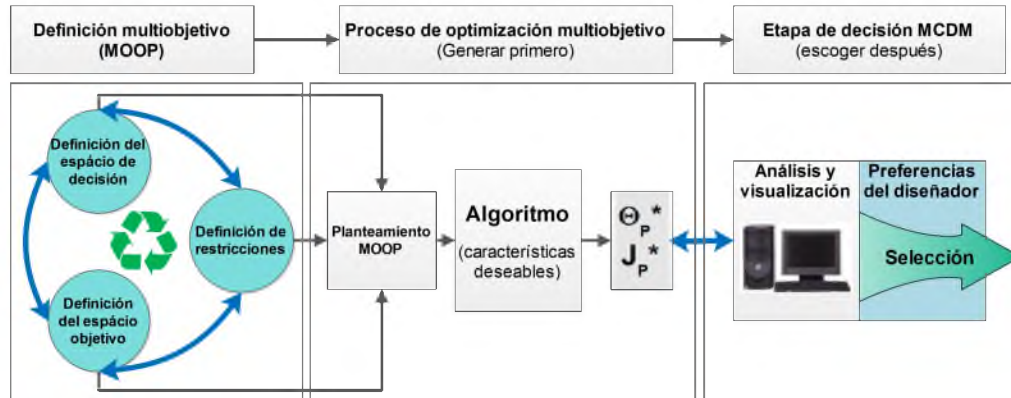


Fig. 5.1: Enfoque de diseño adoptado en el presente trabajo, mediante el paradigma de control óptimo con la metodología generar primero escoger después (GFCL) (Reynoso Meza.G y col.,2013c). El subíndice  $P$  en la función objetivo  $J_P$  hace referencia a soluciones que aproximan al frente de Pareto, lo cual se pretende propiciar con el planteamiento E-MOOP.

Para tal finalidad, es importante entender que la naturaleza exponencial del problema, involucra tanto la aproximación mediante frentes de Pareto y una fase de decisión multidimensional de soluciones (MCDA/M) (Reynoso-Meza y col.,2014 [87]). Para enfrentar el inconveniente de caracterizar funciones con múltiples influencias de control, se propone un esquema de estratificación mediante  $M$  funciones objetivo con estructura no antagónica denominado E-MOOP (*Exponential Multiobjective Optimization Problem*).

Este planteamiento tiene la intención de eficientizar la búsqueda de soluciones candidatas del algoritmo de optimización elegido por el diseñador, proponiendo la metodología PROMETHEE en la etapa de selección. Donde el diseñador, podrá decidir la importancia relativa de cada uno de los objetivos en el conjunto de funciones optimizadas.

## 2.1. Estratificación exponencial multiobjetivo E-MOOP

El planteamiento de síntesis descrito a continuación, representa una solución numérica al problema de sintonización de controladores PI(D) óptimo-robustos, en sistemas con dinámica no lineal. El cual utiliza un enfoque direccionado por la teoría de juegos diferenciales simétricos en la estructura de la función objetivo (Apartado III).

El proceso de optimización plantea  $\mathcal{M}$  funciones objetivo con un espacio de decisión  $\theta \in \mathcal{R}^n$ . Empleando una articulación no antagónica mediante índices en el dominio del tiempo, representativos de la entropía del sistema. Aludiendo al concepto de visualización GAIA en la estructura de cada función objetivo. Dicha articulación tiene la finalidad de eficientizar la búsqueda de soluciones óptimas ( $\mathbf{J}_P$ ) que acerquen al frente de Pareto.

Para presentar la estructura de esta metodología, es necesario hacer referencia al siguiente hecho:

El planteamiento básico óptimo cuadrático, con retroalimentación lineal de los estados del sistema (problema LQR). Mapea  $\mathcal{R}^r \times \mathcal{R}^c \rightarrow \mathcal{R}$ , considerando dos matrices de ponderación  $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}_+^{r \times r}$  y  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}_+^{c \times c}$  definidas previo al proceso de optimización ( con  $r$  salidas medibles y  $c$  influencias de control).

Una mejora a las limitantes de robustez y estructura de los controladores obtenidos con la técnica LQR, es proporcionada en [44] mediante el criterio  $\mathcal{L}_{2+}/\mathcal{D}$ . El cual; mediante seis índices de desempeño analíticos obtenidos del sistema linealizado, mapea  $\mathcal{R}^r \times \mathcal{R}^c \rightarrow \mathcal{R}^2$  (Ec-5.1). Introduciendo el concepto de optimalidad de Pareto.

Para solucionar este planteamiento, el algoritmo complex utilizado en [27] requirió de un esquema de balance de intereses en conflicto:

$$\min \mathbf{J}(\theta) = \{ \mathbf{I}_y \quad \mathbf{I}_u \} \quad (5.1)$$

En donde: ( $\mathbf{I}_y \in \mathcal{R}$ ) representa el índice global de desempeño correspondiente a las  $r$  salidas medibles del sistema. ( $\mathbf{I}_u \in \mathcal{R}$ ) corresponde al índice global de robustez de las  $c$  influencias de control. Considerando tres escenarios fundamentales : Servocontrol o seguimiento ( $I_{y, servo}, I_{u, servo}$ ), regulatorio ( $I_{y, reg}, I_{u, reg}$ ) y pulso ( $I_{y, pulso}, I_{u, pulso}$ ).

En ambos planteamientos debe observarse que el resultado de la optimización balancea índices antagonistas generados por una dinámica lineal. Es decir; al minimizar los  $I_y$  se minimiza el error del control (desempeño), pero al minimizar los  $I_u$  aumenta la tolerancia ante errores de modelación (robustez).

En el criterio  $\mathcal{L}_{2+}/\mathcal{D}$ , el problema de optimización requirió de un vector de ponderación  $\mathbf{V}_w \in \mathcal{R}^6$  para ajustar el orden de magnitud de los seis índices componente ( $I_{y,servo}$ ,  $I_{y,reg}$ ,  $I_{y,pulso}$ ,  $I_{u,servo}$ ,  $I_{u,reg}$ ,  $I_{u,pulso}$ ) y aplicar la optimalidad de Pareto ( $\mathcal{R}^r \times \mathcal{R}^c \rightarrow \mathcal{R}^2$ ). En este sentido, el algoritmo utilizado por [27] itera bajo el concepto de cercanía al origen, ajustando el vector de ponderación  $\mathbf{V}_w \in \mathcal{R}^6$  para conocer las condiciones de optimalidad global de las integrales analíticas de los casos servo, regulatorio y pulso.

El planteamiento propuesto, consiste en minimizar un vector de  $\mathcal{M}$  funciones objetivo con estructura no antagónica, basadas en una métrica en el dominio del tiempo representativa de la entropía del sistema lineal o no-lineal. Donde para este último caso, no hay solución a tales integrales [44]. Siendo el siguiente:

$$\min \mathbf{J}_G(\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{R}^n} = \left[ \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \mathbf{J}_M(\boldsymbol{\theta}) \right] \in \mathcal{R}^M \quad (5.2)$$

Sujeto a restricciones de excursión máxima de control:

$$\mathbf{U} = \left[ u_1 \leq K_1, \dots, u_M \leq K_M \right] \in \mathcal{R}^M.$$

Donde:  $\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta})$ ,  $i = [1, \dots, M]$ . Corresponde a la función objetivo que involucra las características de entropía de la  $i$ -ésima salida del sistema ( $J_{y_i}$ ) y la  $i$ -ésima respuesta de control ( $J_{u_i}$ ). Es decir:

$$\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}) = J_{y_i}(\boldsymbol{\theta}) + J_{u_i}(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow \min \quad (5.3)$$

Donde  $J_{y_i}(\boldsymbol{\theta}) = J_{em1} + J_{em2} \rightarrow \min$ , corresponde a una función de la salida medible del  $i$ -ésimo lazo de control, integrada por la energía de seguimiento y la característica de convergencia al estado estacionario. Representada por los índices  $J_{em1}$  y  $J_{em2}$  respectivamente (Capítulo III).

$J_{u_i}(\boldsymbol{\theta}) = J_{um2} \rightarrow \min$ , corresponde a una función de control del  $i$ -ésimo lazo, integrada por el valor RMS de la señal de control. Representada por el índice  $J_{um2}$  (Capítulo III).

Cada función objetivo no antagónica  $\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta})$  dentro del planteamiento general de optimización (Ec-5.2 y Ec-5.3). Representa una medida jerárquica de la entropía del sistema (Ec-3.3 y Ec-3.4 Capítulo III ) cuya minimización estratificada considera lo siguiente:

$$\min \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^n} = \left[ Jy_i(\boldsymbol{\theta}) + Ju_i(\boldsymbol{\theta}) \right] \quad (5.4)$$

Con espacio de decisión  $\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^n$  y con  $Jy_i(\boldsymbol{\theta})$  y  $Ju_i(\boldsymbol{\theta})$  definidas como:

$$Jy_i(\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^n} = \left[ \frac{V_1}{T_s} \sum_{k=1}^N e_i(k)^2 + \frac{V_2 t_{samp}}{T_s} \sum_{k=1}^N k \left[ f(k, t_{samp}, T_s) \right] e_i(k)^2 \right] \quad (5.5)$$

$$Ju_i(\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^n} = \left[ V_3 (nts + ntu) \sqrt{\frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^N (u_i(k) - u_{ss})^2} \right] \quad (5.6)$$

Con ponderación  $\mathbf{V}_w \in \mathfrak{R}^3$ , Sujetas a:  $\mathbf{U} = \left[ u_1 \leq K_1, \dots, u_M \leq K_M \right] \in \mathfrak{R}^M$ .

El requerimiento en común con los dos criterios presentados anteriormente, es la condición de balanceo en los componentes de (Ec-5.4).

Esto refiere al numero de dígitos significativos en el proceso de minimización de (Ec-5.5) y (Ec-5.6).

Emplear un balanceo unitario en  $\mathbf{V}_w \in \mathfrak{R}^w$ , generará opciones que atienden a la característica de convergencia y energía de seguimiento (desempeño). Este escenario puede ajustarse con facilidad en la etapa de selección multiobjetivo, gracias al procedimiento sistemático de estratificación establecido con la metodología PROMETHEE (capítulo IV). El cual balancea de forma estática la cercanía al frente de Pareto de las opciones optimizadas por el algoritmo utilizado.

Esta etapa beneficia el concepto de diseño de un controlador, puesto que interactúa con cierta combinación deseable de prestaciones y limitaciones físicas del sistema. Sin embargo; es necesario un esquema de balanceo para mejorar el espacio objetivo de opciones óptimo-robustas.

Puede decirse que el planteamiento propuesto parte del enfoque de norma de sistema (MIMO) estratificado a norma de señal (SISO) en los índices no antagónicos de las funciones objetivo. Sin embargo; no antagónico es un término que puede carecer de objetividad al momento de incluir múltiples influencias. En este sentido, es importante introducir un concepto físico de balance junto con la estructura simétrica en las estrategias de la función objetivo, para complementar el requerimiento de un vector de ponderación en (Ec-5.5) y (Ec-5.6).

Como punto de partida, puede observarse que el aporte individual de cada función objetivo en (Ec-5.2), depende principalmente del índice ( $J_{em2}$ ). El cual caracteriza la convergencia de cada salida del sistema a su estado estacionario. Este simple hecho puede direccionar un esquema de minimización de la entropía de un sistema, mediante los indicadores no antagónicos en (Ec-5.5 y Ec-5.6). Mediante el concepto de optimalidad GAIA (Fig-5.2).

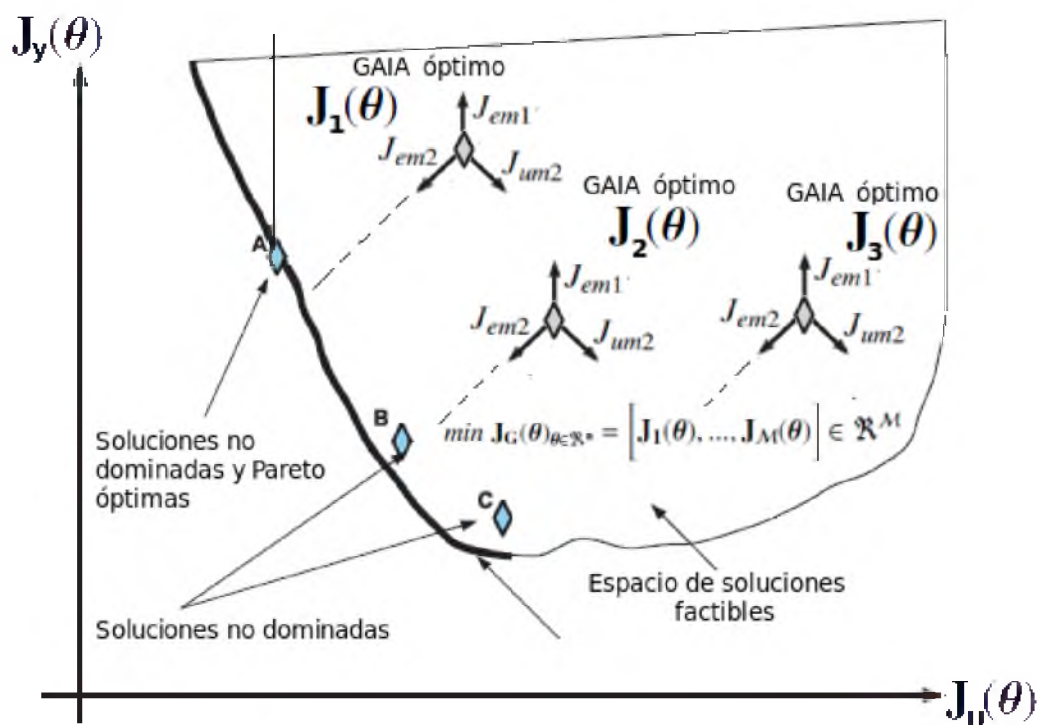


Fig. 5.2: El planteamiento E-MOOP realiza una estructuración de las funciones objetivo no antagónicas mediante el concepto de la entropía del sistema y su interpretación mediante GAIA. Minimizando el aporte de cada  $J_{em2}$  con la contribución de  $J_{em1}$  y  $J_{um2}$  en cada lazo. Gráfico adaptado de (Reynoso Meza.G y col.,2013c)

## Interpretación entrópica mediante GAIA

Para establecer una comparación o balance global de las múltiples influencias en un sistema MIMO. En algunos casos suele integrarse un mecanismo de agregación para evitar un incremento multiplicativo en el número de objetivos. Esto comúnmente se hace mediante una normalización de los índices involucrados ([90]). Por ejemplo:

$$J_E(\theta) = \left[ \frac{IAE^{1,1}(\theta)}{\Delta R^1} + \frac{IAE^{2,2}(\theta)}{\Delta R^2}, \dots, + \frac{IAE^{r,r}(\theta)}{\Delta R^r} \right] \quad (5.7)$$

$$J_U(\theta) = \left[ \sum_{j=1}^c \frac{IADU^{1,j}(\theta)}{\Delta U_{max}^1} + \sum_{j=1}^c \frac{IADU^{2,j}(\theta)}{\Delta U_{max}^2}, \dots, + \sum_{j=1}^c \frac{IADU^{p,j}(\theta)}{\Delta U_{max}^p} \right] \quad (5.8)$$

Donde  $IAE^{i,j}(\theta)$  es el  $IAE(\theta)$  para la variable controlada  $i$  cuando existe un cambio en la referencia  $\Delta R^j$  para la señal de control  $j$ . El  $IADU^{i,j}(\theta)$  es el  $IADU(\theta)$  para la señal de control  $i$  cuando hay un cambio en la referencia  $j$ .  $\Delta U_{max}^i$  es el cambio máximo permitido para la señal de control  $i$ . Estableciendo posteriormente ponderaciones funcionales (Reynoso-Meza 2014 [90]).

Un enfoque alternativo propuesto es establecer un balance estructural con que contribuye cada función objetivo a la entropía del sistema, mediante el concepto representativo GAIA.

En este sentido es importante mencionar que no es necesario construir una red GAIA en la presente metodología. Mas bien; el aporte de diseño es de valor conceptual.

La red GAIA (Fig-5.3); se construye mediante ejes que representan los índices o prestaciones disponibles (índices de desempeño/robustez). La distancia radial para cada característica del criterio, corresponde al flujo neto preferencial (-1 en el centro de la circunferencia y +1 en su periferia) (Capítulo IV). De tal forma que la mejor opción de diseño viene representada gráficamente por el polígono de mayor área.

En el caso de un balance ideal de características para cada  $J_i(\theta)$ , puede tenerse una circunferencia por polígono de balance (Fig-5.3). Esta condición representativa en las funciones componente (Ec-5.5 y Ec-5.6) puede establecerse con factores de ponderación direccionados por el índice de mayor contribución dentro del criterio de desempeño.

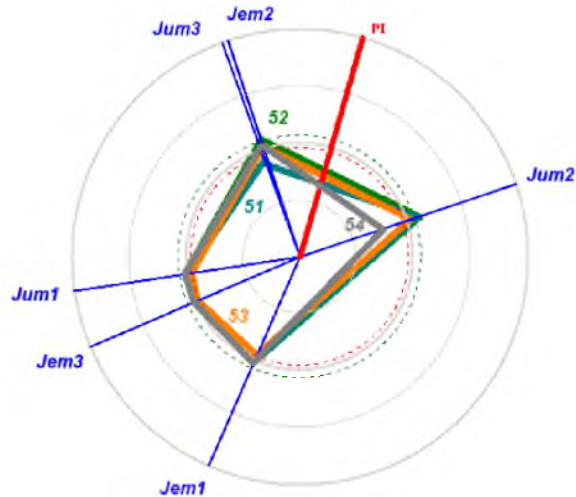


Fig. 5.3: Visualización de una red GAIA mostrando seis características de diseño. La mejor opción es (52) en color verde. Siendo el polígono con mayor área. [22]

Sabiendo que ( $J_{em2}$ ) es esencialmente un ITSE promediado y que siempre posee mayor magnitud que los indicadores de energía de seguimiento ( $J_{em1}$ ) y del valor RMS de control ( $J_{um2}$ ). Este índice adquiere una ponderación unitaria al ser representativo de una característica de convergencia de la salida para un valor de energía involucrado ( $V_1 J_{em1}$ ).

Considerando el escenario mas simple de un control PI:  
 Para interpretar la evolución de la entropía de un sistema SISO con los índices diseñados, se recurre a la hipótesis de que una medida del desorden del sistema ( $\xi_c$ ) puede determinarse iterativamente conociendo la forma en que la salida converge a un estado estacionario. Para ello se establece un indicador con incremento positivo que involucra la razón (convergencia/energía) de la opción anterior y actual ( $\Delta \xi_c = \xi_c(n-1) - \xi_c(n)$ ) del ajuste paramétrico ( $Kp, Ki$ ) en el espacio de decisión  $\theta = (Kp, Ki)$  (Fig-5.4).

Para complementar esta interpretación de la entropía mediante un balance GAIA en los indicadores involucrados ( $J_{em1}, J_{em2}, J_{um2}$ ).

La razón (convergencia/energía) del sistema, adquiere un sentido radio-vectorial con magnitud única en la tendencia del desorden del sistema ( $\xi_c$ ). La cual relaciona la energía requerida para lograr cierta forma de convergencia al estado estacionario. Es así que ( $\xi_c$ ) se define como:

$$\forall(Kp, Ki) \in \theta \exists \xi_c \equiv \frac{J_{em2}}{V_1 J_{em1}} \quad (5.9)$$

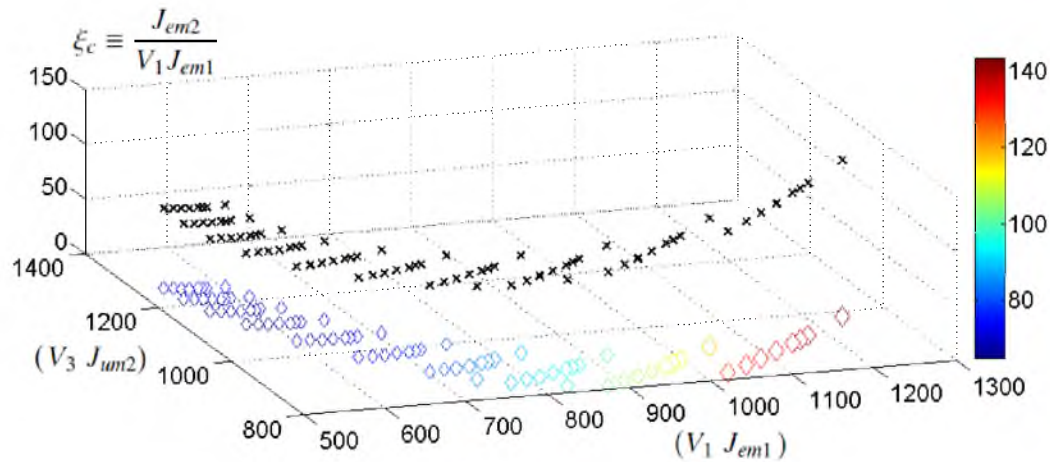


Fig. 5.4: Visualización de la magnitud del desorden del sistema ( $\xi_c$ ) para 120 controladores, cuando se confrontan la energía de salida ( $V_1 J_{em1}$ ) contra la potencia de control ( $V_3 J_{um2}$ ).

Recurriendo a la desigualdad triangular para todo momento de evolución del manifold sustentado por los indicadores ( $J_{em1}, J_{um2}, \xi_c$ ) en el espacio de decisión de un sistema con controlador PI (Fig-5.5). La entropía de control ( $H_c$ ) puede definirse en términos de los índices para la característica de convergencia de la salida  $J_{em2}$  y la energía de seguimiento promediada  $V_1 J_{em1}$ . Por lo tanto:

$$\forall(Kp, Ki) \in \theta \exists H_c \equiv \sqrt{(J_{em2})^2 + (V_1 J_{em1})^2} \quad (5.10)$$

Para que el sistema en cuestión evolucione a este estado de entropía ( $H_c$ ). Es necesario que el controlador mantenga una serie de acciones las cuales mantienen a su vez, una única tendencia del desorden del sistema ( $\xi_c$ ).

Considerando la potencia RMS de la señal de control ( $J_{um2}$ ) como el indicador representativo del balance de dicha entropía. Es necesario establecer la constante de proporcionalidad que define dicho balance:

$$\forall (Kp, Ki) \in \theta \exists K_H J_{um2} \equiv \sqrt{(J_{em2})^2 + (V_1 J_{em1})^2} \quad (5.11)$$

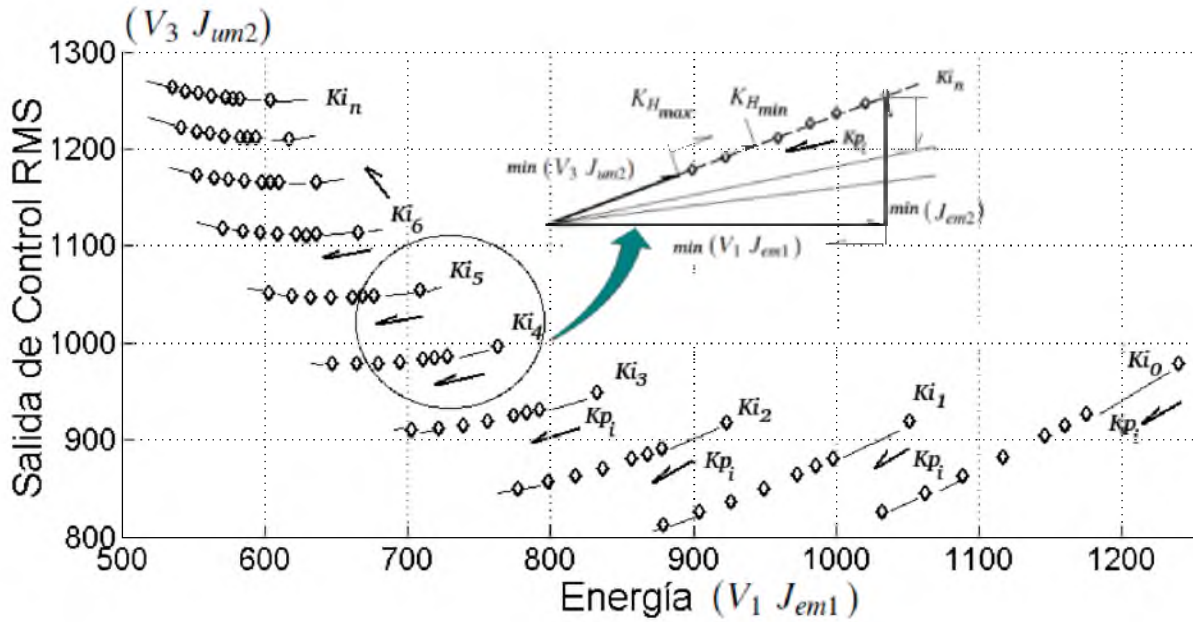


Fig. 5.5: Comportamiento del frente de Pareto para 120 controladores con diferentes valores de  $(Kp, Ki)$ . La evolución de los índices en el espacio de decisión, marca una tendencia en la entropía del sistema ( $H_c$ ) y un rango para la constante entrópica ( $K_H$ ).

En la (Fig-5.5), la constante entrópica ( $K_H$ ) está estructuralmente relacionada con el valor RMS de la salida del controlador  $J_{um2}$ . La cual mantiene una tendencia del desorden del sistema ( $\xi_c$ ). Por lo tanto; esta es representativa bajo un planteamiento de múltiples influencias de acoplamiento (señales de control), con funciones objetivo articuladas con una estructura ordinalmente simétrica bajo el paradigma de la teoría de juegos diferenciales. Donde la trayectoria del estado y el control son los jugadores conformando cada función objetivo.

$$K_H \equiv \frac{\sqrt{(J_{em2})^2 + (V_1 J_{em1})^2}}{J_{um2}} \quad (5.12)$$

Bajo este concepto de existencia de una constante de balance entrópico representativa de índices de desempeño no antagónicos (Ec-5.11 y Ec-5.12). Puede estructurarse cada una de las funciones objetivo dentro de un vector a optimizar (Fig-5.2).

En el planteamiento E-MOOP, la matriz de decisión generada  $\Psi_{\mathcal{M}}$ , se interpreta como una estratificación del vector transpuesto del problema de minimización inicial MOOP (Ec-5.2):

$$\min \mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{X}^n} = \left[ \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \mathbf{J}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}) \right]^T = \Psi_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} V_1 J_{em11} & V_2 J_{em21} & V_3 J_{um21} \\ V_1 J_{em12} & V_2 J_{em22} & V_3 J_{um22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_1 J_{em1\mathcal{M}} & V_2 J_{em2\mathcal{M}} & V_3 J_{um2\mathcal{M}} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Donde la representatividad de  $(K_H)$  como condición de ajuste para cada  $(J_{um2})$  (Ec-5.12) establece una similaridad de magnitud en cada función objetivo  $\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{X}^n} = \left[ J_{y_i}(\boldsymbol{\theta}) + J_{u_i}(\boldsymbol{\theta}) \right]$ .

$$\left( \frac{J_{y_i}(\boldsymbol{\theta})}{J_{u_i}(\boldsymbol{\theta})} \simeq \frac{J_{u_i}(\boldsymbol{\theta})}{J_{y_i}(\boldsymbol{\theta})} \right) \forall \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}) \quad (5.14)$$

Para lograr una condición de equilibrio óptimo de un sistema, se requiere minimizar índices con orden de magnitud similar donde el vector de ponderación  $\mathbf{V}_w \in \mathcal{R}^3$  en (Ec-5.13), cumpla la siguiente condición de balance:

$$\left( \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow \min \right) \wedge \left( \left| \frac{(V_1 J_{em1} + V_2 J_{em2})}{V_3 J_{um2}} - \frac{V_3 J_{um2}}{(V_1 J_{em1} + V_2 J_{em2})} \right|_i \rightarrow 0 \right) \quad (5.15)$$

Donde el vector de ponderación es ajustado en la relación de índices de  $V_1$  y  $V_3$  como sigue:

$$\mathbf{V}_w = \left[ V_1 = 10 \frac{J_{em2}}{J_{em1}}, V_2 = 1, V_3 = V_1 \times \max K_H \right] \forall \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}) \quad (5.16)$$

### 3. Síntesis de un control PI en un secador de charolas

A continuación se detalla el procedimiento de sintonización de un control PI con el planteamiento multiobjetivo E-MOOP. La etapa de selección multicriterio se presenta posteriormente, seleccionando una respuesta de compromiso. El procedimiento de sintonización se realizará con el modelo no-lineal de la planta, minimizando una función objetivo  $J_1(\theta) \in \mathcal{R}^3$  para el sistema perturbado, con espacio de decisión  $\theta \in \mathcal{R}^2$ .

---

**Algorithm 5.1:** Sintonización E-MOOP controlador PI SISO

---

- 1 Encontrar el conjunto de parámetros iniciales  $K_p$  en  $(\theta)$ ;
  - 2 Definiendo como un LQR con sistema linealizado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ ;
  - 3  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ ;
  - 4 Inicio del planteamiento E-MOOP  $J_1(\theta) = V_1 J_{em1} + J_{em2} + V_3 J_{um2}$ ;
  - 5 **while**  $\Delta \xi_c > 0$  **do**
  - 6     Bucle de puntos límite para  $N$  objetivos;
  - 7     Call función (RKM); Sistema no lineal perturbado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ ;
  - 8      $\xi_{c\ n} = J_{em2}/V_1 J_{em1}$  ;
  - 9      $\Delta \xi_c = \xi_{c\ (n-1)} - \xi_{c\ (n)}$ ;
  - 10 **while**  $i < N$  **do**
  - 11     Bucle optimización de la función Objetivo;
  - 12     Call función (RKM); Sistema no lineal perturbado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ ;
  - 13      $J_1(\theta) = V_1 J_{em1} + J_{em2} + V_3 J_{um2}$ ;
  - 14 Efectuar etapa de análisis multicriterio con PROMETHEE
- 

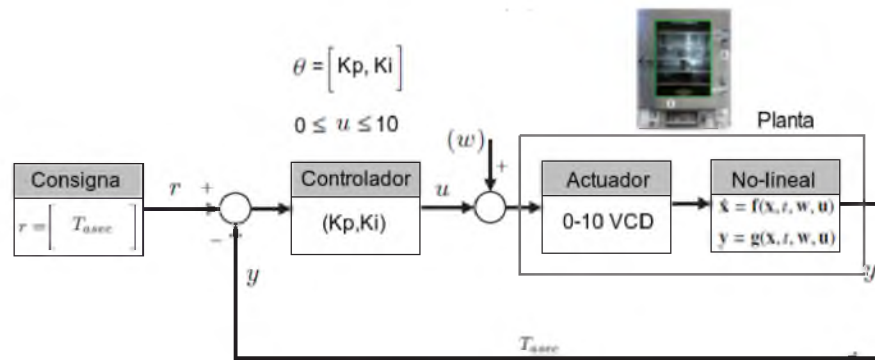


Fig. 5.6: Esquema básico del controlador PI SISO para la temperatura del aire en la cámara de secado. El modelo no lineal se presenta en el capítulo-II.

Para la estructura SISO, la consigna es la temperatura del aire en la cámara (333K ó 60°C), manteniendo constante el flujo de aire de secado. Mientras que la perturbación considerada será el flujo másico de vaporización desarrollado en la superficie del vegetal. El planteamiento multiobjetivo E-MOOP es el siguiente :

$$\min \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^2} \left[ V_1 J_{em1}(\boldsymbol{\theta}) + V_2 J_{em2}(\boldsymbol{\theta}) + V_3 J_{um2}(\boldsymbol{\theta}) \right] \in \mathfrak{R}^3 \quad (5.17)$$

Con condición de balance entrópico:

$$\left| \frac{(V_1 J_{em1} + V_2 J_{em2})}{V_3 J_{um2}} - \frac{V_3 J_{um2}}{(V_1 J_{em1} + V_2 J_{em2})} \right| \rightarrow 0.$$

Sujeto al vector :  $\mathbf{V}_w \in \mathfrak{R}^3 = \left[ V_1 = 1 \times 10^3, V_2 = 1, V_3 = 1 \times 10^4 \right]$ .

Con vector de excursión máxima de control  $u(t) \leq \text{Max}(u = 10)$ .

El modelo en espacio de estados es el presentado en el capítulo-II:

*Modelo no lineal de parámetros concentrados para el secador de charolas de convección forzada (modelo simplificado)*

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{Rcal} \\ \dot{T}_{asec} \\ \dot{T}_{prod} \\ \dot{T}_{par} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\left( \frac{V_{rms}^2}{R_{cal}} - h_{Rcal} S_{Rcal} (T_{Rcal} - T_{asec}) \right)}{m_{Rcal} C_{p,Rcal}} \\ \frac{\left( h_{aRcal} S_{Rcal} (T_{Rcal} - T_{asec}) - A_{prod} h_{c,prod} (T_{asec} - T_{prod}) - A_{par} h_{c,par} (T_{asec} - T_{par}) + L_v \dot{m}_{prod} \right)}{\rho_{asec} C_{p,asec} V_{asec}} \\ \frac{\left( A_{prod} h_{c,prod} (T_{asec} - T_{prod}) - L_v \dot{m}_{prod} \right)}{m_{prod} C_{p,prod}} \\ \frac{\left( A_{par} h_{c,par} (T_{asec} - T_{par}) - A_{par} K_{par} (T_{par} - T_{amb}) \right)}{\rho_{par} C_{p,par} V_{par}} \end{pmatrix}$$

con  $\mathbf{u} = [V_{CT}]$ ;  $\mathbf{y} = [T_{asec}]$  para una opción SISO.

$$0 \leq V_{rms} \leq 220 \text{ Vca}; 0 \leq V_{CT} \leq 10 \text{ vcd.}$$

*Función de optimización para el sistema no-lineal perturbado*

$$\min J(\theta)_{\theta \in \mathbb{R}^2} = \left[ 1 \times 10^3 J_{em1} + J_{em2} + 1 \times 10^4 J_{um2} \right]$$

$$J_y(\theta) = V_1 J_{em1} + J_{em2}, \quad J_u(\theta) = V_3 J_{um2}.$$

Estratificación del espacio de decisión de 130 controladores.

Opción	$V_1 J_{em1}$	$J_{em2}$	$V_3 J_{um2}$	$J_y(\theta)$	$J_u(\theta)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
( $K_p = 0,270, K_i = 0,00150$ )	817.67	75.09	863.18	892.76	863.18
( $K_p = 0,270, K_i = 0,00175$ )	739.06	60.28	915.37	799.34	915.37
( $K_p = 0,270, K_i = 0,00200$ )	679.55	50.67	979.36	730.22	979.36
( $K_p = 0,270, K_i = 0,00225$ )	632.73	44.02	1047.53	676.76	1047.53
( $K_p = 0,270, K_i = 0,00250$ )	597.02	39.70	1113.50	636.73	1113.50
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
( $K_p = 0,275, K_i = 0,00100$ )	1062.71	139.08	845.18	1201.80	845.18
( $K_p = 0,275, K_i = 0,00125$ )	904.96	95.88	825.34	1000.84	825.34
( $K_p = 0,275, K_i = 0,00150$ )	798.90	72.27	856.48	871.18	856.48
( $K_p = 0,275, K_i = 0,00175$ )	722.52	58.06	912.29	780.59	912.29
( $K_p = 0,275, K_i = 0,00200$ )	664.68	48.84	978.80	713.52	978.80
( $K_p = 0,275, K_i = 0,00225$ )	619.16	42.46	1048.69	661.62	1048.69
( $K_p = 0,275, K_i = 0,00250$ )	584.99	38.44	1115.31	623.43	1115.31
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
( $K_p = 0,281, K_i = 0,00100$ )	1032.24	132.80	825.49	1165.04	825.49
( $K_p = 0,281, K_i = 0,00135$ )	834.38	81.09	823.90	915.47	823.90
( $K_p = 0,281, K_i = 0,00150$ )	<b>777.34</b>	<b>69.09</b>	<b>850.09</b>	<b>846.44</b>	<b>850.09</b>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
( $K_p = 0,2950, K_i = 0,00175$ )	662.39	50.299	909.77	712.69	909.77
( $K_p = 0,2950, K_i = 0,00200$ )	610.55	42.41	984.44	652.97	984.44
( $K_p = 0,2950, K_i = 0,00225$ )	<b>569.71</b>	<b>36.95</b>	<b>1059.68</b>	<b>606.67</b>	<b>1059.68</b>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
( $K_p = 0,2950, K_i = 0,00325$ )	514.50	37.24	1273.33	551.74	1273.33
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
( $K_p = 0,3150, K_i = 0,00100$ )	<b>884.09</b>	<b>103.95</b>	<b>753.75</b>	<b>988.05</b>	<b>753.75</b>
( $K_p = 0,3150, K_i = 0,00125$ )	757.36	71.87	779.84	829.24	779.84
( $K_p = 0,3150, K_i = 0,00150$ )	672.05	54.44	843.19	726.49	843.19
( $K_p = 0,3150, K_i = 0,00175$ )	610.48	43.97	920.18	654.46	920.18
( $K_p = 0,3150, K_i = 0,0020$ )	563.74	37.16	1000.29	600.91	1000.29
( $K_p = 0,3150, K_i = 0,00225$ )	526.92	32.44	1078.80	559.36	1078.80
( $K_p = 0,3150, K_i = 0,00250$ )	504.80	30.61	1146.09	535.41	1146.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

La (Fig-5.7) muestra la respuesta en la temperatura de la cámara para 120 controladores. Analizando mas adelante las categorizaciones PROMETHEE de desempeño-robustez (Tabla-5.1 y Tabla-5.2).

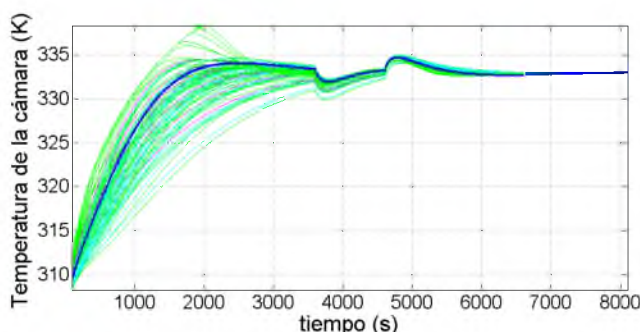


Fig. 5.7: Respuesta en la temperatura de la cámara con una consigna de 333K (60°C) para 120 controladores. La opción en azul representa una opción óptima bajo el criterio E-MOOP ( $Kp = 0,281$ ,  $Ki = 0,0015$ ).

Opción de controlador	$\phi^+$	$\phi^-$	Ranqueo PROMETHEE II
( $Kp = 0,285$ , $Ki = 0,002$ )	0.0416	0.0095	100 %
( $Kp = 0,295$ , $Ki = 0,00175$ )	<b>0.0354</b>	<b>0.0034</b>	<b>99.98 %</b>
( $Kp = 0,290$ , $Ki = 0,00175$ )	0.0328	0.0034	99.45 %
( $Kp = 0,285$ , $Ki = 0,00175$ )	0.0302	0.0036	98.88 %
( $Kp = 0,275$ , $Ki = 0,002$ )	0.0356	0.0094	98.82 %
( $Kp = 0,280$ , $Ki = 0,00175$ )	0.0282	0.0039	98.43 %
( $Kp = 0,270$ , $Ki = 0,002$ )	0.0328	0.0096	98.22 %
( $Kp = 0,295$ , $Ki = 0,0015$ )	0.0255	0.0026	98.15 %
( $Kp = 0,315$ , $Ki = 0,00125$ )	0.0269	0.005	97.97 %
( $Kp = 0,275$ , $Ki = 0,00175$ )	0.0252	0.0045	97.73 %
( $Kp = 0,265$ , $Ki = 0,002$ )	0.03	0.0099	97.61 %
( $Kp = 0,290$ , $Ki = 0,0015$ )	0.0233	0.0033	97.6 %
( $Kp = 0,260$ , $Ki = 0,00225$ )	0.0371	0.0185	97.34 %
( $Kp = 0,260$ , $Ki = 0,0025$ )	0.0465	0.0288	97.15 %
( $Kp = 0,2575$ , $Ki = 0,00225$ )	0.0356	0.0186	97.02 %
( $Kp = 0,285$ , $Ki = 0,0015$ )	0.0211	0.0042	96.99 %
( $Kp = 0,260$ , $Ki = 0,002$ )	0.0273	0.0104	96.99 %
( $Kp = 0,255$ , $Ki = 0,00225$ )	0.0341	0.0187	96.7 %
( $Kp = 0,2575$ , $Ki = 0,002$ )	0.0260	0.0108	96.67 %
( <b><math>Kp = 0,280</math></b> , <b><math>Ki = 0,0015</math></b> )	<b>0.0194</b>	<b>0.0051</b>	<b>96.5 %</b>

Tabla 5.1: Categorización de **desempeño/robustez** para 20 controladores y relaciones preferenciales de salida ( $\phi^+$ ) y entrada ( $\phi^-$ ). Las ponderaciones fueron: ( $w = 3, P = \sigma$ ) para  $J_{em1}$ ; ( $w = 3, P = \sigma$ ) para  $J_{em2}$  y ( $w = 3, P = \sigma/2$ ) para  $J_{um2}$ .

La (Tabla-5.1) indica que el ajuste ( $K_p = 0,285, K_i = 0,002$ ) representa la mejor opción con desempeño/robustez, con las ponderaciones de balance ( $w = 3, P = \sigma$ ) en  $J_{em1}$ , ( $w = 3, P = \sigma$ ) en  $J_{em2}$  y ( $w = 3, P = \sigma/2$ ) en  $J_{um2}$ . Bajo el criterio de una función objetivo (en este caso: criterio E-MOOP), la opción con mejor balance en las funciones objetivo es ( $K_p = 0,280, K_i = 0,0015$ ). Esta discrepancia se debe a que dentro de un análisis multicriterio como PROMETHEE se consideran todos los objetivos que componen el planteamiento; mientras que en la optimalidad de Pareto únicamente objetivos antagónicos. A continuación la (Tabla-5.2 muestra otra categorización de los 120 controladores, modificando las ponderaciones y preferencias para un ajuste enfocado a la robustez. En este caso la mejor opción es el ajuste ( $K_p = 0,315, K_i = 0,001$ ), coincidiendo con el mínimo de la función objetivo.

Tabla 5.2: Categorización (ranqueo) de 20 controladores en el nivel de compromiso (**robustez**) y relaciones preferenciales de salida ( $\phi^+$ ) y entrada ( $\phi^-$ ). Las ponderaciones utilizadas fueron: ( $w = 1, P = \sigma/2$ ) para  $J_{em1}$ ; ( $w = 1, P = \sigma/2$ ) para  $J_{em2}$  y ( $w = 3, P = \sigma/8$ ) para  $J_{um2}$ .

Opción de controlador	$\phi^+$	$\phi^-$	Ranqueo PROMETHEE II
<b>(<math>K_p = 0,315, K_i = 0,001</math>)</b>	<b>0.2978</b>	<b>0.0433</b>	<b>100 %</b>
( $K_p = 0,315, K_i = 0,00125$ )	0.2559	0.0115	97.86 %
( $K_p = 0,300, K_i = 0,00125$ )	0.2287	0.0196	90.86 %
( $K_p = 0,295, K_i = 0,00125$ )	0.2150	0.0231	87.66 %
( $K_p = 0,300, K_i = 0,001$ )	0.2351	0.0576	85.07 %
( $K_p = 0,290, K_i = 0,00125$ )	0.1995	0.0271	84.18 %
( $K_p = 0,285, K_i = 0,00125$ )	0.1812	0.0321	80.25 %
( $K_p = 0,295, K_i = 0,001$ )	0.2094	0.0632	79.79 %
( $K_p = 0,280, K_i = 0,00125$ )	0.1655	0.0368	76.98 %
( $K_p = 0,295, K_i = 0,0015$ )	0.1465	0.0193	76.75 %
( $K_p = 0,290, K_i = 0,0015$ )	0.1396	0.0218	75.30 %
( $K_p = 0,290, K_i = 0,001$ )	0.1827	0.0696	74.59 %
( $K_p = 0,285, K_i = 0,0015$ )	0.1312	0.0253	73.51 %
( $K_p = 0,275, K_i = 0,00125$ )	0.1406	0.0457	71.89 %
( $K_p = 0,280, K_i = 0,0015$ )	<b>0.1237</b>	<b>0.0289</b>	<b>71.88 %</b>
( $K_p = 0,285, K_i = 0,001$ )	0.1540	0.0779	69.23 %
( $K_p = 0,275, K_i = 0,0015$ )	0.1112	0.0358	69.12 %
( $K_p = 0,270, K_i = 0,00125$ )	0.1192	0.0552	67.55 %
( $K_p = 0,270, K_i = 0,0015$ )	0.0998	0.0433	66.53 %
( $K_p = 0,280, K_i = 0,001$ )	0.1316	0.0861	65.09 %

Respuesta en la temperatura de la cámara para cuatro controladores bajo el criterio de optimalidad E-MOOP (Fig-5.8).

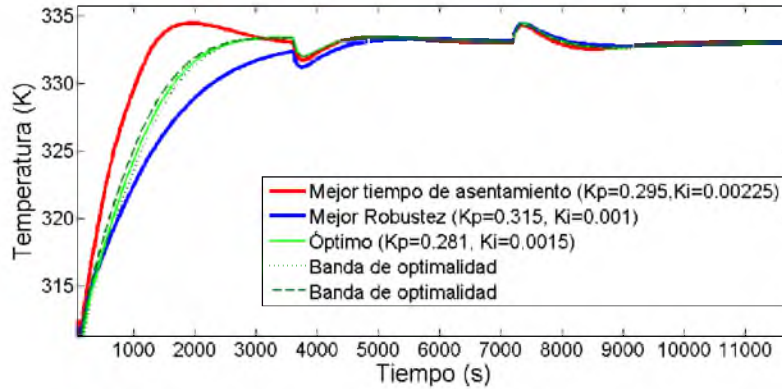


Fig. 5.8: Respuesta en la temperatura de la cámara para las opciones con mejor compromiso desempeño/robustez bajo el criterio diseñado.

En la (Fig-5.9) el rango de salida del controlador es de 0-10 volts. Donde la opción en color azul representa un ajuste tolerable a incertidumbres paramétricas y de modelado, principalmente en los coeficientes de transferencia convectivos.

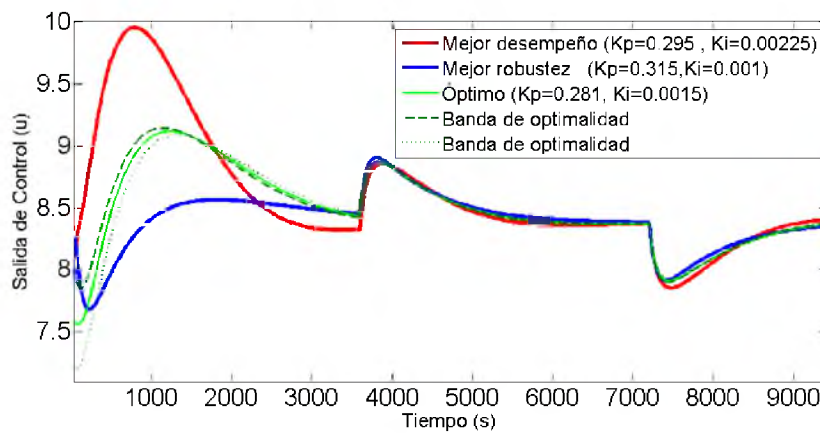


Fig. 5.9: Respuesta de cuatro controladores de un espacio de 120. Se muestran las opciones con mejor robustez, mejor desempeño y óptimas bajo el criterio E-MOOP

#### 4. Síntesis del capítulo

El capítulo presentó las características de reversibilidad del criterio de análisis del desempeño; aplicándose a la síntesis de un controlador PI para un sistema SISO no-lineal.

A diferencia del planteamiento de síntesis LQR y de otros más donde la antagonía estructural de las características de desempeño y robustez queda de manifiesto; el presente planteamiento sugiere un concepto de balance, definiendo un indicador representativo de la evolución de la entropía del sistema. En este caso se ha definido este índice como en (Ec-5.9).

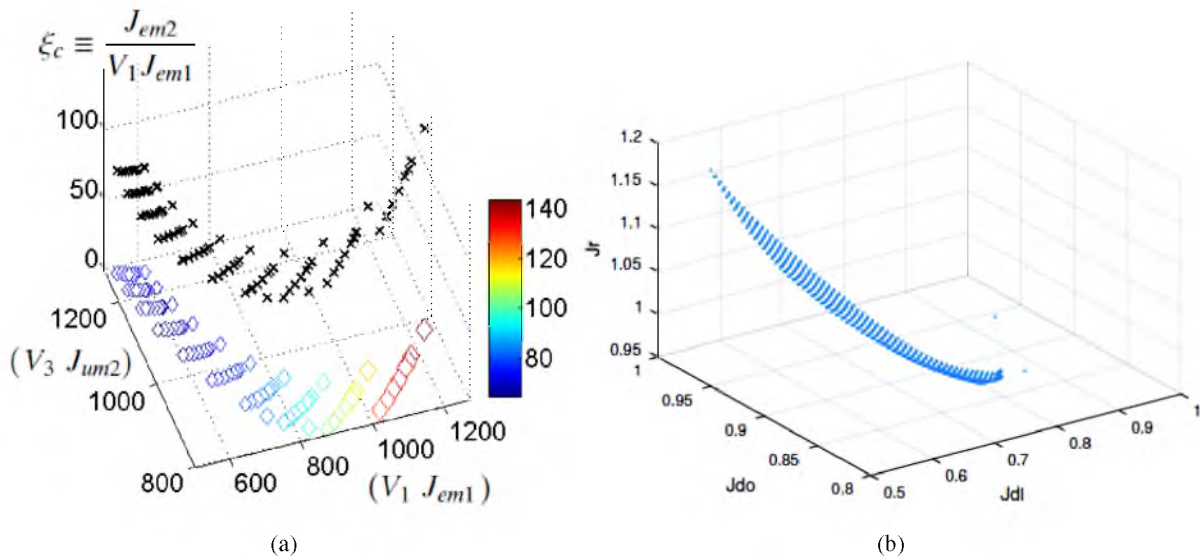


Fig. 5.10: **a)** Visualización de componentes antagónicos de la función objetivo y del comportamiento del índice del desorden del sistema  $\xi_c$ . **b)** Región del frente de Pareto con tres indicadores de desempeño conteniendo mas de mil posibles ajustes (Contreras Leiva. M.P y col.,2016) [33].

Para conseguir la representatividad de este índice, la evolución de la entropía del sistema (en cada lazo) se expresa en términos de los índices reformulados con la característica de convergencia de la salida  $J_{em2}$  y la energía de seguimiento promediada  $J_{em1}$  (Ec-5.10). Estableciendo que una condición de equilibrio en las acciones control, se consigue mediante un balance de entropía y neguentropía. Donde la constante estructural para el valor RMS de la señal de control  $J_{um2}$ , balancea dicha entropía del sistema (Ec-5.12).

Es decir, el planteamiento E-MOOP determina cuantas unidades de acción neguentrópica o de entropía negativa, son requeridas para equilibrar la tendencia entrópica en la dinámica del sistema (lineal o no-lineal).

La articulación de la función objetivo, se fundamenta en la teoría de juegos diferenciales simétricos como una vía para simplificar la naturaleza exponencial del problema, cuando en el sistema confluyen múltiples influencias de control. A diferencia del enfoque empleado por Vargas-González y col.,(2013), donde la suma cuadrática del error y del control representa los jugadores y los parámetros de control ( $Kp, Ki$ ) las estrategias; en el criterio propuesto la trayectoria del estado y la salida de control representan los jugadores, mientras que los índices jerárquicos ( $J_{em1}, J_{em2}, J_{um2}$ ) las estrategias.

Esta metodología de diseño de controladores PI no genera controladores descentralizados y puede ser categorizada como una técnica “root clustering”. Ya que no ubica los polos del sistema en regiones especiales del plano complejo. Mas bien; esta ubicación obedece a un equilibrio especial en la minimización de las funciones objetivo, articuladas con el concepto de equilibrio entrópico, direccionado por el teorema minimax de Von Neumann .



## **Parte V**

# **Conclusiones y expectativas**



## Capítulo 6

# Conclusiones y expectativas

### 1. Conclusiones generales

Este trabajo de tesis presentó el diseño de un criterio de análisis del desempeño de controladores lineales, en sistemas no-lineales con multiplicidad de estados estacionarios. Extendiendo las características de reversibilidad, a un criterio de sintonización de controladores lineales PI(D) bajo el paradigma de la optimización.

En una primera etapa se realizó la evaluación multicriterio del desempeño de controladores lineales implementados en el biorreactor de Cholette para distintos modelos desarrollados por la comunidad de control y en sus diversos estados estacionarios de las concentraciones (Ver Apéndice A).

Con la inclusión de los métodos PROMETHEE se pudo evaluar y categorizar el desempeño (multiobjetivo) de indicadores óptimos balanceados con diversas técnicas, en un proceso gaussiano de comparaciones binarias. Presentando un esquema de preferencias y ponderaciones para los diferentes perfiles de desempeño y robustez, perseguidos por el evaluador.

El concepto de distancia de desempeño en este criterio de evaluación multiobjetivo, utilizó indicadores de jerarquía analítica basados en los índices de desempeño convencionales (IAE, ISE, ITSE, IADU, Ts; etc ). Siendo aplicable a sistemas lineales o no-lineales.

Una segunda etapa presentó tales características de reversibilidad en un criterio de sintonización mediante la técnica generar primero escoger después (GFCL). Donde la articulación de la función objetivo se fundamenta con los nuevos índices de desempeño, mediante la teoría de juegos simétricos y el teorema minimax de Von Neumann. En este caso los índices utilizados en la función objetivo, son aquellos cuya estructura concavo-convexa obedece a dicho teorema.

La interpretación entrópica de la evolución del sistema (convergencia/energía) involucra la representación GAIA de los objetivos que integran la descripción desempeño/robustez. Mediante una constante de balance entrópico que relaciona el valor RMS de la salida de control para cada lazo.

Este procedimiento llamado estratificación exponencial, pretende simplificar las múltiples influencias en la estructura de las funciones objetivo, recurriendo a la teoría de juegos diferenciales simétricos. Donde la trayectoria del estado y la salida de control son los jugadores. Mientras que los índices jerárquicos representan las estrategias.

El procedimiento de sintonización se aplicó al diseño de un control PI SISO en un secador de charolas, donde el modelo no lineal en espacio de estados presenta alta incertidumbre paramétrica. Para ello se planteó la minimización de la función objetivo mediante un esquema iterativo; escogiéndose posteriormente aquellas opciones comprometidas con buen desempeño y robustez, utilizando el análisis con PROMETHEE.

Esta metodología es aplicable a cualquier dinámica no lineal. No obstante, el procedimiento de optimización requiere de altos recursos computacionales, lo cual deja abierta un área de oportunidad.

## 2. Expectativas de la investigación

El enfoque multiobjetivo utilizado en este trabajo para abordar el problema de sintonizar controladores lineales bajo el paradigma de control óptimo; presenta elementos que para el conocimiento y alcance del autor, son interesantes y merecedores de trabajos de investigación adicionales.

La consideración en común con criterios de optimización similares es la condición de balanceo requerida en los componentes no antagónicos de (Ec-5.4). Esto refiere al número de dígitos significativos dentro del proceso de minimización de (Ec-5.5) y (Ec-5.6).

A pesar de haber publicado los resultados en las fases de diseño de una nueva métrica de desempeño y la metodología de decisión multicriterio MCDM/A. La fase de sintonización presentó un caso de estudio donde pueden obtenerse elementos para juzgar la efectividad de la metodología. En este sentido es importante considerar también, elementos de mejora que podrán integrarse. Principalmente en el planteamiento con juegos diferenciales ordinalmente simétricos en sistemas MIMO.

Se recomienda utilizar los índices reformulados en dos escenarios :

El primero de ellos es la determinación de nuevas métricas de desempeño en sistemas perturbados con dinámica no-lineal. Donde ha quedado claro que la reformulación de índices mejora la interpretación lograda con los índices convencionales junto con la metodología multicriterio PROMETHEE. Lo cual ha podido corroborarse con herramientas de visualización como las coordenadas paralelas.

El segundo escenario corresponde al problema de optimización multiobjetivo MOOP para la sintonización de controladores lineales. Donde se obtienen funciones potenciales que pueden evaluarse por medio de la metodología PROMETHEE. La cual facilita el proceso de asignación de ponderaciones en el enfoque de diseño GFCL. No obstante, la integración de índices de desempeño en un ámbito de sintonización óptimo-robusto en sistemas no-lineales MIMO, merece trabajos de investigación adicionales. Ya que balancear el conflicto desempeño/robustez en sistemas con incertidumbre, requiere del conocimiento de diversas teorías como son los juegos diferenciales y el diseño de algoritmos de optimización heurísticos.



**Parte VI**

**Apéndices y Anexos**



### **3. Apéndice A1**



**ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO DE CONTROLADORES LINEALES SINTONIZADOS EN DIFERENTES ESTADOS ESTACIONARIOS DEL BIORREACTOR DE CHOLETTE MEDIANTE TÉCNICAS DE DECISIÓN MULTI-CRITERIO**  
**COMPARATIVE PERFORMANCE ANALYSIS OF DIFFERENT LINEAR CONTROLLERS TUNED FOR SEVERAL CHOLETTE'S BIOREACTOR STEADY STATES USING MULTI-CRITERIA DECISION MAKING TECHNIQUES**

A. Rodríguez-Mariano<sup>2</sup>, G. Reynoso-Meza<sup>3</sup>, D.E. Páramo-Calderón<sup>4</sup>, E. Chávez-Conde<sup>2</sup>, M.A. García-Alvarado<sup>5</sup> y J. Carrillo-Ahumada<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Universidad del Papaloapan, Instituto de Química Aplicada. Circuito Central 200, colonia Parque Industrial, Tuxtepec, Oax., México 68301.

<sup>2</sup>Universidad del Papaloapan, Instituto de Agroingeniería. Av. Ferrocarril s/n, Cd. Universitaria, Loma Bonita, Oax., México 68400.

<sup>3</sup>Programa de Posgraduados en Ingeniería de la Producción y Sistemas (PPGEPs). Pontificia Universidad Católica de Paraná (PUCPR). Inmaculada Concepción 1155(80215-901). Curitiba (PR), Brasil.

<sup>4</sup>Universidad del Papaloapan, Instituto de Biotecnología. Circuito Central 200, Colonia Parque Industrial, Tuxtepec, Oax., México C.P. 68301.

<sup>5</sup>Departamento de Ingeniería Química y Bioquímica. Instituto Tecnológico de Veracruz. Av. Miguel Ángel de Quevedo 2779, Veracruz, Ver., México 91860

Recibido 30 de Abril de 2014, Aceptado 10 de Marzo de 2015

**Resumen**

En este trabajo se presenta un análisis comparativo del desempeño de diferentes controladores lineales desarrollados para el biorreactor de Cholette en sus diferentes modelos y estados estacionarios. Para tal finalidad, se emplearon y reformularon los índices de desempeño IAE, ISE, ITAE, ISU e IADU para evaluarlos mediante técnicas de decisión multi-criterio utilizando la metodología PROMETHEE. Los resultados demuestran la factibilidad del criterio formulado basado en el concepto de distancia de desempeño; proporcionando un método sistemático para la evaluación del desempeño de controladores lineales en sistemas estables e inestables y con multiplicidad de estados estacionarios.

*Palabras clave:* Biorreactor de Cholette, multiplicidad de estados, control lineal, estados estacionarios, PROMETHEE.

**Abstract**

In this work a comparative performance analysis of different linear controllers tuned for several Cholette's bioreactor models at different steady states was realized. To this end the performance indexes IAE, ISE, ITAE, ISU and IADU were tailored for a multi-criteria decision techniques (MCDM) reformulation using PROMETHEE analysis. The results show the feasibility of formulated criteria based on performance distance approach; providing a method for evaluating the performance of linear controllers used on stable and unstable systems with multiple steady states.

*Keywords:* Cholette's bioreactor, multiplicity of states, linear control, steady states, PROMETHEE.

\*J. Carrillo-Ahumada. E-mail: jcarrillo@unpa.edu.mx; jesuscarrillo18@yahoo.com  
Tel. 01 (287) 87 5 92 40 Ext. 230

## 1 Introducción

La dinámica de cualquier proceso lineal o linealizado controlado con un algoritmo de control lineal puede ser representado por el espacio de estado generalizado,

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1w + B_2u \quad (1)$$

$$y = Cx + D_1w + D_2u \quad (2)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha\xi + \beta_1r + \beta_2y \quad (3)$$

$$u = \gamma\xi + \delta_1r + \delta_2y \quad (4)$$

donde  $x \in \mathcal{R}^n$  es el vector de estado del proceso,  $\xi \in \mathcal{R}^k$  es el vector de estado del control,  $w \in \mathcal{R}^m$  es el vector de entradas exógenas (señales de disturbio),  $u \in \mathcal{R}^c$  es el vector de señales de control,  $y \in \mathcal{R}^r$  es el vector de salidas medidas (retroalimentación al controlador) y  $r \in \mathcal{R}^r$  es el vector de puntos de consigna. Las matrices del sistema en lazo abierto  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$ ,  $D_1$  y  $D_2$  y las del control  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  deben ser constantes o dependientes del tiempo.

El sistema de lazo cerrado se puede escribir,

$$\frac{dX}{dt} = AX + B_1w + B_2r \quad (5)$$

$$y = C_1X + D_{11}w + D_{12}r \quad (6)$$

$$u = C_2X + D_{21}w + D_{22}r \quad (7)$$

donde  $X' = [x' \ \xi']$  y las matrices de lazo cerrado  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$  y  $D_{22}$  fueron definidas por García-Alvarado y Ruiz-López (2010). Existen varios índices de desempeño calculables a partir de las ecs. (5)-(7), que pueden ser evaluados con una expresión analítica siempre y cuando el algoritmo de control asegure estabilidad asintótica (García-Alvarado y Ruiz-López (2010), Vargas-González y col. (2013)).

Integral del cuadrado del error como servo-control  $w = 0$ ,  $r = K(t)$ ,  $e = r - y$ ,

$$I_{e, servo} = \int_0^{\infty} e' Q e dt = K' B_2' P_y B_2 K \quad (8)$$

Integral del cuadrado del error como regulador  $w = K(t)$ ,  $r = 0$ ,  $e = r - y$ ,

$$I_{e, reg} = \int_0^{\infty} e' Q e dt = K' B_1' P_y B_1 K \quad (9)$$

Integral del cuadrado del error como regulador ante un pulso  $w = \delta(t)$ ,  $r = 0$ ,  $e = r - y$ ,

$$I_{e, pulso} = \int_0^{\infty} e' Q e dt = \mathbf{1}' B_1' P_{yp} B_1 \mathbf{1} \quad (10)$$

donde  $\mathbf{1}' = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ .

Integral del cuadrado del control como servo  $w = 0$ ,  $r = K(t)$ ,  $u_d = u - u_{\infty}$ ,

$$I_{u, servo} = \int_0^{\infty} u_d' R u_d dt = K' B_2' P_u B_2 K \quad (11)$$

Integral del cuadrado del control como regulador  $w = K(t)$ ,  $r = 0$ ,  $u_d = u - u_{\infty}$ ,

$$I_{u, reg} = \int_0^{\infty} u_d' R u_d dt = K' B_1' P_u B_1 K \quad (12)$$

Integral del cuadrado del control como regulador ante un pulso  $w = \delta(t)$ ,  $r = 0$ ,  $u_d = u - u_{\infty}$ ,

$$I_{u, pulso} = \int_0^{\infty} u_d' R u_d dt = \mathbf{1}' B_1' P_{up} B_1 \mathbf{1} \quad (13)$$

donde  $\mathbf{1}' = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ . Donde las matrices  $P$  se calculan con las siguientes ecuaciones de Riccati,

$$A' P_y + P_y A - (A^{-1}) C_1' Q C_1 (A^{-1}) = 0 \quad (14)$$

$$A' P_{yp} + P_{yp} A - C_1' Q C_1 = 0 \quad (15)$$

$$A' P_u + P_u A - (A^{-1}) C_2' R C_2 (A^{-1}) = 0 \quad (16)$$

$$A' P_{up} + P_{up} A - C_2' R C_2 = 0 \quad (17)$$

Es conocido que los índices de desempeño basados en la integral del cuadrado del error son antagonistas de los índices de desempeño basados en la integral del cuadrado del control. Un control óptimo robusto es el resultado de una optimización multi-objetivos ( $I_{e, servo}$ ,  $I_{e, reg}$ ,  $I_{e, pulso}$ ,  $I_{u, servo}$ ,  $I_{u, reg}$ ,  $I_{u, pulso}$ ) que balancea los índices antagonistas. Al minimizar los  $I_e$  se minimiza el error del control (desempeño), pero al minimizar los  $I_u$  aumenta la tolerancia del desempeño ante errores de modelación pues modera la acción de control y evita que el estado del proceso salga de los límites de validez del modelo (García-Alvarado y Ruiz-López (2010), Carrillo-Ahumada y col. (2011) y (2015), Vargas-González y col. (2013)). Se han probado distintos métodos de balanceo: minimizando la máxima relación Im/Re de los valores

propios de A (García-Alvarado y Ruiz-López (2010)); utilizando frentes de Pareto (Carrillo-Ahumada y col. (2011) y (2015)) y por equilibrio de Nash (Vargas-González y col. (2013)). En ninguno de los casos se utiliza la información total de todos los índices de desempeño.

Por lo general, la forma de sintonización de los parámetros de los controladores PI(D) lineales para un sistema no-lineal se efectúan en un determinado estado estacionario. Este tipo de controladores cuya estructura matemática simple proporciona un adecuado desempeño del sistema en lazo cerrado en una gran variedad de aplicaciones asegurando la reducción a cero del error del estado deseado (García-Alvarado y col. (2005)) pudiendo ser diseñado como óptimo multi-objetivo, proporcionando un conjunto de especificaciones de robustez y desempeño (Bevrani e Hiyama (2007), Reynoso-Meza y col. (2013c)). Otros desarrollos han empleado el control PI(D) con ponderación en el *setpoint* (Sree y Chidambaram (2003a y b), Carrillo-Ahumada y col. (2011)); así como control no-lineal (Sivaramakrishnan y col. (2008)).

Cuando se aborda el problema de diseño como multi-objetivo, es necesario especificar el intercambio de prestaciones deseado entre objetivos de diseño. Dichas especificaciones se suelen considerar mediante funciones de agregación antes de la fase de optimización (vectores de peso por ejemplo). Una alternativa es considerar por separado cada uno de los objetivos de diseño y optimizarlos simultáneamente. En dicho caso, se suele calcular un conjunto de soluciones, llamadas Pareto óptimas. Se habla de un conjunto de soluciones debido a que (generalmente) no existirá una solución que optimice todos los objetivos de diseño, sino varias soluciones con distinto grado de compromiso entre objetivos en conflicto. En tal caso, el análisis en el intercambio de prestaciones se realiza sobre el conjunto calculado, en una fase de análisis y selección multi-criterio (MCDA/M por sus siglas en inglés). Un proceso como este puede resultar beneficioso para el diseñador, debido al grado de involucramiento necesario en el proceso MCDA/M (Bonissone y col. (2009)).

Por otro lado, los reactores de agitación continua tipo tanque (CSTR's por sus siglas en inglés) han sido intenso objeto de estudio por la comunidad de control durante las pasadas dos décadas (Liou y Chien (1991), Kumar y Kulkarni (1994), Chidambaram y Reddy (1996), Sree y Chidambaram (2002, 2003a y b), Ibarra-Junquera y Rosu (2007), Rajinikanth y Latha (2012), Ferramosca y col. (2013), Raffo-Durán

y col. (2014)). Desde que el congreso de Amsterdam reconociera en el año de 1957 las tareas de diseño y control de reactores como actividades fundamentales en la ingeniería de las reacciones químicas, muchas publicaciones importantes como la de van Heerden (1953) referentes al comportamiento de multiplicidad se han realizado para reactores con mezclado ideal y no ideal. En los trabajos de Lo y Cholette (1978 y 1983) precisamente se hace referencia a los CSTR's con mezclado no ideal considerando el problema de multiplicidad de estados para sistemas compuestos por  $p$  reactores. Estos últimos autores describen un biorreactor de agitación continua con mezclado no ideal bajo condiciones operativas isotérmicas, donde se lleva a cabo una reacción enzimática de la forma  $\frac{k_1 c}{(1+k_2 c)^2}$ .

Esta forma de la rapidez de reacción es similar a una función de Michaelis-Menten para bajas concentraciones de sustrato, pero a altas concentraciones se incluye en el modelo un parámetro de inhibición ( $k_2$ ). Este biorreactor, es modelado generalmente por una ecuación diferencial y una algebraica (Chidambaram y Reddy (1996), Sree y Chidambaram (2002, 2003a y b, 2005), Carrillo-Ahumada y col. (2011), Rajinikanth y Latha (2012)), aunque en algunos casos únicamente se utiliza la concentración de sustrato (Jhunjhunwala y Chidambaram (2001), Sree y Chidambaram (2002), Sivaramakrishnan y col. (2008)). Este sistema, presenta multiplicidad de estados en las concentraciones de alimentación, salida y de sustrato (algunos de ellos estables e inestables) y gran sensibilidad ante parámetros de bifurcación (Carrillo-Ahumada y col. (2014)). Por estas razones ha resultado ser un sistema de estudio interesante para el diseño de diversos esquemas de control como el PI(D) (Chidambaram y Reddy (1996), Jhunjhunwala y Chidambaram (2001), Sree y Chidambaram (2002, 2003a, b y 2005), Sivaramakrishnan y col. (2008), Carrillo-Ahumada y col. (2011), Rajinikanth y Latha (2012)), además que presenta un comportamiento caótico en algunos casos (Ibarra-Junquera y Rosu (2007)).

Por lo tanto, en este trabajo se plantea un análisis multi-criterio que permita utilizar toda la información para observar las prestaciones de las funciones objetivo (índices de desempeño) antagonistas de diversos controladores del biorreactor de Cholette en diferentes estados estacionarios. La relevancia del presente análisis comparativo, consiste en proporcionar un método sistemático de decisión multi-criterio para la evaluación del desempeño de

controladores lineales para sistemas con multiplicidad de estados estacionarios estables e inestables. Para ello se han reformulado los índices de desempeño convencionales  $I_e$  e  $I_u$  como son IAE, ISE, ITAE e IADU para su evaluación con la herramienta de decisión PROMETHEE (*Preference Ranking Organization Methods for Enrichment Evaluations*). El resto del documento se divide de la siguiente forma: La Sección 2, se presentan las técnicas de decisión multi-criterio. La Sección 3, muestra las generalidades del método de evaluación, índices básicos de desempeño, reformulación de éstos y el enfoque multicriterio. En la Sección 4, se describe al sistema de estudio y se muestran los modelos linealizados y leyes de control correspondientes. En la Sección 5, se presentan los resultados y discusión y finalmente en la Sección 6 se muestran las conclusiones de este trabajo.

## 2 Técnicas de decisión multi-criterio

La etapa MCDA/M (Figueira y col. (2005)) consiste en el análisis del conjunto de soluciones y la posible selección de una alternativa de diseño (la más preferente desde el punto de vista del optimizador). Por lo normal, dicho análisis y selección se desarrolla en un conjunto de soluciones Pareto óptimas, que aproximan un frente de Pareto (Miettinen, (1998)). La aproximación de frentes de Pareto y la fase MCDA/D para el ajuste y análisis de controladores es una herramienta usada ampliamente en la ingeniería de control (Reynoso-Meza y col. (2014)).

Lo anterior no es una tarea trivial, ya que el análisis de un frente de Pareto de 4 o más objetivos (como lo será en este caso) conlleva a un análisis multidimensional de soluciones. Por un lado, mientras que la visualización podría considerarse resuelta en 2-3 dimensiones para apreciar el intercambio de prestaciones, esto no se logra visualizar adecuadamente en mayores dimensiones. Por ello es crucial contar con mecanismos o herramientas para analizar datos multidimensionales y de ser posible visualizarlos.

Es ampliamente aceptado que herramientas de visualización son valiosas para analizar el conjunto de soluciones y tomar decisiones (Lotov y Miettinen (2008)). Estas herramientas son valiosas, pues permiten apreciar el intercambio de prestaciones entre objetivos de diseño y el impacto que uno puede tener en los otros (Bonissone y col. (2009)).

Para dos dimensiones (y en algunas ocasiones para tres) es relativamente sencillo hacer un análisis con representaciones en 2D y 3D. Sin embargo, para más dimensiones es difícil. Herramientas como VIDEO de Kollat y Reed (2007) emplean un sistema de coloración para añadir hasta una cuarta dimensión. En Lotov y Miettinen (2008), una revisión de técnicas de visualización es dada, incluyendo herramientas como mapas de decisión, diagramas de estrella (pétalos). Posiblemente para el área de control las más populares son diagramas de dispersión, coordenadas paralelas de Inselberg (1985 y 1998) y diagramas de nivel (Blasco y col. (2008), Reynoso-Meza y col. (2013a)).

Algunas de las características deseadas y puntualizadas en Lotov y Miettinen (2008) para los visualizadores (en general) son:

**Persistencia.** La información relevante debe ser retenida en la mente del diseñador.

**Complejidad.** Toda la información relevante debe ser desplegada.

**Simplicidad.** Debe ser entendible.

Es posible añadir aquí características asociadas a herramientas de cómputo; un visualizador con una adecuada interfaz de usuario que sea fácil de utilizar puede ser atractiva para el diseñador.

## 3 Metodología

### 3.1 Generalidades del método de evaluación

Las especificaciones del desempeño establecidas en el proceso de diseño de un sistema de control, proporcionan una medida de la habilidad que puede lograr en lazo cerrado (Salgado y col. (2007)). Con el sistema lineal en lazo cerrado, se ha evaluado el comportamiento del servosistema y regulatorio ya que se realizaron cambios en escalón o impulso unitario en el *setpoint* y en la señal de perturbación utilizando Simulink™ en el dominio de frecuencia. Además, se ha evaluado también el desempeño del controlador con el sistema no-lineal en dominio del tiempo.

Posteriormente, se evaluaron los índices descritos en las secciones 3.2 y 3.3 obteniéndose un conjunto de  $P$  vectores compuestos de  $Q$  entidades de desempeño (índices de desempeño). Estos índices harán referencia al error o al esfuerzo del controlador ante un cambio en el valor deseado o en presencia de una perturbación (caso servo y caso regulatorio

respectivamente). Los  $P$  vectores conformarán matrices de desempeño reinterpretadas mediante un enfoque de análisis multi-criterio MCDA/D y evaluadas con la metodología PROMETHEE <sup>1</sup> (Brans y col. (1984)).

### 3.2 Índices básicos de desempeño

Los índices y entidades básicas de desempeño considerados para este trabajo (Tabla 1) y que conforman un criterio inicial (Criterio-A) han sido usados extensamente en la sintonización de controladores. Por ejemplo, la integral del cuadrado del error (*integral squared error*, ISE por sus siglas en inglés) (Shinsky (1988), Smith y Corripio (1985), Morari y col. (1988) y Salgado y col. (2007)). Otro índice discreto basado en el error es la integral del cuadrado del error ponderado en el tiempo (*integral time squared error*, ITSE por sus siglas en inglés). El cual penaliza el tiempo de convergencia a un estado estacionario (*SSV*) (Carrasco y Salgado (2009)). Adicionalmente el error acumulativo que penaliza la acción de seguimiento, viene dado por la integral del valor absoluto del error (*integral absolute error*, IAE por sus siglas en inglés) (Duarte-Mermoud y Prieto (2004)). Una medida que determina la energía empleada por el controlador (esfuerzo de control), viene representada por la integral del cuadrado de las desviaciones de la señal de control en el estado estacionario (*integral square signal control deviation*, ISU por sus siglas en inglés) (Salgado y col. (2007)). La evolución a la salida del controlador vendrá expresada por el valor absoluto de las variaciones

totales TVU (equivalente al IADU) (Alfaro y Vilanova (2012), Reynoso-Meza y col. (2013b)). Y finalmente, otro indicador en un sistema de control es el tiempo de asentamiento a un correspondiente ancho de banda ( $T_s$ ).

### 3.3 Reformulación de índices básicos de desempeño

Para el presente análisis del desempeño; un criterio de decisión que identifique un menor tiempo de asentamiento, menor error acumulativo, menor esfuerzo de control y una energía mínima de seguimiento podría definir un mejor controlador. Sin embargo, múltiples indicadores de desempeño pueden estar en conflicto (Sun y Li (2010)). Es importante considerar que el biorreactor de Cholette como sistema de estudio exhibe inestabilidad, multiplicidad de estados estacionarios y comportamiento caótico bajo condiciones específicas en controladores PI; lo cual es un comportamiento difícil de predecir y penalizar mediante algún índice de desempeño convencional. Lo anterior sugiere establecer una jerarquía analítica (Dubois y Prade (1988) y Dubois y col. (2013)) para fundamentar un criterio de evaluación (criterio-B); considerando un principio físico representativo. Para tal finalidad; la respuesta al sobre y bajo impulso complementa la formulación del criterio mediante el tiempo de asentamiento  $T_s$  y el número de transiciones ( $N_{ts}$ ,  $N_{tb}$ ) alrededor del estado estacionario *SSV* de la salida del reactor. En la Tabla 2 se resume dicho criterio.

Tabla 1. Definición de los índices básicos de desempeño (Criterio-A).

Indicador básico	Expresión	Característica
<i>ISE</i>	$J_{e1} = \sum_{k=0}^N e(k)^2$	Integral del error cuadrático
<i>ITSE</i>	$J_{e2} = \sum_{k=0}^N k e(k)^2$	Integral del tiempo por el error cuadrático
<i>IAE</i>	$J_{e3} = \sum_{k=1}^N  r_k - y_k $	Integral del valor absoluto del error
<i>ISU</i>	$J_{u1} = \sum_{k=0}^N (u(k) - u_{ss})^2$	Integral de la salida de control cuadrática
<i>TVU</i>	$J_{u2} = \sum_{k=1}^N  u_k - u_{k-1} $	Integral de la variación total de control
$T_s$	$SSV = 10\%, SSV = 5\%, SSV = 2\%$	Tiempo de asentamiento (2 % en este trabajo)

<sup>1</sup>Visual PROMETHEE (<http://www.promethee-gaia.net/software.html>)

Tabla 2. Conformación del criterio de evaluación (Criterio-B).

Índice de desempeño	Expresión	Característica
$J_{em1}$	$J_{em1} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=1}^N e(k)^2$	Energía de seguimiento promediada en $T_s$
$J_{em2}$	$J_{em2} = \frac{t_{susp}}{T_s} \sum_{k=1}^N k[f(k, T_s)]e(k)^2$	Característica de convergencia al $SSV$
$J_{em3}$	$J_{em3} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=1}^N  e(k) $	Error acumulativo promediado en $T_s$
$J_{um1}$	$J_{um1} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^N (u(k) - u_{ss})^2$	Esfuerzo de control promediado en $T_s$
$J_{um2}$	$J_{um2} = (Nts + Ntb) \sqrt{\frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^N (u(k) - u_{ss})^2}$	Norma en tendencia oscilatoria (bifurcación de Hopf)
$J_{um3}$	$J_{um3} = J_{um1} \sqrt{\frac{1}{\sum_{k=1}^N  u_k - u_{k-1} }}$	Energía representativa entre acciones de control

No obstante, la aplicación de la metodología no se restringe a este tipo de sistemas. Ya que puede ser aplicable a cualquier tipo de sistemas de control con diferentes índices y/o parámetros de desempeño.

En el Apéndice A se encuentran los planteamientos que justifican la presente reformulación y conforman el criterio aplicado dentro de la metodología PROMETHEE. Un problema de evaluación multi-objetivo, mediante la utilización de las ganancias del controlador obtenidas *a priori* es,

$$J(\theta)_{\theta \in \mathbb{R}^n} = [J_1(\theta), \dots, J_m(\theta)] \in \mathbb{R}^m \quad (18)$$

donde  $\theta \in \mathbb{R}^n$  se define como el vector de decisión, que con respecto a las ecuaciones del controlador lineal (ecs. (3)-(4)) son  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1$  y  $\delta_2$ ; y  $J(\theta) \in \mathbb{R}^m$  como el vector de objetivos que en este caso son  $I_e$  e  $I_u$ .

### 3.4 Enfoque multi-criterio

El enfoque desde el punto de vista PROMETHEE (Brans y col. (1984) y Behzadian y col. (2009)); considera un conjunto finito  $A$  de alternativas a ser

evaluadas mediante un conjunto de criterios  $C$  (ec. (19)). Donde el objetivo es maximizar las ganancias o minimizar los costos, partiendo de relaciones binarias de preferencia  $P_j(a_x, a_i)$ . En este caso el criterio considerado viene dado por el criterio-B (Tabla 2). La metodología PROMETHEE se resume a continuación en la Fig. 1.

Atendiendo a esta metodología; el análisis del desempeño multi-criterio de las  $A$  alternativas (controladores involucrados), requiere de la asignación de los pesos  $w_j$  y funciones preferenciales  $P_j$  para cada criterio componente dentro del criterio-B. Esta es una tarea dependiente de las consideraciones del evaluador (Sarraf y col. (2013)). No obstante; la formulación del criterio anteriormente presentado (Criterio-B), efectúa una transformación en la matriz de decisión como se ha efectuado para otras metodologías multi-criterio como lo es TOPSIS (Yoon y Hwang (1995)). En este caso, las distancias de desempeño  $d_j(a_x - a_i)$ ; son transformadas (ver Apéndice A) para poder interpretarlas mediante la opción 6 (Fig. 2) de la metodología PROMETHEE, como un proceso con distribución normal-estándar ( $N(0, 1)$ ).

$$MCDA/D \left\{ \begin{array}{l} \min \{c_1(a_1), c_2(a_2), \dots, c_j(a_i) \mid a_i \in A; c_j \in C\} \\ A = \{a_i \mid i = 1, 2, \dots, m\} \\ C = \{c_j \mid j = 1, 2, \dots, n\} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Opcional maximizar o minimizar} \\ \text{Es el conjunto de alternativas} \\ \text{Es el conjunto de criterios} \end{array} \quad (19)$$

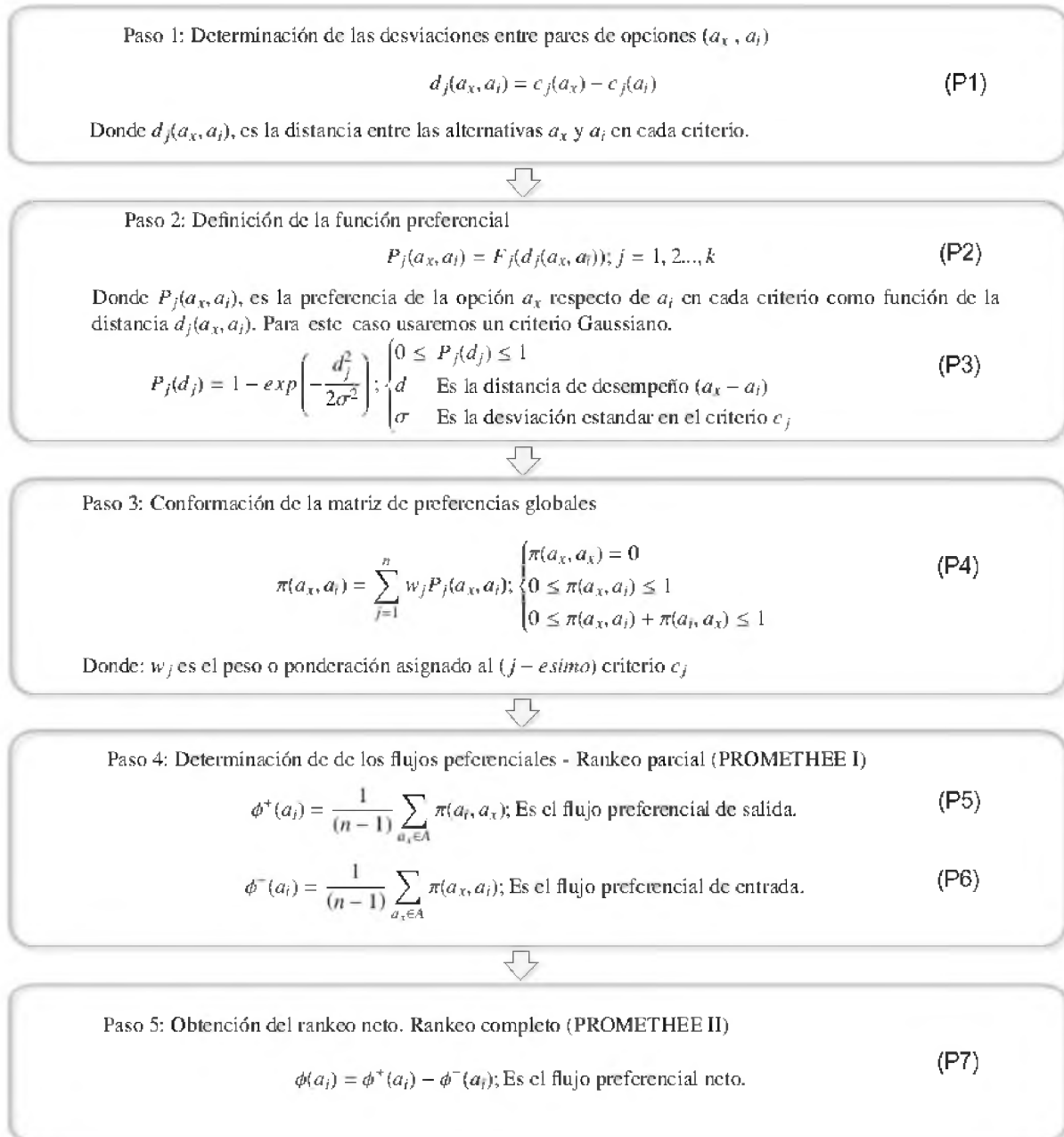


Fig. 1. Esquema básico PROMETHEE.

De tal forma que es posible plantear un procedimiento de asignación basado en la desviación estándar de los desempeños componente (Tabla 3). En donde el umbral en  $1\sigma$  corresponde al punto de inflexión de la curva Gaussiana (campana inversa) donde el grado de preferencia es de  $(1 - 0.6)$ .

La condición anterior en  $1\sigma$  representará el caso de una evaluación con un umbral de exigencia del 60 % en una característica específica de los controladores.

Esto proporciona una forma sistemática de ajuste en el umbral de interés ( $60\% = 1\sigma$ ,  $88\% = \sigma/2$ ,  $94\% = \sigma/3$ , etc) de acuerdo a la ec (P3) (Fig. 1). Combinando estas preferencias es posible ranquear los controladores comprometidos por ejemplo: con la mejor estabilidad, la menor energía de seguimiento del error y la mejor convergencia; o los controladores que tengan las

Tabla 3. Procedimiento general de asignación para funciones preferenciales y pesos.

Caso Considerado	Pesos ( $w_j$ ) (Relación propuesta)	Función preferencial ( $P_j$ ) (Función Gaussiana)	Condición a cumplir
Evaluación por característica del controlador	3 a 1	$\sigma=1$	$\sum_{j=1}^n w_j = 1$
	respecto de una no evaluada (equivalente a un umbral de ponderación ( $P_j w_j$ ) 2 a 1)	$\sigma=2$ característica no evaluada	

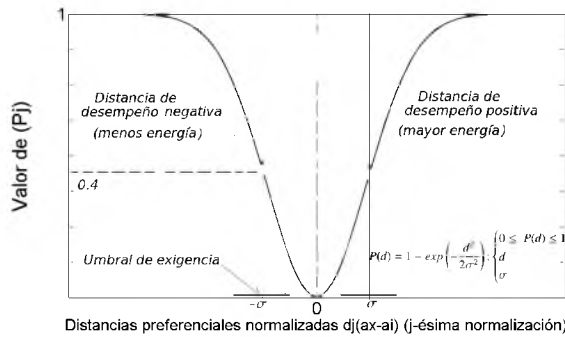


Fig. 2. Función preferencial Gaussiana (Brans y col. (1984)).

mejores opciones en la energía de seguimiento y el menor error acumulativo comprometidos con el menor esfuerzo de control.

### 4 Descripción del sistema de estudio

En este trabajo se tratará el caso de las concentraciones de los sustratos como las variables a controlar y considerando una reacción del tipo isotérmica; se han implementado modelos matemáticos representativos como el de Cholette (Liou y Chien (1991)). El biorreactor de Cholette con mezclado continuo no-ideal, con reacción enzimática es representado en la Fig. 3.

El modelo presenta el comportamiento no ideal de mezclado, supone que todos los parámetros y propiedades fisicoquímicas son constantes y que la reacción enzimática ocurre en el reactor bajo condiciones operativas isotérmicas. Esto se describe de la siguiente manera:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{qn}{Vm}(c_f - c) - \frac{k_1 c}{(1 + k_2 c)^2} \quad (20)$$

$$c_e = nc + (1 - n)c_f \quad (21)$$

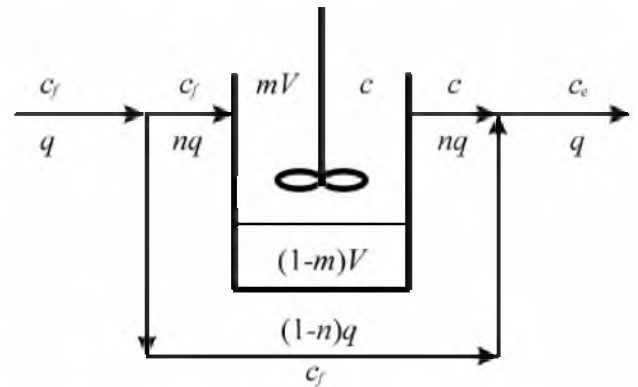


Fig. 3. Biorreactor de Cholette.

Tabla 4. Descripción de los parámetros del biorreactor de Cholette (Sree y Chidambaram (2003a)).

Variable	Valor nominal	unidades
$q$	$3.33 \times 10^{-5}$	$[m^3 s^{-1}]$
$V$	$1 \times 10^{-3}$	$[m^3]$
$n, m$	0.75	adimensional
$k_1$	10	$[s^{-1}]$
$k_2$	10	$[m^3 kg mol^{-1}]$

Donde  $c$  es la concentración del sustrato en el tanque (en la zona de mezclado),  $c_e$  es la concentración del sustrato a la salida del reactor (variable controlada),  $c_f$  representa la concentración a la entrada (variable manipulada o de control),  $q$  representa el flujo de alimentación (entrada exógena).  $n$  es la fracción del reactante alimentado que entra a la zona de mezclado perfecto,  $m$  es la fracción del volumen total del reactor  $V$  donde ocurre la reacción,  $(1-m)$  es la zona muerta,  $k_1$  y  $k_2$  describen la velocidad de la reacción. Comúnmente se han utilizado los parámetros de la Tabla 4 en la descripción del modelo.

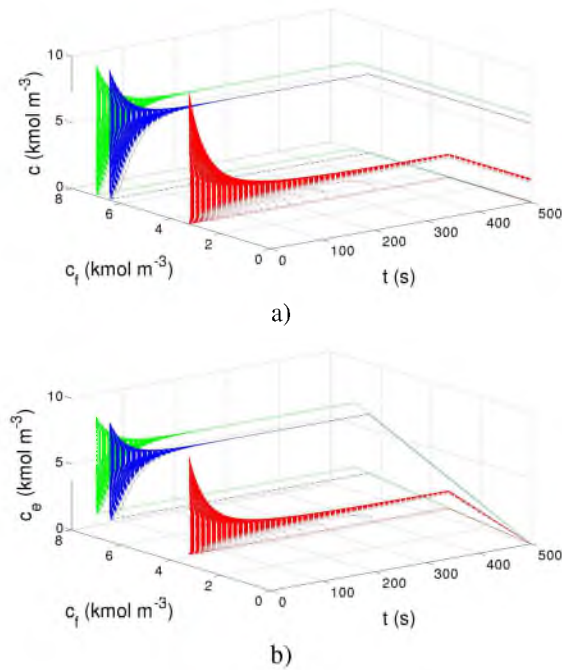


Fig. 4. Dinámica no-lineal del biorreactor de Cholette. **a)** Concentración de sustrato con respecto a la concentración de alimentación, **b)** concentración de salida con respecto a la concentración de alimentación.

El modelo citado corresponde a un sistema una-entrada una-salida (SISO por sus siglas en inglés) no-lineal, en donde el valor actual de la variable de salida depende de las condiciones iniciales del mismo. La dinámica evaluada para la concentración de sustrato y para la concentración de salida en función de la concentración de alimentación y del tiempo se presenta en la Fig. 4.

La respuesta en lazo abierto exhibe multiplicidades en las concentraciones de entrada y sustrato, y por consiguiente de salida. Esto significa que para  $N$  valores posibles en la entrada corresponde un mismo valor a la salida del reactor. Por otra parte, la multiplicidad en la salida significa que para un valor fijo en estado estacionario de la entrada, corresponden  $M$  posibles valores a la salida. El biorreactor de Cholette (ecs. (20) y (21)) aporta información sobre dichos puntos de multiplicidad (Tabla 5) mediante el desarrollo de una expresión polinómica (ec. (22)) en función de las concentraciones  $c_e$  y  $c_f$ . Donde la condición en estado estacionario se cumple cuando  $Z(c_f, c_e) = 0$ .

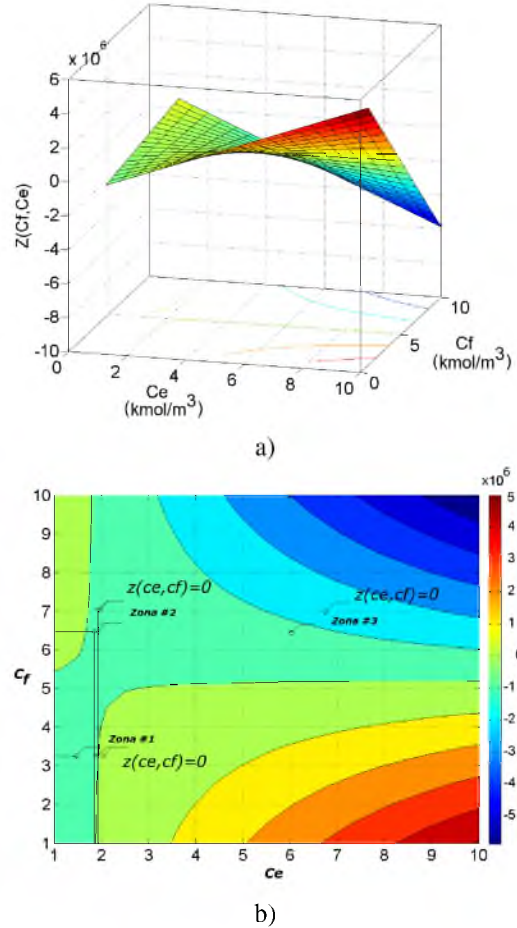


Fig. 5. Multiplicidad de estados estacionarios: **a)** función  $Z(c_f, c_e)$ , **b)** visualización de los 9 estados estacionarios.

$$Z(c_f, c_e) = p_0 (c_e + \alpha)^3 - p_1 (c_e + \alpha)^2 - p_2 (c_e + \alpha) - p_3 \quad (22)$$

Donde  $\alpha$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  son funciones de la concentración a la entrada del reactor  $c_f$ ; mientras que  $p_0$  corresponde al cuadrado del coeficiente de la velocidad de la reacción  $k_2$ .

$$\begin{aligned} \alpha &= c_f(n-1) \\ p_1 &= nk_2(k_2c_f - 2) \\ p_2 &= n^2(2k_2c_f - (k_1V/q)) \\ p_3 &= n^3c_f \\ p_0 &= k_2^2 \end{aligned} \quad (23)$$

El mapeo de la función dada por la ec. (22) es presentado en la Fig. (5) e identifica los estados

Tabla 5. Estados estacionarios del biorreactor de Cholette y sus concentraciones.

Concentración de alimentación ( $c_f$ ) $\text{kmol m}^{-3}$	Concentración de sustrato ( $c$ ) $\text{kmol m}^{-3}$	Concentración de salida ( $c_e$ ) $\text{kmol m}^{-3}$
3.288	1.767, 1.303, 0.014	2.147, 1.80, 0.832
6.484	6.0, 0.238, 0.045	6.122, 1.80, 1.655
7.026	6.584, 0.184, 0.057	6.694, 1.894, 1.80

estacionarios mediante zonas de interés donde se ha aplicado una ley de control para esta reacción enzimática (zona 1, 2 y 3). El incremento en la función  $Z(c_f, c_e)$  respecto de pequeños incrementos en las concentraciones puede interpretarse mediante las curvas de nivel; sugiriendo la naturaleza inestable del sistema y orientando de manera práctica sobre los comportamientos estacionarios (estabilidad estática) en lazo abierto tomando  $c_f$  como la variable manipulada y  $c_e$  como variable de salida.

Las condiciones anteriores representan un reto importante para la síntesis de controladores; puesto que el sistema diseñado puede responder distintamente a cambios similares en la variable manipulada. Por tal motivo, algunos estados estacionarios pueden degradar el desempeño de un controlador.

#### 4.1 Modelos linealizados y leyes de control

Generalmente, los modelos del biorreactor son linealizados en un punto de operación estacionario para desarrollar una ley de control. Para obtener las matrices del sistema en lazo abierto ( $A, B_1, B_2, C, D_1$  y  $D_2$ ) de las ecs. (1)-(2), se emplea la linealización en serie de Taylor al sistema tomando el primer término de la expansión del modelo no-lineal dado por las ecs. (20) y (21),

$$\begin{aligned}
 A &= -\left(\frac{nq}{mV}\right) - (1 + k_2c_s)^2 - 2(1 + k_2c_s)k_2k_1c_s \\
 B_1 &= \left(\frac{n}{mV}\right)(c_{fs} - c_s) \\
 B_2 &= \left(\frac{nq}{mV}\right) \\
 C &= n \\
 D_1 &= 0 \\
 D_2 &= 1 - n
 \end{aligned} \tag{24}$$

Cuando se considera únicamente la ec. (20),

$$\begin{aligned}
 A &= C - \left(\frac{nq}{mV}\right) - (1 + k_2c_s)^2 - 2(1 + k_2c_s)k_2k_1c_s \\
 B_1 &= D_2 = \left(\frac{n}{mV}\right)(c_{fs} - c_s) \\
 B_2 &= \left(\frac{nq}{mV}\right) \\
 D_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

En el caso de una función de transferencia,

$$G(s) = \frac{kp(1 + p)}{(\tau s + 1)} = \frac{b_1s + b_2}{(\tau s + 1)} \tag{26}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \tau &= -\frac{1}{A} \quad k = -\frac{B_2}{A} \quad kp = -Ck - D_2 \\
 p &= -\frac{D_2\tau}{kp}; \quad b_1 = kp; \quad b_2 = pkp
 \end{aligned}$$

Cabe señalar que las funciones de transferencia con polos y ceros inestables se presentan comúnmente en el modelado de reacciones enzimáticas en un mezclador no-ideal. Adicionalmente, aparecen retardos generados por fenómenos de transporte y tiempos de sensado involucrados (Normey-Rico y Camacho (2009)). Todos estos factores dificultan la formulación de una ley de control e influyen en el desempeño del mismo.

Las leyes de control utilizadas para este sistema son,

- Control integral (I),

$$U(s) = \frac{K_i}{s} E(s) \tag{27}$$

- Control proporcional integral (PI),

$$U(s) = \frac{K_p + K_i}{s} E(s) \tag{28}$$

- Control proporcional con parámetro de ponderación, integral del error, menos la derivada de la salida (PwIDy),

$$U(s) = \left( K_p w + \frac{K_i}{s} \right) R(s) - \left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) Y(s) \quad (29)$$

- Control proporcional con parámetro de ponderación en el *setpoint*, integral, derivativo del error (PwID),

$$U(s) = \left( K_p w + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) R(s) - \left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) Y(s) \quad (30)$$

- Control proporcional con parámetro de ponderación en el *setpoint*, integral del error (PwI),

$$U(s) = \left( K_p w + \frac{K_i}{s} \right) R(s) - \left( K_p + \frac{K_i}{s} \right) Y(s) \quad (31)$$

- Control proporcional, integral y derivativo con filtro del error (PIDn),

$$U(s) = \left( K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{\frac{K_d s}{N} + 1} \right) R(s) - \left( K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{\frac{K_d s}{N} + 1} \right) Y(s) \quad (32)$$

Donde  $U(s)$  es la señal de control,  $R(s)$  es el *setpoint*,  $E(s)$  es el error,  $W(s)$  es la entrada exógena o de perturbación,  $Y(s)$  es la salida medida,  $K_i = \frac{K_p}{\tau_i}$  y  $K_d = K_p \tau_d$ .

En la Tabla (6) se presentan los modelos lineales del biorreactor de Cholette junto con las estructuras y

ganancias de los controladores que se han obtenido de referencias bibliográficas.

Los modelos considerados del biorreactor se clasifican como sistemas estables e inestables de primer orden y en algunos casos con retardo de tiempo (*first order plus delay time*, FOPDT por sus siglas en inglés). Donde las especificaciones de desempeño conseguidas son menos satisfactorias respecto de los sistemas FOPDT estables debido a la presencia de ceros dominantes (Sree y Chidambaram (2003a y b), Hernández-Pérez y col. (2013)).

Otro modelo del biorreactor de Cholette es el que utiliza  $c_{fs} = 3.288 \text{ kmol m}^{-3}$  y  $c_s = 1.316 \text{ kmol m}^{-3}$ , el cual tiene la forma:  $G(s) = \frac{3.433}{103.1s-1} e^{-20s}$ . Normey-Rico y Camacho (2009) utilizan un control por medio de un predictor de Smith de la forma:  $C(s) = \frac{3.29(43.87s+1)}{43.87s}$ ,  $F(s) = \frac{20s+1}{43.87s+1}$ ,  $F_r(s) = \frac{(20s+1)^2(93.16s+1)}{(43.87s+1)(26s+1)^2}$ . Un análisis comparativo con éste modelo es el que muestra Márquez-Rubio y col. (2010) utilizan un control PwI con ganancias  $K_p = 22.6$ ,  $K_i = 1.13$ ,  $w = 0.5$  y realizan el comparativo con el control sintonizado por Normey-Rico y Camacho (2009) considerando el conocimiento exacto de los parámetros y condiciones iniciales diferentes de cero. Sivaramakrishnan y col. (2008) utilizan el modelo 4 (Tabla 6) para aplicar una ley de control no-lineal por modos deslizantes. Se ha realizado también la identificación en lazo cerrado mediante optimización para sintonizar una ley de control PID para el modelo 3 (Tabla 6) como se muestra en Sree y Chidambaram (2002).

## 5 Resultados y discusión

### 5.1 Evaluación multi-objetivo de modelos lineales y no-lineales

Las simulaciones correspondientes a los controladores para los cinco modelos lineales y no-lineales del biorreactor de Cholette (Tabla 6), generaron matrices de desempeño para el problema servo y regulatorio de la forma,

$$\Psi = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1j} \\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{ij} & J_{i2} & \cdots & J_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{em1}^{11} & J_{em2}^{12} & J_{em3}^{13} & J_{um1}^{14} & J_{um2}^{15} & J_{um3}^{1j} \\ J_{em1}^{11} & J_{em2}^{12} & J_{em3}^{13} & J_{um1}^{14} & J_{um2}^{15} & J_{um3}^{1j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{em1}^{i1} & J_{em2}^{i2} & J_{em3}^{i3} & J_{um1}^{i4} & J_{um2}^{i5} & J_{um3}^{ij} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Tabla 6: Resumen de los modelos y controladores desarrollados en estados estacionarios del biorreactor de Cholette.

No	Modelo	Estado Estacionario (kmol m <sup>-3</sup> )	Estructura y ganancias del controlador	Referencia	Nomenclatura
1	$\bar{G}(s) = \frac{0.23418s+0.2734}{0.9364s-1}$	$c_s = 0.05867$ $c_{fs} = 7.024$ $c_e = 1.8$	$\tau_i = 0.1$	Chidambaram y Reddy (1996)	a11
			PI (LQR: $Q = 1, R = 0.02$ ) $K_p = 3.54, K_i = 5$	Propuesto	a12
			PI (LQR: $Q = 0.2, R = 1$ ) $K_p = 2.226, K_i = 5$	Propuesto	a13
2	$G(s) = \frac{1.12106}{33.635s-1} e^{-10s}$	$c_s = 1.0439$ $c_{fs} = 3.288$	PwID $K_p = 2.19, \tau_i = 35.35, \tau_d = 2.89, w = 1$	Huang y Chen (1999)	a21
			PwID $K_p = 3.151, \tau_i = 53.85, \tau_d = 5.86, w = 1$	Jhunjhunwala y Chidambaram (2001)	a22
			PwID $K_p = 2.19, \tau_i = 35.35, \tau_d = 2, w = 1$	Propuesto	a23
3	$\bar{G}(s) = \frac{2.21(1+11.133s)}{98.3s-1} e^{-20s}$	$c_s = 1.304$ $c_{fs} = 3.288$ $c_{es} = 1.8$	PwI $K_p = 1.2, \tau_i = 94.74, w = 0.1517$	Sree y Chidambaram (2003b)	a31
			PwI $K_p = 1.2, \tau_i = 94.74, w = 1$	Sree y Chidambaram (2003b)	a32
			PwI $K_p = 2, \tau_i = 94.74, w = 0.1517$	Propuesto	a33
4	$\bar{G}(s) = \frac{3.3736}{99.69s-1} e^{-20s}$	$c_s = 1.3065$ $c_{fs} = 3.288$	PwIDy $K_p = 1.486, \tau_i = 129.85, \tau_d = 11.644, w = 1$	Sree y Chidambaram (2005)	a41
			PwIDy $K_p = 1.486, \tau_i = 129.85, \tau_d = 11.644, w = 0.6894$	Sree y Chidambaram (2005)	a42
			PIDn $K_p = 1.4715, K_i = 0.0147, K_d = 6.392, N = 10$	Rajinikanth y Latha (2012)	a43
			PIDn $K_p = 1.4715, K_i = 0.0228, K_d = 6.392, N = 10$	Rajinikanth y Latha (2012)	a44
			PIDn $K_p = 1.486, \tau_i = 129.85, \tau_d = 11.644, w = 0.3447$	Propuesto	a45
5	$\bar{G}(s) = \frac{-0.1727(1-4.473s)}{3.1s-1}$	$c_s = 0.2383$ $c_{fs} = 6.484$ $c_{es} = 1.8$	PwI $K_p = -4.8615, K_i = 0.037, w = -0.113$	Sree y Chidambaram (2003a)	a51
			PwI	Carrillo-	a52
			PwI $K_p = -4.379, K_i = 0.090, w = -0.1044$	Ahumada y col. (2011)	a53
			PwI $K_p = -4.235, K_i = 0.1663, w = 0.2773$	Ahumada y col. (2011)	a54
			PwI $K_p = -4.7053, K_i = 0.1113, w = 0.1425$	Ahumada y col. (2011)	

donde  $\Psi$  corresponde a la matriz servo o regulatorio para la evaluación. De tal forma que el análisis multicriterio se estratifica por modelo; mientras que las alternativas analizadas (A) se especifican como  $a_{ij}$ . Donde  $i$  representa el modelo considerado y  $j$  es el controlador. Cada controlador para su correspondiente estado estacionario fue simulado con el modelo lineal y no-lineal. En el modelo lineal, para los cambios en el servosistema se realizó un cambio en escalón del *setpoint* de 0 a 1 manteniendo constante la variable exógena. Para cambios regulatorios se mantuvo constante el *setpoint* con un cambio en escalón de la variable exógena de 0 a 1. Con respecto al modelo no-lineal, los cambios servo y regulatorios se realizaron

conforme a bibliografía correspondiente a cada estado.

### Modelo 1

Para el modelo 1, se tienen tres opciones de controladores para un estado estacionario (Tabla 6). En las Tablas (7) y (8) se presentan los índices de desempeño obtenidos de la evaluación de los controladores correspondientes para el sistema lineal y no-lineal. Conforme el esquema de asignación propuesto (Tabla 3), las ponderaciones y funciones preferenciales se pueden configurar dependiendo de la finalidad de la evaluación (compromiso con el error, acciones de control o una combinación de éstos).

Tabla 7: Índices de desempeño obtenidos con el sistema lineal y no-lineal para el caso servo.

Modelo	$J_{e1}$	$J_{e2}$	$J_{e3}$	$J_{u1}$	$J_{u2}$	$T_s$	$J_{em1}$	$J_{em2}$	$J_{em3}$	$J_{um1}$	$J_{um2}$	$J_{um3}$
$a_{11}^{lineal}$	49.056	$5.05 \times 10^3$	115.98	$3.25 \times 10^3$	11.55	5.86	8.37	8.62	19.79	554.65	565.22	395.11
$a_{11}^{no-lineal}$	0.1942	33.28	9.32	$3.33 \times 10^3$	11.66	8.5	$22.8 \times 10^{-3}$	0.195	1.09	391.76	39.58	334.49
$a_{12}^{lineal}$	8.67	715.09	42.77	$2.65 \times 10^3$	6.54	3.75	2.31	1.90	11.40	707.30	319.14	536.25
$a_{12}^{no-lineal}$	0.725	150.43	18.67	$3.44 \times 10^3$	11.37	15.8	$45.8 \times 10^{-3}$	0.476	1.18	217.72	29.51	256.56
$a_{13}^{lineal}$	21.21	$2.37 \times 10^3$	77.23	$2.83 \times 10^3$	9.18	3.75	4.30	4.80	15.66	574.03	431.26	420.57
$a_{13}^{no-lineal}$	0.719	145.38	18.51	$3.42 \times 10^3$	11.438	15.4	$46.6 \times 10^{-3}$	0.472	1.201	222.07	29.80	256.68
$a_{21}^{lineal}$	$4.53 \times 10^3$	$1.28 \times 10^7$	$5.37 \times 10^3$	$3.81 \times 10^4$	16.12	125.16	36.19	1019.09	42.88	304.16	156.96	847.50
$a_{21}^{no-lineal}$	5.33	$3.9 \times 10^{-3}$	106.65	18.21	3.94	100.5	0.053	1.945	1.061	0.181	1.702	0.915
$a_{22}^{lineal}$	$2.7 \times 10^3$	$6.82 \times 10^6$	$4.48 \times 10^3$	$2.45 \times 10^4$	20.45	109.77	24.58	621.72	40.81	223.39	59.79	517.51
$a_{22}^{no-lineal}$	2.34	$1.02 \times 10^3$	48.29	10.25	3.69	67.2	0.035	0.760	0.718	0.152	0.781	0.651
$a_{23}^{lineal}$	$5.79 \times 10^3$	$1.94 \times 10^7$	$6.92 \times 10^3$	$5.02 \times 10^4$	20.91	205.26	28.20	946.46	33.69	244.37	156.32	765.51
$a_{23}^{no-lineal}$	5.27	$3.85 \times 10^3$	105.86	19.68	3.93	101.2	0.052	1.902	1.046	0.194	1.763	0.987
$a_{31}^{lineal}$	$4.62 \times 10^3$	$1.88 \times 10^7$	$8.76 \times 10^3$	$4.67 \times 10^3$	1.4169	465.9	9.91	403.79	18.79	10.03	15.83	181.80
$a_{31}^{no-lineal}$	8.758	$6.33 \times 10^3$	155.45	5.166	3.367	400	0.053	1.925	0.945	0.031	0.531	0.219
$a_{32}^{lineal}$	$3.97 \times 10^3$	$3.53 \times 10^7$	$9.66 \times 10^3$	$8.6 \times 10^3$	4.16	447.74	8.86	787.96	21.57	19.20	21.91	199.15
$a_{32}^{no-lineal}$	3.303	$4.94 \times 10^3$	118.47	8.789	3.518	410	0.027	2.008	0.963	0.071	0.801	0.422
$a_{33}^{lineal}$	$3.79 \times 10^3$	$1.10 \times 10^7$	$6.31 \times 10^3$	$4.23 \times 10^3$	1.805	157	24.14	700.63	40.16	26.94	20.76	251.27
$a_{33}^{no-lineal}$	7.752	$5.33 \times 10^3$	136.91	4.681	3.369	400	0.103	3.553	1.825	0.062	0.499	0.294
$a_{41}^{lineal}$	$4.35 \times 10^3$	$2.08 \times 10^7$	$8.45 \times 10^3$	$8.64 \times 10^3$	8.01	293.26	14.81	708.58	28.81	29.45	10.85	178.21
$a_{41}^{no-lineal}$	0.577	581.90	44.65	1.55	3.425	300	0.008	0.447	0.687	0.023	0.308	0.104
$a_{42}^{lineal}$	$3.05 \times 10^3$	$6.69 \times 10^6$	$5.12 \times 10^3$	$4.86 \times 10^3$	5.58	207.95	14.68	321.80	24.62	23.37	19.33	142.59
$a_{42}^{no-lineal}$	0.525	144.465	26.354	1.013	3.3382	60	0.008	0.120	0.439	0.017	0.259	0.071
$a_{43}^{lineal}$	$5.29 \times 10^7$	$2.19 \times 10^7$	$7.21 \times 10^3$	$3.64 \times 10^4$	145.46	207.95	25.4	1051.74	34.64	174.84	52.89	209.04
$a_{43}^{no-lineal}$	0.729	620.951	43.94	3.364	3.396	210	93.02	$1.984 \times 10^3$	577.27	212.587	4.425	291
$a_{44}^{lineal}$	$6.83 \times 10^3$	$3.41 \times 10^7$	$9.23 \times 10^3$	$4.02 \times 10^4$	147.15	270.94	25.20	1257.80	34.05	148.52	109.68	201.53
$a_{44}^{no-lineal}$	0.747	578.766	40.419	3.559	3.407	260	0.01	0.413	0.577	0.051	1.352	0.230
$a_{45}^{lineal}$	$3.04 \times 10^3$	$6.52 \times 10^6$	$5.05 \times 10^3$	$4.79 \times 10^3$	5.56	263.08	11.55	247.79	19.19	18.20	8.53	125.20
$a_{45}^{no-lineal}$	1.136	698.21	53.88	1.660	3.341	85	0.013	0.410	0.633	0.0195	0.139	0.098
$a_{51}^{lineal}$	931.05	$3.06 \times 10^3$	$1.1 \times 10^3$	$2.39 \times 10^4$	11.14	37.39	24.90	81.87	29.48	639.20	50.56	1171.07
$a_{51}^{no-lineal}$	1.823	118.90	22.55	45.693	7.115	20	0.194	0.632	2.398	4.860	8.818	5.588
$a_{52}^{lineal}$	914.41	$2.36 \times 10^3$	$1.06 \times 10^3$	$2.23 \times 10^4$	15.81	34.64	26.39	68.26	30.64	642.95	25.35	951.59
$a_{52}^{no-lineal}$	1.773	84.723	19.832	42.146	7.056	30	0.236	0.565	2.644	5.619	2.370	5.793
$a_{53}^{lineal}$	$3.89 \times 10^3$	$1.58 \times 10^5$	$2.0 \times 10^3$	$9.24 \times 10^4$	6.44	28.07	138.72	564.30	71.35	3292.12	114.75	2173.07
$a_{53}^{no-lineal}$	7.492	627.305	38.960	176.77	12.593	30	0.634	2.680	3.329	15.1	23.32	14.56
$a_{54}^{lineal}$	$2.36 \times 10^3$	$1.85 \times 10^6$	$2.19 \times 10^3$	$6.68 \times 10^4$	22.75	51.8	45.52	358.06	42.30	1290.34	287.37	1945.99
$a_{54}^{no-lineal}$	4.725	759.798	44.730	131.594	8.797	55	0.189	1.525	1.796	5.284	32.183	8.894

El ranqueo PROMETHEE II de los controladores comprometidos con el menor esfuerzo para la característica de convergencia del error  $J_{em2}$ , mejor acción del controlador  $J_{um3}$  y mejor estabilidad en el punto de operación  $J_{um2}$  es mostrado en la Tabla (9). Los cuales presentan las siguientes respuestas para el sistema lineal (Fig. 6) y para el sistema no-lineal (Fig. 7). Las ponderaciones y funciones preferenciales para el enfoque de la presente evaluación en ambos problemas (servo y regulatorio) son las siguientes:  $\{J_{em2}, J_{um2}, J_{um3}$  con  $P_j = 1\sigma$  y  $w_j = 0.25\}$  y  $\{J_{em1}, J_{em3}, J_{um1}$  con  $P_j = 2\sigma$  y  $w_j = 0.08\}$  (Tabla 3). El ranqueo para el sistema lineal del modelo 1 indica que la opción  $a_{12}$  tiene el mejor ranqueo de desempeño para el servosistema, la opción  $a_{11}$  presentó el mejor desempeño para el caso regulatorio. Además, el ranqueo para el sistema no-lineal indica que la opción  $a_{11}$  tiene el mejor desempeño para el servosistema, la opción  $a_{13}$  muestra el mejor desempeño para el

caso regulatorio. Este cambio, en los ranqueos es debido a que el sistema lineal es una aproximación del sistema no-lineal. En el Apéndice B se muestran las coordenadas paralelas correspondientes a este modelo.

### Modelo 2

Para el modelo 2, se tienen tres opciones de controladores para un estado estacionario (Tabla 6). En las Tablas (7) y (8) se presentan los índices de desempeño obtenidos de la evaluación de los controladores correspondientes para el sistema lineal y no-lineal. El ranqueo PROMETHEE II de los controladores comprometidos con el menor esfuerzo de control para la característica de convergencia del error  $J_{em2}$ , mejores acciones del controlador  $J_{um3}$  y mejor estabilidad en el punto de operación  $J_{um2}$  (Tabla 9). Los cuales presentan las siguientes respuestas para el sistema lineal (Fig. 8) y para el sistema no-lineal

Tabla 8: Índices de desempeño obtenidos con el sistema lineal y no-lineal para el caso regulatorio.

Modelo	$J_{e1}$	$J_{e2}$	$J_{e3}$	$J_{u1}$	$J_{u2}$	$I_s$	$J_{em1}$	$J_{em2}$	$J_{em3}$	$J_{um1}$	$J_{um2}$	$J_{um3}$
$a_{11}^{lineal}$	3.22	$1.31 \times 10^4$	25.44	$4.05 \times 10^5$	2.53	47	1.14	46.12	8.99	1430.70	1134.74	1511.27
$a_{11}^{no-lineal}$	0.1163	32.05	8.49	$1.11 \times 10^4$	11.27	20	$5.8 \times 10^{-5}$	0.80	0.424	550.10	70.35	732.68
$a_{12}^{lineal}$	0.569	$2.29 \times 10^3$	8.19	$4.0 \times 10^5$	1.478	45	0.60	24.40	8.70	4255.32	1108.96	3393.56
$a_{12}^{no-lineal}$	0.476	138.96	17.09	$3.69 \times 10^5$	11.31	30	$21.6 \times 10^{-5}$	0.315	0.775	167.34	38.80	233.66
$a_{13}^{lineal}$	1.41	$5.72 \times 10^3$	16.26	$4.02 \times 10^5$	1.84	47	1.10	44.65	12.71	3141.40	1064.91	2615.92
$a_{13}^{no-lineal}$	0.480	137.08	17.11	$2.79 \times 10^5$	11.31	30	$22 \times 10^{-5}$	0.314	0.785	127.52	33.87	177.04
$a_{21}^{lineal}$	657.62	$2.12 \times 10^6$	$1.82 \times 10^5$	$3.88 \times 10^5$	4.32	114.51	5.74	184.94	15.90	33.87	46.56	174.27
$a_{21}^{no-lineal}$	147.15	$2.03 \times 10^5$	739.85	759.67	7.66	238	0.618	42.647	3.108	3.192	16.079	17.792
$a_{22}^{lineal}$	512.73	$1.79 \times 10^6$	$1.78 \times 10^5$	$2.31 \times 10^5$	5.32	91.76	5.58	194.71	19.43	25.20	15.06	104.64
$a_{22}^{no-lineal}$	30.27	$1.75 \times 10^4$	196.85	168.04	4.98	90.3	0.336	9.722	2.186	1.866	4.098	7.935
$a_{23}^{lineal}$	801.24	$2.88 \times 10^6$	$2.32 \times 10^5$	$5.19 \times 10^5$	5.884	143.36	5.58	200.90	16.21	36.20	54.15	178.73
$a_{23}^{no-lineal}$	54.28	$5.14 \times 10^4$	371.5	247.92	5.39	194	0.279	13.247	1.915	1.277	5.652	7.666
$a_{31}^{lineal}$	$5.25 \times 10^3$	$4.53 \times 10^7$	$1.08 \times 10^4$	$3.98 \times 10^5$	2.37	407.4	12.89	1111.95	26.57	9.77	12.50	127.88
$a_{31}^{no-lineal}$	21.83	$3.86 \times 10^4$	306.49	13.45	3.53	400	0.117	2.076	1.684	0.072	0.807	0.525
$a_{32}^{lineal}$	$5.25 \times 10^3$	$4.53 \times 10^7$	$1.08 \times 10^4$	$3.98 \times 10^5$	2.38	407.4	12.89	1111.95	26.57	9.77	12.50	127.88
$a_{32}^{no-lineal}$	21.829	$3.86 \times 10^4$	306.492	13.454	3.53	300	0.117	2.07	1.648	0.072	0.806	0.525
$a_{33}^{lineal}$	$1.57 \times 10^3$	$9.84 \times 10^6$	$4.89 \times 10^3$	$1.89 \times 10^5$	2.49	210	7.47	468.64	23.28	8.99	11.99	82.46
$a_{33}^{no-lineal}$	7.89	$1.21 \times 10^4$	178.41	9.459	3.516	300	0.061	0.945	1.393	0.0738	0.543	0.445
$a_{41}^{lineal}$	$4.60 \times 10^3$	$3.72 \times 10^7$	$8.74 \times 10^3$	$3.58 \times 10^5$	4.29	293.71	15.64	1265.22	29.75	12.18	3.49	100.69
$a_{41}^{no-lineal}$	74.75	$1.75 \times 10^5$	550.1	173.25	4.207	300	0.326	38.20	2.401	0.755	2.608	5.582
$a_{42}^{lineal}$	$4.60 \times 10^3$	$3.72 \times 10^7$	$8.74 \times 10^3$	$3.58 \times 10^5$	4.29	293.71	15.65	1265.23	29.75	12.18	3.49	100.69
$a_{42}^{no-lineal}$	74.753	$1.75 \times 10^5$	550.1	173.128	4.207	400	0.326	38.20	2.40	0.756	2.609	5.586
$a_{43}^{lineal}$	$2.12 \times 10^3$	$3.67 \times 10^6$	$3.03 \times 10^3$	$6.48 \times 10^4$	22.05	222.55	21.24	1345.80	30.56	23.75	4.87	199.47
$a_{43}^{no-lineal}$	93.02	$1.984 \times 10^5$	577.27	212.587	4.425	300	0.319	34.02	1.983	0.730	2.564	5.927
$a_{44}^{lineal}$	$4.36 \times 10^3$	$2.75 \times 10^7$	$6.64 \times 10^3$	$6.83 \times 10^5$	4.31	266.84	16.35	1032.30	24.89	25.59	40.47	201.25
$a_{44}^{no-lineal}$	84.132	$1.724 \times 10^5$	557.12	227.23	4.609	400	0.321	32.82	2.126	0.867	4.656	6.544
$a_{45}^{lineal}$	$4.55 \times 10^3$	$3.67 \times 10^7$	$8.74 \times 10^3$	$3.52 \times 10^5$	4.27	297.43	15.29	1240.62	29.38	11.82	6.877	98.63
$a_{45}^{no-lineal}$	74.75	$1.754 \times 10^5$	550.04	173.128	4.207	300	0.326	38.2	2.401	0.755	2.608	5.582
$a_{51}^{lineal}$	$2.12 \times 10^3$	$3.67 \times 10^6$	$3.03 \times 10^3$	$6.48 \times 10^4$	22.05	74.72	28.32	491.42	40.58	867.14	58.89	1595.94
$a_{51}^{no-lineal}$	21.949	$8.06 \times 10^3$	163.81	785.68	8.813	56.5	0.388	7.132	2.899	13.905	7.458	35.209
$a_{52}^{lineal}$	$1.16 \times 10^3$	$7.44 \times 10^5$	$1.55 \times 10^3$	$2.83 \times 10^4$	33.16	43.72	26.53	170.13	35.51	646.79	50.86	742.58
$a_{52}^{no-lineal}$	7.488	$1.226 \times 10^3$	67.553	242.88	8.397	26.1	0.285	2.432	2.588	9.305	6.101	16.413
$a_{53}^{lineal}$	$1.62 \times 10^3$	$4.55 \times 10^5$	$1.18 \times 10^3$	$3.26 \times 10^4$	50.72	19.07	85.00	238.68	62.09	1707.39	82.64	1046.91
$a_{53}^{no-lineal}$	4.879	415.146	36.560	138.967	8.539	13.00	0.375	1.596	2.812	10.689	6.538	13.196
$a_{54}^{lineal}$	$1.32 \times 10^3$	$1.26 \times 10^6$	$1.72 \times 10^3$	$3.45 \times 10^4$	27.06	52.78	24.93	234.67	32.49	654.13	230.18	914.46
$a_{54}^{no-lineal}$	9.069	$1.395 \times 10^5$	56.12	285.33	8.7	17.35	0.522	4.005	3.234	16.445	12.165	23.224

(Fig. 9). Para el Modelo 2 del sistema lineal, la opción  $a_{22}$  es la de mejor desempeño para el servosistema, para cambios regulatorios la opción  $a_{23}$  es la más adecuada. Para el sistema no-lineal, la opción  $a_{22}$  es la de mejor desempeño para el servosistema y para cambios regulatorios presentando dominancia ante los demás controladores. En el Apéndice B se muestran las coordenadas paralelas correspondientes a este modelo.

**Modelo 3**

Para el modelo 3, se tienen tres opciones de controladores para un estado estacionario (Tabla 6). En las Tablas (7) y (8) se presentan los índices de desempeño obtenidos de la evaluación de los controladores correspondientes para el sistema en su forma lineal y no-lineal.

El ranqueo PROMETHEE II de los controladores

son mostrados en la Tabla (9). Los cuales presentan las siguientes respuestas para el sistema lineal (Fig. 10) y para el sistema no-lineal (Fig. 11). Para el Modelo 3 del sistema lineal y no-lineal, la opción  $a_{31}$  es la de mejor desempeño del servosistema, para cambios regulatorios la opción  $a_{33}$  es la más adecuada. El sistema lineal del modelo 3 es más aproximado al sistema no-lineal. En el Apéndice B se muestran las coordenadas paralelas correspondientes a este modelo.

**Modelo 4**

Para el modelo 4, se tienen cinco opciones de controladores para un estado estacionario (Tabla 6). En las Tablas (7) y (8) se presentan los índices de desempeño obtenidos de la evaluación de los controladores correspondientes para el sistema lineal y no-lineal. El ranqueo PROMETHEE II de los controladores son mostrados en la Tabla (9). Los

Tabla 9: Ranqueo PROMETHEE II para el sistema lineal y no-lineal.

Caso	Sistema no-lineal	$\Phi_{i+}$	$\Phi_{i-}$	Ranqueo	Sistema lineal	$\Phi_{i+}$	$\Phi_{i-}$	Ranqueo	
Servo	$a_{11}$	0.0400	0.0310	63	$a_{11}$	0.0048	-0.0647	77.55	
	$a_{12}$	0.0157	0.0201	61.34	$a_{12}$	0.0747	-0.0076	100	
	$a_{13}$	0.0153	0.0199	61.32	$a_{13}$	0.0198	-0.0269	86.19	
	$a_{22}$	0.0924	0.00001	74.48	$a_{22}$	0.0771	-0.0002	86.67	
	$a_{21}$	0.0004	0.0450	56.60	$a_{21}$	0.0	-0.0429	68.17	
	$a_{23}$	0.00001	0.0478	56.24	$a_{23}$	0.0017	-0.0357	69.41	
	$a_{31}$	0.0424	0.0015	67.17	$a_{31}$	0.0448	-0.0001	90.09	
	$a_{32}$	0.0165	0.0367	59.42	$a_{32}$	0.0062	-0.0216	79.89	
	$a_{33}$	0.0147	0.0354	59.37	$a_{33}$	0.0009	-0.0303	77.69	
	$a_{45}$	0.1371	0.0149	100	$a_{45}$	0.1180	0.0	91.96	
	$a_{42}$	0.1115	0.0258	92.88	$a_{42}$	0.0792	-0.0174	81.86	
	$a_{41}$	0.0360	0.0504	75.99	$a_{41}$	0.0583	-0.0271	76.99	
	$a_{43}$	0.0147	0.0773	68.99	$a_{43}$	0.0088	-0.0967	60.64	
	$a_{44}$	0.0003	0.1312	60.12	$a_{44}$	0.0001	-0.1231	56.49	
	$a_{52}$	0.1371	0.0008	81.40	$a_{52}$	0.1432	0.0	100	
	$a_{51}$	0.0928	0.0205	71.53	$a_{51}$	0.1059	-0.0125	90.39	
	$a_{54}$	0.0182	0.0911	53.47	$a_{54}$	0.0091	-0.1321	58.53	
	$a_{53}$	0.0031	0.1388	47.10	$a_{53}$	0.0139	-0.1275	59.65	
	Regulatorio	$a_{13}$	0.0553	0.0343	62.24	$a_{13}$	0.0040	-0.0265	92.19
		$a_{12}$	0.0406	0.0395	59.81	$a_{12}$	0.0283	-0.0239	97.29
$a_{11}$		0.0689	0.0909	57.11	$a_{11}$	0.0328	-0.0147	100	
$a_{22}$		0.0926	0.0008	71.75	$a_{22}$	0.0414	-0.0589	69.80	
$a_{23}$		0.0743	0.0091	68.01	$a_{23}$	0.1609	0.0	100	
$a_{21}$		0.00001	0.1571	43.48	$a_{21}$	0.0	-0.1434	54.15	
$a_{33}$		0.0571	0.00001	100.00	$a_{33}$	0.0652	-0.0014	100	
$a_{31}$		0.0039	0.0266	85.24	$a_{31}$	0.0220	-0.0216	88.08	
$a_{32}$		0.0001	0.0344	83.28	$a_{32}$	0.0001	-0.0643	77.38	
$a_{43}$		0.0078	0.0004	95.66	$a_{43}$	0.0229	-0.3180	89.15	
$a_{45}$		0.0068	0.0011	95.32	$a_{45}$	0.0355	-0.0180	94.38	
$a_{42}$		0.0067	0.0011	95.29	$a_{42}$	0.0475	-0.0012	100	
$a_{41}$		0.0067	0.0011	95.29	$a_{41}$	0.0475	-0.0012	100	
$a_{44}$		0.0020	0.0262	89.79	$a_{44}$	0.0051	-0.0051	74.38	
$a_{53}$		0.0751	0.0004	100	$a_{53}$	0.0309	-0.0267	86.95	
$a_{52}$		0.0512	0.0065	94.17	$a_{52}$	0.0714	0.0	99.48	
$a_{54}$	0.0125	0.0584	78.54	$a_{54}$	0.0228	-0.0626	79.62		
$a_{51}$	0.0064	0.0799	74.32	$a_{51}$	0.0264	-0.0622	80.27		

cuales presentan las siguientes respuestas para el sistema lineal (Fig. 12) y para el sistema no-lineal (Fig. 13). El ranqueo servo para el sistema lineal del modelo 4 determina que el controlador con opción  $a_{45}$  tiene un compromiso con el menor esfuerzo en todos los índices componente con respecto al servosistema. Para el caso regulatorio son recomendables los controladores  $a_{41}$  y  $a_{42}$ . Para el sistema no-lineal la opción  $a_{45}$  es la más adecuada para el servosistema y la opción  $a_{43}$  es la mejor para el caso regulatorio. En el Apéndice B se muestran las coordenadas paralelas correspondientes a este modelo.

### Modelo 5

Para el Modelo 5, se tienen cuatro opciones de controladores para un estado estacionario (Tabla 6). En las Tablas (7) y (8) se presentan los índices de desempeño obtenidos de la evaluación de los controladores correspondientes para el sistema en su forma lineal y no-lineal. El ranqueo PROMETHEE II de los controladores son mostrados en la Tabla (9). Los cuales presentan las siguientes respuestas para el sistema lineal (Fig. 14) y para el sistema no-lineal (Fig. 15). En el ranqueo para el sistema lineal para el servosistema y para cambios regulatorios la opción  $a_{52}$  es la más recomendable. Para el sistema no-lineal, para el servosistema la opción más recomendable es

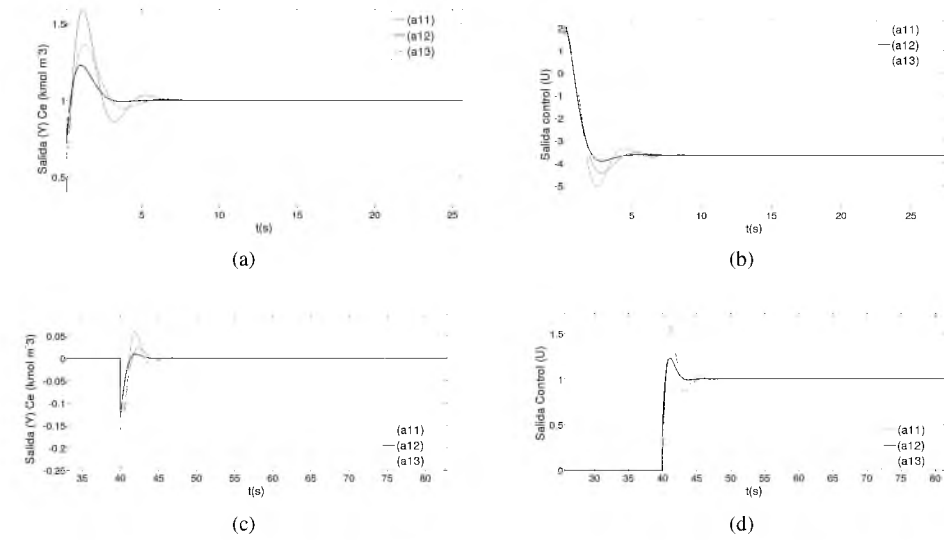


Fig. 6: Modelo 1 (sistema lineal): **a)** salida servo del biorreactor, **b)** respuesta servo del control, **c)** salida regulatoria del biorreactor, **d)** respuesta regulatoria del control.

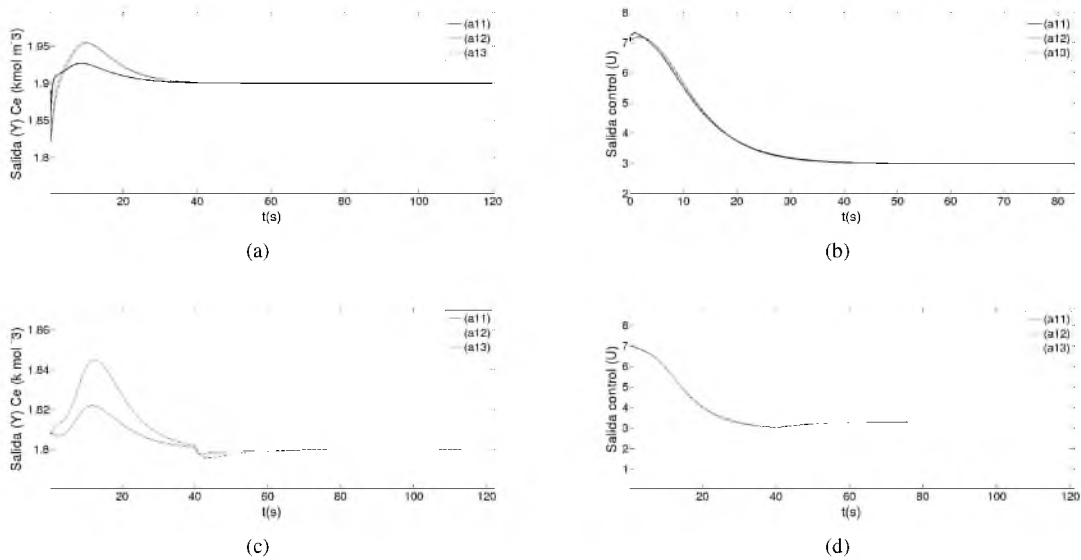


Fig. 7: Modelo 1 (sistema no-lineal), servosistema:  $c_d = 1.9$ , manteniendo constante  $q$ ; cambios regulatorios:  $q = 4.0 \times 10^{-5}$  en  $t = 0$  y  $q = 3.333 \times 10^{-5}$  cuando  $t > 40$ : **a)** salida servo del biorreactor, **b)** respuesta servo del control, **c)** salida regulatoria del biorreactor, **d)** respuesta regulatoria del control.

la  $a_{52}$  y para cambios regulatorios es la  $a_{53}$ . En el Apéndice B se muestran las coordenadas paralelas correspondientes a este modelo. Esto confirma la

versatilidad y objetividad de la metodología que puede ser aplicada para sistemas lineales y no-lineales.

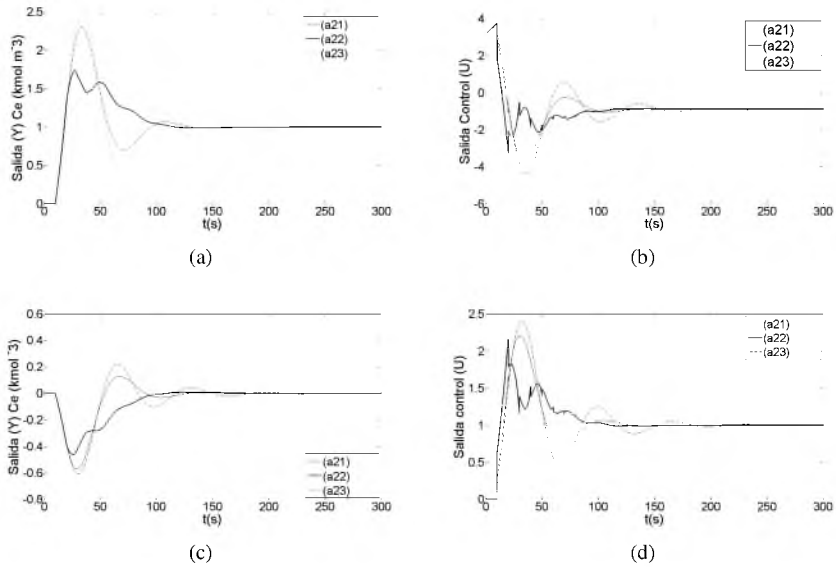


Fig. 8: Modelo 2 (sistema lineal): **a)** salida servo del biorreactor, **b)** respuesta servo del control, **c)** salida regulatoria del biorreactor, **d)** respuesta regulatoria del control.

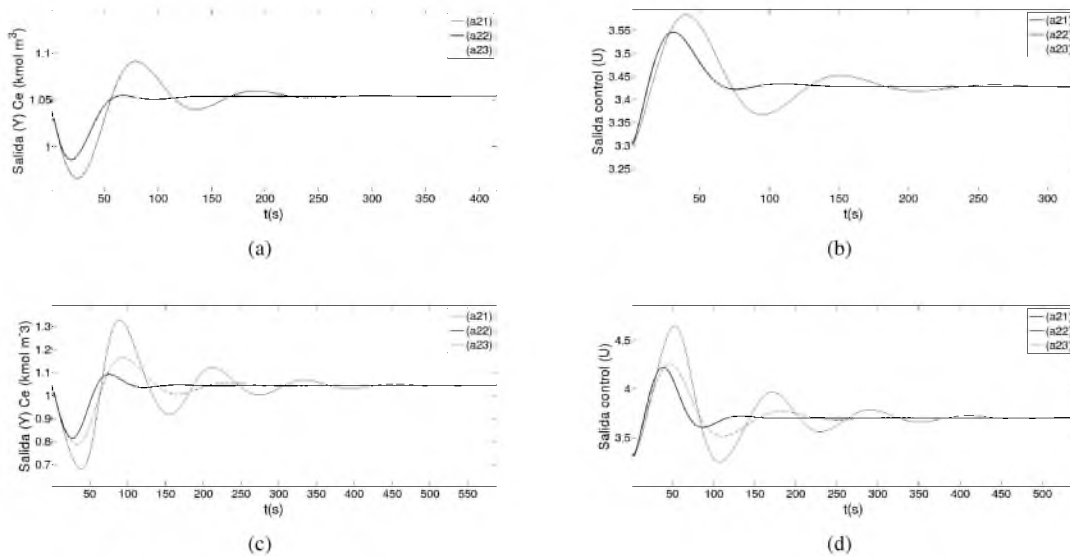


Fig. 9: Modelo 2 (sistema no-lineal), servosistema:  $c_d = 1.0539$ , manteniendo constante  $q$ ; cambios regulatorios:  $q = 3 \times 10^{-5}$  desde  $t > 0$ : **a)** salida servo del biorreactor, **b)** respuesta servo del control, **c)** salida regulatoria del biorreactor, **d)** respuesta regulatoria del control.

## 6 Conclusiones

En el presente trabajo se ha realizado la evaluación multi-criterio del desempeño de controladores lineales implementados en el biorreactor de Cholette para

distintos modelos desarrollados por la comunidad de control y en sus diversos estados estacionarios para las concentraciones. Se ha podido verificar que aquellos estados estacionarios de la zona 1 cercanos al punto

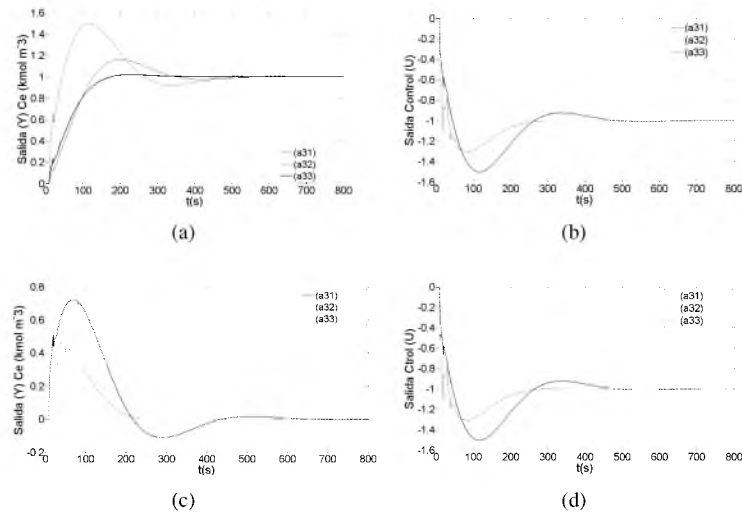


Fig. 10: Modelo 3 (sistema lineal): **a)** salida servo del biorreactor, **b)** respuesta servo del control, **c)** salida regulatoria del biorreactor, **d)** respuesta regulatoria del control.

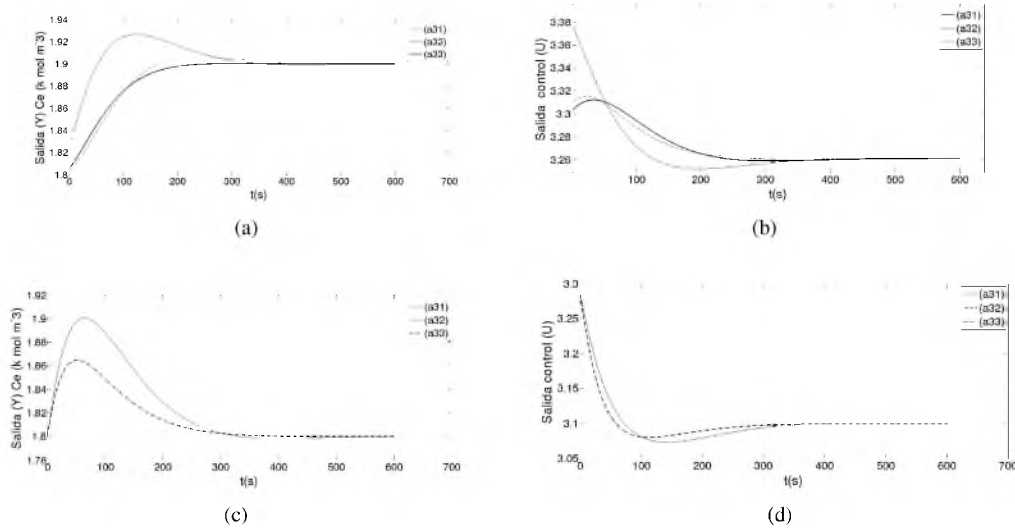


Fig. 11: Modelo 3 (sistema no-lineal), servosistema:  $c_d = 1.9$ , manteniendo constante  $q$ ; cambios regulatorios:  $q = 3.666 \times 10^{-5}$  desde  $t > 0$ : **a)** salida servo del biorreactor, **b)** respuesta servo del control, **c)** salida regulatoria del biorreactor, **d)** respuesta regulatoria del control.

$c_s = 1.304$ ,  $c_f = 3.288$  y  $c_e = 1.8$ ; presentan un mayor reto en el diseño de una ley de control debido a la inestabilidad de la reacción y a los tiempos de retardo involucrados; siendo los controladores con arquitecturas PI ponderado los de mejor ranqueo de desempeño para el caso servo y regulatorio. En algunos casos, los controladores presentan mejores

resultados conforme a un escenario en específico ya sea servo o regulatorio su elección depende del diseñador. Además, que esta metodología puede evaluar los índices de desempeño (multi-objetivos) óptimos balanceados con diversos criterios tanto de los controladores lineales como de los no-lineales. El objetivo de este trabajo fue mostrar las diferentes

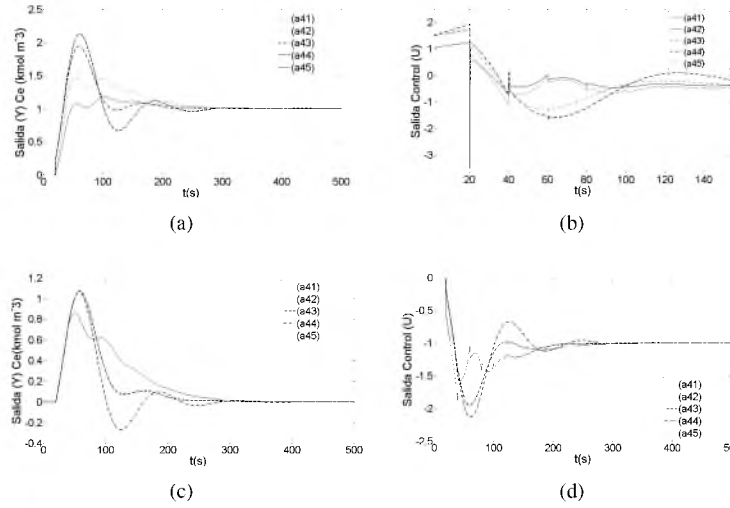


Fig. 12: Modelo 4 (sistema lineal): **a)** salida servo del biorreactor, **b)** respuesta servo del control, **c)** salida regulatoria del biorreactor, **d)** respuesta regulatoria del control.

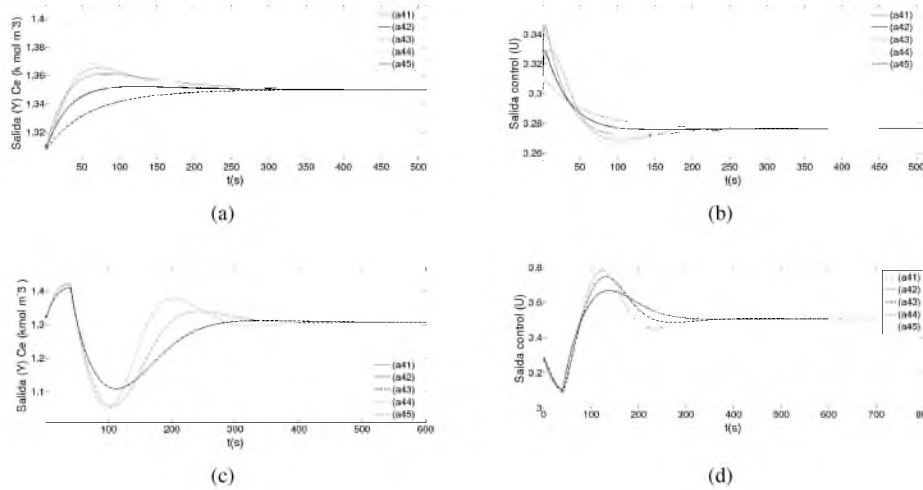


Fig. 13: Modelo 4 (sistema no-lineal), servosistema:  $c_d = 1.35$ , manteniendo constante  $q$ ; cambios regulatorios:  $q = 3.666 \times 10^{-5}$  desde  $t > 0$ : **a)** salida servo del biorreactor, **b)** respuesta servo del control, **c)** salida regulatoria del biorreactor, **d)** respuesta regulatoria del control.

prestaciones entre un conjunto de controladores obtenidos de la literatura sintonizados con diversas técnicas. El procedimiento descrito es perfectamente aplicable en controladores no-lineales pero en ese caso no hay solución analítica para las integrales de los índices de desempeño.

Se ha demostrado que para el análisis del desempeño de controladores mediante técnicas de

decisión multi-criterio (MCDA/D); es necesario formular indicadores de jerarquía analítica basados en los indicadores de desempeño convencionales (IAE, ISE, ITSE, IADU,  $T_s$ , etc.). En este sentido; las matrices de desempeño obtenidas con la reformulación de índices, tienen una distancia de desempeño  $d_j$  más homogénea para cada criterio componente. Este enfoque basado en las distancias

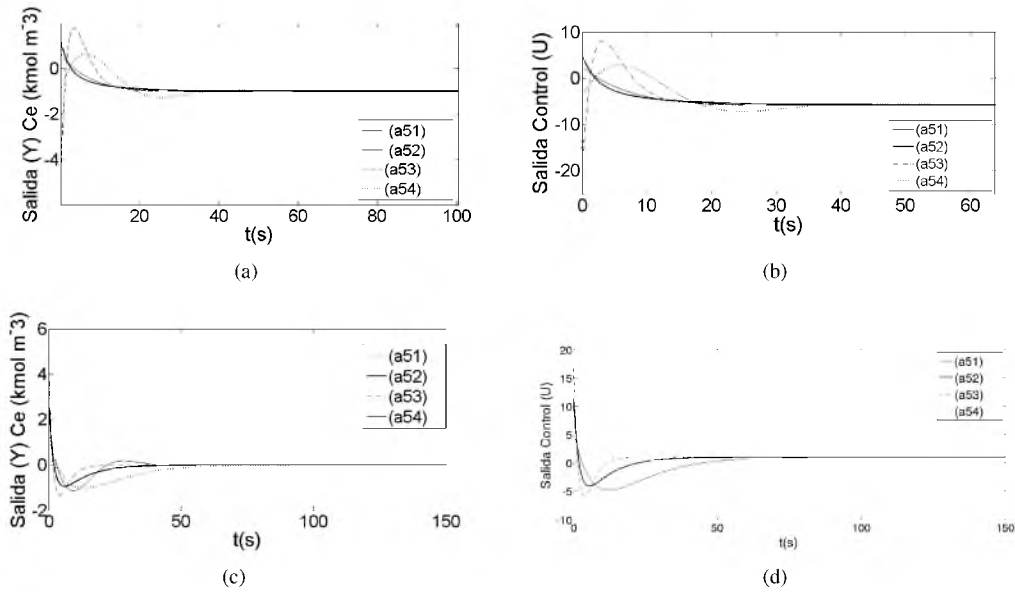


Fig. 14: Modelo 5 (sistema lineal): **a)** salida servo del biorreactor, **b)** respuesta servo del control, **c)** salida regulatoria del biorreactor, **d)** respuesta regulatoria del control.

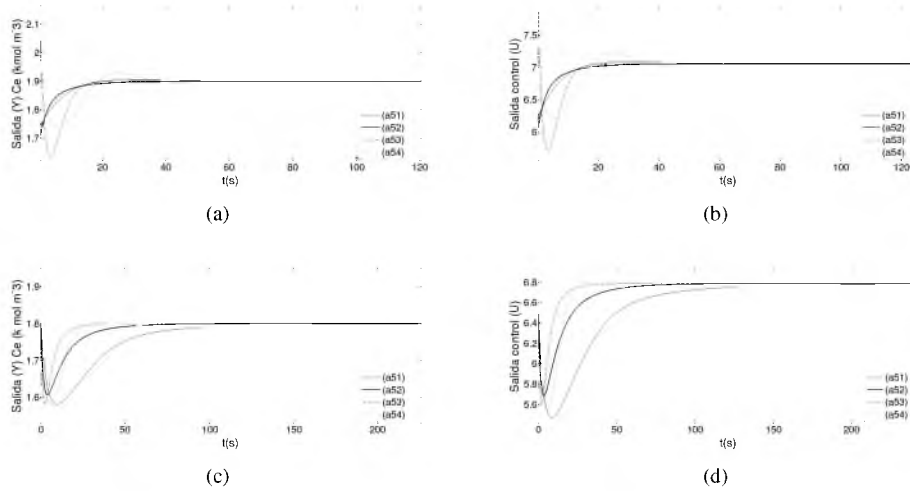


Fig. 15: Modelo 5 (sistema no-lineal), servosistema:  $c_d = 1.9$ , manteniendo constante  $q$ ; cambios regulatorios:  $q = 3.66 \times 10^{-5}$  desde  $t > 0$ : **a)** salida servo del biorreactor, **b)** respuesta servo del control, **c)** salida regulatoria del biorreactor, **d)** respuesta regulatoria del control.

de desempeño; es canalizado mediante la metodología PROMETHEE al considerar un proceso normalizado  $N(0, 1)$  en una función preferencial Gaussiana (tipo 6). Ante esta consideración; se ha presentado un método sistemático para asignación de las ponderaciones ( $w_j$ ) y funciones preferenciales ( $P_j$ ), basado en la

desviación estándar de la distancia de desempeño dentro de cada índice componente; interpretando niveles de exigencia requeridos por el evaluador ( $60\% = 1\sigma$ ,  $88\% = \sigma/2$ ,  $94\% = \sigma/3$ ). Esto es de gran utilidad al momento de decidir el tipo de controlador requerido en algún punto de trabajo

específico de un sistema no-lineal. El ranqueo de los controladores obtenido mediante las relaciones binarias de preferencia establecidas en la metodología y estratificadas por modelo; puede ser corroborado mediante gráficos multi-dimensionales (coordenadas paralelas). Donde dos variantes confirman el ranqueo PROMETHEE y enriquecen la interpretación del enfoque de evaluación multi-criterio por distancias de desempeño. Finalmente y a diferencia de otros trabajos de análisis del desempeño mediante técnicas multi-criterio como el de Sun y Li (2010); se proporciona un criterio de evaluación basado en la entropía de sistemas y un método sistemático de asignación de ponderaciones y preferencias para la evaluación del desempeño de controladores en sistemas no-lineales con multiplicidad de estados.

## Nomenclatura

$A$	Matriz característica
$B_1$	Matriz dinámica entre el estado y la entrada exógena
$B_2$	Matriz dinámica entre el estado y la señal de control
$C$	Matriz dinámica entre la salida medida y el estado
$c$	Concentración de sustrato
$c_e$	Concentración de sustrato en la salida del biorreactor
$c_f$	Concentración de sustrato en la entrada del biorreactor
$D_1$	Matriz dinámica entre la salida medida y la entrada exógena
$D_2$	Matriz dinámica entre la salida medida y la señal de control
$Im$	Imaginaria
$k$	Ganancia del proceso
$k_1$	Máxima velocidad cinética
$k_2$	Parámetro de inhibición
$K_d$	Ganancia derivativa
$K_i$	Ganancia integral
$K_p$	Ganancia proporcional
$LQR$	Linear-quadratic regulator (regulador lineal cuadrático)
$m$	Índice de mezclado
$N$	Constante de filtro
$n$	Índice de mezclado
$q$	Velocidad de flujo de alimentación
$Re$	Real

$t$	Tiempo
$V$	Volumen
$w$	Parámetro de ponderación

### Griegas

$\tau$	Constante de tiempo del proceso
$\tau_d$	Tiempo derivativo
$\tau_i$	Tiempo integral

## Agradecimientos

Los autores agradecen al Programa de Mejoramiento del Profesorado (PROMEP) por el financiamiento parcial para esta investigación mediante el proyecto "Análisis de Estabilidad de Procesos Químicos y Alimentarios con Controladores Óptimo-Robustos" (PROMEP/103.5/12/7959; UNPA-PTC-119) y por la beca del estudiante A. Rodríguez-Mariano. Al proyecto interno aprobado UNPA "Análisis del desempeño de controladores lineales sintonizados en diferentes estados estacionarios del biorreactor de Cholette mediante técnicas de decisión multi-criterio". Al Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Brasil-CNPq (proyecto BJT 304804/2014-2).

## Referencias

- Alfaro, V. M. y Vilanova, R. (2012). Model-reference robust tuning of 2DoF PI controllers for first- and second-order plus dead-time controlled processes. *Journal of Process Control* 22, 359-374.
- Behzadian, M., Kazemzadeh, R.B., Albadvi, A., y Aghdasi, M. (2009). PROMETHEE: A comprehensive literature review on methodologies and applications. *European Journal of Operational Research* 200 (2010), 198-215.
- Bevrani, H. e Hiyama, T. (2007). Multiobjective PI/PID Control Design Using an Iterative Linear Matrix Inequalities Algorithm. *International Journal of Control, Automation, and Systems* 5 (4), 117-127.
- Blasco, X., Herrero, J., Sanchis, J. y Martínez, M. (2008). A new graphical visualization of n-dimensional Pareto front for decision making in multiobjective optimization. *Information Sciences* 178 (20), 3908-3924.

- Bonissone, P.P., Subbu, R. y Lizzi, J. (2009). Multicriteria decision making (MCDM): a framework for research and applications. *Computational Intelligence Magazine, IEEE* 4(3), 48-61.
- Brans, J.P., Mareschal, B. y Vincke, P. (1984). PROMETHEE: A New Family of Outranking Methods in MCDM. En: *Operational Research, IFORS 84*, (J.P. Brans), Pp. 477-490. North Holland, Amsterdam.
- Carrasco, D.S. y Salgado, M.E. (2009). ITSE optimal controller design and achievable performance bounds. *International Journal of Control* 82(11), 2115-2126.
- Carrillo-Ahumada, J., Páramo-Calderón, D.E., Aparicio-Saguilán, A., Rodríguez-Jimenes, G.C. y García-Alvarado, M.A. (2014). Approach of a measurement of linearized representation of a nonlinear system. Application to (bio)chemical reactors. *Revista Mexicana de Ingeniería Química* 13(2), 631-647.
- Carrillo-Ahumada, J., Reynoso-Meza, G., García-Nieto, S., Sanchis, J. y García-Alvarado, M.A. (2015). Sintonización de controladores Pareto-óptimo robustos para sistemas multivariables. Aplicación en un helicóptero de 2 grados de libertad. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (Artículo aceptado)*.
- Carrillo-Ahumada, J., Rodríguez-Jimenes, G.C. y García-Alvarado, M.A. (2011). Tuning optimal-robust linear MIMO controllers of chemical reactors by using Pareto optimality. *Chemical Engineering Journal* 174, 357-367.
- Chidambaram, M. y Reddy, G.P. (1996). Nonlinear control of systems with input and output multiplicities. *Computer & Chemical Engineering* 20(3), 295-299.
- Duarte-Mermoud, M.A. y Prieto, R.A. (2004). A Performance index for quality response of dynamical systems. *ISA Transactions* 43, 133-151.
- Dubois, D. y Prade, H. (1988). *Possibility Theory*. Editorial Plenum Press., New York, U.S.A.
- Dubois, D., Prade, H. y Sabbadin, R. (2013). Qualitative Decision Theory with Sugeno Integrals. Presentación San Francisco: *14th Conference on Uncertainty in AI*, 121-128.
- Ferramosca, A., Gruber, J.K., Limon, D. y Camacho, E.F. (2013). Control predictivo para seguimiento de sistemas no lineales. Aplicación a una planta piloto. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 10, 18-29.
- Figueira, J., Greco, S. y Ehrgott, M. (2005). *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*. Editorial Salvatore, New York. U.S.A.
- García-Alvarado, M.A. y Ruíz-López, I.I. (2010). A design method for robust and quadratic optimal MIMO linear controllers. *Chemical Engineering Science* 65(1), 3431-3438.
- García-Alvarado, M.A., Ruíz-López, I.I. y Torres-Ramos, T. (2005). Tuning of multivariate PID controllers based on characteristic matrix eigenvalues, Lyapunov functions and robustness criteria. *Chemical Engineering Science* 60, 897-905.
- Hernández-Pérez, M.A., del Muro-Cuéllar, B., Cortés-Rodríguez, D. y Araujo-Vargas, I. (2013). Stabilization of third-order systems with possible complex conjugate poles and time delay. *Revista Mexicana de Ingeniería Química* 12(2), 351-360.
- Huang, H.P. y Chen, C.C. (1999). Auto tuning of PID controllers for second order unstable systems having dead time. *Journal of Chemical Engineering of Japan* 32, 568-579.
- Ibarra-Junquera, V. y Rosu, H.C. (2007). PI-controlled bioreactor as a generalized Liénard system. *Computers & Chemical Engineering* 31, 136-141.
- Inselberg, A. (1985). The plane with parallel coordinates. En: *The Visual Computer*, Pp. 69-91. Springer Ed. U.S.A.
- Inselberg, A. (1998). Visual data mining with parallel coordinates. *Computational Statistics* 13(1), 47-64.
- Jhunjhunwala, M.K., y Chidambaram, M. (2001). PID controller tuning for unstable systems by optimization method. *Chemical Engineering Communications* 185, 91-113.

- Kollat, J.B. y Reed, P. (2007). A framework for visually interactive decision-making and design using evolutionary multi-objective optimization (VIDEO). *Environmental Modelling & Software* 22(12), 1691-704.
- Kumar, V.R. y Kulkarni, B.D. (1994). On the operation of a bistable CSTR: a strategy employing stochastic resonance. *Chemical Engineering Science* 49(16), 2709-2713.
- Liou, C.T. y Chien, Y.S. (1991). The effect of nonideal mixing on input multiplicities in a CSTR. *Chemical Engineering Science* 46(8), 2113-2116.
- Lo, S.N. y Cholette, A. (1978). Performance of a cascade of imperfectly mixed reactors for simple isothermal and exothermic reactions. *Chemical Engineering Science* 33(8), 1031-1041.
- Lo, S.N. y Cholette, A. (1983). Multiplicity of conversion in a cascade of imperfectly stirred tank reactors. *Chemical Engineering Science* 38(3), 367-372.
- Lotov, A. y Miettinen, K. (2008). Visualizing the Pareto frontier. En: *Multiobjective Optimization*, (J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, y R. Slowinski, eds.), Pp. 213-243. Springer, Berlín.
- Márquez-Rubio, J.F., del-Muro-Cuéllar, B., Velasco-Villa, M. y Álvarez-Ramírez, J. (2010). Control basado en un esquema observador para sistemas de primer orden con retardo. *Revista Mexicana de Ingeniería Química* 9(1), 43-52.
- Miettinen, K.M. (1998). *Nonlinear multiobjective optimization*. Editorial Kluwer Academic Publishers.
- Morari, M., Zafiriou, E. y Economou, C.G., (1988). *Robust Process Control*. Editorial Springer-Verlag, New Jersey.
- Normey-Rico J.E. y Camacho E.F. (2009). Unified approach for robust dead-time compensator design. *Journal of Process Control* 19(1), 38-47.
- Raffo-Durán, J., Figueredo-Cardero, A. y Dustet-Mendoza, J.C. (2014). Características de la hidrodinámica de un biorreactor industrial tipo tanque agitado. *Revista Mexicana de Ingeniería Química* 13(3), 823-839.
- Rajinikanth, V. y Latha, K. (2012). Tuning and retuning of PID controller for unstable systems using evolutionary algorithm. *ISRN Chemical Engineering* 2012, 1-10.
- Reynoso-Meza, G., Blasco, X., Sanchis, J. y Martínez, M. (2014). Controller tuning by means of evolutionary multiobjective optimization: current trends and applications. *Control Engineering Practice* 28, 58-73.
- Reynoso-Meza, G., Blasco, X., Sanchis, J. y Herrero, J.M. (2013a). Comparison of design concepts in multi-criteria decision-making using level diagrams. *Information Sciences* 221, 124-141.
- Reynoso-Meza, G., García-Nieto, S., Sanchis, J., y Blasco, X. (2013b). Controller Tuning by Means of Multi-Objective Optimization Algorithms: A Global Tuning Framework *IEEE Transactions On Control Systems Technology* 21(2), 445-458.
- Reynoso-Meza, G., Sanchis, J., Blasco, X. y Martínez, M. (2013c). Algoritmos evolutivos y su empleo en el ajuste de controladores del tipo PID: estado actual y perspectivas. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 10, 251-268.
- Salgado, M.E., Oyarzún, D.A. y Silva, E.I. (2007).  $H_2$  optimal ripple-free deadbeat controller design. *Automatica* 43(11), 1961-1967.
- Sarraf, A.Z., Mohaghar, A. y Bazargani, H. (2013) Developing TOPSIS method using statistical normalization for selecting Knowledge management strategies *Journal of Industrial Engineering and Management* 6(4) 860-875.
- Shinskey, F.G. (1988). *Process control systems: Application, design, and tuning*. Editorial McGraw-Hill, New York.
- Sivaramakrishnan, S., Tangirala, A.K. y Chidambaram, M. (2008). Sliding mode controller for unstable systems. *Chemical & Biochemical Engineering Quarterly* 22(1) 41-47.
- Smith, C.A. y Corripio, A.B. (1985). *Principles and Practice of Automatic Process Control*. Editorial John Wiley Sons, New York, U.S.A.

- Sree, R.P., y Chidambaram, M. (2002). Identification of unstable transfer model with a zero by optimization method. *Journal of the Indian Institute of Science* 82, 219-225.
- Sree, R.P., y Chidambaram, M. (2003a). Control of unstable bioreactor with dominant unstable zero. *Chemical & Biochemical Engineering Quarterly* 17(2), 139-145.
- Sree, R.P., y Chidambaram, M. (2003b). A simple method of tuning PI controllers for unstable systems with zero. *Chemical & Biochemical Engineering Quarterly* 17(3), 207-212.
- Sree, R.P., y Chidambaram, M. (2005). Set point weighted PID controllers for unstable systems. *Chemical Engineering Communications* 193, 1-13.
- Sun, X. y Li, Y. (2010). Evaluation of Control System Performance Using Multiple Criteria Decision Making Techniques *49th IEEE Conference on Decision and Control Atlanta*, 15-17.
- van Heerden, C. (1953). Autothermic processes- Properties and reactor design. *Industrial and Engineering Chemistry* 45(6), 1242-1247.
- Vargas-González, S., Carrillo-Ahumada, J., Rodríguez-Jimenes, G.C. y García-Alvarado, M.A. (2013). Relation between First Order Dynamic Parameters with Pi Control Parameters in Nash Equilibrium. *Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE), 2013 International Conference on*, 123-126.
- Wang, H. (2002). Minimum entropy control of non-gaussian dynamic stochastic systems. *IEEE Trans. Automatic Control* 47(2), 398-403.
- Yoon, K.P. y Hwang, C.L. (1995). *Multiple Attribute Decision Making: An Introduction*. Editorial Sage, California.
- Yue, H. y Wang, H. (2003). Minimum entropy of closed-loop tracking errors for dynamic stochastic systems. *IEEE Trans. Automatic Control* 48(1), 118-122.

## Apéndice A

La formulación del criterio de evaluación del desempeño propuesto en este trabajo, se basa en un enfoque de la entropía de sistemas (Wang (2002), Yue y Wang, 2003). Siendo aplicable a cualquiera de las técnicas de análisis multi-criterio (MCDA/D) existentes. En este caso particular el criterio es aplicado a la metodología PROMETHEE. Bajo propósitos comparativos, el modelado de la señal de seguimiento del error  $e(t)$  para  $A$  opciones de control operando en un punto de equilibrio (punto de operación en el reactor) posee propiedades Gaussianas como si se tratara de un problema de control de posición. De tal forma que es factible partir definiendo la energía de la señal de error y de control.

Definición: El contenido energético de una señal discreta  $f(k)$  expresada en el dominio del tiempo y la frecuencia; viene dada por la igualdad de Parseval.

$$\sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} |F(p)|^2 \quad (34)$$

Considerando el dominio del tiempo; esta expresión determina la energía de la sucesión  $f(k)$ . Que para el presente propósito vendrá representada en cada caso por el seguimiento del error  $e(k)$  y el esfuerzo de control  $u(k)$ . Sabiendo que la secuencia del error  $S e_n$ , es no decreciente y que converge a alguna cota superior tal que  $S e_n \leq c$ ; para todo  $n$  y para algún  $c$ . Donde cada término involucrado en las definiciones básicas (IAE, ITAE, ITSE, etc) generan términos no negativos en cada secuencia considerada; se puede formular expresiones basadas en los promedios y valores efectivos de energía. Así, la energía de seguimiento del error  $e(k)$  promediada en el tiempo de asentamiento  $T_s$ , considerando una banda del estado estacionario al 2% es simplemente:

$$J_{em1} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=1}^N e(k)^2 \quad (35)$$

Atendiendo a la convergencia del error del sistema; la característica de convergencia del error ( $J_{em2}$ ) en la vecindad del estado estacionario (SSV) se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J_{em2} &= \frac{t_{s\text{amp}}}{T_s} \sum_{k=1}^N k[f(k, T_s)]e(k)^2 \quad (36) \\ &= \frac{t_{s\text{amp}} N e(N)^2}{T_s} + \frac{t_{s\text{amp}} (N-1) e(N-1)^2}{T_s} + \dots + \frac{t_{s\text{amp}} e(1)^2}{T_s} \end{aligned}$$

Donde la función de ponderación  $f(k, T_s)$ , otorga mayor importancia a los valores cercanos al estado estacionario. La característica de convergencia viene expresada en su forma más simple cuando  $f(k, T_s) = cte = 1$ . Pudiendo observarse que el  $N$ -ésimo término tiende a una ponderación unitaria cuando el número de muestras en cuestión es el total considerado en la simulación.

$$\lim_{N \rightarrow N_{tot}} \frac{t_{smp} N}{T_s} \sim 1 \quad (37)$$

Donde  $N_{tot}$  es el número total de muestras consideradas en la respuesta,  $t_{smp}$  es el tiempo de muestreo considerado en la simulación (En este trabajo  $t_{smp} = 0.01$ ),  $T_s$  es el tiempo de asentamiento de la respuesta (en este trabajo  $SSV = 2\%$ ),  $SSV$  es la banda del error en estado estacionario(%).

La energía promedio de las acciones del controlador en el tiempo de asentamiento  $T_s$ , es:

$$J_{um1} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^N (u(k) - u_{ss})^2 \quad (38)$$

Mientras que para la formulación del indicador ( $J_{um2}$ ), que representa la norma de las acciones de control en tendencia oscilatoria. Se considera la frecuencia de oscilación en la dinámica de lazo cerrado (reactor-controlador) como una función dependiente de la ganancia integral  $K_i$  (Ibarra-Junquera y Rosu (2007)).

El comportamiento de multiplicidad en el biorreactor, puede generar órbitas periódicas que emergen bajo la influencia de ciertas condiciones en controladores PI (Ibarra-Junquera y Rosu (2007)). Dichas bifurcaciones vienen caracterizadas por un par de valores propios conjugados (bifurcaciones de Hopf) en los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado (controlador-biorreactor), con las ganancias del controlador como parámetros de bifurcación. La consideración anterior en la dinámica acoplada (controlador-biorreactor):

$$u \triangleq \left( -K_c e(t) - K_i \int e(t) dt \right) \quad (39)$$

El planteamiento bajo transformación viene dado por las ecs. (40) y (41).

$$\frac{dc}{dt} = -c \left( \frac{nq}{mV} + \frac{k_1}{(1 + k_2 c)^2} \right) + \frac{nq}{mV} (-K_p(c - c_d) - K_i Y) \quad (40)$$

$$\frac{dY}{dt} = c - c_d \quad (41)$$

Donde:  $c_d$  es la referencia del controlador considerado (PI),  $Y$  representa el comportamiento dinámico del error. Mientras que  $c_f$  representa la variable de control  $u$ .

Cuya condición de existencia viene dada por la siguiente desigualdad:

$$\left( K_p^H - 2 \frac{\sqrt{CK_i}}{C} \right) < K_p < K_p^H \quad (42)$$

Donde  $K_p^H$  es la ganancia proporcional en condición de existencia de ciclos limite, y  $C$  viene dada en términos de los parámetros del reactor  $nq/mV$ .

Por lo que se define la norma efectiva de control en tendencia oscilatoria como un indicador que penaliza dicho comportamiento a la salida del reactor, tomando en cuenta del número de transiciones sobre y bajo el estado estacionario  $SSV$ :

$$J_{um2} = (Nts + Ntb) \sqrt{\frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^N (u(k) - u_{ss})^2} \quad (43)$$

Donde  $Nts$  es el número de transiciones sobre el estado estacionario,  $Ntb$  es el número de transiciones bajo el estado estacionario,  $J_{um1} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^N (u(k) - u_{ss})^2$ .

Para definir un indicador representativo de la energía invertida entre dos acciones de control consecutivas, se define el índice  $J_{um3}$ . Considerando la energía promediada  $J_{um1}$  y la rapidez efectiva de las acciones del controlador dada por el índice de desempeño IADU. De esta forma se tiene:

$$J_{um3} = J_{um1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T_s} J_{u2}}} \quad (44)$$

donde  $J_{um1}$  es la energía promediada de las acciones de control,  $T_s$  es el tiempo de asentamiento de la respuesta (En este trabajo  $SSV = 2\%$ ),  $J_{u2} = \sum_{k=1}^N |u(k) - u(k-1)|$  índice básico de desempeño IAEDU.

## Apéndice B

En este Apéndice se muestran las figuras de coordenadas paralelas normalizadas y con desviación estándar para el Criterio-A y Criterio-B para los casos servo y regulatorio de los modelos 1, 2, 3, 4 y 5 en su forma lineal y no-lineal.

### Modelo 1 (sistema lineal)

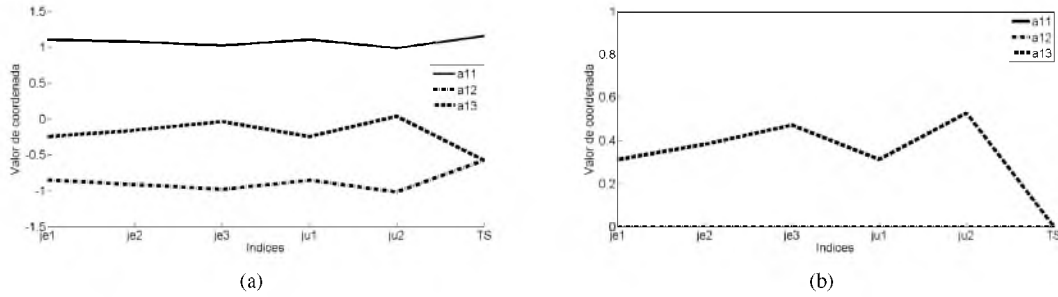


Fig. 16: Modelo 1 (sistema lineal). Criterio-A servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

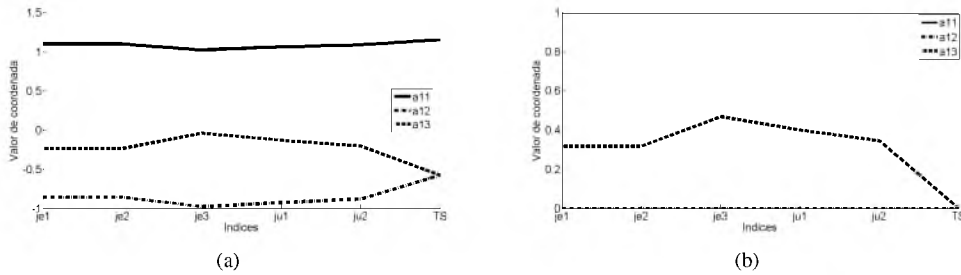


Fig. 17: Modelo 1 (sistema lineal). Criterio-A regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

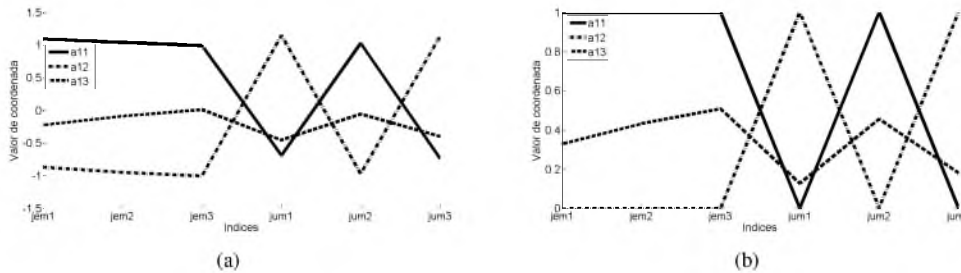


Fig. 18: Modelo 1 (sistema lineal). Criterio-B servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

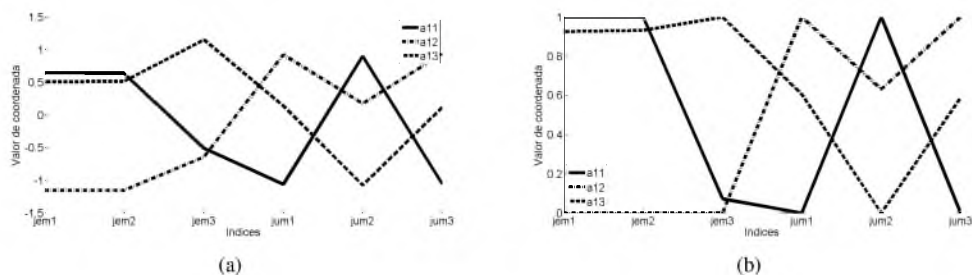


Fig. 19: Modelo 1 (sistema lineal). Criterio-B regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

**Modelo 1 (sistema no-lineal)**

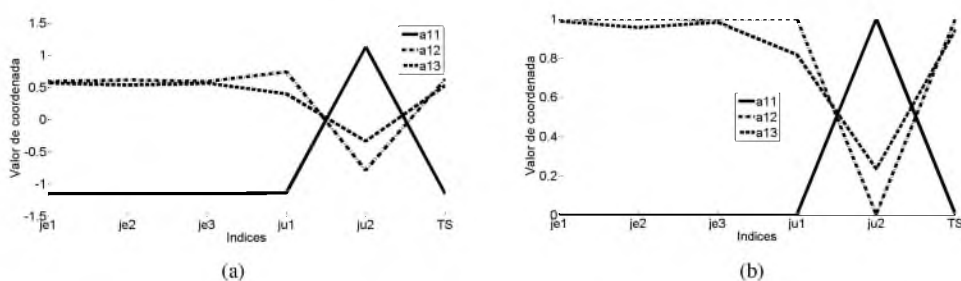


Fig. 20: Modelo 1 (sistema no-lineal). Criterio-A servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

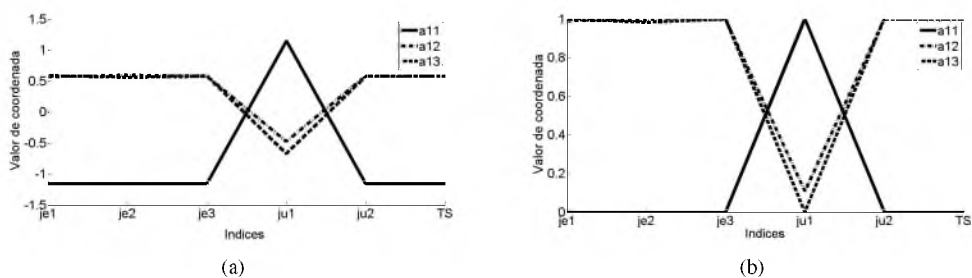


Fig. 21: Modelo 1 (sistema no-lineal). Criterio-A regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

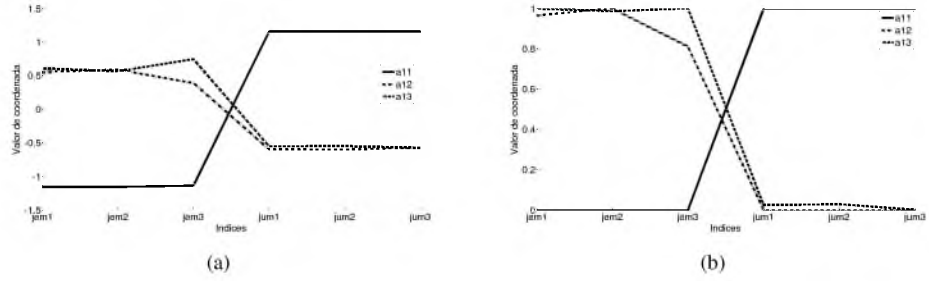


Fig. 22: Modelo 1 (sistema no-lineal). Criterio-B servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

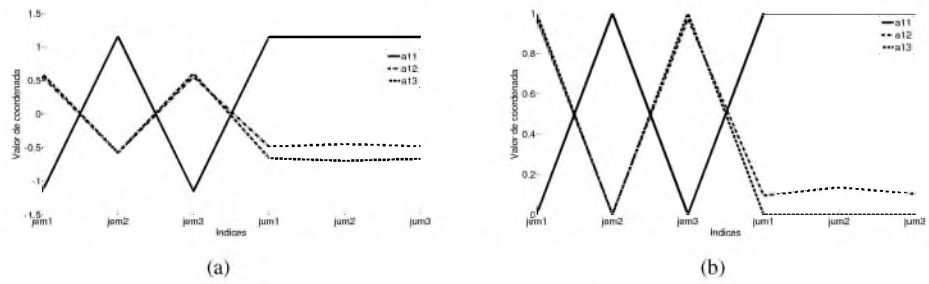


Fig. 23: Modelo 1 (sistema no-lineal). Criterio-B regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

**Modelo 2 (sistema lineal)**

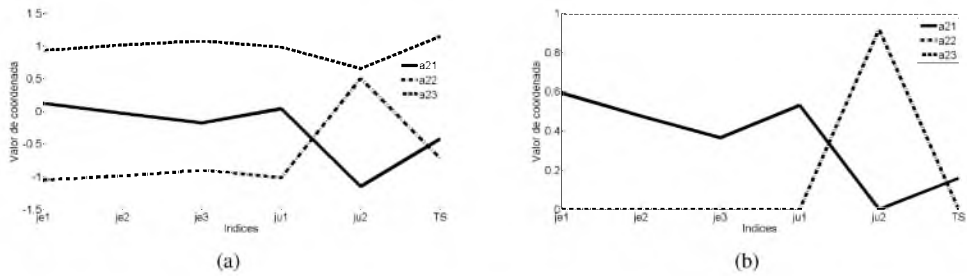


Fig. 24: Modelo 2 (sistema lineal). Criterio A servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

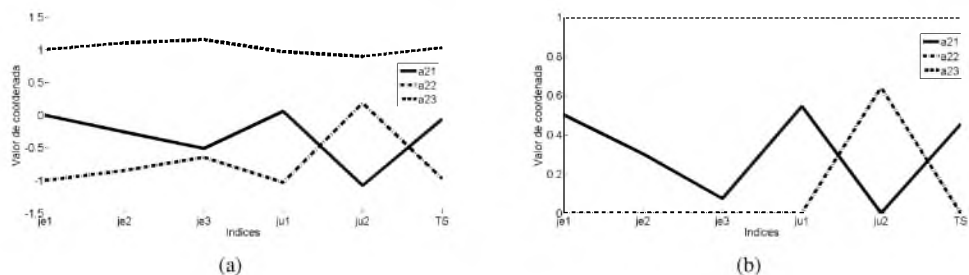


Fig. 25: Modelo 2 (sistema lineal). Criterio-A regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

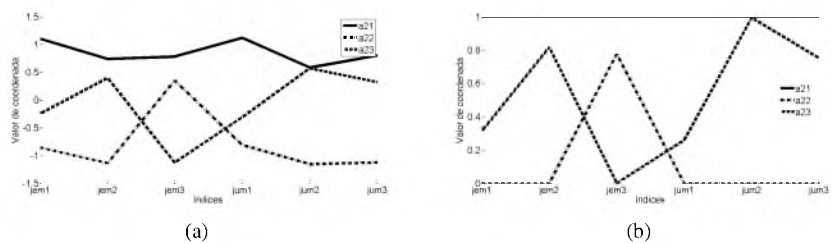


Fig. 26: Modelo 2 (sistema lineal). Criterio-B servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

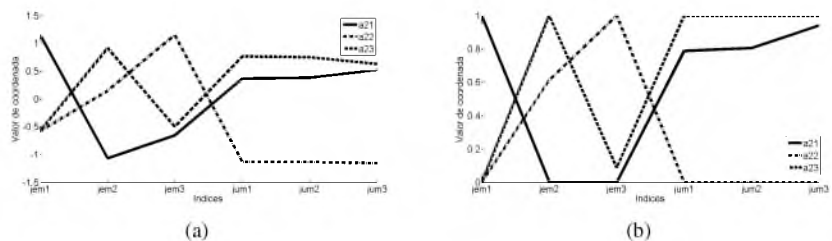


Fig. 27: Modelo 2 (sistema lineal). Criterio-B regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

**Modelo 2 (sistema no-lineal)**

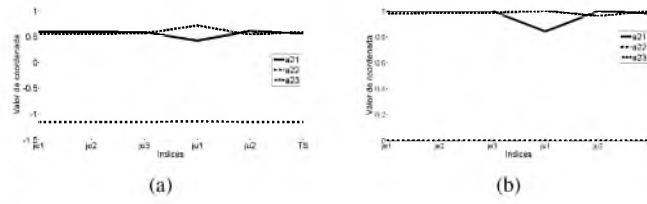


Fig. 28: Modelo 2 (sistema no-lineal). Criterio-A servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

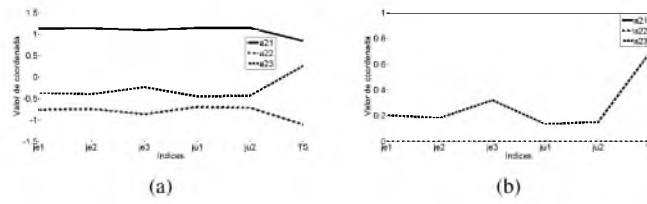


Fig. 29: Modelo 2 (sistema no-lineal). Criterio-A regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

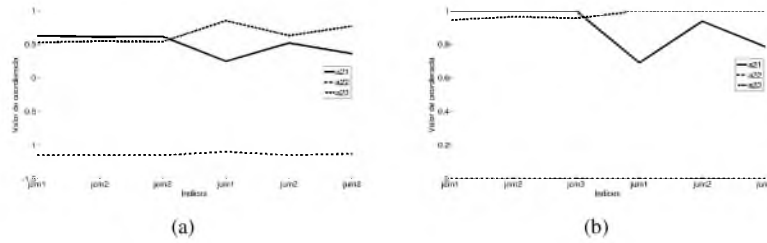


Fig. 30: Modelo 2 (sistema no-lineal). Criterio-B servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

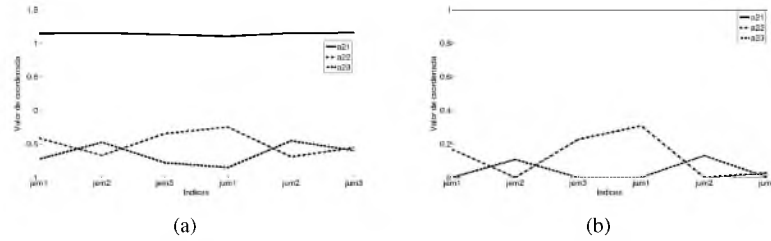


Fig. 31: Modelo 2 (sistema no-lineal). Criterio-B regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

**Modelo 3 (sistema lineal)**

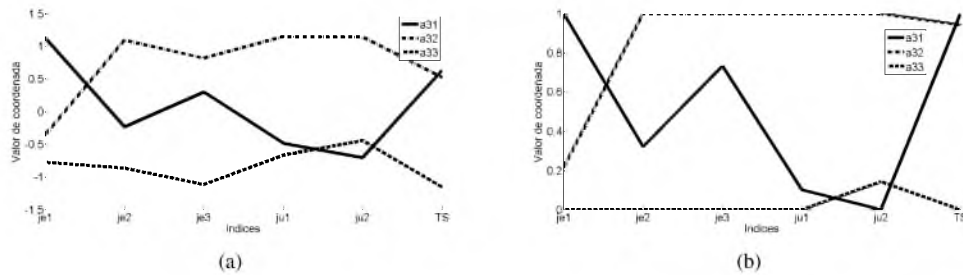


Fig. 32: Modelo 3 (sistema lineal). Criterio A servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

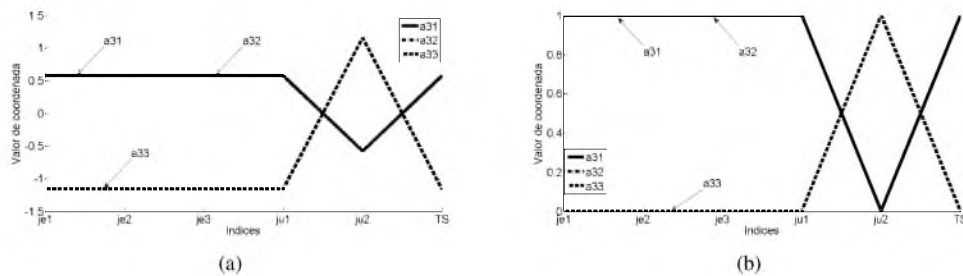


Fig. 33: Modelo 3 (sistema lineal). Criterio-A regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

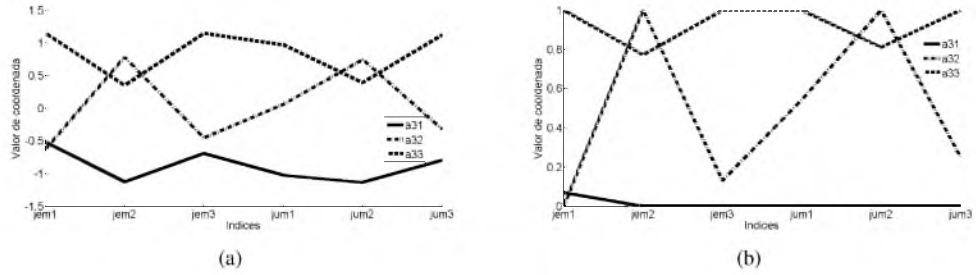


Fig. 34: Modelo 3 (sistema lineal). Criterio-B servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

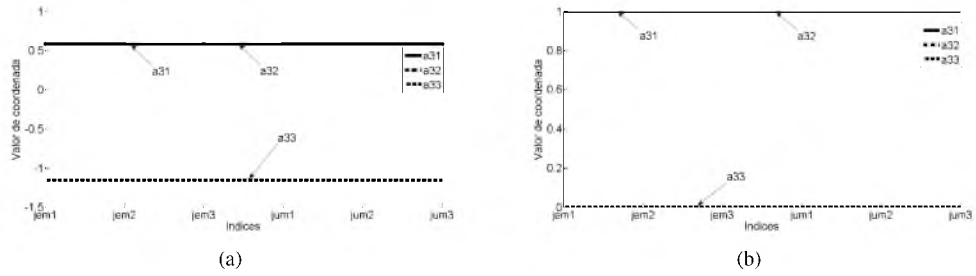


Fig. 35: Modelo 3 (sistema lineal). Criterio-B regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

**Modelo 3 (sistema no-lineal)**

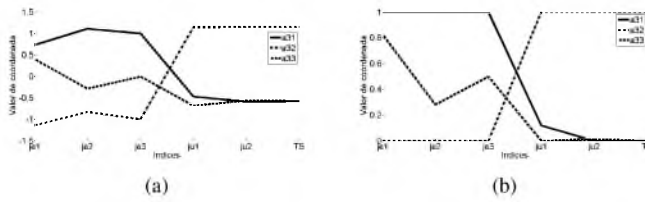


Fig. 36: Modelo 3 (sistema no-lineal). Criterio-A servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

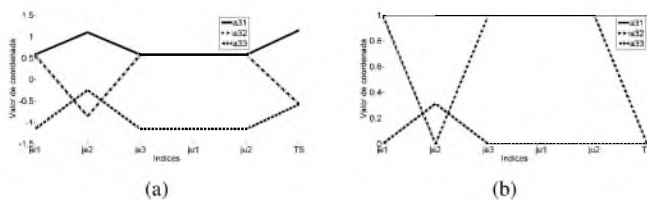


Fig. 37: Modelo 3 (sistema no-lineal). Criterio-A regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

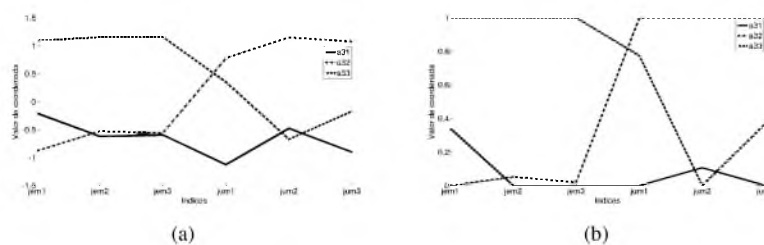


Fig. 38: Modelo 3 (sistema no-lineal). Criterio-B servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

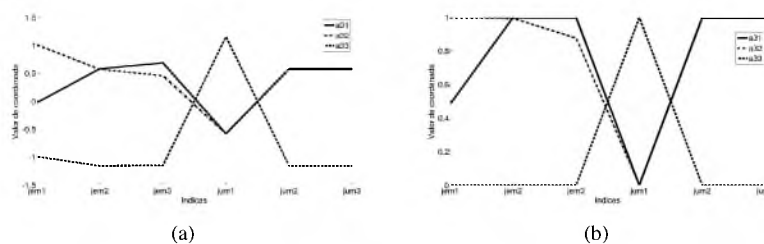


Fig. 39: Modelo 3 (sistema no-lineal). Criterio-B regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

**Modelo 4 (sistema lineal)**

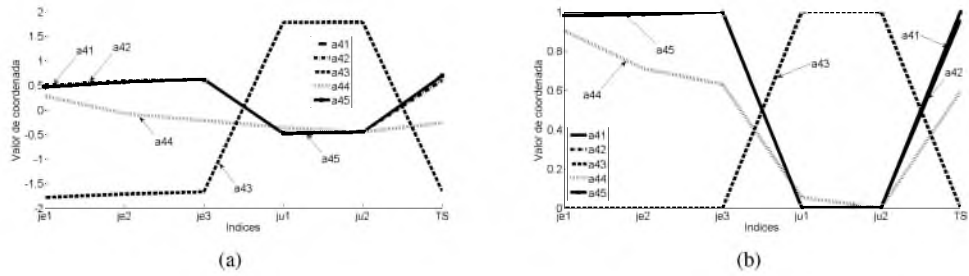


Fig. 40: Modelo 4 (sistema lineal). Criterio-A regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

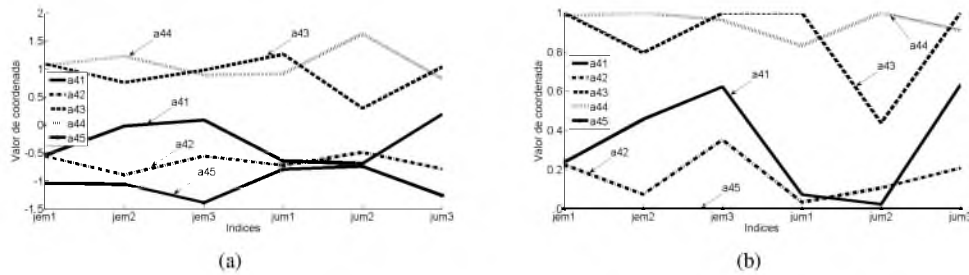


Fig. 41: Modelo 4 (sistema lineal). Criterio-B servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

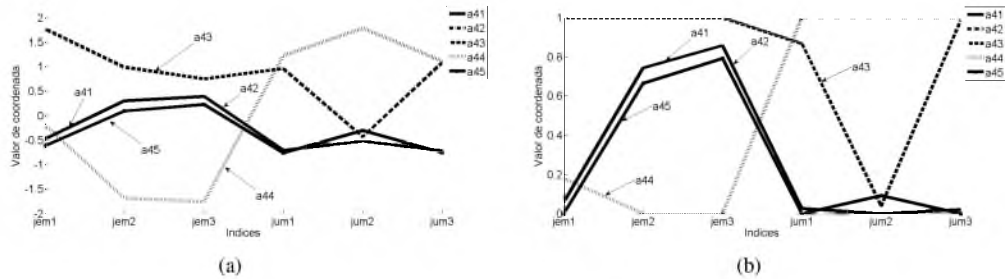


Fig. 42: Modelo 4 (sistema lineal). Criterio-B regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

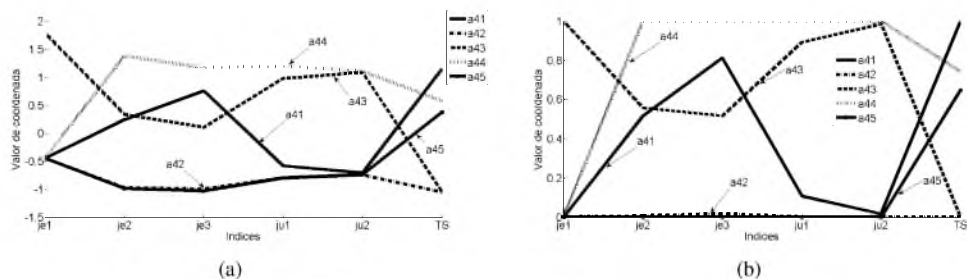


Fig. 43: Modelo 4 (sistema lineal). Criterio-A servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

**Modelo 4 (sistema no-lineal)**

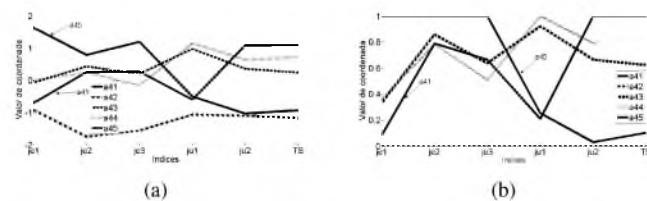


Fig. 44: Modelo 4 (sistema no-lineal). Criterio-A servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

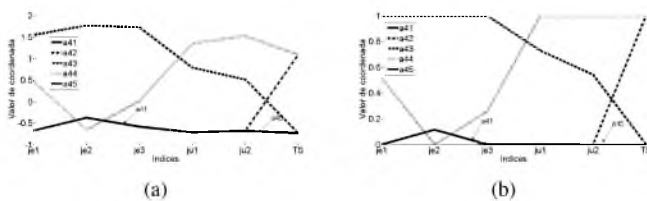


Fig. 45: Modelo 4 (sistema no-lineal). Criterio-A regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

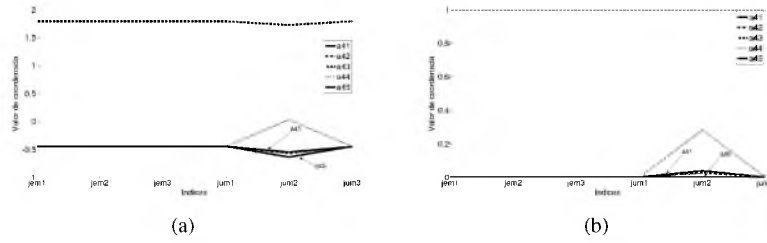


Fig. 46: Modelo 4 (sistema no-lineal). Criterio-B servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

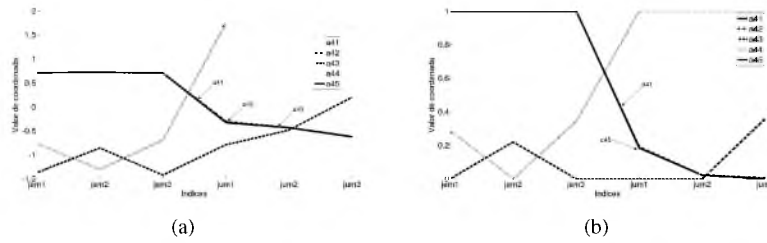


Fig. 47: Modelo 4 (sistema no-lineal). Criterio-B regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

**Modelo 5 (sistema lineal)**

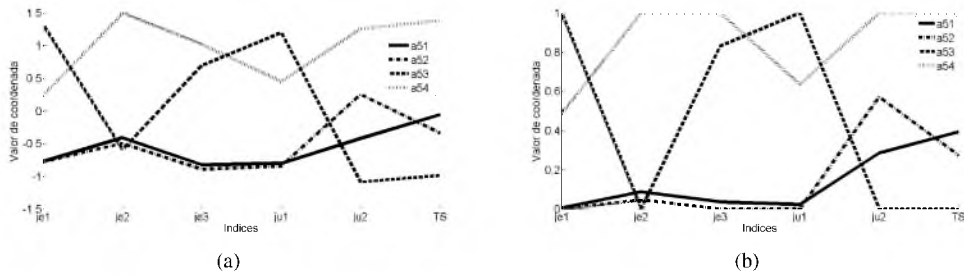


Fig. 48: Modelo 5 (sistema lineal). Criterio-A servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

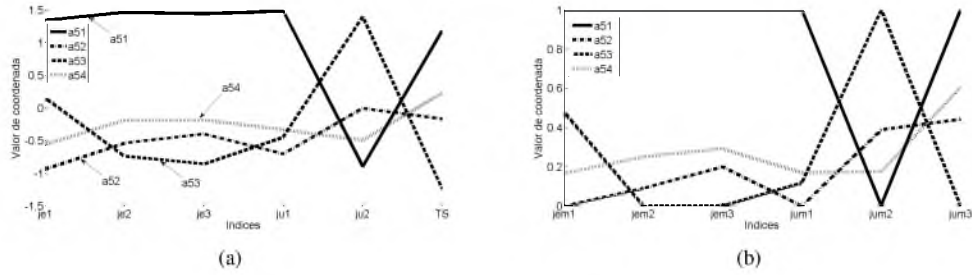


Fig. 49: Modelo 5 (sistema lineal). Criterio-A regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

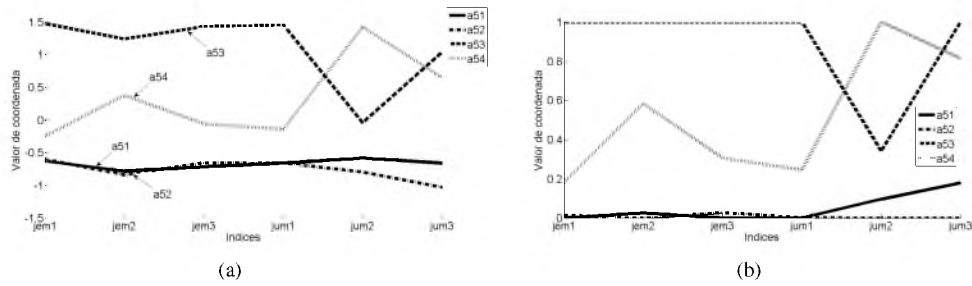


Fig. 50: Modelo 5 (sistema lineal). Criterio-B servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

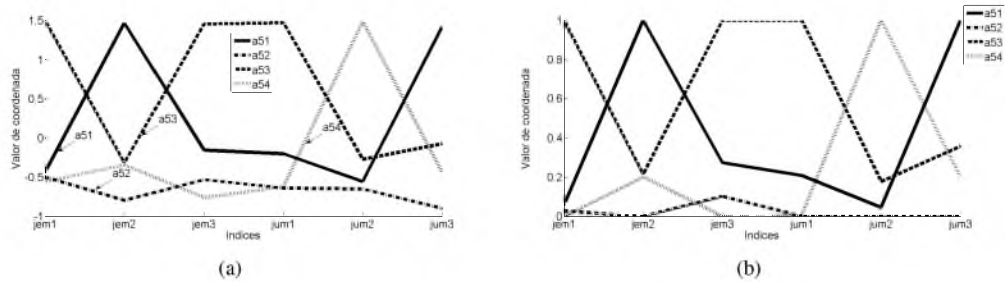


Fig. 51: Modelo 5 (sistema lineal). Criterio-B regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

**Modelo 5 (sistema no-lineal)**

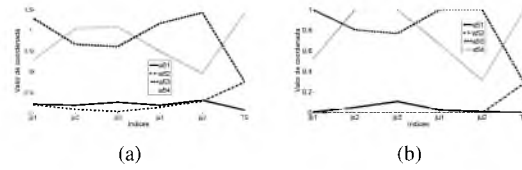


Fig. 52: Modelo 5 (sistema no-lineal). Criterio-A servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

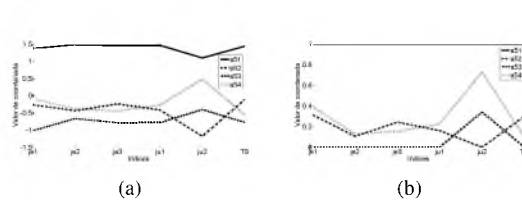


Fig. 53: Modelo 5 (sistema no-lineal). Criterio-A regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

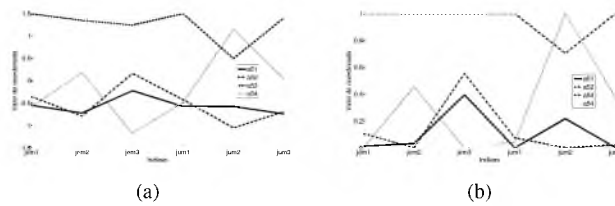


Fig. 54: Modelo 5 (sistema no-lineal). Criterio-B servo: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

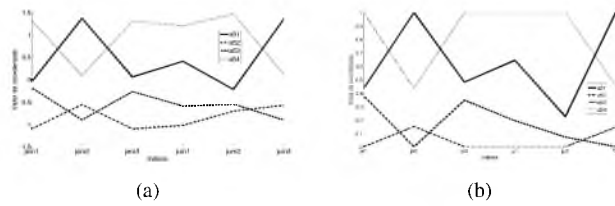


Fig. 55: Modelo 5 (sistema no-lineal). Criterio-B regulatorio: **a)** coordenadas paralelas con desviación estándar, **b)** coordenadas paralelas normalizadas  $N(0, 1)$ .

## **4. Apéndice A2**



Otorga la presente  
**Constancia**  
a


**A. Rodríguez Mariano, M.A. García Alvarado, J. Carrillo-Ahumada**

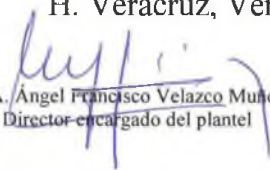
Por haber presentado el **Cartel:**  
**“Diseño de un Criterio de Sintonización de Controladores Óptimo-Robustos aplicado a  
Sistemas no Lineales en Tiempo Real”**

Dentro de las Jornadas de Actualización en Investigación  
y Desarrollo de Alimentos,  
Realizadas los días 11, 12 y 13 de Febrero de 2015, con motivo de los 16 años de la Unidad de  
Investigación y Desarrollo en Alimentos de este Instituto.

H. Veracruz, Ver., a 13 de febrero de 2015.



  
Dr. Víctor José Robles Olvera  
Presidente del Comité Organizador

  
M.A. Ángel Francisco Velasco Muñoz  
Director-encargado del plantel



**VoBo**

M.S.I Gabriela Clavel Martínez  
Subdirectora de Planeación y Vinculación

**VoBo**

Lic. Arely Morales Lastra  
Jefa de Departamento de Comunicación y Difusión

**VALIDACIÓN**



SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA **SEP**  
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE VERACRUZ  
Registro No. 265

## **5. Apéndice A3**

# SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



Subsecretaría de Educación Superior  
Dirección General de Educación Superior Universitaria  
Dirección de Superación Académica  
Programa para el Desarrollo Profesional Docente, para el Tipo Superior

"2014, Año de Octavio Paz"

México, D. F., 03 de julio de 2014  
Oficio Número. DSA/103.5/14/6330

Dr. Modesto Seara Vázquez  
Rector  
Universidad del Papaloapan  
Presente

Se recibió en las instalaciones de esta Dirección la solicitud de ajuste de beca y finalización de apoyo, mediante el oficio RIP-UNPA-2014-194 de fecha 26 de junio de 2014, correspondiente al profesor CARRILLO AHUMADA JESÚS con folio UNPA-PTC-119.

Con base en la información presentada, le comunico que la Institución debe reintegrar recursos al patrimonio Fideicomiso por la cantidad de \$117.00 (ciento diecisiete pesos 00/100 M.N.), de acuerdo con lo siguiente:

Año	Concepto	Moneda	Carta de liberación			Saldo
			Liberado	Nuevo abono a la solicitud	Nuevo cargo a la solicitud	
1	AFGyAIC, Materiales y Consumibles	M.N.	177,957.00	0.00	117.00	177,840.00
	Total		177,957.00	0.00	117.00	177,840.00

(AFGyAIC) Apoyo de fomento a la generación y aplicación innovadora del conocimiento

Este documento es complemento a nuestro oficio PROMEP/103.5/12/7959 de fecha 24 de septiembre de 2012.

Al respecto le informo que nos es grato dar por finalizado el compromiso adquirido, esperando que el apoyo recibido por parte de esta Dirección, sea elemento suficiente para poder desarrollar y consolidar Cuerpos Académicos en bien de la Institución a su cargo y del profesorado.

Sin otro particular, aprovecho la oportunidad para reiterarle la seguridad de mis más distinguidas consideraciones.

Atentamente

M. en C. Guillermina Urbano Vidales  
Directora

C.e.p.-Dr. Fernando Serrano Migallón. Subsecretario de Educación Superior. Presente.

C.e.p.-Dr. Salvador Malo Álvarez. Director General de Educación Superior Universitaria. Presente.

C.e.p.-C.P. José Francisco Varela del Rivero. Director de Subsidio a Universidades. Presente.

GUV/PABR/JNRR

"Este programa es público ajeno a cualquier partido político. Queda prohibido el uso para fines distintos a los establecidos en el programa".

Avenida José Antonio Torres No. 1007, Fideicomiso, Colonia Asimilados, C.P. 06850, Delegación Cuauhtémoc, México D.F.

Teléfono: (55) 36 03 10 00 Extensión: 6333 <http://dsa.sep.gob.mx>

## **6. Apéndice A4**



# UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

## CAMPUS TUXTEPEC

ASUNTO: Tuxtepec, Oax. a 05 de Junio 2015.  
Carta de Liberación de Proyecto Interno

**Dr. Jesús Carrillo Ahumada**  
**Profesor Investigador**

En referencia a su proyecto de investigación “Análisis del desempeño de controladores lineales sintonizados en diferentes estados estacionarios del biorreactor de Cholette mediante técnicas de decisión multi-criterio”, me es grato comunicarle que después de analizar el informe final presentado, se ha dictaminado que ha cumplido los compromisos académicos comprometidos en el proyecto de investigación.

Los datos básicos con los que el proyecto se encuentra registrado ante esta Vice-Rectoría son:

**Clave del proyecto:** FO-UNPA/0005/14  
**Responsable Técnico:** Dr. Jesús Carrillo Ahumada

**Colaboradores del proyecto:**

Ing. Ángel Rodríguez Mariano  
Dr. Gilberto Reynoso Meza  
Dr. Miguel Ángel García Alvarado

**Compromisos:**

Artículo de investigación en revista indizada en el JCR de Ingeniería Química

**Duración del proyecto:** Seis meses

Sin otro particular al cual referirme sirva la presente para enviarle un cordial saludo.

Atentamente.  
*terra ubérrima, mens aperta*  
*Bou Lo-tama, chi jí jú*

MC. HÉCTOR LÓPEZ ARJONA  
Vice-Rector Académico.



c.c.p. Archivo del profesor  
Archivo FO-UNPA

# Bibliografía

- [1] J. Z. Ben-Asher, *Optimal control theory with aerospace applications*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2010.
- [2] M. A Rotea y P. Khargonekar, «Optimal control with an  $H_2$  constraint. the state feedback case  $H_\infty$ », *Automatica*, vol. 27, núm. 2, 1991, 307–316.
- [3] N. Abdel Jabbar, Y. Jumah Rami y M. Al Haj Ali, «State estimation and state feedback control for continuous fluidized bed dryers», *journal of food Engineering*, 2004, .
- [4] M. Abrishamchian y B. B.Ross, «Reduction of robust stabilization problems to standard  $H_\infty$  problems for classes of systems with structured uncertainty», *Automatica*, vol. 32, núm. 8, 1996, 1101–1115.
- [5] J. Ackermann, «Robust control – systems with uncertain physical parameters», *Springer-Verlag London Great Britain*, 1993, .
- [6] P. Afshar y H. Wang, «An ILC-based minimum entropy PI controller for unknown and non-gaussian stochastic systems», *The International Federation of Automatic Control*, 2008, .
- [7] P. J. Antsaklis y A. N. Michel, *Linear systems*, Birkhäuser Boston, 2006.
- [8] P. Apkarian y D. Noll, «Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis», *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 51, núm. 1, 2006, 71–86.
- [9] P. Apkarian y D. Noll, «Nonsmooth optimization for multidisk  $H_\infty$  synthesis», *European Journal of Control*, vol. 12, núm. 3, 2006, 229–244.

- [10] P. Apkarian y D. Noll, «Optimization-based control design techniques and tools», , 2013, .
- [11] A. Awasthi, S. Chauhan y S. Goyal, «A multi-criteria decision making approach for location planning for urban distribution centers under uncertainty», *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 53, 2011, 98–109.
- [12] E. N. Barren, *Game theory an imtroduction*, John Wiley and Sons, Inc, 2008.
- [13] N. Bedioui, S. Salhi y M. Ksouri, «An improved LMI approach for robust static output feedback stabilization of nonlinear system», *Systems, Signals and Devices*, 2008, .
- [14] M. Behzadian, R. Kazemzadeh, A. Albadvi y M. Aghdasi, «PROMETHEE: A comprehensive literature review on methodologies and applications.», *European Journal of Operational Research* 200, 2010, 198–215.
- [15] M. Behzadian, S. K. Otaghsara, M. Yazdani y J. Ignatius, «A state-of the-art survey of topsis applications», *Expert Systems with Applications*, vol. 39, 2012, .
- [16] J. Bellon, «Riccati equations in optimal control theory», tesis de doctorado, Georgia State University, April 2008.
- [17] H. Bevrani y T. Hiyama, «Multiobjective PI/PID control design using an iterative linear matrix inequalities algorithm.», *nternational Journal of Control, Automation, and Systems* 5 (4), 2007, 117–127.
- [18] H. Bevrani y H. Bevrani, «Pid tuning: Robust and intelligent multi-objective approaches», *Advances in PID Control*, 2011, .
- [19] P. Bonissone, R. Subbu y J. Lizzi, «Multicriteria decision making (MCDM): a framework for research and applications.», *Computational Intelligence Magazine, IEEE* 4(3), 2009, 48–61.
- [20] F. Bouakrif, «Trajectory tracking control for robot manipulators with no velocity measurement using semi-globally and globally asymptotically

- stable velocity observers», *Robot Manipulators, New Achievements*, vol. 18, 2010, .
- [21] J. P. Brans y P. Vincke, «A preference ranking organisation method: (the PROMETHEE method for multiple criteria decision-making)», *Management Science*, vol. 31, núm. 6, 1985, 647–656.
- [22] J. Brans, B. Mareschal y P. Vincke, «PROMETHEE: A new family of outranking methods in MCDM.», *Operational Research, IFORS 84*, 1984, 477–490.
- [23] M. Bukowski y J. M. Kisz, «Evolutionary and asymptotic stability in symmetric multi-player games», *International Journal of Game Theory*, núm. 33, 2004, 41–54.
- [24] D. Carrasco y M. Salgado, «ITSE optimal controller design and achievable performance bounds», *International Journal of Control*, vol. 82, núm. 11, 2009, .
- [25] J. Carrillo Ahumada, D. Páramo Calderón, A. Aparicio Saguilán, G. Rodríguez Jimenes y M. García Alvarado, «Approach of a measurement of linearized representation of a nonlinear system. application to (bio)chemical reactors.», *Revista Mexicana de Ingeniería Química 13(2)*, 2014, 631–647.
- [26] J. Carrillo Ahumada, G. Reynoso Meza, S. García Nieto, J. Sanchis y M. García Alvarado, «Sintonización de controladores pareto-óptimo robustos para sistemas multivariables. aplicación en un helicóptero de 2 grados de libertad.», *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 2015, .
- [27] J. Carrillo Ahumada, G. Rodríguez Jimenes y M. García Alvarado, «Tuning optimal-robust linear MIMO controllers of chemical reactors by using pareto optimality.», *Chemical Engineering Journal 174*, 2011, 357–367.
- [28] J. Chen, L. Qiu y O. Toker, «Limitations on maximal tracking accuracy», *IEEE-Transactions Automatic Control*, vol. 45, 2000, 326–331.

- [29] L. Chen Cheng, C. Wang Tzxy y H. Hsu Shuo, «An LMI approach to  $H_\infty$  PI controller design», *Journal of Chemical Engineering of Japan*, vol. 35, núm. 1, 2002, 83–93.
- [30] M. Chidambaram y G. Reddy, «Nonlinear control of systems with input and output multiplicities.», *Computer & Chemical Engineering* 20(3), 1996, 295–299.
- [31] M. Chilali, P. Gahinet y P. Apkarian, «Robust pole placement in LMI regions», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, núm. 12, 1999, .
- [32] V. Chopra, S. K. Singla y L. Dewan, «Comparative analysis of tuning a PID controller using intelligent methods», *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 11, núm. 8, 2014, .
- [33] M. P. Contreras-Leiva, F. Rivas, J. D. Rojas, O. Arrieta, R. Vilanova y M. Barbu, «Multi-objective optimal tuning of two degrees of freedom pid controllers using the ennc method», *International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, 2016, .
- [34] J. Danko, M. Ondrovicova y V. Vesely, «Robust controller design to control a warm air drying chamber», *Journal of Electrical Engineering*, vol. 55, núm. 7, 2004, 207–211.
- [35] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar y B. A. Francis, «State space solutions to standard  $H_2/H_\infty$  control problems», *IEEE Transactions on Automation control*, vol. 34, núm. 8, 1989, .
- [36] D. Dubois y H. Prade, «Possibility theory.», *Editorial Plenum Press., New York, U.S.A.*, 1988, .
- [37] D. Dubois, H. Prade y R. Sabbadin, «Qualitative decision theory with sugeno integrals», *14th Conference on Uncertainty in AI*, 2013, 121–128.
- [38] A. Ferramosca, J. Gruber, D. Limon y E. Camacho, «Control predictivo para seguimiento de sistemas no lineales. aplicación a una planta piloto.», *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 10, 2013, 18–29.

- [39] J. Figueira, S. Greco y M. Ehrgott, «Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys», , 2005, .
- [40] A. Fuller, «The general problem of stability motion», *Int. Journal Control*, vol. 55, núm. 3, 1992, 531–773, Translated to French into English.
- [41] P. Gahinet y P. Apkarian, «An LMI-based parametrization of all  $H_2/H_\infty$  controllers with applications», *Decision and Control*, 1993, .
- [42] P. Gahinet y P. Apkarian, «Structured  $H_\infty$  synthesis in matlab», *In Proceedings IFAC*, 2011, .
- [43] P. Gahinet y P. Apkarian, «A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control», *Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, núm. 4, 1994, 421–448.
- [44] M. García Alvarado y I. Ruíz López, «A design method for robust and quadratic optimal MIMO linear controllers.», *Chemical Engineering Science* 65(1), 2010, 3431–3438.
- [45] M. García Alvarado, I. Ruíz López y T. Torres Ramos, «Tuning of multivariate PID controllers based on characteristic matrix eigenvalues, Lyapunov functions and robustness criteria.», *Chemical Engineering Science* 60, 2005, 897–905.
- [46] O. Garpinger y T. Hagglund, «Performance and robustness trade-offs in pid control», *Journal of Process Control*, núm. 24, 2014, 568–577.
- [47] J. Guckenheimer y P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag New York, Inc., 1983.
- [48] B. Halder, B. Hassibi y T. Kailath, «Linearly combined suboptimal mixed  $H_2/H_\infty$  controllers», *Decision and Control*, 1997, .
- [49] F. Haugen, R. Bakke y B. Lie, «State estimation and model-based control of a pilot anaerobic digestion reactor», *Journal of Control Science and Engineering*, 2014, .
- [50] J. Heinrich y D. Weiskopf, «Proceedings of the european association for computer graphics, eurographics», , 2013, 95–116.

- [51] M. Hernández Pérez, B. Del Muro-Cuéllar, D. Cortés Rodríguez y I. Araujo Vargas, «Stabilization of third-order systems with possible complex conjugate poles and time delay.», *Revista Mexicana de Ingeniería Química* 12(2), 2013, 351–360.
- [52] C.-L. Hwang y K. Yoon, *Multiple attribute decision making. methods and applications a state-of-the-art survey*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981.
- [53] V. Ibarra Junquera y H. Rosu, «Pi-controlled bioreactor as a generalized liénard system.», *Computers & Chemical Engineering* 31, 2007, 136–141.
- [54] A. Inselberg, «The plane with parallel coordinates», *The Visual Computer*, 1985, 69–91.
- [55] A. Inselberg, «Visual data mining with parallel coordinates.», *Computational Statistics* 13(1), 1998, 47–64.
- [56] N. Jagan, *Control systems*, second edition.<sup>a</sup> ed., BS publications, 2008.
- [57] M. Jhunjhunwala y M. Chidambaram, «PID controller tuning for unstable systems by optimization method.», *Chemical Engineering Communications* 185, 2001, 91–113.
- [58] B. J.Hunt, M. M.Wiecek y C. S.Hughes, «Relative importance of criteria in multiobjective programming: A cone-based approach», *European Journal of Operational Research*, vol. 207, núm. 2, 2010, 936–945.
- [59] K. O. Jones y W. Hengue, «Limitations of multivariable controller tuning using genetic algorithms», *International Conference on Computer Systems and Technologies*, 2009, .
- [60] N. Karmarkar, «A new polynomial time algorithm for linear programming», *Combinatorica*, vol. 4, 1984, 373–395.
- [61] N. Krasovskii y E. Galperin, «On the stabilization of stationary motions in nonlinear control systems», *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 27, núm. 6, 1963, 1521–1546.

- [62] V. Kumar y B. Kulkarni, «On the operation of a bistable CSTR: a strategy employing stochastic resonance.», *Chemical Engineering Science* 49(16), 1994, 2709–2713.
- [63] C. Liou y Y. Chien, «The effect of nonideal mixing on input multiplicities in a CSTR.», *Chemical Engineering Science* 46(8), 1991, 2113–2116.
- [64] S. Lo y A. Cholette, «Performance of a cascade of imperfectly mixed reactors for simple isothermal and exothermic reactions.», *Chemical Engineering Science* 33(8), 1978, 1031–1041.
- [65] S. Lo y A. Cholette, «Multiplicity of conversion in a cascade of imperfectly stirred tank reactors.», *Chemical Engineering Science* 38(3), 1983, 367–372.
- [66] R. N. Loh, W. Thanom, J. S. Pyko y A. Lee, «Electronic throttle control system: Modeling, identification and model-based control designs», *Journal Engineering*, vol. 5, 2013, 587–600.
- [67] A. Lotov y K. Miettinen, «Visualizing the pareto frontier.», *Multiobjective Optimization*, 2008, 213–243.
- [68] D. G. Luenberger, *Introduction to dynamic systems. theory, models and applications.*, John Wiley & Sons, 1979.
- [69] F. Marjaneh y T. Mohammad, «A case study of the multiobjective  $H_2/H_\infty$  control via finite dimensional youla parameterization and lmi optimization», *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2007, 493–497.
- [70] J. Márquez Rubio, B. Del Muro Cuéllar, M. Velasco Villa y J. Álvarez-Ramírez, «Control basado en un esquema observador para sistemas de primer orden con retardo.», *Revista Mexicana de Ingeniería Química* 9(1), 2010, 43–52.
- [71] K. M. Miettinen, *Nonlinear multiobjective optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [72] M. Morari, E. Zafiriou y C. Economou, *Robust process control*, Editorial Springer- Verlag, New Jersey, 1988.

- [73] M. I. Neaca y A. M. Neaca, «The modeling of the heating resistors in transient regime», *10th International Conference on Development and Application Systems*, 2010, .
- [74] Y. Nesterov y A. Nemirovski, «Interior point polynomial time methods in convex programming», *SIAM, Philadelphia*, 1994, .
- [75] J. Normey Rico y E. Camacho, «Unified approach for robust dead-time compensator design.», *Journal of Process Control* 19(1), 2009, 38–47.
- [76] A. O’Dwyer, «Using controller tuning formulae to improve performance», *Universities Power Engineering Conference (UPEC), University of Brighton.*, 2007, .
- [77] S. Opricovic y H. Tzeng Gwo, «Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS», *European Journal of Operational Research*, vol. 156, 2004, 445–455.
- [78] M. J. Osborne, *An introduction to game theory*, Oxford university press, 2003.
- [79] H. Oueslati, B. Mabrouk Salah y A. Mami, «System design, mathematical modelling and simulation of process drying in a solar-gas convective tunnel dryer», *International Journal of Scientific and Engineering Research*, vol. 3, núm. 5, 2012, .
- [80] A. Packard y J. Doyle, «The complex structured singular value», *Automatica*, vol. 29, núm. 1, 1993, 71–109.
- [81] J. Pang, G. Zhang y G. Chen, «ELECTRE I decision model of reliability design scheme for computer numerical control machine», *Journal Of Software*, vol. 6, núm. 5, 2011, 894–900.
- [82] P. Paraskevopoulos, *Modern control engineering*, Control Engineering, Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [83] A. Primbs James, V. Nevistic y J. C. Doyle, «A receding horizon generalization of pointwise min-norm controllers», *IEEE Transactions On Automatic Control*, vol. 45, núm. 5, 2000, 898–909.

- [84] V. Rajinikanth y K. Latha, «Tuning and retuning of PID controller for unstable systems using evolutionary algorithm.», *ISRN Chemical Engineering 2012*, 2012, 1–10.
- [85] L. Ramachandran y N. Alagumurthi, «Lean manufacturing facilitator selection with VIKOR under fuzzy environment», *International Journal of Current Engineering and Technology*, vol. 3, núm. 2, 2013, .
- [86] A. Rantzer, «A performance criterion for anti-windup compensators», *European Journal of Control*, vol. 6, núm. 5, 2000, 449–452.
- [87] G. Reynoso Meza, G. Blasco, J. Sanchis y M. Martínez, «Controller tuning by means of evolutionary multiobjective optimization: current trends and applications.», *Control Engineering Practice* 28, 2014, 58–73.
- [88] G. Reynoso Meza, X. Blasco, J. Sanchis y J. Herrero, «Comparison of design concepts in multi-criteria decision-making using level diagrams.», *Information Sciences* 221, 2013, 124–141.
- [89] G. Reynoso Meza, J. Sanchis, X. Blasco y M. Martínez, «Algoritmos evolutivos y su empleo en el ajuste de controladores del tipo PID: estado actual y perspectivas.», *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 10, 2013, 251–268.
- [90] G. Reynoso Meza, «Controller tuning by means of evolutionary multiobjective optimization: a holistic multiobjective optimization design procedure», tesis de doctorado, Universidad Politécnica de Valencia, 2014.
- [91] A. Rodríguez Mariano, G. Reynoso Meza, E. Chavez Conde, M. García Alvarado, D. Páramo Calderón y J. Carrillo Ahumada, «Análisis del desempeño de controladores lineales sintonizados en diferentes estados estacionarios del biorreactor de cholette mediante técnicas de decisión multicriterio», *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, vol. 14, núm. 1, 2015, 167–204.
- [92] F. Rodríguez Rubio y M. López Sanchez, *Control adaptivo y robusto*, vol. 9, Secretariado de publicaciones. Universidad de Sevilla, 1996.

- [93] I. Ruiz López, G. Rodríguez Jimenes y M. García Alvarado, «Robust MIMO PID controllers tuning based on complex/real ratio of the characteristic matrix eigenvalues», *Chemical Engineering Science*, vol. 61, 2006, 4332–4340.
- [94] M. G. Safonov, «Origins of robust control: Early history and future speculations», *Annual Reviews in Control*, vol. 36, 2012, 173–181.
- [95] M. E. Salgado y E. I. Silva, «Achievable performance limitations for SISO plants with pole location constraints», *International Journal of Control*, vol. 79, núm. 3, 2005, 263–277.
- [96] M. Salgado, D. Oyarzún y E. Silva, «optimal ripple-free deadbeat controller design  $H_2$ », *Automatica* 43(11), 2007, 1961–1967.
- [97] H. S. Sánchez Corrales, «Multiobjetive optimization and multicriteria design of pi pid controllers», tesis de doctorado, Unversidad Autónoma de Barcelona, June 2016.
- [98] A. Sarraf, A. Mohaghar y H. Bazargani, «Developing TOPSIS method using statistical normalization for selecting knowledge management strategies», *Journal of Industrial Engineering and Management* 6(4), 2013, 860–875.
- [99] C. Scherer, P. Gahinet y M. Chilali, «Multiobjective output-feedback control via LMI optimization», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, núm. 7, 1997, .
- [100] \_\_\_\_\_, «Multiobjective output-feedback control via LMI optimization», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, núm. 7, 1997, 896–911.
- [101] D. G. Schultz y J. E. Gibson, «The variable gradient method for generating lyapunov functions», *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 81, núm. 4, 1962, 203–210.
- [102] F. Shinskey, *Process control systems: Application, design, and tuning*, Editorial McGraw-Hill, New York., 1988.

- [103] S. Sivaramakrishnan, A. Tangirala y M. Chidambaram, «Sliding mode controller for unstable systems.», *Chemical & Biochemical Engineering Quarterly* 22(1), 2008, 41–47.
- [104] S. Skogestad y I. Postlethwaite, *Multivariable feedback control: Analysis and design*, John Wiley & Sons, 2001.
- [105] J. E. Slotine Jean y L. Weiping, *Applied nonlinear control*, Prentice-Hall, Inc., 1991.
- [106] C. Smith y A. Corripio, *Principles and practice of automatic process control*, Editorial John Wiley Sons, New York, U.S.A., 1985.
- [107] R. Sree y M. Chidambaram, «Identification of unstable transfer model with a zero by optimization method.», *Journal of the Indian Institute of Science* 82, 2002, 219–225.
- [108] R. Sree y M. Chidambaram, «Control of unstable bioreactor with dominant unstable zero», *Chemical & Biochemical Engineering Quarterly* 17(2), 2003, 139–145.
- [109] R. Sree y M. Chidambaram, «A simple method of tuning PI controllers for unstable systems with zero.», *Chemical & Biochemical Engineering Quarterly* 17(3), 2003, 207–212.
- [110] R. Sree y M. Chidambaram, «Set point weighted PID controllers for unstable systems.», *Chemical Engineering Communications* 193, 2005, 1–13.
- [111] X. Sun y Y. Li, «Evaluation of control system performance using multiple criteria decision making techniques», *49th IEEE Conference on Decision and Control Atlanta*, 2010, 15–17.
- [112] A. Taeib y A. Chaari, «PID-PSO control of MIMO nonlinear system», *international Journal of Emerging Science*, vol. 3, núm. 3, 2013, 257–267.
- [113] K. Tan, T. Lee y S. Huang, «PID control design based on a GPC approach», *Ind. Engineering Chemical Research*, vol. 41, núm. 8, 2002, 2013–2022.

- [114] C. Van Heerden, «Autothermic processes-properties and reactor design.», *Industrial and Engineering Chemistry* 45(6), 1953, 1242–1247.
- [115] S. Vargas-González, J. Carrillo-Ahumada, G. Rodríguez-Jimenes y M. García-Alvarado, «Relation between first order dynamic parameters with pi control parameters in nash equilibrium.», *Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)*, 2013, 23–126.
- [116] T. A. Weber, *Optimal control theory with applications in economics*, MIT, Press, 2011.
- [117] L. Wu, Y. Wang, S. Zhou y X. Yuan, «Design of mixed  $H_2/H_\infty$  optimal control systems using multiobjective differential evolution algorithm», *Journal of Control Theory and Applications*, vol. 11, núm. 3, 2013, 521–528.
- [118] D. Xiao y Z. Zhang, «On the existence and uniqueness of limit cycles for generalized liénard systems», *Journal of Mathematical Analysis and Applications Appl.* 343, vol. 343, 2008, 299–309.
- [119] C. Yang, Q. Zhang y L. Zhou, «Lur'e lyapunov functions and absolute stability criteria for lur'e systems with multiple nonlinearities», *Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 17, 2007, 829–841.
- [120] G. Zames, «Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses», *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 26, 1981, 301–320.
- [121] A. Zhang, J. She, X. Lai, Q. Jianlong y X. Chen, «Robust tracking control of robot manipulators using only joint position measurements», *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, .

## 7. Anexos

Prueba del criterio de Lipschitz Teorema-1 , Capítulo-I Pag-28.

Una función continua a tramos se dice acotada si está definida en un intervalo cerrado y acotado  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ .

Si  $f \in C[a, b]$ ;

entonces  $\exists K$  tal que:  $|f(x)| < K \forall x \in [a, b]$ .

Por el teorema del valor medio sabemos que:

Si  $f : (a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$  y  $f \in C^1(a, b)$ ,  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .

Tenemos que: Al existir constantes reales positivas  $M$  y  $K$  tal que:

$|f(y, t)| < M$  y  $|\frac{\partial f}{\partial y}(y, t)| < K$  para todo  $(y, t) \in \mathfrak{R}$  . Si  $(y_1, t)$  y  $(y_2, t)$  son dos puntos en  $\mathfrak{R}$ . Entonces:

$$f(y_2, t) - f(y_1, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(c, y)(y_2 - y_1) \text{ para algún } c, y_1 < c < y_2.$$

Como  $(c, t) \in \mathfrak{R}$  ,  $|\frac{\partial f}{\partial y}(c, t)| < K$  ;

por consecuencia:

$$|f(y_2, t) - f(y_1, t)| < K|y_2 - y_1| \forall (y_2, t), (y_1, t) \in \mathfrak{R}$$

Prueba del Teorema de una función de Lyapunov. Teorema-3, Capítulo-I  
Pag-56.

Sea el caso de un sistema autónomo dado por  $\dot{X} = AX$ .  
Donde A es Hurwitz  $Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .  
Y sea  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continuamente diferenciable definida en el dominio  $\mathcal{D} \subset \mathfrak{R}^n$ , que contiene al origen. La cual viene representada como :

$$V(X) = X^T P X \quad (6.1)$$

Con  $V(X) > 0, \forall X \neq 0$  y  $P = P^T > 0$ .

Entonces; la razón de cambio de V para las trayectorias de dicho sistema esta dado por:

$$\dot{V}(X) = \frac{d(V(X))}{dt} = \frac{d(X^T)}{dt} P X + X^T P \frac{d(X)}{dt} \quad (6.2)$$

$$\frac{d(V(X))}{dt} = \frac{d(X^T)}{dt} P X + X^T P \frac{d(X)}{dt} \quad (6.3)$$

Implica que:

$$\dot{V}(X) = -X^T Q X \quad (6.4)$$

con  $A^T P + P A = -Q$

Si  $\dot{V}(X) \leq 0, \forall X \in \mathcal{D}/\{0\}$ ; entonces el origen es asintóticamente estable.