



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
CAMPUS LOMA BONITA

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

**CONTROL SEMI-ACTIVO DE VIBRACIONES, MODELADO Y
MANUFACTURA DE UNA CHUMACERA MÓVIL PARA UNA
PLATAFORMA EXPERIMENTAL ROTOR-CHUMACERA**

Tesis profesional que para obtener el título de

INGENIERO EN MECATRÓNICA

Presenta:

C. IVAN ALBERTO LOPEZ LOPEZ

Director de tesis:

Dr. Álvaro Cabrera Amado




UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
Campus Loma Bonita

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA


LA PRESENTE TESIS TITULADA “CONTROL SEMI-ACTIVO DE VIBRACIONES, MODELADO Y MANUFACTURA DE UNA CHUMACERA MÓVIL PARA UNA PLATAFORMA EXPERIMENTAL ROTOR-CHUMACERA”, PRESENTADA POR EL SUSTENTANTE DE LICENCIATURA C. IVAN ALBERTO LOPEZ LOPEZ BAJO LA DIRECCIÓN DEL DR. ÁLVARO CABRERA AMADO, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITÉ EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO EN MECATRÓNICA.



M. en C. José Luis Nájera Sánchez
Jefe de la Carrera de Ingeniería en Mecatrónica



Dr. Álvaro Cabrera Amado
Director de Tesis



Dr. Hiram Netzahualcoyotl García Lozano
Presidente



M. en C. Esteban Chávez Conde
Secretario



Dr. Álvaro Cabrera Amado
Vocal



Universidad del Papaloapan

Terra Uberrima, Mens Aperta

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

Oficio No. JCIM/015/19

Loma Bonita, Oaxaca, a 29 de Abril de 2019

ASUNTO: JURADO DE EXAMEN PROFESIONAL

M.E. YESENIA BARRIENTOS ARENAL
JEFA DEL DEPTO. DE SERVICIOS ESCOLARES
UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
PRESENTE

Mediante la presente, le informo que la Vice-Rectoría académica, ha designado a los siguientes profesores como sinodales del examen profesional del alumno C. **Ivan Alberto Lopez Lopez**, quien defenderá su trabajo de tesis titulado "**Control Semi-activo de Vibraciones, Modelado y Manufactura de una Chumacera Móvil para una Plataforma Experimental Rotor-Chumacera.**", para obtener el título de **Licenciado en Ingeniería en Mecatrónica**.

Como titulares:

Dr. Hiram Netzahualcoyotl García Lozano .- Presidente
M.C. Esteban Chávez conde .- Secretario
Dr. Alvaro Cabrera Amado.- Vocal

Como suplentes:

M.C. José Luis Najera Sánchez.- Primer suplente
Dr. Jesus Santiaguillo Salinas .- Segundo Suplente

Sin más por el momento y agradeciendo el apoyo y tiempo que invertirá en el proceso, le envío saludos cordiales.

Atentamente,
Terra uberrima, mens aperta
Bou la tama, chi jí jú

M. C. José Luis Najera Sánchez
Jefe de la Carrera de Ingeniería en
Mecatrónica

Vo. Bo. M. C. Héctor López Arjona
Vice-Rector Académico

c.c.p. M. C. Héctor López Arjona.- Vice-Rector Académico.
c.c.p. Archivo.



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN (UNPA)
CAMPUS LOMA BONITA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECATRÓNICA

Control Semi-activo de Vibraciones, Modelado y Manufactura de una Chumacera Móvil para una Plataforma Experimental Rotor-Chumacera

Tesis que presenta el
C. Ivan Alberto Lopez Lopez

Para obtener el grado de:
Ingeniero en Mecatrónica

Director de tesis
Dr. Álvaro Cabrera Amado

Loma Bonita, Oaxaca.

Mayo de 2019

Dedicatoria

A mis padres, por el esfuerzo que día a día realizaron para verme cumplir esta meta, por haberme forjado como la persona que soy en la actualidad. Me formaron con reglas y algunas libertades, pero al final, me motivaron constantemente para alcanzar mis anhelos. Sepan que mis logros son suyos también.

El fruto no cae muy lejos del árbol.

Agradecimientos

A la vida y la entidad divina.

Por haberme dado tanto, por mis padres y las oportunidades que se me presentaron.

A mi hermana.

Por su incondicional apoyo, que a pesar de nuestras diferencias siempre nos ha unido el amor.

¡Gracias!

A Guadalupe.

Por caminar junto a mí a lo largo de estos años. Eres la luna de mi vida.

! Te estaré eternamente agradecido !

A mis amigos.

Quienes comprenden la travesía de este viaje. A José Luis (Pepe) quien me brindo una sincera amistad y con quien comparto tantos recuerdos, Heriberto por tu apoyo y palabras de aliento, Luis (Che), Silvano y Martín, sin olvidar a Bhasilio, por aquellos días de convivencia. A Belem, Itza y Filio, debimos haber coincidido mucho antes. A mi amigo Adrián quien me motivo para iniciar este camino.

¡Muchas gracias!

A mis profesores.

De quienes aprendí tanto, por su paciencia y dedicación gracias.

A mi asesor

Dr. Álvaro Cabrera Amado, por su tiempo, apoyo y paciencia para culminar este trabajo.

¡Muchas gracias!

Resumen

Las vibraciones causadas por el desbalance son el resultado de las imperfecciones en la manufactura y ensamble de máquinas rotatorias. Estos tipos de defectos pueden causar altos niveles de vibración, ruido y desgaste y pudiendo llegar a producir fallas y pérdida de la máquina.

El control de vibración en máquinas y estructuras ha sido un campo de interés por muchos años en el área de ingeniería, tecnología y la industria. Los esquemas de control comúnmente usados para reducir las vibraciones son: control pasivo, activo y semi-activo.

La tesis trata de un esquema de control semi-activo del desbalance para un sistema rotor-chumacera, que consiste en un controlador de la rigidez dinámica y la modulación de la velocidad angular. El sistema rotor-chumacera consiste de un rotor no-isotrópico con un servomecanismo para posicionar la chumacera sobre dos guías lineales deslizables. La atenuación de vibración en el sistema se logra modificando la dinámica lateral del rotor, mediante el control de la longitud efectiva de la flecha, el cual causa cambios en la rigidez y como consecuencia modifica las frecuencias naturales del sistema. Estos pueden ser modificados dentro de un rango pequeño, donde la resonancia es atravesada y atenuada durante el arranque o paro de operación de la máquina.

El rotor es modelado usando el método de elemento finito (FEM), en la que se considera una flecha flexible, un disco inercial rígido con términos giroscópicos despreciables, dos chumaceras no-isotrópicas y dos entradas de control indirecto, estas son, la fuerza de traslación aplicada para mover la chumacera móvil y el torque en la dinámica de la velocidad angular. El control de la rigidez es realizado agregando un servomecanismo basado en un motor de CD y una transmisión de polea para posicionar la chumacera móvil, mediante un esquema de control realimentado PID, el cual es parametrizado en términos de la velocidad angular. La dinámica de velocidad es controlada mediante el seguimiento de una trayectoria de velocidad suave, programada por un Polinomio de Bezier, planificado para atravesar la primera velocidad crítica.

El diseño conceptual y la manufactura de una plataforma experimental se propone para estudiar la respuesta al desbalance. Una parte importante está relacionada con la concepción del diseño, construcción mecánica de una chumacera sobre dos guías lineales deslizables, fabricación de poleas para una transmisión por banda para posicionar el soporte y la manufactura de una base del motor CD.

Entonces una chumacera móvil es integrada en una plataforma rotor-chumacera, la cual incluye un disco inercial con dos bridas de bronce, una flecha flexible, una estructura para el motor y una base de acero con perforaciones.

Los resultados numéricos se obtienen por el software Matlab-Simulink, el cual muestra el desempeño de la respuesta al desbalance en el sistema. Esta es reducida cerca del 80 % en la frecuencia resonante, por medio del esquema de control de la rigidez.

Abstract

The vibrations caused for the unbalance are the result of imperfections in manufacturing and assembly of rotating machineries. These kind of defects can cause high levels of vibrations, noise and wear, and these may lead to failures or lost of the machine.

Vibration control in structures and machines has been a field of interest in varied branches of engineering, technology and industry for many years. The control schemes most commonly used to reduce the vibrations are: passive, active and semi-active control.

The thesis deals with the application of a semiactive unbalance control for a rotor-bearing system, consisting in a dynamic stiffness controller and the angular speed scheduling. The rotor-bearing system consists of an non-isotropic rotor with a servomechanism to position a journal bearing on two linear slide bearings. The vibration attenuation in the system is achieved modifying the rotor lateral dynamic by controlling the effective shaft length, which causes changes in the system stiffness and as a consequence modifies the natural frequencies. These can be shifted into a small range, where the resonance can be passed and attenuated during run-up or coast-down operations.

The rotor is modeled using the Finite Element Method (FEM), considers a flexible shaft, one rigid inertia disk with neglected gyroscopic terms, two non-isotropic journal bearing and two indirect control inputs, that is, the translation force applied to the movable journal bearing and the torque in the rotor speed dynamics. The stiffness control is then performed by adding a servomechanism based on a cd motor and transmission Belt Pulley to position the movable journal bearing, by applying a PID feedback control scheme, which is parameterized in terms of the rotor angular speed. The speed dynamics is controlled in such a way to asymptotically track a smooth speed profile, computed by means of Bézier polynomials, which is planned to pass over the first critical speed.

The conceptual design and manufacture of a experimental platform is proposed to study the unbalance response. An important part is related with the conception of design, mechanical construction of one journal bearing on two ball bearing slides, one transmission Belt Pulley to position the support and the base for the CD motor. Then a movable bearing journal is integrated in the rotor-bearing platform, which includes an rigid inertial disk with two bronze bridles, a flexible shaft, a structure for the motor and one steel platform with drillings.

The numerical results are obtained of the Matlab-Simulink software, shows the performance of the overall unbalance response in the system. It is reduced up to 80% in the resonant frequency by means of the stiffness control scheme.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estado del Arte	2
1.2. Planteamiento del Problema	10
1.3. Justificación	11
1.4. Objetivos	12
1.4.1. Objetivo general	12
1.4.2. Objetivos específicos	12
1.5. Metodologías y Técnicas	12
2. Modelado matemático del sistema	15
2.1. Modelo por elemento finito tipo viga de Euler	16
2.2. Sistema Rotor-chumacera	20
2.2.1. Modelo Matemático	20
2.2.2. Obtención de la matriz de M_q y K_q de cada elemento finito	22
2.2.3. Matriz total de masa y rigidez de la viga	25
2.2.4. Fuerza de desbalance y dinámica de rotación	28
2.3. Modelo del rotor con chumacera móvil	32
2.4. Modelo global del sistema Rotor-Chumacera Móvil	34
3. Diseño Conceptual y Manufactura	37
3.1. Descripción del servomecanismo	40
3.1.1. Conjunto de acoplamiento	41
3.1.2. Bancada de motor	41
3.1.3. Transmisión síncrona	42
3.1.4. Guías lineales y accesorios	43
3.1.5. Soporte móvil y accesorios	44
3.2. Integración del servomecanismo	45
4. Simulación y Control del sistema	47
4.1. Sintonía de controladores PID	47
4.2. Pruebas en lazo abierto	48
4.2.1. Prueba 1 : Rotor simétrico	51
4.2.2. Prueba 2 : Rotor asimétrico-flecha corta	52
4.2.3. Prueba 3 : Rotor asimétrico flecha larga	53

4.3. Aplicación del control semi-activo	54
5. Pruebas adicionales	61
5.1. Control semi-activo mas contrapeso	61
6. Conclusiones generales y trabajos futuros	65
6.1. Conclusiones	65
6.2. Trabajos futuros y sugerencias	66
Bibliografía	67
Apéndices	7••
A. Programas y bloques de simulación	7••
B. Hojas de datos de dispositivos	7••
C. Dibujos técnicos	•••

Capítulo 1

Introducción

La rotodinámica es el estudio de fenómenos dinámicos en maquinaria rotatoria y juega un papel muy importante en el mundo industrial moderno, debido al gran rango de aplicaciones que tiene. El análisis rotodinámico es un paso importante en el diseño de cualquier máquina con elementos rotatorios, así como en la detección y en la solución de problemas durante su operación Childs[1].

En la actualidad, la industria precisa de la maquinaria rotativa (turbinas de vapor, turbinas de gas, compresores centrífugos, generadores, sopladores, etc.) para satisfacer la demanda de productos, siendo indispensable la operación eficiente de dichas máquinas. Una de las causas más frecuentes del fallo de máquinas rotativas son las vibraciones debidas al desbalance del sistema, las cuales hasta unos años atrás se consideraban como inevitables. Estas condiciones se consideran indeseables ya que producen deterioro mecánico, grietas, desgaste, ruido, etc.

En la industria se requiere que la maquinaria rotatoria opere a velocidades cada vez más altas (arriba de la primera velocidad crítica). La necesidad de operar a altas velocidades, ocasiona que la máquina trabaje en rangos de operación donde se presenta la inestabilidad umbral (efectos de resonancia). Por desgracia, al operar una máquina demasiado lejos del umbral, cualquier perturbación (desbalance, desalineamiento, fracturas, excitaciones externas, etc.) es capaz de provocar efectos no-lineales e inestables en el sistema (ver, e.g., Childs [1], Wowk [2], Vance [3]).

Los efectos y fenómenos dinámicos en rotores son un campo de investigación bastante activo, a pesar de que los fenómenos básicos han sido ampliamente estudiados, donde existen aspectos que aún necesitan de trabajo teórico y práctico para construir y analizar modelos más complejos que representen con precisión el comportamiento de las máquinas reales. Algunas de las limitaciones de la rotodinámica clásica se presentan principalmente, cuando se introducen no linealidades, comportamientos no isotrópicos de los elementos rotatorios y no rotatorios y se consideran condiciones de trabajo no estacionarias.

La necesidad de lograr avances en el campo de la rotodinámica se puntualiza en varias áreas de la industria y la tecnología, donde se requieren máquinas cada vez más ligeras, con mayores velocidades de operación y más eficientes, esto hace que requieran análisis de modelos más complejos y que van más allá de los estudios clásico.

Por lo tanto el balanceo es un paso muy importante y necesario en la manufactura de los rotores para compensar los efectos de vibración producidos en procesos previos de fabricación y ensamble. Estrictos controles de manufactura pueden reducir la necesidad de balancear, pero esto incrementa los costos. Los cambios operacionales (corrosión, impurezas, desgaste de cojinetes) generalmente están fuera de control del fabricante, por lo tanto no se puede garantizar una máquina libre de vibración durante su ciclo de vida. Sin embargo, el fabricante, puede facilitar formas para quitar o adherir masas en procesos de balanceo de campo (Lee [4], Lin [5], Yu [6]).

Por lo anterior, podemos afirmar que el control de vibraciones es esencial para mejorar el desempeño de las máquinas y alargar su vida útil. Para esto, actualmente es cada vez más común que las máquinas estén equipadas con sensores, actuadores y sistemas de control, uno de los aspectos más importantes de esta tendencia es el uso de distintas chumaceras como: activas, presurizadas, magnéticas, con absorbedores pasivos, con fluidos Magnetoreológicos (MR), sistemas de autobalanceo, con actuadores eléctricos, entre otros, y sin dejar a un lado los métodos clásicos de balanceo de rotores (balanceo estático y dinámico).

A continuación se presenta de manera general los esquemas desarrollados para resolver el problema del control de vibraciones en máquinas rotatorias. Parte de los trabajos desarrollados por investigadores de distintas instituciones se enfocan en: El estudio del modelo matemático con varios grados de libertad, tratando de predecir con mayor precisión que los ya conocidos el comportamiento de una máquina real. Estudios de distintos esquemas de absorbedores pasivos-activos para reducir las vibraciones producidas en las máquinas. También proponen diseños y manufacturas de chumaceras activas que desde los extremos de la flecha o eje reducen los niveles de vibración en el rotor principal. Y el uso de distintos actuadores ya sea activos o semi-activos basados en el uso de distintos algoritmos de control retroalimentados de alguna variable controlable del sistema (Lewis [7], Couzon [8], Chen [9], Cabrera [10] y Flavio [11]).

1.1. Estado del Arte

En el siglo *XX*, en el año de 1919, H. H. Jeffcott [12], examinó los efectos del desbalance sobre las amplitudes de vibraciones de las máquinas rotatorias y el análisis de las fuerzas transmitidas hacia las chumaceras. En sus investigaciones realizó estudios sobre un caso específico de un eje ligero y uniforme, que es sostenido libremente por chumaceras fijas equidistantes en cada extremo y en el centro un disco inercial rígido, en el cual el momento de inercia del disco es casi despreciable. Desarrolló el modelo matemático de esta configuración de rotor, el cual lleva su nombre *Rotor Jeffcott* Figura (1.1). Mediante el modelo desarrollado pudo explicar el comportamiento del rotor cuando pasa a través de su primera velocidad crítica, en esta velocidad se presenta el fenómeno de resonancia con grandes amplitudes de vibración.

La operación de turbo-maquinas a velocidades altas y variables es cada vez más frecuente en la industrial, así como a elevadas cargas dinámicas, esto provoca que el sistema trabaje en velocidades críticas, cerca de alguna de sus frecuencias de resonancia comúnmente en los primeros modos, aumentando así las vibraciones en el rotor.

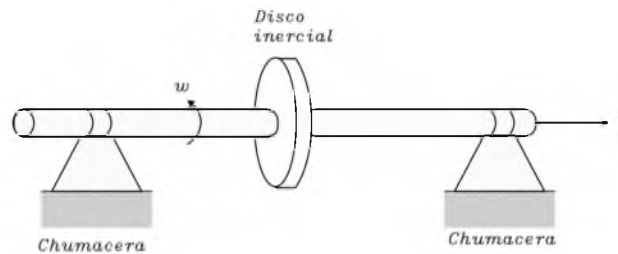


Figura 1.1: Esquema de un Rotor tipo Jeffcott

Es evidente que se requieren de sistemas que proporcionen mayor estabilidad que los elementos convencionales usados en esta área (soportes, rodamientos, balanceo fuera de línea, otros). Por lo cual en los últimos años se han realizados estudios y aplicaciones para contrarrestar las vibraciones, mediante diferentes estrategias como: el seguimiento de perfiles de velocidad del rotor, variadores de frecuencia para un arranque suave y controlado, siendo el de mejor desempeño los balanceos dinámicos, enfocados en la primera y segunda velocidad crítica (Vance, Childs et al [1], [3], [4] y [13]). El ámbito científico se ha encaminado en usar sistemas tecnológicos más complejos, transformando un elemento simple como una chumacera, en un arreglo de soporte con actuadores para contrarrestar las vibraciones en el rotor, modificando los soportes por apoyos magnéticos, con fluidos presurizados, uso de materiales inteligentes (fluidos magnetoreológicos, piezoeléctricos, otros), el uso de suspensiones pasivas/semi-activas y hasta agregando grados de libertad a las chumaceras para modificar de alguna manera los parámetros físicos de un rotor, lo que conduce a cambios en la dinámica global del sistema, con el fin de reducir las amplitudes de vibraciones.

Las matemáticas también interviene en el problema de absorción de vibraciones haciendo uso de algoritmos, estableciendo los esquemas de control que dan información específica a los soportes actuados para modificar la dinámica del rotor, con el fin de reducir las amplitudes de vibración. Los algoritmos son esencialmente para mejorar el desempeño de las máquinas y extender su vida útil, estos son diseñados basados en la retroalimentación de alguna variable controlable del sistema. Para aplicarlos se requiere medir las variables, esto implica que la máquina rotatoria debe estar equipada con sensores, siendo los más habituales: acelerómetros, sensores de proximidad, sensores de distancia laser, de contacto, medición de la rotación (Incremental Encoder), entre otros. Lee-Chong [4].

Los esquemas de control pasivo, semi-activo y activo han sido aplicados para atenuar las amplitudes de vibración en las maquinarias rotatorias.

En el *control pasivo*, el sistema rotatorio es modificado en alguno o todos sus parámetros de diseño, es decir, se modifica su masa, rigidez o amortiguamiento. En este esquema los parámetros se modifican estando el rotor fuera de línea, el rotor se detiene para realizar el ajuste de alguno o todos sus parámetros.

El *control semiactivo*, que ha surgido más recientemente, se basa en la modificación de los parámetros del sistema rotatorio, estando la máquina en operación. Este tipo de control modifica principalmente las propiedades de amortiguamiento y rigidez de la chumacera,

mediante un análisis previo de la respuesta en lazo abierto y haciendo uso de una mínima inyección de energía.

Por otra parte el *control activo* de vibraciones se aplican fuerzas al rotor (inyección de energía), posiblemente incorporando más grados de libertad (ver, e.g., Zhou y Shi [14] y Van Brussel [15]). En este esquema se utilizan dispositivos para aplicar fuerzas, los cuales son retroalimentados y/o prealimentados con la información de los estados del sistema.

A continuación se realiza una descripción de algunos artículos dirigidos al problema de control de vibraciones en rotores.

En el 2001 Lewis aplicó un algoritmo de modos deslizantes por retroalimentación para controlar las vibraciones de un rotor flexible montado sobre dos chumaceras magnéticas, bajo la premisa de que el número de estados es mayor que el número de sensores. El modelo matemático del sistema se presenta en términos de ecuaciones diferenciales parciales, son discretizadas en un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias. El control es diseñado para ser robusto al desbalance del rotor y a perturbaciones transitorias Lewis [7].

Lin y Yu presentan un control modal para la supresión de vibraciones en un rotor utilizando un modelo de elemento finito, lo cual les permite analizar los modos de vibración del sistema y extender el funcionamiento del controlador más allá del primer modo, en el artículo se muestran resultados numéricos Lin-Yu[5].

Yu et al. [6] propusieron un control modal robusto para la supresión de las vibraciones en un rotor flexible tipo Jeffcott utilizando un modelo basado en técnicas de elemento finito, pero reducido en orden para efectos del diseño del control, el cual es robusto ante incertidumbres en el modelo. Este esquema es validado mediante simulaciones numéricas.

Couzon y Hagopian [8], utilizan el software *RotorInsa*[®], para obtener el modelo de elemento finito del rotor de una bomba turbo molecular. El modelo es reducido, para ser utilizado en un esquema de control que combina redes neuronales y lógica difusa, y regular la posición del centro de masa del rotor suspendido en un campo de chumaceras magnéticas. Con esto presenta un controlador ajustable en línea.

En 2008, Lei y Palazzolo [16] proponen un método de diseño integrado para sistemas rotatorios con chumaceras magnéticas. Utilizando modelado por elemento finito y controladores del tipo PID para estabilizar el sistema, incluyendo simulaciones numéricas para validar su análisis y diseño.

Andrés Blanco [17], [18] realiza estudios sobre el control del desbalance en un sistema rotatorio tipo Jeffcott compuesto por dos chumaceras de bola, uno es estacionario y el otro descansa sobre dos guías lineales, para darle movimiento lineal a lo largo del eje. El modelo desarrollado es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal que describe los efectos giroscópicos, rotación de la flecha, desplazamientos radial del disco inercial y el movimiento de la chumacera. La rigidez y la frecuencia natural del rotor se varían al mover una de las chumaceras, mediante un servomecanismo. Se prueban dos esquemas de control, PI y el regulador cuadrático lineal (LQR), para regular la posición de la chumacera. Al incluir la dinámica de la chumacera móvil en el sistema se logra disminuir la amplitud del desbalance, desde el arranque hasta una velocidad de operación por encima de la primera velocidad crítica.

M. Arias, A. Cabrera [19] realizan estudios sobre el problema de absorción de vibraciones en un sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott no-isotrópico, utilizan un esquema de control pasivo basado en un absorbedor de viga en cantiléver.

En su trabajo proponen el diseño de un rotor que está montado sobre dos soportes en sus extremos, una es una chumacera clásica y la otra es una chumacera sobre dos guías de acero, sobre el cual se desliza para cambiar la distancia entre los soportes. El absorbedor de viga en cantilever es una extensión de la flecha a través de la chumacera móvil, en el extremo de la flecha se tiene una masa concentrada Figura (1.2). Utilizan un control PI para el desplazamiento del soporte móvil, donde obtienen una reducción del desbalance en un 84% en comparación con la respuesta sin absorbedor.



Figura 1.2: Diseño de un sistema rotor-chumacera con absorbedor de viga en cantilever[19]

Stefan Heidel [20] en marzo de 2016 del Instituto de Mecatrónica de la Universidad de Darmstadt, Alemania, realizan estudios sobre la eliminación de vibraciones debidas al desbalance en la maquinaria rotatoria. En las pruebas de control de vibraciones basados en la retroalimentación de estados, consiguen regular la excentricidad del rotor desde el extremo de la flecha, considerado aquí como una variable del sistema. Las pruebas experimentales se desarrollaron sobre un rotor tipo Jeffcott, compuesta de una chumacera en un arreglo de elementos pasivos elásticos y actuadores electromagnéticos Figura (1.3). El soporte con actuadores inyecta energía al sistema, para modificar la respuesta al desbalance.

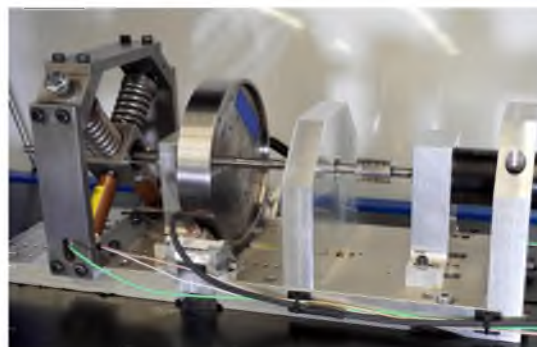


Figura 1.3: Rotor-chumacera tipo Jeffcott con chumacera compuesta por elementos elásticos y actuadores [20].

Silva y F. Medina en el 2010 [11], realizan investigaciones sobre el control de vibraciones en un rotor-chumacera tipo Jeffcott, para ello modifican uno de los soportes por una configuración con soporte sobre guías lineales Figura (1.4). El soporte se posiciona a una distancia específica a lo largo de la flecha, con el fin de modificar las propiedades elásticas del rotor y con esto se consigue modificar las frecuencias naturales del sistema. En el trabajo se realiza el análisis del modelo de dos grados de libertad y se implementa una estrategia de control semi-activo, basado en la modificación de la rigidez para reducir el desbalance en el sistema. Cabe mencionar que en este trabajo se desarrolló una plataforma experimental.

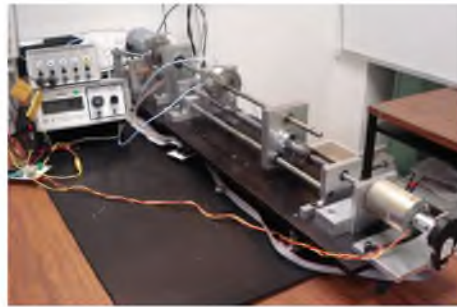


Figura 1.4: Sistema rotor-chumacera Silva y F. Medina [11].

Zhu y colaboradores [21], [22] realizan un estudio sobre un amortiguador con fluido magnetoreológico (MR) tipo disco, cuyo elemento inercial tiene movimientos radiales dentro del fluido Figura (1.5), usado para el control de vibración de un rotor. Analiza el campo magnético aplicado al amortiguador, utilizando técnicas de elementos finitos, los efectos de corriente aplicado a la bobina y densidad de flujo magnético que se aplica al fluido MR.

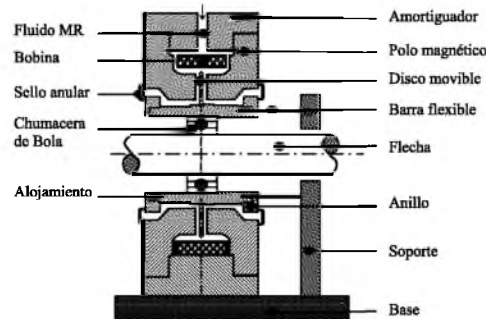


Figura 1.5: Sección transversal de una chumacera con fluido magnetoreológico tipo disco Zhu [21], [22].

Las pruebas fueron estudiadas en forma teórica y experimental. Posteriormente realiza pruebas experimentales, aplicando un control *on/off* basado en la retroalimentación de la velocidad angular, con el amortiguador en un rotor flexible tipo Jeffcott, logrando reducir las amplitudes de vibración de manera considerable.

Un esquema de control semi-activo es propuesto por Silva y Cabrera [10] en el 2007. Donde abordan la atenuación de vibraciones en maquinaria rotatoria, ocasionadas por el desbalance residual. Utilizan dos amortiguadores magnetoreológicos (MR) o de fricción controlable tipo pistón para compensar las vibraciones, bajo el esquema de control por modos deslizantes. El sistema es un rotor-chumacera con dos soportes, uno es un chumacera tradicional con baleros de bola y el otro es una chumacera sobre un arreglo de resortes y dos amortiguadores MR conectados en paralelo Figura(1.6). Realizan pruebas experimentales del control semi-activo por debajo y por encima de la velocidad crítica, donde reducen las vibraciones cerca del 80 %, respecto de las pruebas en lazo abierto.

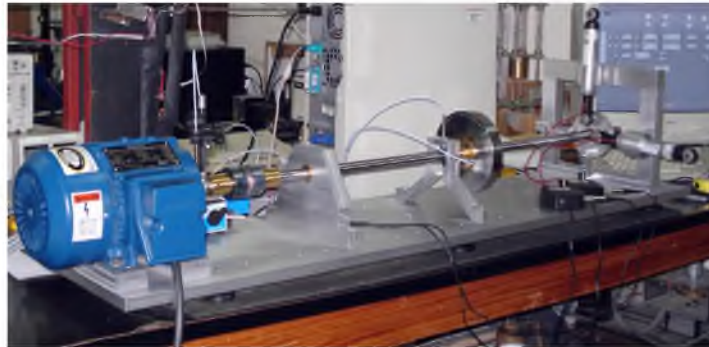


Figura 1.6: Sistema rotor-chumacera con una chumacera sobre un arreglo de resortes de compresión y amortiguadores MR [10].

Los absorbedores de vibración no son exclusivos para estructuras civiles, también han sido aplicados absorbedores de masa sintonizada (TMD) en sistemas rotor-chumacera. Un esquema de absorción pasiva es desarrollado por Chen y Wang [9], donde proponen sistemas masa-resorte colocados a lo largo de una viga de Timoshenko, de soporte simple para reducir los niveles de vibración en algún modo específico de la flecha Figura (1.7). En su trabajo hace un análisis de la técnica para elegir el número de absorbedores, cálculo de los parámetros mecánicos de TMD y se reportan resultados numéricos, estableciendo un procedimiento para seleccionar este método.

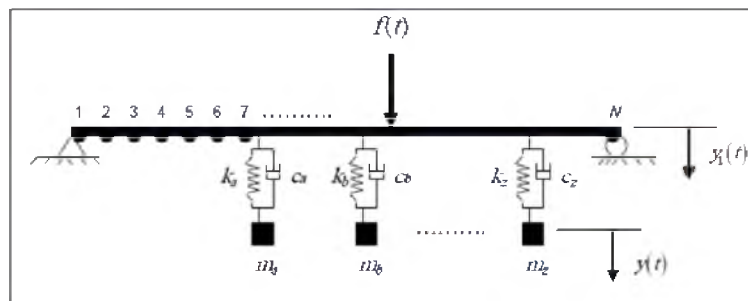


Figura 1.7: Absorbedores de masa sintonizada colocadas a lo largo del rotor Chen [9].

En el 2016 Fabian G. Picart y Ilmar F.Santos [23], realizan estudios de control de vibraciones laterales en un rotor flexible. El rotor es un modelo de un solo disco que es apoyado por una chumacera de gas activo. Para el análisis de la máquina se desarrolló el modelo del rotor-chumacera basado en la técnica de elemento finito, incluyendo el análisis dinámico de la chumacera presurizada. El control del desbalance en el rotor es direccionado por dos esquemas: control PID y un control por retroalimentación de estados, estas dirigen la presión de inyección de gas a la chumacera y regulan la órbita del rotor. En su trabajo se muestran resultados experimentales, cuyas pruebas se realizaron sobre una plataforma mostrada en la Figura (1.8).

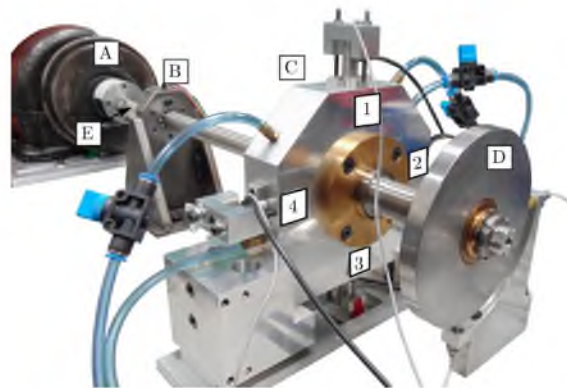


Figura 1.8: Sistema rotor-chumacera con soporte de balero de bola y chumacera de gas activo[23]

Las chumaceras magnéticas son actuadores que aplican fuerza síncrona a la flecha para controlar la respuesta al desbalance, sin que tenga contacto con las partes móviles del rotor. Estos actuadores son de la clase de control activo aplicados en sistemas rotor-chumacera. Uno de los trabajos referentes a chumaceras magnéticas es reportado por Xuan et al. [24] en el 2009. Desarrollando una chumacera magnética para la supresión de vibraciones en un rotor desbalanceado, utilizando un esquema de control con retardo de tiempo (TDC por sus siglas en inglés) con retroalimentación de estados vía un observador de Luenberger. La chumacera fue manufacturada e incorporada sobre una plataforma *RotorKit*[®] y el esquema de control es validado mediante experimentos en una configuración de rotor Jeffcott, el cual es modelado como un sistema de dos grados de libertad.

En los sistemas rotatorios, por lo general, la velocidad de operación se encuentra arriba de la primera velocidad crítica, especialmente en maquinarias grandes, tales como: turbinas de gas y vapor, turbocompresores, etc. En este caso, el rotor tiene que pasar a través de la velocidad crítica cuando el rotor se acelera desde el reposo hasta la velocidad de operación. Cuando el rotor pasa por la velocidad crítica la amplitud de vibración se verá incrementada. Esta se ve reducida, dependiendo del amortiguamiento que posea la máquina rotatoria. Para evitar que las amplitudes de vibración alcancen valores muy grandes, es necesario hacer pasar la máquina por la velocidad crítica tan rápido como sea posible.

Esto se logra acelerando la máquina desde su reposo hasta la velocidad de operación (generalmente por encima de la velocidad crítica) en un tiempo muy corto, de esta manera se evitará el incremento de la amplitud vibratoria.

El esquema de control activo de vibraciones basado en la modulación de la tasa de aceleración de la velocidad fue propuesta por Millsaps y Reed [25], quienes en 1998 presentaron un método para reducir las vibraciones laterales causadas por el desbalance en un rotor, cuando pasa a través de su primera velocidad crítica durante la fase de aceleración y de desaceleración. Ellos determinaron que la energía vibratoria total puede ser reducida significativamente usando una aceleración variable, esto es, reduciendo la aceleración después de que se pasa por la primera velocidad crítica. Este resultado fue verificado experimentalmente en un rotor simple de un disco.

Un rotor es sostenido por chumaceras en los extremos, cuando la máquina experimenta efectos de vibración provocados por el desbalance o desalineamiento, la fuerza vibratoria es transmitida a los soportes de la máquina. Por lo tanto las chumaceras son una de las partes principales de un sistema rotor-chumacera y es la encargada directa de disolver las vibraciones. En el proceso de estudio por resolver los problemas de absorción de vibraciones inherentes en las máquinas, han sido desarrollados distintos sistemas de soporte o chumaceras para el rotor, tales como: Chumaceras magnéticas, chumaceras presurizadas, chumaceras con fluidos Magnetoreológico, apoyos con actuadores, absorbedores pasivos, chumacera móvil de uno o varios grados de libertad, entre otros sistemas ([10], [16], [17], [20], [23]).

Las máquinas rotatorias con chumaceras especiales, son de los más utilizados en laboratorios, ya que en este tipo de plataformas se pueden estudiar los fenómenos presentes en la maquinaria, lo cual posibilita la experimentación de las variables físicas que los describen. En la red comercial se pueden encontrar plataformas experimentales en venta, sin embargo estas poseen configuraciones estándares (parámetros geométricos/mecánicos no configurables y sistemas de apoyos convencionales), y en los centros de investigación se desarrollan plataformas de máquinas rotatoria con propósitos de investigación, son diseñadas y manufacturadas por la misma Institución.

La mayoría de las publicaciones revisadas en este trabajo de tesis, desarrollan propuestas de diseño, modelado y manufactura de sistemas rotor-chumacera para el estudio de los fenómenos de vibración presentes en este tipo de máquinas.

Tomando como punto de referencia el trabajo presentado por Andrés Blanco [17], [18], se presenta la oportunidad para desarrollar una plataforma de experimentación Chumacera móvil, para el estudio de control activo de vibraciones. A diferencia de otros sistemas rotor-chumaceras convencionales, el rotor con chumacera móvil no se encuentra disponible comercialmente, estando su existencia limitada exclusivamente a los centros de investigación.

1.2. Planteamiento del Problema

El problema de las vibraciones mecánicas es inherente en cualquier máquina rotatoria. Para el estudio de rotores las vibraciones son consideradas como indeseables, ya que producen fatiga, deterioro mecánico, grietas, desgaste, ruido, etc. Vance [3].

La interacción de estas máquinas en la industria son de gran importancia, puesto que una condición de desbalance produce vibraciones y esfuerzos que pueden llegar a dañar al rotor y sus soportes. Esto provoca costos por reparación y por tiempos muertos en la producción, además de poner en riesgo vidas humanas. Si las máquinas rotatorias con desbalance no se operan en rangos de velocidades adecuadas, entonces podrían ocurrir vibraciones que ocasionarían fallas catastróficas para el equipo.

Los sistemas de control de vibraciones ha tomado gran importancia en la actualidad, sobre todo para la protección sísmica de estructuras.

La ventaja de utilizar esquemas de control en las máquinas rotatorias es la capacidad que tienen para adaptarse a las condiciones del sistema ofreciendo robustez, además de resultar mucho más eficiente que un sistema de respuesta libre, es decir sin control.

Es importante el uso de una plataforma experimental de sistemas rotor-chumacera para propósitos de investigación, tal como se muestra en los artículos reportados en la revisión bibliográfica. La validación de los esquemas de control se realizan sobre plataformas experimentales de varias configuraciones de rotor, y también realizan un gran esfuerzo por obtener modelos matemáticos que describan con mayor cercanía que los modelos aproximados mediante simulaciones el comportamiento de la máquina.

Con base en la revisión del estado del arte presentada anteriormente, el modelado matemático de sistemas rotatorios, el estudio de esquemas de control sobre una plataforma experimental rotor-chumacera, y el desarrollo de chumaceras actuadas para absorber las vibraciones, se encuentran en la actualidad aún en proceso de estudio, tanto en el diseño mecánico como en el modelo que describa su dinámica.

El laboratorio de Mecatrónica de la Universidad del Papaloapan (UNPA) campus Loma Bonita, es un espacio habilitado para realizar proyectos y prácticas de las áreas de Control, Modelado y Mecánica, no cuenta con una plataforma especializada para realizar investigaciones y prácticas académicas en el área de control de vibraciones en máquinas rotatorias.

Por lo tanto en el presente trabajo de tesis, se propone la manufactura de una chumacera con balero de bola acoplado a un servomecanismo con banda, montado sobre dos guías lineales e incorporada en una plataforma experimental rotor-chumacera tipo Jeffcott, para llevar a cabo pruebas con propósitos de investigación y al mismo tiempo para fortalecer la formación académica del estudiante de ingeniería en Mecatrónica.

El trabajo contempla la aplicación de la técnica de modelado por elementos finitos (FEM) para el estudio de los fenómenos dinámicos que se presentan cuando la máquina cruza las velocidades críticas (resonancia), se usa este método, ya que las flechas son vigas rotatorias, de tal manera que se trata de sistemas continuos, con infinitos modos de vibración y un número infinito de frecuencias naturales. También se usa una estrategia de control para disminuir las vibraciones causadas por el desbalance, basado en la modificación de la rigidez dinámica de la flecha.

1.3. Justificación

Las máquinas rotatorias son equipos que están sometidas constantemente a vibraciones mecánicas. Estas pueden ser causadas por las imperfecciones en la manufactura, desalineamiento y siendo la más importante las causadas por el desbalance en el rotor. Al arrancar o parar un rotor desbalanceado por encima de su velocidad crítica, puede hacer que entre en resonancia, donde se presenta grandes amplitudes de vibración y como consecuencia presente daños estructurales en la máquina, desgaste en los baleros y pudiendo provocar fractura de la flecha.

Sin embargo, con el avance de la ciencia y tecnología ha sido posible implementar algoritmos de control en combinación con actuadores o sistemas de suspensión activa en las chumaceras de la máquina, que permitan atenuar la respuesta al desbalance. Los esquemas de control usados en los trabajos de la revisión del estado de arte son PID, LQR, Modos Deslizante (SMC), retroalimentación de estados, On-off y otros. Los sistemas de absorción de vibraciones aún se encuentran en proceso de investigaciones y han tenido gran éxito para modificar la respuesta al desbalance en el rotor, se realiza a través de dispositivos o mediante chumaceras especializadas (chumaceras magnéticas, presurizadas, Magnetoreológica, chumacera móvil, chumaceras con actuadores, entre otros), cuyas dinámicas son dirigidas por los distintos esquemas de control que permiten cancelar o reducir las vibraciones en la máquina.

La mayor parte de la industria nacional está automatizada mediante el uso de máquinas controladas, robots, sistemas de automatización de procesos entre otros. El trabajo propuesto brindará al estudiante los conocimientos necesarios para enfrentar problemáticas similares en la industria, le permitirá comprender las dinámicas, los fenómenos de resonancia en máquina rotatorias, diseño, manufactura, programación y control de sistemas mecánicos.

El tema de tesis propuesto forma parte de los proyectos que realiza el grupo de trabajo de Mecatrónica Aplicada de la Universidad del Papaloapan, conformados por catedráticos de la carrera de Ingeniería en Mecatrónica. Los integrantes trabajan en proyectos de investigación enfocados al área de control de vibraciones de sistemas mecánicos, una de las líneas de trabajo es el estudio de absorción de vibraciones en máquinas rotatorias y desarrollo de plataformas experimentales.

La tesis complementa los trabajos en esta área de investigación, abarcando el estudio del control de vibraciones mediante la modificación de la rigidez dinámica de la flecha. Para ello se desarrolla una chumacera con soporte móvil acoplada a un plataforma experimental rotor-chumacera, el modelo dinámico mediante el método de elemento finito (FEM) y la aplicación de un esquema de control semia-ctivo para reducir la respuesta al desbalance.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Reducir la respuesta al desbalance en un sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott mediante el control de la rigidez dinámica basado en una chumacera móvil.

1.4.2. Objetivos específicos

- Obtener un modelo matemático del sistema rotor-chumacera con soporte móvil mediante el método de elementos finitos (FEM).
- Aplicar un barrido frecuencial al sistema y obtener la respuesta al desbalance, en el software de *Matlab-Simulink*.
- Modificar la rigidez dinámica de la flecha mediante el control activo de una chumacera móvil.
- Reducir la respuesta al desbalance usando una estrategia de control semi-activo. y obtener resultados numéricos
- Diseñar una chumacera móvil y el servomecanismo de posicionamiento, mediante el software de *SolidWorks*.
- Manufacturar partes mecánicas (poleas, bases de aluminio, y piezas del servomecanismo) que conforman el sistema.
- Integrar la chumacera móvil sobre una plataforma experimental rotor-chumacera tipo Jeffcott.

1.5. Metodologías y Técnicas

El diseño integral y control del desbalance de un sistema rotor-chumacera está conformada de cinco etapas las cuales se detallan a continuación.

1. Revisión Bibliográfica:

Se tomaran referencias de diferentes fuentes bibliográficas, así como de algunos trabajos de tesis y artículos de investigaciones enfocados al problema de absorción de vibraciones en máquinas rotatorias

2. Definición del modelo matemático:

Se llevará a cabo el modelado del sistema, comenzando con una breve descripción del modelado por elemento finito, posteriormente se aplicará para un rotor tipo Jeffcott de 5 elementos finitos, también será necesario desarrollar el modelo del servomecanismo

de una chumacera móvil, para finalmente integrar ambos y obtener una plataforma del sistema rotor-chumacera con soporte móvil.

3. Definición de componentes y metodología CAD:

Se seleccionará la fuente motriz del servomecanismo, con lo cual tendremos una idea del tipo de transmisión que será necesario utilizar. Posteriormente se realiza el modelo 3D mediante el software *SolidWorks*, para plasmar una idea clara de cada componente mecánico. Teniendo claro las partes mecánicas se establecen los materiales de fabricación para el desarrollo de la plataforma.

4. Manufactura de componentes:

Se hará uso de las máquinas herramientas del taller de mecatrónica, una fresadora CNC, un torno convencional y un torno CNC, para la fabricación de los elementos mecánicos. Se integra el ensamble de una chumacera móvil a una plataforma experimental de rotor chumacera.

5. Simulación y obtención de resultados numéricos:

Por último, se lleva a cabo la simulación del sistema considerando los parámetros que puedan llegar a influir significativamente en el comportamiento del sistema, como lo son el peso del disco inercial, el peso de los soportes y su rigidez, la longitud de cada sección de la flecha y las propiedades mecánicas del material (densidad y modulo de elasticidad). Finalmente se implementa un esquema de control de posición de la chumacera para modificar la rigidez y también se implementa un control activo para regular la velocidad angular del rotor.

Capítulo 2

Modelado matemático del sistema

El estudio de los fenómenos presentes en sistemas rotodinámicos es un campo de investigación muy activo. En este tipo de sistema los fenómenos han sido estudiados, sin embargo, aún existen muchos aspectos que requieren mejoras a fin de construir modelos complejos, que representen con mayor precisión el comportamiento real de las máquinas. Las limitaciones en rotodinámica clásica se deben, principalmente a la introducción de dinámicas no lineales, la consideración de no isotropía en los elementos rotatorios y no rotatorios, así como a las condiciones de trabajo no estacionarias.

La necesidad de avances en el campo de la rotodinámica, en donde se requieren máquinas cada vez más ligeras con mayores velocidades de operación y más eficientes, precisan de un análisis más complejos y que incluya aspectos que la rotodinámica clásica no contempla. Para esto, se proponen modelos que sean capaces de predecir de manera precisa el comportamiento de los rotores y realizar experimentos antes de que la máquina sea manufacturada.

En el estudio de la rotodinámica, el método de modelado por elemento finito (FEM) ha adquirido importancia, debido a que existen aspectos que aún necesitan trabajos teóricos para obtener modelos matemáticos realistas que describan el comportamiento dinámico real de la máquina. Los métodos (FEM) se usan para proporcionar aproximaciones discretas de un sistema continuo. Esta técnica es una aplicación del método de Rayleigh-Ritz con sistemas continuos fraccionados en un número finito de elementos discretos (ver, Rao [26], Kelly [27] y Genta [28]).

El avance en la tecnología de las computadoras digitales ha sido una de las razones principales para el desarrollo de nuevos métodos de análisis, particularmente del método de elemento finito [30]. Los avances en materia de computación, en la actualidad permiten construir modelos con miles de grados de libertad o nodos y usarlos para obtener la respuesta del sistema, tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo. Con estos modelos es posible realizar prácticas experimentales virtuales con máquinas que no se han construido. Esto es importante porque pueden introducirse cambios en el diseño de una máquina antes de ser manufacturada. Sin embargo, el resultado final dependerá del uso y la aplicación que se le dé a dicha herramienta.

En la siguiente sección se describe el método de elemento finito para modelar un segmento de viga con propiedades mecánicas uniformes.

Modelar matemáticamente un segmento de viga por este tipo de método tiene consigo una ventaja, debido a que los rotores están formados por segmentos de viga o flecha. Para el caso que se requiera modelar un rotor con una flecha que incluya varios discos inerciales o en la que se tengan cambios de sección transversal, el modelado por Newton o Euler-Lagrange se ven limitados. En cambio usando las técnica de modelado por elemento finito se facilita su análisis y se puede modelar no solo los rotores de varios discos, sino también realizar modelos que incluyan las dinámicas de las chumaceras, efectos giroscópicos, dinámicas de flexión en la flecha, cambios en la sección transversal, secciones de distinto material, torsión, entre otras propiedades dinámicas.

2.1. Modelo por elemento finito tipo viga de Euler

El enfoque de elemento finito inicialmente para el análisis en vigas fue aplicado por primera vez a rotores por Ruhl y Booker (1972) con subsecuentes contribuciones de Nelson y McVaugh (1976) y Nelson (1980) Genta [28]. La Figura (2.1) ilustra un segmento de viga uniforme con propiedades inerciales y de rigidez distribuidas.

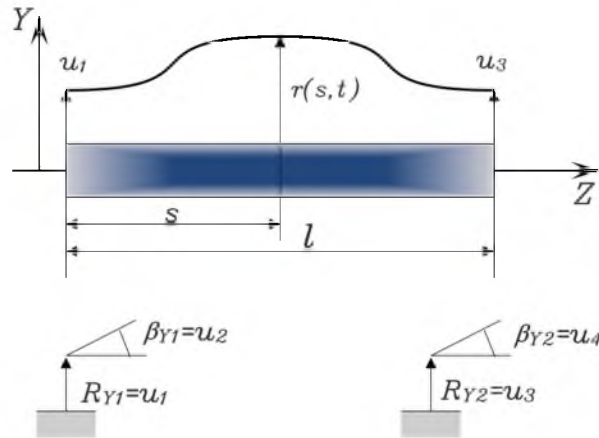


Figura 2.1: Segmento de viga uniforme Genta [28].

La ecuación diferencial parcial que rige el movimiento es:

$$m \frac{\partial^2 r(s,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 r(s,t)}{\partial s^4} = f(s,t) \quad (2.1)$$

donde $m = \rho A$, es la masa por unidad de longitud de la viga, relacionada con los parámetros de densidad del material ρ y la sección transversal de la flecha $A = \frac{\pi \phi^2}{4}$, l es la longitud de cada elemento finito de la viga, E es una propiedad mecánica del material (módulo de elasticidad o módulo de Young), $I = \frac{\pi \phi^4}{64}$ es la inercia de área de la flecha, ϕ es el diámetro de la flecha, s es la variable de longitud de la viga y $f(s,t)$ es la fuerza distribuida no conservativa en el elemento viga.

Se propone una solución por separación de variables a partir de la ecuación:

$$r(s, t) \simeq \sum_{i=1}^4 \psi_i(s) u_i(t) \quad (2.2)$$

donde $\psi_i(s)$ son referencias como las funciones de forma y se requieren para satisfacer la versión homogénea estática de la formula diferencial. Las funciones de tiempo $u_i(t)$ son identificadas como:

$$u_1 = R_{y_1}, u_2 = \beta_{y_1}, u_3 = R_{y_2}, u_4 = \beta_{y_2},$$

donde R_{y_1} y R_{y_2} son los desplazamientos verticales en los extremos de la viga y β_{y_1}, β_{y_2} , son los movimientos angulares en los extremos de la viga o flecha.

De las ecuaciones, la función de forma $\psi_i(s)$ tiene las siguientes condiciones de frontera para el elemento viga:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= 1 & \psi_2(0) &= 0 & \psi_3(0) &= 0 & \psi_4(0) &= 0 \\ \frac{d\psi_1(0)}{ds} &= 0 & \frac{d\psi_2(0)}{ds} &= 1 & \frac{d\psi_3(0)}{ds} &= 0 & \frac{d\psi_4(0)}{ds} &= 0 \\ \psi_1(l) &= 0 & \psi_2(l) &= 0 & \psi_3(l) &= 1 & \psi_4(l) &= 0 \\ \frac{d\psi_1(l)}{ds} &= 0 & \frac{d\psi_2(l)}{ds} &= 0 & \frac{d\psi_3(l)}{ds} &= 0 & \frac{d\psi_4(l)}{ds} &= 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde las derivadas respecto a s corresponden a los grados de deflexión angular. La solución de la ec.(2.2) es propuesta como un polinomio de tercer orden, dado por:

$$r = c_4 + c_3s + \frac{c_2s^2}{2} + \frac{c_1s^3}{3}, \quad (2.4)$$

La solución propuesta ec.(2.4), satisface la ecuación homogénea estática, mostrada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^4r}{ds^4} = 0,$$

Por lo tanto las funciones de forma de la ec.(2.2) y basado en las condiciones de frontera mostrada en la ec.(2.3) quedan definidas como:

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= 1 - \frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3} \\ \psi_2(s) &= s - \frac{2s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \\ \psi_3(s) &= \frac{3s^2}{l^2} - \frac{2s^3}{l^3} \\ \psi_4(s) &= -\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

- *Nota: Las soluciones de la función de forma $\psi_i(s)$ se obtienen basado en las condiciones frontera. Presentamos el caso para $\psi_i(s)$,*

$$\begin{aligned} i = 1. \quad 1 &= c_4 + c_3(0) + \frac{c_2(0)^2}{2} + \frac{c_1^3(0)}{3} & \psi_1(0) &= 1 \\ 0 &= c_3 + c_2(0) + c_1(0)^2 & \frac{d\psi_1(0)}{ds} &= 0 \\ 0 &= c_4 + c_3l + \frac{c_2l^2}{2} + \frac{c_1l^3}{3} & \psi_1(l) &= 0 \\ 0 &= c_3 + c_2l + c_1l^2 & \frac{d\psi_1(l)}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned} 1 &= c_4 \\ 0 &= c_3 \\ 0 &= 1 + \frac{c_2 l^2}{2} + \frac{c_1 l^3}{3} \\ 0 &= c_2 l + c_1 l^2 \end{aligned}$$

las constantes del polinomio $r(s, t)$ son: $c_4 = 1$, $c_3 = 0$, $c_2 = -\frac{6}{l^2}$, y $c_1 = \frac{6}{l^3}$.

La solución aproximada de la ecuación $r(s, t)$ se establece por la siguiente expresión:

$$r(s, t) = \left(1 - \frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3}\right) u_1 + \left(s - \frac{2s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2}\right) u_2 + \left(\frac{3s^2}{l^2} - \frac{2s^3}{l^3}\right) u_3 + \left(-\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2}\right) u_4 \quad (2.6)$$

Esta solución tiene cuatro coordenadas generalizadas $u_i(t)$ y se propone derivar las ecuaciones de movimiento de Lagrange para estas variables. Primero, se define la energía cinética como

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial r(s, t)}{\partial t} \right)^2 ds \quad (2.7)$$

Resolviendo, la energía cinética T ec.(2.7) es calculada mediante la derivada parcial de $r(s, t)$ respecto del tiempo y elevando al cuadrado.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l m \left[\left(1 - \frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3}\right) \dot{u}_1 + \left(s - \frac{2s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2}\right) \dot{u}_2 + \left(\frac{3s^2}{l^2} - \frac{2s^3}{l^3}\right) \dot{u}_3 + \left(-\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2}\right) \dot{u}_4 \right]^2 ds \\ T &= \frac{1}{2} \int_0^l m \left[\left(1 - \frac{6}{l^2}s^2 + \frac{4}{l^3}s^3 + \frac{9}{l^4}s^4 - \frac{12}{l^5}s^5 + \frac{4}{l^6}s^6\right) \dot{u}_1^2 + \left(s^2 - \frac{4}{l}s^3 + \frac{6}{l^2}s^4 - \frac{4}{l^3}s^5 + \frac{1}{l^4}s^6\right) \dot{u}_2^2 + \dots \right. \\ &\quad + \left(\frac{9}{l^4}s^4 - \frac{12}{l^5}s^5 + \frac{4}{l^6}s^6\right) \dot{u}_3^2 + \left(\frac{1}{l^2}s^4 - \frac{2}{l^3}s^5 + \frac{1}{l^4}s^6\right) \dot{u}_4^2 + \left(2s - \frac{4}{l}s^2 - \frac{4}{l^2}s^3 + \frac{16}{l^3}s^4 - \frac{14}{l^4}s^5 + \dots \right. \\ &\quad + \frac{4}{l^5}s^6) \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \left(\frac{6}{l^2}s^2 - \frac{4}{l^3}s^3 - \frac{18}{l^4}s^4 + \frac{24}{l^5}s^5 - \frac{8}{l^6}s^6\right) \dot{u}_1 \dot{u}_3 + \left(-\frac{2}{l}s^2 + \frac{2}{l^2}s^3 + \frac{6}{l^3}s^4 - \frac{10}{l^4}s^5 + \dots \right. \\ &\quad + \frac{4}{l^5}s^6) \dot{u}_1 \dot{u}_4 + \left(\frac{6}{l^2}s^3 - \frac{16}{l^3}s^4 + \frac{14}{l^4}s^5 - \frac{4}{l^5}s^6\right) \dot{u}_2 \dot{u}_3 + \left(-\frac{2}{l}s^3 + \frac{6}{l^2}s^4 - \frac{6}{l^3}s^5 + \frac{2}{l^4}s^6\right) \dot{u}_2 \dot{u}_4 + \dots \\ &\quad \left. + \left(-\frac{6}{l^3}s^4 + \frac{10}{l^4}s^5 - \frac{4}{l^5}s^6\right) \dot{u}_3 \dot{u}_4 \right] ds \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ahora resolviendo la integral respecto de la variable s , con límites de 0 a l , en la ec.(2.8) y simplificando se tiene,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho A \left[\frac{13}{35} l \dot{u}_1^2 + \frac{1}{105} l^3 \dot{u}_2^2 + \frac{13}{35} l \dot{u}_3^2 + \frac{1}{105} l^3 \dot{u}_4^2 + \frac{11}{105} l^2 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \frac{9}{35} l \dot{u}_1 \dot{u}_3 - \frac{13}{210} l^2 \dot{u}_1 \dot{u}_4 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{13}{210} l^2 \dot{u}_2 \dot{u}_3 - \frac{1}{70} l^3 \dot{u}_2 \dot{u}_4 - \frac{11}{105} l^2 \dot{u}_3 \dot{u}_4 \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

La función de energía $T(t)$ de la ec.(2.9) es reescrita en forma matricial

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 & \dot{u}_2 & \dot{u}_3 & \dot{u}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13Al\rho}{35} & \frac{11Al^2\rho}{210} & \frac{9Al\rho}{70} & -\frac{13Al^2\rho}{420} \\ \frac{11Al^2\rho}{210} & \frac{Al^3\rho}{105} & \frac{13Al^2\rho}{420} & -\frac{Al^3\rho}{140} \\ \frac{9Al\rho}{70} & \frac{13Al^2\rho}{420} & \frac{13Al\rho}{35} & -\frac{11Al^2\rho}{210} \\ -\frac{13Al^2\rho}{420} & -\frac{Al^3\rho}{140} & -\frac{11Al^2\rho}{210} & \frac{Al^3\rho}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La energía T ec.(2.10), es llevada a la forma cuadrática y de aquí se identifica la matriz de masa del elemento finito,

$$T = \frac{1}{2} \dot{u}^T(t) M \dot{u}(t)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) & u_4(t) \end{bmatrix}^T$$

donde M es la matriz elemental de masa del elemento finito, y es escrita:

$$M = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Similarmente, sustituyendo la ec.(2.6) en la función de energía potencial V dada por la ec.(2.12):

$$V = \int_0^l EI r^2(s, t) ds \quad (2.12)$$

Resolviendo la ec.(2.12) de la función de energía potencial V , es reescrita a la forma cuadrática de la ec.(2.13)

$$V = \frac{1}{2} u^T(t) K u(t) \quad (2.13)$$

Siguiendo un procedimiento similar a la obtención de la matriz de masa, se resuelve para obtener la matriz de rigidez K del elemento finito

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Las matrices M y K ec.(2.11) y ec.(2.14), representan la masa y rigidez distribuida de un elemento finito, como el que se muestra en la Fig.(2.1), este segmento de viga es una porción elemental de una viga continua que posee 2 grados de libertad por cada nodo, describen el movimiento radial y angular del elemento.

2.2. Sistema Rotor-chumacera

En la Figura (2.2) se muestra el sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott. Se trata de un rotor con un disco plano y rígido montado en la mitad de una flecha flexible de acero, en los extremos de la flecha es soportada por una base con alojamiento de baleros de bola y en el extremo izquierdo un motor de CD está conectado a la flecha mediante un coplee flexible. El actuador provee distintos perfiles de velocidad, haciendo pasar al rotor por encima de la primera frecuencia resonante durante el arranque o paro de operación.

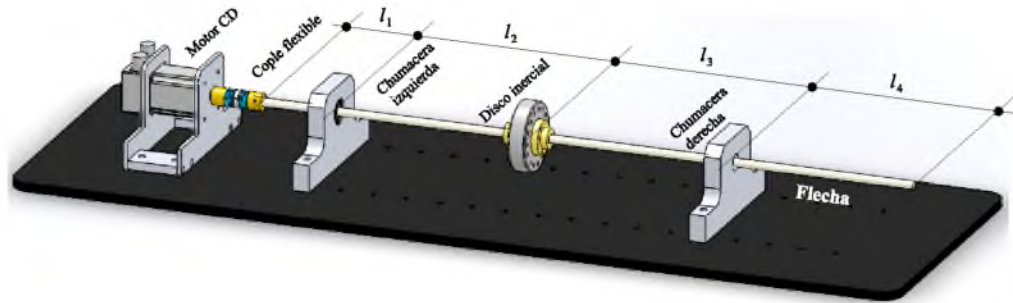


Figura 2.2: Sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott.

2.2.1. Modelo Matemático

El modelo matemático del sistema se obtiene mediante el método de elementos finito (FEM). Este método ofrece una mayor aproximación, que el modelado por Euler o el modelado por Newton, al comportamiento dinámico de un sistema, dado que se consideran las propiedades mecánicas de los soportes, el tipo de material y propiedades geométricas del sistema. El modelo FEM que se construye considera cuatro elementos finitos de longitudes l_1 , l_2 , l_3 y l_4 . Para la configuración Jeffcott se asume que $l_2 = l_3$, debido a que el disco inercial se encuentra en la mitad entre los soportes. La longitud de la flecha l_1 es la distancia desde el acoplamiento hasta el soporte izquierdo y la extensión de flecha l_4 es medida desde el soporte derecho hasta el extremo en voladizo.

En el modelo discreto se tienen cinco nodos; uno en cada soporte; uno en el acoplamiento de la fuente motriz con la flecha, uno más ubicado en el disco y el último en el extremo libre de la flecha. Cada nodo tiene cuatro grados de libertad; dos movimientos radiales (x , y) y dos movimientos angulares (β_x , β_y) por lo que el modelo completo consta de 20 grados de libertad, diez grados de libertad por cada plano de movimiento Figura (2.3) y se asume que no existe acoplamiento elástico entre los planos de movimiento. Para el modelo propuesto se considera que el disco inercial solamente tiene movimiento en el plano $x - y$, por lo que no se consideran efectos giroscópicos. Los soportes juegan un papel importante en la respuesta del sistema. Se considera que ambos soportes tienen propiedades mecánicas, son sumamente rígidos y su elasticidad en el modelo es aproximada por las constantes k_{iq} y k_{dq} ($q = x, y$) en la coordenada radial del soporte izquierdo y derecho respectivamente.

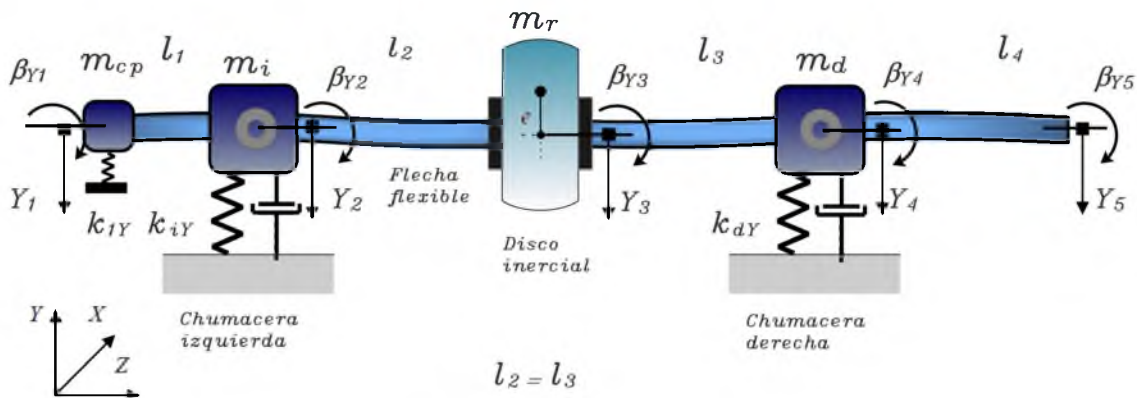


Figura 2.3: Modelo discreto del sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott (plano y).

El cople flexible, que une la flecha flexible y la flecha del motor, genera restricciones en los movimiento radiales del nodo 1, el movimiento tiene propiedades elásticas por el tipo de unión y es representado por la constantes mecánicas k_{1q} ($q = x, y$).

Se considera que los tramos de flecha son de un material de densidad uniforme ρ , sección transversal constante A , inercia I constante y posee propiedades mecánicas E idénticas en cada tramo. La masa del acoplamiento entre el motor y la flecha m_{cp} , del soporte izquierdo m_i , del disco inercial m_r y el soporte derecho m_d , son agregadas en su nodo correspondiente como masas puntuales en la viga.

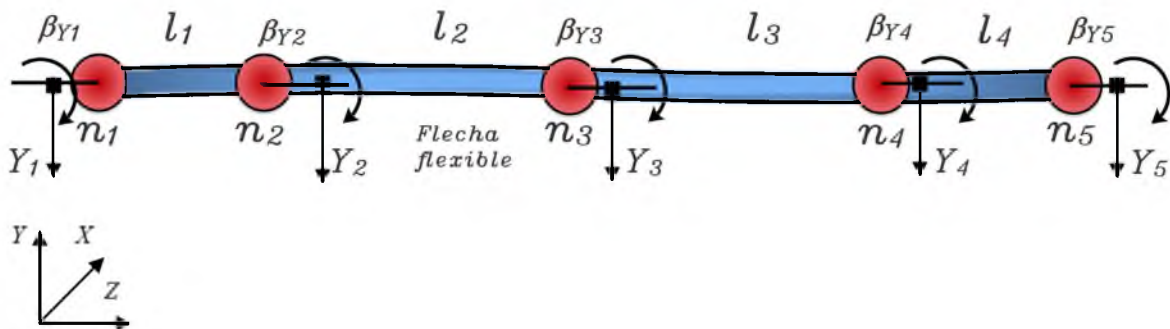


Figura 2.4: Representación del diagrama de nodos y elementos finitos (plano $q = y$).

Los elementos finitos del rotor se proponen seccionando la viga donde existen uniones o articulaciones, cargas aplicadas, cambios de sección transversal en la flecha y en donde exista secciones de materiales distintos o en su caso si se desea mayor aproximación del modelo se realiza un número finito de particiones de la viga. Para obtener el modelo del sistema rotor-chumacera, primero se obtiene el modelo discreto de la flecha o viga. Este se construye considerando cinco nodos (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) y cuatro elementos finitos, cada nodo esta descrito por cuatro grados de libertad, dos que representan movimientos radiales q y dos mas que representan movimientos angulares β_q ($q = x, y$) Figura (2.4).

Para construir las matrices elementales de masa M y rigidez K de cada elemento finito, se construyen matrices cuadradas de $n \times n$, con $n = 10$ número de grados de libertad del rotor para un solo plano de movimiento (horizontal o vertical), cuyos grados de libertad se representan por las variables $(q_1, \beta_{q1}, q_2, \beta_{q2}, q_3, \beta_{q3}, q_4, \beta_{q4}, q_5, \beta_{q5})$, donde $q = x, y$. Cada elemento finito tiene propiedades acopladas con los elementos restantes de la viga, esto quiere decir que los grados de libertad en los extremos de un elemento se acopla con los grados de los elementos contiguos.

A continuación se presenta la distribución de los grados de libertad de la viga sobre un arreglo matricial, se indica las variables asociadas en cada nodo y se representa por la matriz (2.15).

$$\begin{array}{cccccccccc}
 q_1 & \beta_{q1} & q_2 & \beta_{q2} & q_3 & \beta_{q3} & q_4 & \beta_{q4} & q_5 & \beta_{q5} \\
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 q_1 \\
 \beta_{q1} \\
 q_2 \\
 \beta_{q2} \\
 q_3 \\
 \beta_{q3} \\
 q_4 \\
 \beta_{q4} \\
 q_5 \\
 \beta_{q5}
 \end{array} \quad (2.15)
 \end{array}$$

2.2.2. Obtención de la matriz de M_q y K_q de cada elemento finito

El primer elemento finito (EF_1 , nodo 1 – 2), es descrito por las variables $(q_1, \beta_{q1}, q_2, \beta_{q2})$, que corresponden al nodo 1 y 2. La matriz de masa M_{q1} y rigidez K_{q1} ($q = x, y$) son escritas de la forma:

$$K_{q_2} = \frac{EI}{l_2^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & 4l_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

El tercer elemento finito (EF_3 , nodo 3–4), es descrito por las variables ($q_3, \beta_{q_3}, q_4, \beta_{q_4}$), que corresponden al nodo 3 y 4. La matriz de masa M_{q_3} y rigidez K_{q_3} son expresadas como:

$$M_{q_3} = \frac{\rho A}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 156l_3 & -22l_3^2 & 54l_3 & -13l_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22l_3^2 & 4l_3^3 & 13l_3^2 & -3l_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54l_3 & 13l_3^2 & 156l_3 & -22l_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13l_3^2 & -3l_3^3 & -22l_3^2 & 4l_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$K_{q_3} = \frac{EI}{l_3^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6l_3 & -12 & 6l_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l_3 & 4l_3^2 & -6l_3 & 2l_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l_3 & 12 & -6l_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l_3 & 2l_3^2 & -6l_3 & 4l_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

El cuarto elemento finito (EF_4 , nodo 4–5), es descrito por las variables ($q_4, \beta_{q_4}, q_5, \beta_{q_5}$), que corresponden al nodo 4 y 5. La matriz de masa M_{q_4} y rigidez K_{q_4} se establecen de la forma:

$$M_{q4} = \frac{\rho A}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 156l_4 & -22l_4^2 & 54l_4 & -13l_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22l_4^2 & 4l_4^3 & 13l_4^2 & -3l_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54l_4 & 13l_4^2 & 156l_4 & -22l_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13l_4^2 & -3l_4^3 & -22l_4^2 & 4l_4^3 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$K_{q4} = \frac{EI}{l_4^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6l_4 & -12 & 6l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l_4 & 4l_4^2 & -6l_4 & 2l_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l_4 & 12 & -6l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l_4 & 2l_4^2 & -6l_4 & 4l_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.2.3. Matriz total de masa y rigidez de la viga

La matriz total de masa \widehat{M}_q y rigidez \widehat{K}_q de la viga, para un plano de movimiento, se obtiene a partir de la sumatoria de las matrices de cada elemento finito.

Para un plano de movimiento, es obtenida por

$$\widehat{M}_q = \sum_{i=1}^{i=4} M_{qi} \quad (2.24)$$

La sumatoria de matrices da como resultado:

$$\widehat{M}_q = \frac{\rho A}{420} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & m_{3,5} & m_{3,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & m_{4,5} & m_{4,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} & m_{5,6} & m_{5,7} & m_{5,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{6,6} & m_{6,7} & m_{6,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{7,5} & m_{7,6} & m_{7,7} & m_{7,8} & m_{7,9} & m_{7,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{8,5} & m_{8,6} & m_{8,7} & m_{8,8} & m_{8,9} & m_{8,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{9,7} & m_{9,8} & m_{9,9} & m_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{10,7} & m_{10,8} & m_{10,9} & m_{10,10} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\begin{array}{cccccc}
k_{1,1} = \frac{12}{l_1^3} & k_{1,2} = \frac{6}{l_1^2} & k_{1,3} = \frac{-12}{l_1^3} & k_{1,4} = \frac{6}{l_1^2} & & \\
k_{2,1} = \frac{6}{l_1^2} & k_{2,2} = \frac{-6}{l_1} & k_{2,3} = \frac{-6}{l_1^2} & k_{2,4} = \frac{2}{l_1} & & \\
k_{3,1} = \frac{-12}{l_1^3} & k_{3,2} = \frac{-6}{l_1^2} & k_{3,3} = \frac{12(l_1^3 + l_2^3)}{l_1^3 l_2^3} & k_{3,4} = \frac{6(l_1^2 - l_2^2)}{l_1^2 l_2^2} & k_{3,5} = \frac{-12}{l_2^3} & k_{3,6} = \frac{6}{l_2^2} \\
k_{4,1} = \frac{6}{l_1^2} & k_{4,2} = \frac{2}{l_1} & k_{4,3} = \frac{6(l_1^2 - l_2^2)}{l_1^2 l_2^2} & k_{4,4} = \frac{4(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} & k_{4,5} = \frac{-6}{l_2^2} & k_{4,6} = \frac{2}{l_2} \\
k_{5,3} = \frac{-12}{l_2^3} & k_{5,4} = \frac{-6}{l_2^2} & k_{5,5} = \frac{12(l_2^3 + l_3^3)}{l_2^3 l_3^3} & k_{5,6} = \frac{6(l_2^2 - l_3^2)}{l_2^2 l_3^2} & k_{5,7} = \frac{-12}{l_3^3} & k_{5,8} = \frac{6}{l_3^2} \\
k_{6,3} = \frac{6}{l_2^2} & k_{6,4} = \frac{2}{l_2} & k_{6,5} = \frac{6(l_2^2 - l_3^2)}{l_2^2 l_3^2} & k_{6,6} = \frac{4(l_2 + l_3)}{l_2 l_3} & k_{6,7} = \frac{-6}{l_3^2} & k_{6,8} = \frac{2}{l_3} \\
k_{7,5} = \frac{-12}{l_3^3} & k_{7,6} = \frac{-6}{l_3^2} & k_{7,7} = \frac{12(l_3^3 + l_4^3)}{l_3^3 l_4^3} & k_{7,8} = \frac{6(l_3^2 - l_4^2)}{l_3^2 l_4^2} & k_{7,9} = \frac{-12}{l_4^3} & k_{7,10} = \frac{6}{l_4^2} \\
k_{8,5} = \frac{6}{l_3^2} & k_{8,6} = \frac{2}{l_3} & k_{8,7} = \frac{6(l_3^2 - l_4^2)}{l_3^2 l_4^2} & k_{8,8} = \frac{4(l_3 + l_4)}{l_3 l_4} & k_{8,9} = \frac{-6}{l_4^2} & k_{8,10} = \frac{2}{l_4} \\
k_{9,7} = \frac{-12}{l_4^3} & k_{9,8} = \frac{-6}{l_4^2} & k_{9,9} = \frac{12}{l_4^3} & k_{9,10} = \frac{-6}{l_4^2} & & \\
k_{10,7} = \frac{6}{l_4^2} & k_{10,8} = \frac{2}{l_4} & k_{10,9} = \frac{-6}{l_4^2} & k_{10,10} = \frac{4}{l_4} & &
\end{array}$$

Las matrices totales de masa y rigidez, ec.(2.25) y ec.(2.27), representan la masa y rigidez distribuida de la flecha. Ahora, estas matrices consideran las propiedades mecánicas que existen en cada nodo.

En la Figura (2.3) se muestra el sistema discreto del rotor-chumacera, el nodo 1 tiene propiedades elásticas asociadas al cople flexible k_{1q} y una masa significativa m_{cp} , en el nodo 2 se encuentra el soporte izquierdo el cual es rígido con propiedad k_{iq} y posee masa m_i , el disco se considera como masa puntual m_r ubicado en el nodo 3 mientras que el soporte derecho es rígido representado por k_{dq} con una masa puntual m_d localizada en el nodo 4. Realizando la modificación de la matriz de masa ec. (2.25), la nueva matriz es reescrita por M_q que contiene las masas puntuales del soporte izquierdo, del disco y del soporte derecho, mostrado en la ec.(2.28).

El modelo de elemento finito del sistema rotor-chumacera, propuesto en este trabajo, solo describe los movimientos radiales en dos planos de movimiento (x, y) y no se incluye los efectos giroscópicos del disco.

$$M_q = \lambda \begin{bmatrix}
m_{1,1} + \frac{m_{cp}}{\lambda} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} + \frac{m_i}{\lambda} & m_{3,4} & m_{3,5} & m_{3,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & m_{4,5} & m_{4,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} + \frac{m_r}{\lambda} & m_{5,6} & m_{5,7} & m_{5,8} & 0 & 0 \\
0 & 0 & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{6,6} & m_{6,7} & m_{6,8} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m_{7,5} & m_{7,6} & m_{7,7} + \frac{m_d}{\lambda} & m_{7,8} & m_{7,9} & m_{7,10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & m_{8,5} & m_{8,6} & m_{8,7} & m_{8,8} & m_{8,9} & m_{8,10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{9,7} & m_{9,8} & m_{9,9} & m_{9,10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{10,7} & m_{10,8} & m_{10,9} & m_{10,10}
\end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\rho A}{420}$$

(2.28)

De la misma forma se realiza la modificación de la matriz de rigidez obtenida anteriormente, la matriz es reescrita por K_q contiene la rigidez del cople, la del soporte izquierdo y la del soporte derecho, mostrado en la ec.(2.29).

$$K_q = EI \begin{bmatrix} k_{1,1} + \frac{k_{1q}}{EI} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} + \frac{k_{3q}}{EI} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} & k_{5,7} & k_{5,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} & k_{6,7} & k_{6,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{7,5} & k_{7,6} & k_{7,7} + \frac{k_{dq}}{EI} & k_{7,8} & k_{7,9} & k_{7,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{8,5} & k_{8,6} & k_{8,7} & k_{8,8} & k_{8,9} & k_{8,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{9,7} & k_{9,8} & k_{9,9} & k_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10,7} & k_{10,8} & k_{10,9} & k_{10,10} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

La matriz general de amortiguamiento, es calculada por la relación lineal entre la matriz de masa y rigidez, (ver, Kelly [27] y Genta [28]) expresada por:

$$C_q = \alpha_q M_q + \beta_q K_q, \quad q = (x, y) \quad (2.30)$$

donde α_q, β_q son las constantes de proporcionalidad entre las matrices.

- *Nota: Los elementos de las matrices $m_{i,j}$ y $k_{i,j}$ ($i = j = 1, 2, \dots, 10$), son dados en el apartado (2.2.3).*

2.2.4. Fuerza de desbalance y dinámica de rotación

La siguiente sección muestra el análisis del movimiento del disco en la configuración del rotor simplificado tipo Jeffcott, cuyo objeto es identificar la fuerza endógena de vibración $f_q(t)$ provocada por el desbalance en el disco de masa m_r e inercia J_r , así como obtener la dinámica de rotación de la flecha $\theta(t)$.

En el rotor, se considera que el disco está montado al centro de la flecha ($\frac{l}{2}$) y soportado en cada uno de sus extremos, por un apoyo rígido con alojamiento de chumaceras como se observa en la Figura (2.5). El desbalance en el sistema se debe principalmente a que el centro de masa del disco C_m no se encuentra ubicado en el centro geométrico del disco C_g , donde la distancia que existe entre los puntos C_m y C_g se representa por la excentricidad e . Esta diferencia conocida como desbalance, ocasiona vibraciones en el sistema, debidas a la fuerza centrífuga causada por la masa del disco que gira a velocidad angular $\omega = \dot{\theta}(t)$.

Para el análisis del movimiento se considera que el disco es montado en una flecha cuya rigidez efectiva es representada por los resortes en el plano horizontal k_x y vertical k_y .

Las ecuaciones de movimiento se obtienen por medio de la ec.(2.31) de Euler-Lagrange, basada en las energías cinética y potencial del sistema (Wells [32]).

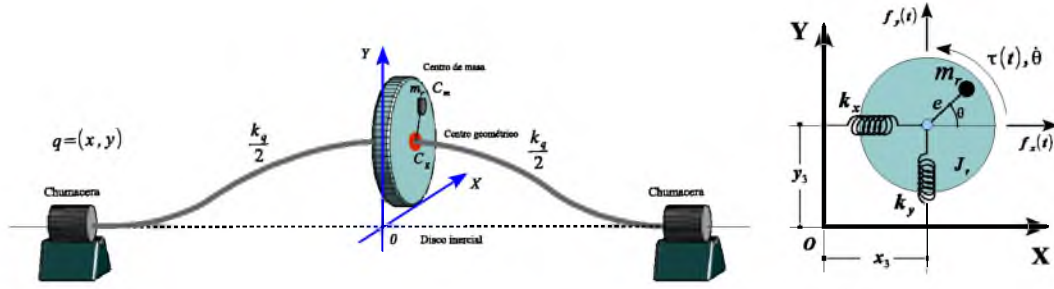


Figura 2.5: Diagrama simplificado del rotor Jeffcott.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} + \frac{\partial D}{\partial \dot{p}} = Q \quad (2.31)$$

$$p = [x_3(t) \quad y_3(t) \quad \theta(t)]^T$$

donde \mathcal{L} es la función de Lagrange, basada en las energías cinética E_{ci} y potencial E_{pj} presentes en el sistema ec.(2.32), y la función de disipación de Rayleigh D basada en la energía de disipación ec.(2.33).

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{i=n} E_{ci} - \sum_{j=1}^{j=m} E_{pj} \quad (2.32)$$

$$D = \sum_{i=1} E_D \quad (2.33)$$

donde (x_3, y_3) son los desplazamientos radiales del disco, p es el vector de coordenada generalizada del sistema y Q es la fuerza exógena al sistema.

Asumimos que la velocidad angular del rotor ω es una función del tiempo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, por lo tanto se considera (x_3, y_3, θ) como las coordenadas generalizadas.

$$E_{c1} = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} m_r v^2, \quad v^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2$$

$$E_{p1} = \frac{1}{2} k_x x_3^2, \quad E_{p2} = \frac{1}{2} k_y y_3^2$$

La posición del centro de masa (c_m) (ver Fig. 2.5), está definida por las siguientes coordenadas:

$$x_m = x_3 + e \cos \theta, \quad y_m = y_3 + e \sin \theta$$

$$v^2 = \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + e^2\dot{\theta}^2 + 2e\dot{y}_3\dot{\theta} \cos \theta - 2e\dot{x}_3\dot{\theta} \sin \theta,$$

La función de Lagrange \mathcal{L} del sistema, basada en las energías es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}J_r\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_r(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + e^2\dot{\theta}^2 + 2e\dot{\theta}(\dot{x}_3 \cos \theta - \dot{y}_3 \sin \theta)) - \frac{1}{2}k_x x_3^2 - \frac{1}{2}k_y y_3^2 \quad (2.34)$$

La función de disipación de Rayleigh D que describe las energías de disipación son:

$$D = \frac{1}{2}c\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}c_x\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}c_y\dot{y}_3^2$$

donde la fricción viscosa presente en las chumaceras del rotor es denotada por c y la fricción radial en el disco son c_x y c_y en su respectivo plano.

Con la función Lagrangiana \mathcal{L} resuelta ec.(2.34), obtenemos las ecuaciones dinámicas que corresponden a sus coordenadas generalizadas.

Las ecuaciones que describen el movimiento radial en el eje x son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_3} &= 0 \quad (2.35) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} \right) &= m_r \ddot{x}_3 - em_r \dot{\theta}^2 \cos \theta - em_r \ddot{\theta} \sin \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} &= -k_x x_3, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_3} = c_x \dot{x}_3 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de Euler-Lagrange ec.(2.35), y sustituyendo las derivadas parciales, se obtiene el modelo dinámico para $x(t)$.

$$m_r \ddot{x}_3 + c_x \dot{x}_3 + k_x x_3 = m_r e \left(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta \right) \quad (2.36)$$

$$f_x(t) = m_r e \left(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta \right) \quad (2.37)$$

Una vez resuelto para el movimiento horizontal del disco $x_3(t)$, los términos de la derecha en la ec.(2.36) es la fuerza endógena que perturba al sistema $f_x(t)$. La aparición de esta fuerza se debe al desbalance en el disco y está intrínsecamente relacionado con la aceleración $\ddot{\theta}(t)$ y velocidad angular del rotor $\dot{\theta}(t)$. La magnitud de la fuerza de perturbación se incrementa con el desbalance y la velocidad angular, tal como se muestra en la ec.(2.37).

Las ecuaciones que describen la dinámica en el eje y son obtenidas siguiendo la ecuación de Euler-Lagrange ec.(2.31):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_3} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_3} &= 0 \quad (2.38) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_3} \right) &= m_r \ddot{y}_3 - em_r \dot{\theta}^2 \sin \theta + em_r \ddot{\theta} \cos \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_3} &= -k_y y_3, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_3} = c_y \dot{y}_3 \end{aligned}$$

El movimiento vertical del disco $y_3(t)$, se obtiene resolviendo la ecuación de Euler ec.(2.38), cuyo modelo es expresado por la ec.(2.39).

$$m_r \ddot{y}_3 + c_y \dot{y}_3 + k_y y_3 = m_r e \left(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta \right) \quad (2.39)$$

$$f_y(t) = m_r e \left(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta \right) \quad (2.40)$$

La dinámica radial en $y_3(t)$ los términos de la fuerza endógena, $f_y(t)$, perturban al sistema en el movimiento vertical. Del mismo modo esta fuerza se debe al desbalance en el disco y su magnitud se incrementa con el desbalance y la velocidad angular ec.(2.40).

Por último, el modelo que describe el movimiento angular $\theta(t)$ del disco, inducido por un torque de control $\tau(t)$, se obtiene resolviendo la ec.(2.41).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \tau(t) \quad (2.41)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = (J_r + e^2 m_r) \ddot{\theta} - em_r \dot{y}_3 \dot{\theta} \sin \theta + em_r \ddot{y}_3 \cos \theta - em_r \dot{x}_3 \dot{\theta} \cos \theta - em_r \ddot{x}_3 \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -em_r \dot{y}_3 \dot{\theta} \sin \theta - em_r \dot{x}_3 \dot{\theta} \cos \theta, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = c \dot{\theta}$$

El modelo dinámico que expresa el movimiento rotacional, es dado por la ec.(2.42).

$$(J_r + e^2 m_r) \ddot{\theta} + c \dot{\theta} = \tau(t) + em_r (\ddot{x}_3 \sin \theta - \ddot{y}_3 \cos \theta) \quad (2.42)$$

$$\tau_\omega(t) = em_r (\ddot{x}_3 \sin \theta - \ddot{y}_3 \cos \theta) \quad (2.43)$$

Debido a la fuerza endógena que se encuentra sometido el disco, existe un efecto sobre el grado de libertad $\theta(t)$ induce un par de perturbación $\tau_\omega(t)$.

2.3. Modelo del rotor con chumacera móvil

El sistema rotor Jeffcott descrito en la sección (2.2), considera un disco montado en el centro de la flecha y soportado por dos apoyos rígidos e idénticos (ver Vance [3]). Basándose en esta configuración, se obtiene un modelo del sistema rotor-chumacera con soporte móvil. Este consiste en quitar uno de los apoyos rígidos y reemplazarlo por un apoyo móvil, el cual esta compuesto de una chumacera de bola que descansa sobre dos guías lineales Figura (2.6).

De esta manera el rotor descansa en un extremo sobre un apoyo rígido y sobre otro, soporte deslizante, de movimiento controlado. La chumacera se desliza para cambiar la distancia entre los soportes y así modificar la rigidez de la flecha. La variación de la distancia causa cambios en la rigidez global del sistema, del mismo modo los efectos de amortiguamiento se ven modificados y como una consecuencia se modifican las frecuencias naturales.

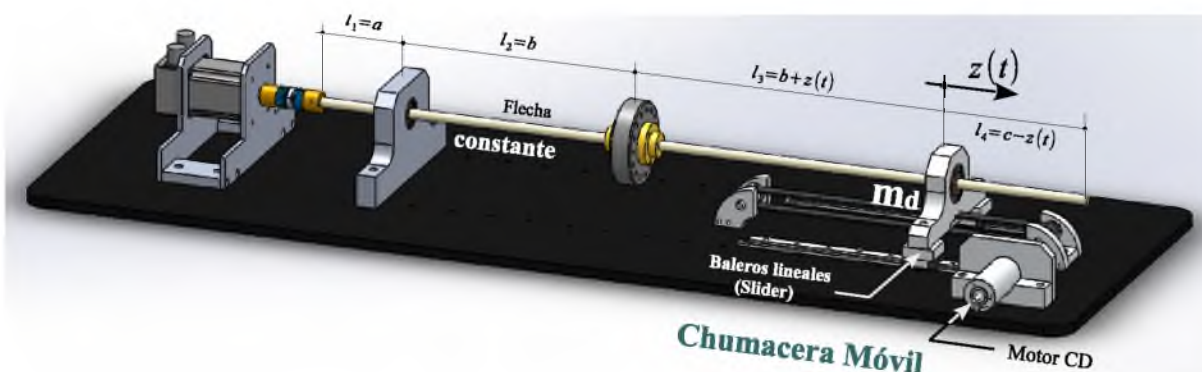


Figura 2.6: Sistema rotor-chumacera con soporte móvil.

En la Figura (2.7) se muestra un diagrama representativo del soporte deslizante, se considera que tiene masa total m_d de la estructura de aluminio y del propio peso de los bloques deslizables o baleros lineales (Sliders). Existe una fricción viscosa, c_m , que se genera por el deslizamiento del balero de bola sobre la flecha y los bloques deslizables. El movimiento del soporte es controlado por la fuerza lineal $u(t)$, generada por el torque de un motor de CD y transmitida mediante un servomecanismo¹ de poleas y banda que transforman el movimiento angular en un movimiento lineal (ver sección 3.1).

El soporte se desliza a lo largo de la flecha y su desplazamiento lineal es medido por la coordenada $z(t)$, su punto de referencia se contempla a partir de la configuración de un rotor Jeffcott, es decir $z(t) = 0$ cuando $l_2 = l_3$, lo anterior implica que si el bloque, de masa m_d , se desplaza en sentido positivo, el elemento finito 3 aumenta su longitud en una cantidad $z(t)$ y el elemento finito 4 reduce su longitud en la misma cantidad $z(t)$. Los parámetros geométricos l_3 y l_4 de las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento se convierten en funciones de z , quedando expresadas las longitudes de los elementos finito:

¹Término introducido por Hazen para los sistemas de control de posición.[35]

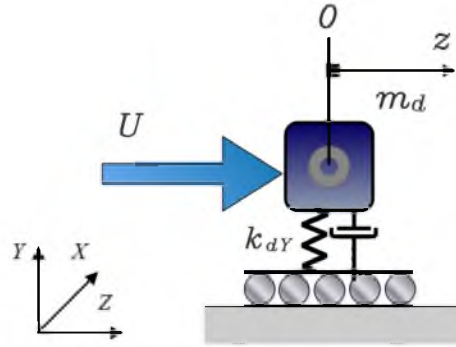


Figura 2.7: Servomecanismo Chumacera móvil para la plataforma Rotor-chumacera

$$\begin{aligned} l_1 &= a \\ l_2 &= b \\ l_3 &= b + z(t) \\ l_4 &= c - z(t) \end{aligned}$$

donde a , b , c y d son las longitudes iniciales definidas para el sistema en la configuración Rotor Jeffcott.

La ecuación diferencial que describe el movimiento dinámico de la chumacera móvil se obtiene por el método de Euler-Lagrange y es resuelta del mismo modo que en la sección (2.2.4).

Puesto que se trata de un sistema que se desliza a lo largo de un eje horizontal y no tiene elementos elásticos sobre el grado en $z(t)$, no existe energía potencial, $E_p = 0$. Siendo que la función de Lagrange es expresada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_d\dot{z}^2$$

Mientras que, la fricción viscosa se obtiene a través de la función de disipación de Rayleigh:

$$D = \frac{1}{2}c_m\dot{z}^2$$

se obtiene el modelo dinámico que describe el movimiento de la chumacera móvil ec.(2.44).

$$m_d\ddot{z}(t) + c_m\dot{z}(t) = u(t) \quad (2.44)$$

- *Nota: Los terminos α_q, β_q son constantes arbitrarias cuyos valores se obtuvieron de los articulos citados (Andrés [17] y Silva [19]) que muestran la respuesta al desbalance experimental de un rotor-chuamacera.*

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \\
q_x(t) &= [x_1 \ \beta_{x1} \ x_2 \ \beta_{x2} \ x_3 \ \beta_{x3} \ x_4 \ \beta_{x4} \ x_5 \ \beta_{x5}]^T \\
q_y(t) &= [y_1 \ \beta_{y1} \ y_2 \ \beta_{y2} \ y_3 \ \beta_{y3} \ y_4 \ \beta_{y4} \ y_5 \ \beta_{y5}]^T \\
F_x(t) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ f_x(t) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
F_y(t) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ f_y(t) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
f_x(t) &= m_r e \left(\bar{\theta}^2 \cos \theta + \bar{\theta} \sin \theta \right) \\
f_y(t) &= m_r e \left(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta \right)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
(J_r + e^2 m_r) \ddot{\theta}(t) + c \dot{\theta}(t) &= \tau(t) + e m_r (\ddot{x}_3(t) \sin \theta(t) - \ddot{y}_3(t) \cos \theta(t)) \\
\tau_\omega(t) &= e m_r (\ddot{x}_3(t) \sin \theta(t) - \ddot{y}_3(t) \cos \theta(t))
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$m_d \ddot{z}(t) + c_d \dot{z}(t) = u(t) \tag{2.50}$$

Q es el vector de coordenadas generalizadas, q_j es el desplazamiento radial en cada nodo y β_{qj} ($j = 1, 2, \dots, 5$) es el movimiento angular o doblez de la flecha en cada nodo.

El rotor está afectado por fuertes vibraciones endógenas del tipo armónico, causadas por el desbalance en el disco $f_x(t), f_y(t)$. Estas se hacen notar cuando la máquina es arrancada siguiendo un perfil de velocidad por encima de la primer frecuencia resonante (ver detalles en la sección 2.2.4). La ecuación matemática que describe el movimiento angular del rotor ec.(2.49) agrega un grado de libertad $\theta(t)$ al modelo general del sistema y es afectado por una perturbación $\tau_\omega(t)$ producidos por el acoplamiento elástico entre las chumaceras, el desbalance y el movimiento radiale del disco.

A través del movimiento de la chumacera móvil (ec.(2.50)) se modifica la rigidez de la flecha del rotor, esto mediante una estrategia de control activo PID basada en la modulación de la longitud de la flecha en función de la frecuencia del desbalance. Es importante mencionar que en el sistema general, representado en la ec.(2.45), los desplazamientos radiales del disco desbalanceado (x_3, y_3) no son controlables desde la entrada $u(t)$ asociada a la chumacera móvil $z(t)$.

Los parámetros del sistema rotor-chumacera se presentan en la **Tabla 1**

Tabla 1.- Parámetros del Rotor-chumacera tipo Jeffcott con soporte Móvil.		
Cople flexible	masa $m_{cp} = 0.25 \text{ kg}$	Rigidez $k_{1x} = 20 \times 10^6 \text{ N/m}$ $k_{1y} = 10 \times 10^6 \text{ N/m}$
Soporte izquierdo	masa $m_i = 1.315 \text{ kg}$	Rigidez $k_{ix} = 80 \times 10^6 \text{ N/m}$ $k_{iy} = 60 \times 10^6 \text{ N/m}$
Soporte derecho	masa $m_d = 1.18 \text{ kg}$	Rigidez $k_{dx} = 60 \times 10^6 \text{ N/m}$ $k_{dy} = 50 \times 10^6 \text{ N/m}$
Disco Inercial	masa $m_r = 1.9 \text{ kg}$	Momento Polar de Inercia $J_r = 0.049 \text{ kg m}^2$
Excentricidad del disco	$e = 150 \mu \text{ m}$	
Fricción viscosa en las chumaceras	$c = 1.2 \times 10^{-2} \text{ N ms/rad}$	
Flecha	Longitud inicial $a = 0.15 \text{ m}, b = 0.3 \text{ m},$ $c = 0.25 \text{ m}$ Módulo de Young $E = 200 \text{ G N/m}^2$	Diámetro $\phi = 12 \text{ mm}$ Densidad del material $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
Propiedades Geométricas	Sección Transversal $A = \frac{\pi \phi^2}{4} = 1.13 \times 10^{-4} \text{ m}^2$	Inercia de área $I = \frac{\pi \phi^4}{64} = 1.017 \times 10^{-9} \text{ m}^4$

- *Nota: La masa de la flecha se considera como una masa distribuida y está incluida en cada tramo de viga por la expresión $m = \rho Al$.*

Capítulo 3

Diseño Conceptual y Manufactura

En el presente apartado se muestra el diseño y fabricación de elementos para el servomecanismo Chumacera móvil. La plataforma es una aportación para el departamento de ingeniería en Mecatrónica con la cual se podrá llevar a cabo distintas experimentaciones como:

- Validación de modelos matemáticos.
- Aplicación algoritmos de control de posicionamiento.
- Aplicación algoritmos de control para la atenuación de vibraciones.
- Aplicación algoritmos de control para el seguimiento de perfiles de velocidades.
- Experimentación para el control del desbalance.

Para el diseño, se consideran elementos claves que marcan la pauta para el desempeño del servomecanismo.

Se consideró un motor de C.D., mostrado en la Figura (3.1), el cual cuenta con conector incluido además de tener servoamplificador para la etapa de potencia del motor. Este permite controlar el motor mediante potenciómetros, realizar una conexión mediante una interfaz *RS232* o por el protocolo *CAN*. Este tipo de conexiones permitirán en trabajos futuros implementar distintos algoritmos de control en el motor Figura (3.2).



Figura 3.1: Motor Maxon EC-Max 321552.



Figura 3.2: Servoamplificador Maxon para Motor Maxon EC-Max 321552.

Las guías lineales forman parte del soporte móvil, son el medio por el cual se desplaza la chumacera, el sistema de posicionamiento. Se utilizan un par de guías lineales de acero con una longitud de 280 mm, que permitirán un recorrido suave, debido a la baja fricción que presentan y al perfil de contacto entre la guía y el bloque deslizante, que se ve reflejado en la reducción de la fricción del servomecanismo Figura (3.3).



Figura 3.3: Bloque de movimiento lineal THK modelo RSR15ZM

Los soportes o bases del rotor cuentan con elementos que soportan carga radial, se trata de un rodamiento de bolas autoalineable FAG 2204. 2RS.TV Figura (3.4). Este es capaz de compensar errores de alineación, al tratarse de un rodamiento de bolas con obturaciones en ambos lados. La compensación mecánica permitida es de 1.5° en cualquier dirección, además desde fábrica ha sido lubricado con grasa de por vida lo que reduce la necesidad de mantenimiento prematuro.



Figura 3.4: Rodamiento autoalineable FAG 2204. 2RS.TV

La Chumacera móvil se integra a una plataforma experimental Rotor-chumacera tipo Jeffcott Figura (3.5). Esta, fue punto de partida para la línea de trabajo que aquí se presenta. Se trata de un sistema que incluye dos soportes rígidos de bola, un rotor acoplado a una flecha y es accionado mediante un motor de CD. Este trabajo fue realizado en la tesis de Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica de la Universidad del Papaloapan por el Ing. José Luis J. O. en Junio del 2018 [38].

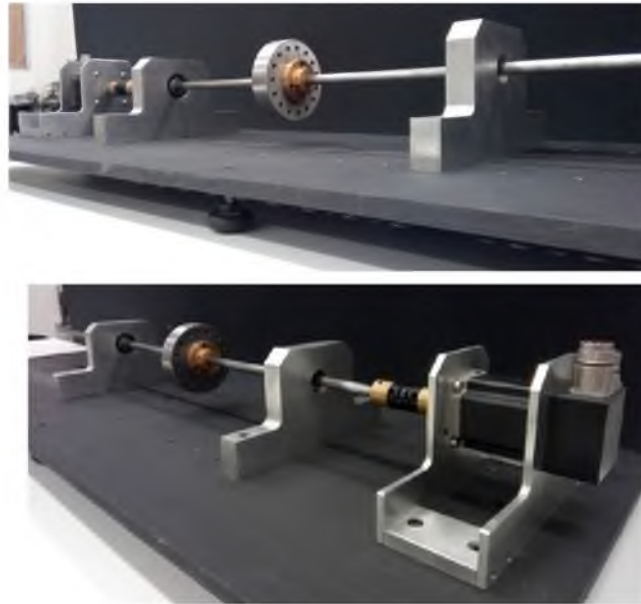


Figura 3.5: Plataforma experimental desarrollada en el departamento de Ingeniería en Mecatrónica por José Luis J. O. en 2018 [38].

- *Nota: El resto de las especificaciones de los elementos se muestran en los Apéndices*

3.1. Descripción del servomecanismo

El servomecanismo Chumacera móvil, mostrado en la Figura (3.6), consiste en un motor de corriente directa (CD) conectado a una polea síncrona mediante un cople flexible de aluminio. Este proporciona un movimiento lineal al soporte rígido, que se desplaza sobre guías lineales de acero.

Se realizó un diseño mecánico en 3D para tener un modelo virtual modificable. Así fue posible detallar medidas y ajustes del servomecanismo previo a la fabricación del prototipo.

El diseño integral se dividió en 6 elementos claves. Los elementos a fabricar fueron realizados en su mayoría en una aleación de aluminio del tipo 6061, debido a su maquinabilidad y disponibilidad en el mercado. Siendo que, los elementos fueron fabricados en las instalaciones y con la maquinaria que dispone la universidad.

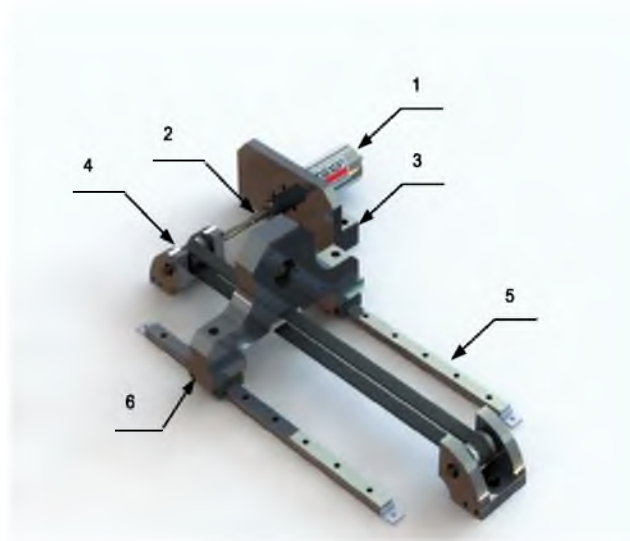


Figura 3.6: Diseño Integral del servomecanismo Chumacera móvil.

1. Motor Maxon EC-Max 40.
2. Conjunto de acoplamiento.
3. Bancada del motor.
4. Transmisión síncrona.
5. Guías lineales y accesorios.
6. Soporte móvil y accesorios.

3.1.1. Conjunto de acoplamiento

Para transmitir el par generado por el motor de CD se optó por utilizar un cople flexible anti-vibraciones de aluminio Figura (3.7). Este, fue seleccionado debido a que su diseño evita el golpeteo al comienzo del avance o en un cambio de sentido de giro. Además corrige el desalineamiento que pueda existir entre la flecha del motor y la flecha donde descansa la polea sincrónica.



Figura 3.7: Cople *ALU-FLEX AFA2532* y collarín de aluminio.

También, se fabricó un collarín de aluminio para compensar la diferencia de diámetros entre la flecha del motor y el diámetro interno del cople, el cual se diseñó de manera tal que los prisioneros del cople se ajusten a este y a su vez sujeten la flecha del motor para evitar pérdida de par motriz por deslizamiento.

3.1.2. Bancada de motor

El soporte para el motor consta de dos piezas completamente rígidas. La primera consiste en una barra que proporciona fijación hacia la base donde será montado el servomecanismo. La segunda pieza se trata de una placa con perforaciones al centro para soportar el motor, sujetado por cuatro tornillos métricos. A su vez la placa está fijada a la barra mediante dos tornillos ubicados cerca de los extremos. En el lado izquierdo de la Figura (3.8) se aprecia el diseño mediante *Solidworks*, mientras que del lado derecho se observa el ensamblaje de ambas piezas.

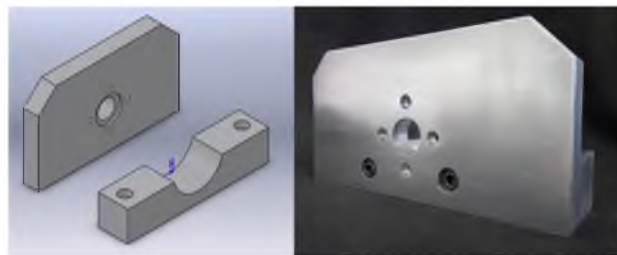


Figura 3.8: Soporte de aluminio para motor Maxon

3.1.3. Transmisión síncrona

En el servomecanismo se utiliza una transmisión por banda y polea síncrona. Las bandas síncronas son fabricadas con tela impregnada de caucho con alambres de acero. Tiene dientes que entran en ranuras axiales formadas en la periferia de las poleas. Una banda síncrona no se estira ni se desliza, y en consecuencia se asegura el sincronismo en el desplazamiento lineal. Mantienen una eficiencia en la transmisión de potencia en un intervalo de 97 a 99%. Otra de sus cualidades que destacan es no requerir lubricación y ser más silenciosas que los demás métodos de transmisión de potencia [45].

Para la selección adecuada de la banda se utilizó del catálogo que proporciona el fabricante *Gates Belts*[®] [29]. Seleccionando una correa dentada modelo *HTD – 3M – 15* de 3 mm de paso y 15 mm de ancho Figura (3.9), diseñada para velocidades de hasta 8 m/s. En conjunto se ha seleccionado una polea dentada con un diámetro de 22 mm como polea motriz. Además se fabricaron una polea lisa de 22 mm de diámetro para el extremo opuesto de la correa que gira libremente. Ambas poleas están sujetas a un eje de acero cada una mediante un par de tornillos prisioneros.

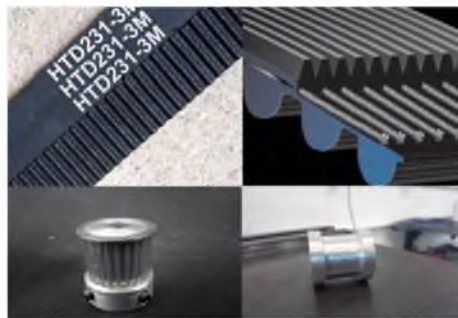


Figura 3.9: a) Correa dentada. b) Polea síncrona y polea lisa.

Para soportar la carga generada por el movimiento del soporte (chumacera móvil), así como el par otorgado por el propio motor se fabricarán soportes Figura (3.10). Estos permiten el confinamiento de las poleas. Ambos soportes se encuentran equipados con rodamientos radiales de bolas, que permiten un giro suave del eje de acero donde se encuentran fijadas las poleas.



Figura 3.10: Ensamble de soportes y poleas



Figura 3.11: Sujetador de correa sincrona.

Para dar solución al tema de la unión entre ambos extremos de la correa. Se optó por utilizar un sujetador (Clamp). Este se fabricó a partir de una pieza de aluminio, reproduciendo un ranurado similar a los dientes de la correa sincrona para evitar el deslizamiento de la misma Figura (3.11). Sujeta ambos extremos de la correa y a su vez se encuentra fijada en la parte inferior del soporte móvil mediante 4 tornillos métricos.

3.1.4. Guías lineales y accesorios

Un elemento de suma importancia son las guías lineales Figura (3.12). Estas proporcionarían el soporte y equilibrio necesario para lograr un desplazamiento suave y continuo. Para lograr un ensamblaje entre el soporte de aluminio y los patines deslizantes fue necesario la elaboración de tacones o bloques de aluminio que permitan la unión de forma precisa sin comprometer la estabilidad ni el equilibrio.



Figura 3.12: Ensamble guía-tacon-soporte

La unión entre el soporte y los tacones es posible mediante un tornillo central, mientras que la unión entre el tacón y el patín deslizante se logra a través de cuatro tornillos. En los extremos de las guías lineales, se implementarán clips de bloqueo para evitar el desmonte accidental de los bloques.

3.1.5. Soporte móvil y accesorios

El mayor reto de fabricación sin duda fue la elaboración del soporte rígido que conforma la chumacera móvil, para ello fue necesario dimensionar de manera precisa a fin de hacer coincidir todos los elementos. Aunado a esto, la nula existencia de un sistema similar en el mercado da oportunidad de establecer un diseño propio basado en la forma convencional de una chumacera radial Figura (3.13).

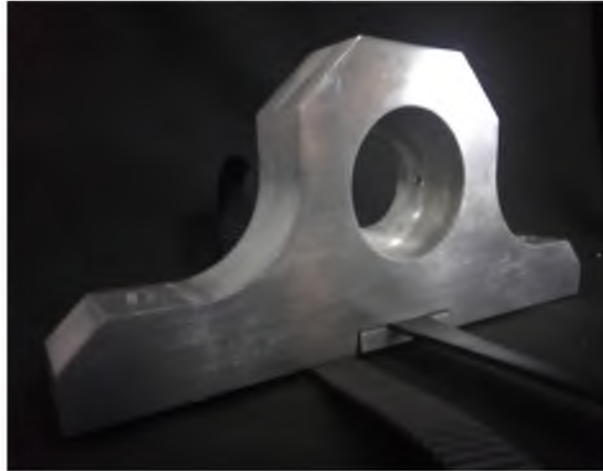


Figura 3.13: Soporte rígido de Aluminio para la chumacera móvil, cuenta con un balero autolineable de bola.

Debido a la diferencia entre el diámetro de la flecha principal del rotor y el diámetro interno del rodamiento autoalineable fue necesario fabricar un buje Figura (3.14), a partir de una barra cilíndrica de bronce, el cual resulta de ayuda para el deslizamiento de la chumacera móvil sobre la flecha.

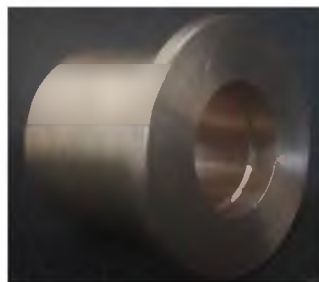


Figura 3.14: Bujes de bronce para ajuste entre rodamiento y flecha.

3.2. Integración del servomecanismo

En la Figura (3.15) se muestra el ensamble de las partes mecánicas de la chumacera de movimiento controlable. Este consta de un servomotor Maxon EC-Max 321552, un cople flexible que transmite el movimiento al soporte mediante el arreglo de poleas y banda. El soporte de aluminio tiene integrado un balero autoalineable, descansa sobre 2 bloques con baleros lineales y se desplaza a través de dos rieles o guías de acero.



Figura 3.15: Integración de una chumacera de movimiento controlable en un sistema rotor-chumacera.

Capítulo 4

Simulación y Control del sistema

En el siguiente apartado se describe el algoritmo de control usado para regular la velocidad y el movimiento de la chumacera. Se muestra el procedimiento para la aplicación del esquema en el sistema Rotor-Chumacera móvil, así como los resultados numéricos obtenidos de la programación en Matlab-Simulink.

4.1. Sintonía de controladores PID

La combinación de una acción de control proporcional, integral y derivativa se denomina acción de control PID. Casi todos los controladores PID se ajustan en sitio, en la literatura se han propuesto muchos tipos diferentes de reglas de sintonización, que permiten llevar a cabo una sintonización eficiente de los controladores PID Ogata [43]. La ecuación de un controlador con esta acción combinada se obtiene mediante:

$$\begin{aligned} u(t) &= K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}, & e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \end{aligned}$$

reescribiendo en función de transferencia:

$$G_c = \frac{U(S)}{E(S)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right), \quad E(S) = R(S) - C(S)$$

En donde K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral, T_d es el tiempo derivativo, $e(t)$ es la función del error, $r(t)$ es la referencia o valor deseado y $c(t)$ es la salida o valor medio. La Figura (4.1) muestra un control PID de una planta.

Es posible aplicar diversas técnicas de diseño con el fin de determinar los parámetros del controlador que cumpla las especificaciones del transitorio y del estado estacionario del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, si la planta es complicada, es decir que no es fácil obtener su modelo matemático, tampoco es posible un método analítico para el diseño de

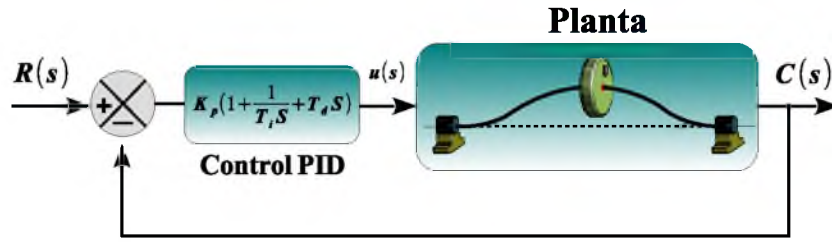


Figura 4.1: Diagrama de control PID en un sistema Ogata [43].

un controlador PID. En este caso, se debe recurrir a procedimientos experimentales para la sintonía de los controladores PID, tales métodos son las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols Ogata [43].

4.2. Pruebas en lazo abierto

La estrategia del control semi-activo para el rotor consiste en desplazar la frecuencia de resonancia del sistema, cuando este cruce la primer velocidad crítica. La frecuencia se modifica, desplazando la chumacera móvil para cambiar la longitud de los elementos finitos 3 y 4. Este repercute en la modificación de la rigidez. Por lo anterior, la estrategia planeada considera una posición de operación para el rotor cuando este haya llegado a su velocidad final y una posición de inicio donde comenzará el arranque del rotor.

La respuesta numérica del sistema Rotor-Chumacera móvil se obtuvo a través de la programación del modelo matemático, descrito en la sección (2.4) considerando las propiedades geométricas señaladas en la **Tabla 1** mediante el software *Matlab-Simulink R2014a*. Se consideró que el rotor parte del reposo hasta alcanzar las 4000rpm (418 rad/s) en un tiempo final de 40 s. Para la trayectoria de velocidad se utilizó un perfil dictado mediante el polinomio de Bézier Figura (4.2). El polinomio de Bézier de quinto grado está regido bajo la ec. (4.1). Esta trayectoria ofrece el beneficio de un bajo esfuerzo de control ante una referencia distante del punto de inicio en un tiempo relativamente corto.

$$\omega_d = \omega_o + (\omega_f - \omega_o) \left(\frac{t - t_o}{t_f - t_o} \right)^5 \left[\sum_{i=0}^{i=5} (-1)^i \gamma_i \left(\frac{t - t_o}{t_f - t_o} \right)^i \right] \quad (4.1)$$

dónde:

- $\omega_o = 0$, es la velocidad inicial. y $\omega_f \approx 418$ rad/s se refiere a la velocidad final.
- $t_o = 0$ s, es el tiempo de inicio, $t_f = 40$ s es el tiempo en el que se alcanza la velocidad final.
- $\gamma_0 = 252$, $\gamma_1 = 1050$, $\gamma_2 = 1800$, $\gamma_3 = 1575$, $\gamma_4 = 700$ y $\gamma_5 = 126$ son los parámetros propios del algoritmo de Bézier.

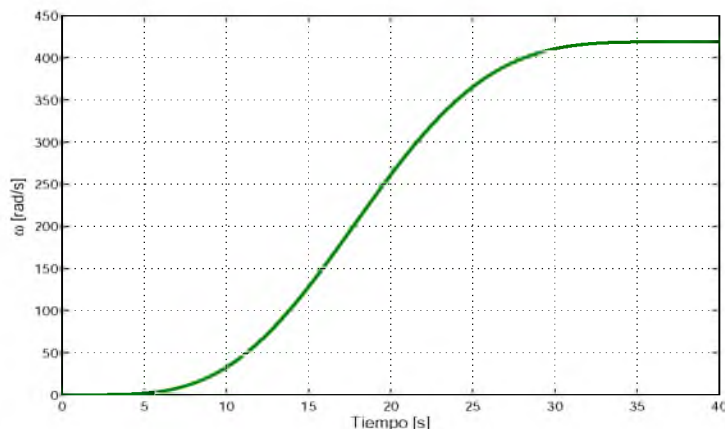


Figura 4.2: Perfil de velocidad planificado para el rotor.

En la Figura (4.3) se observa la trayectoria de velocidad del rotor, $\omega(t)$, en comparación con el perfil deseado $\omega_d(t)$, así como el error $e(t) = (\omega_d - \omega)$. La simulación se realizó aplicando un esquema de control PI considerando la configuración de rotor tipo *Jeffcott*, las ganancias del control son: $K_p = 15$ y $K_i = 3$.

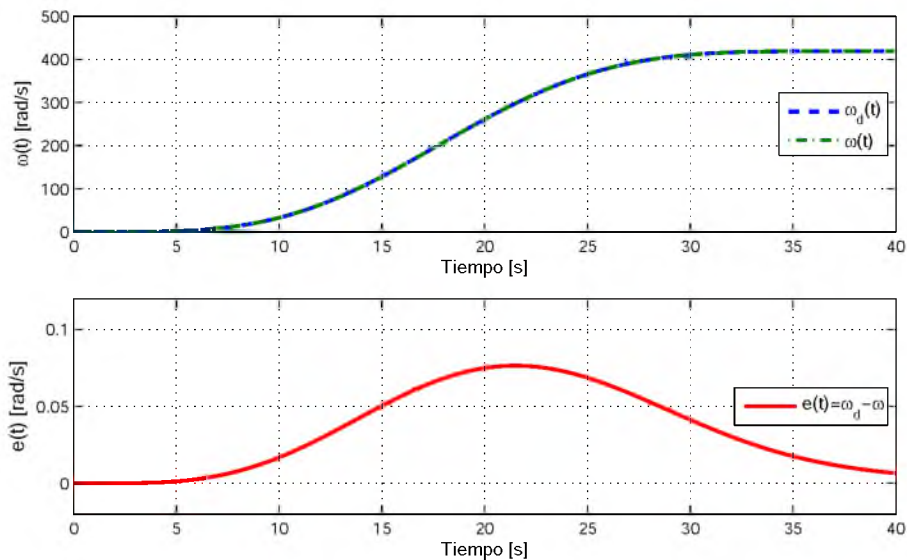


Figura 4.3: a) Seguimiento trayectoria de la velocidad $\omega_d(t)$, b) Función del error $e(t)$.

La velocidad del rotor sigue la trayectoria planificada presentando apenas una ligera desviación pasados los 20 s. Con los parámetros anteriores del control PI para el rotor se llevarán a cabo las pruebas en lazo abierto para el sistema Rotor-Chumacera móvil, quedando así, solo la sintonización para el control del servomecanismo Chumacera móvil.

Se utilizó el esquema de control PID para la modificación de la posición del servomecanismo Chumacera móvil, considerando que el cambio de posición debe ser en el menor tiempo posible. Se sintonizan las ganancias del controlador para alcanzar una posición de referencia de $z_d = 80$ mm, mediante el seguimiento del perfil de Bézier, estableciendo que alcance la posición de referencia en 3 s.

La implementación del control PID resulta en un comportamiento preciso del servomecanismo, la cual, se puede observar que alcanza la referencia sin presentar variaciones que sobrepasen el 2% del perfil de seguimiento con apenas un mínimo esfuerzo de control, como se observa en la Figura (4.4), ($K_p = 1500$, $K_i = 550$ y $K_d = 15$).

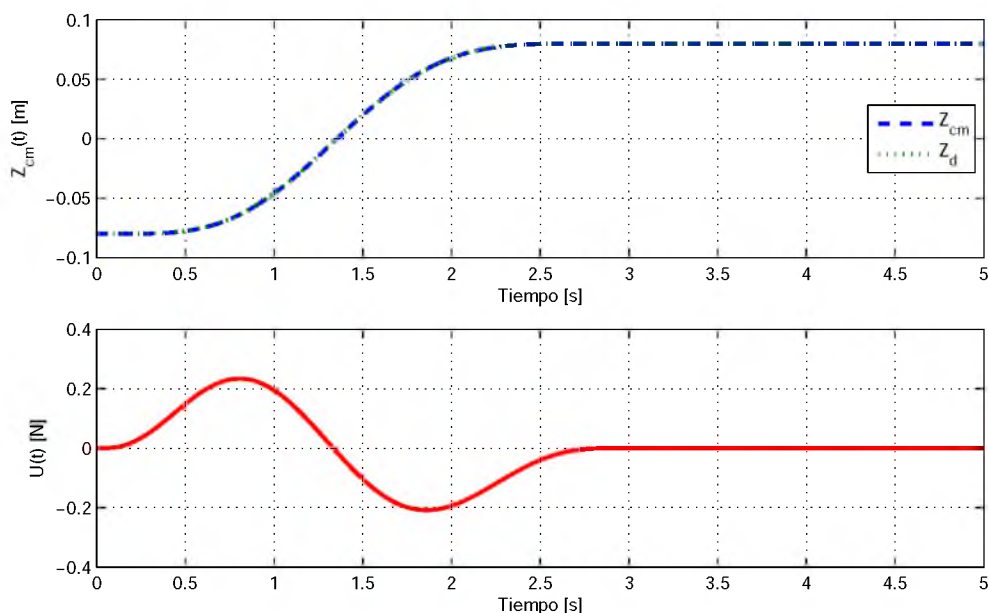


Figura 4.4: Aplicación del control para el servomecanismo Chumacera móvil a) Movimiento de la chumacera $z(t)$ y b) Esfuerzo de control $U(t)$.

Debido a que se propuso un cambio de posición de la chumacera, desde un punto z_o hasta un punto z_f como estrategia para atenuar las vibraciones en el rotor, es necesario determinar las frecuencias resonantes del sistema para ambas posiciones del soporte móvil.

Estas posiciones se consideran arbitrarias para este trabajo, quedando abiertas a cualquier otras dentro de los límites mecánicos del propio sistema. Siendo así que supondremos una posición de flecha corta cuando la chumacera móvil se encuentre la posición $z_o = -0,08$ m, más próxima al disco inercial y una posición de flecha larga cuando se encuentre la posición $z_f = 0,08$ m, es decir, cuando este en un punto más alejado del rotor (una distancia equivalente en el sentido contrario a la configuración anterior).

Considerando que, el eje vertical se ve afectado por la fuerza de gravedad las oscilaciones del rotor (vibraciones) serán de mayor amplitud en él, siendo así que las pruebas realizadas, así como la estrategia de control, están concentradas en el eje Y . Además se prioriza el monitoreo del sistema en las oscilaciones presentes en el disco inercial, puesto que es el elemento de interés en la rotomáquina.

En la **Tabla 2** se observan los valores que tomarán los elementos finitos para cada prueba.

Tabla 2		Longitud de cada elemento finito en pruebas de lazo abierto			
No. Prueba	z (m)	l_1 (m)	l_2 (m)	l_3 (m)	l_4 (m)
1	0	0,15	0,3	0,3	0,25
2	-0,08	0,15	0,3	0,22	0,33
3	0,08	0,15	0,3	0,38	0,17

4.2.1. Prueba 1 : Rotor simétrico

En la primera prueba el soporte se encuentra en la posición $z(0) = 0$ m Figura (4.5), es decir, la distancia entre soportes con respecto al disco inercial es tal que se considera un rotor tipo *Jeffcott*. Esta es la configuración analizada en la literatura, aunque limitada a solo dos elementos finitos. Aquí se presenta en un modelo más extendido que se aproxima a la realidad de las máquinas.

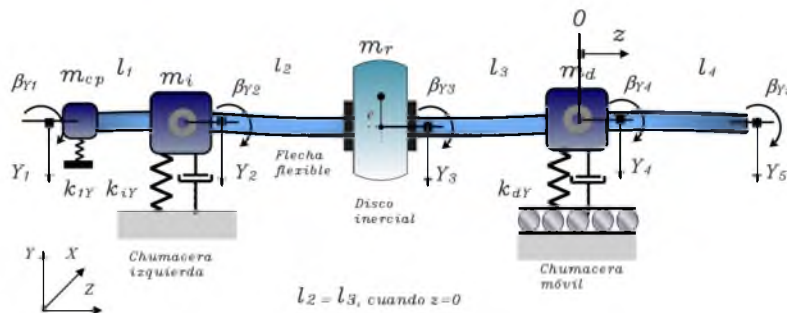


Figura 4.5: Rotor simétrico (*Jeffcott*), utilizado para la prueba número 1

En la Figura (4.6)a se muestran las oscilaciones con amplitud de 1.7 mm que presenta el rotor y la respuesta mediante la transformada rápida de Fourier FFT Figura (4.6)b, se observan el cruce por la primera velocidad crítica a $\omega_{p1} = 160,8 \text{ rad/s}$ (1535rpm). En esta velocidad se presenta la frecuencia resonante donde alcanza una amplitud máxima de oscilación.

óptima de operación. Mientras se incrementa la velocidad es apreciable un aumento en las oscilaciones que es provocado por el extremo libre del rotor (*elemento finito 4*), el cual actúa como una viga en cantilever debido a la combinación de su longitud y la masa que representa.

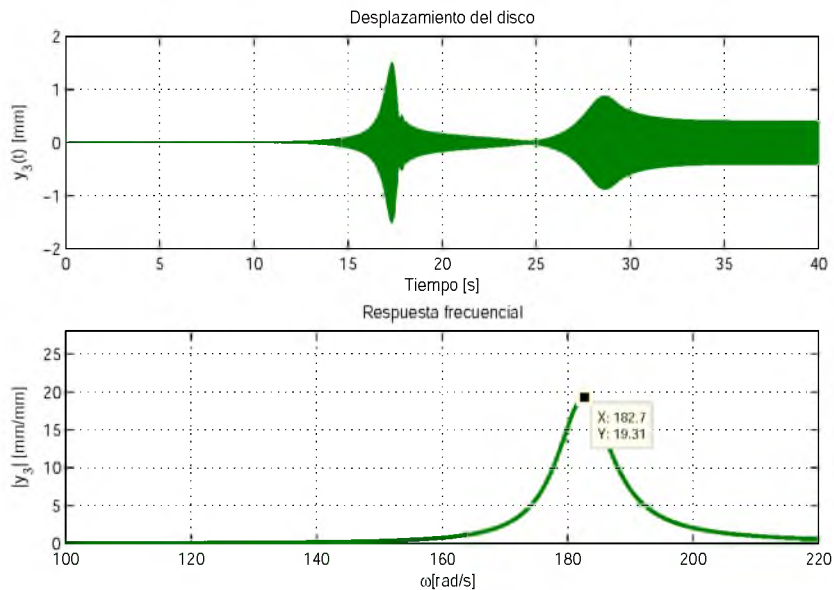


Figura 4.8: a) Desplazamiento del disco inercial en el eje Y, b) Respuesta a la transformada rápida de Fourier (FFT).

4.2.3. Prueba 3 : Rotor asimétrico flecha larga

Para la tercera prueba el soporte móvil se ubica en $Z = 0,08$ (m), como se observa en la Figura (4.9), se considera en esta ocasión como un rotor asimétrico de flecha larga, al tener una longitud mayor la flecha se torna más flexible lo que se traduce en una menor rigidez y así se alcanza la resonancia a una velocidad crítica menor que en los casos anteriores.

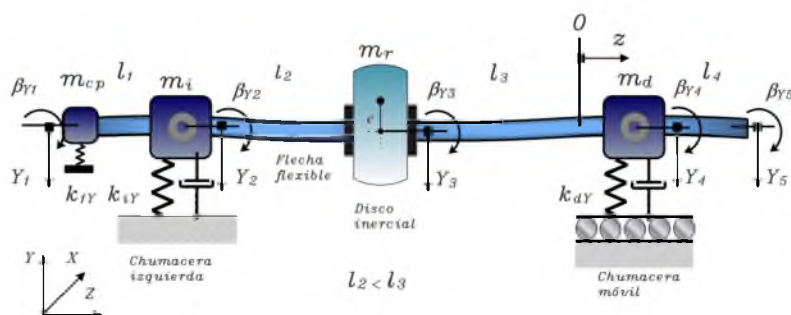


Figura 4.9: Rotor asimétrico con flecha larga

En la Figura (4.10) existe una resonancia en la velocidad $\omega_{p3} = 141,1 \text{ rad/s}$ (1346rpm). Las oscilaciones de mayor amplitud se alcanzan a una velocidad menor que las pruebas anteriores, conservando oscilaciones de menor amplitud en estado estacionario.

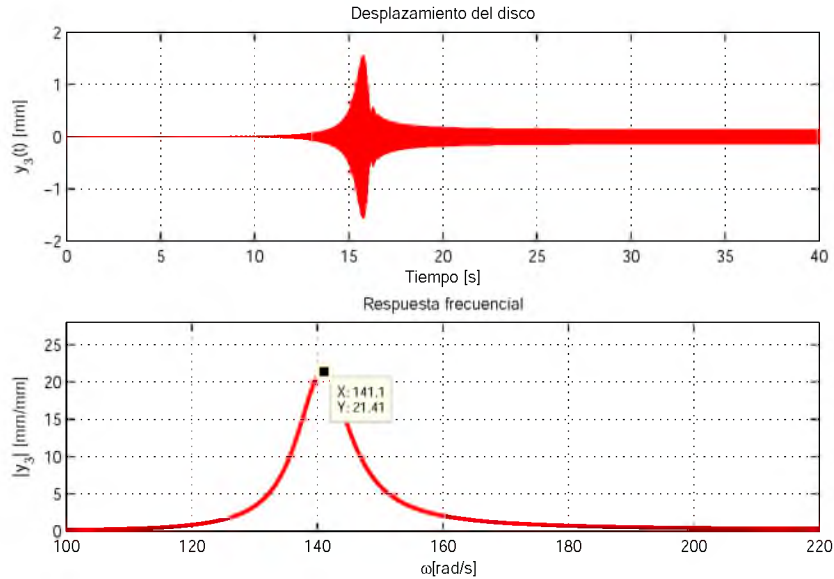


Figura 4.10: a) Desplazamiento del disco inercial en el eje Y . b) Respuesta a la transformada rápida de Fourier (FFT)

4.3. Aplicación del control semi-activo

En la Figura (4.11) se muestra una comparación de las pruebas realizadas mediante simulación. Como se aprecia existe una mayor amplitud del desbalance cuando el rotor se encuentra en la configuración simétrica, mientras que la prueba realizada en la configuración de flecha corta presenta una amplitud menor en la frecuencia resonante.

Considerando la Figura(4.11) se establecen los criterios para la trayectoria que deberá seguir el servomecanismo, a fin de evitar los picos de resonancia. Como se aprecia, existe una diferencia de velocidad de aproximadamente 40 rad/s entre el primer y tercer pico. En la **Tabla 3** se muestra los datos geométricos de la flecha l y la posición de la chumacera $z(t)$ en cada una de las pruebas de lazo abierto en un barrido frecuencial de 0 a 418 rad/s.

No. Prueba	Comparación de los resultados de pruebas en lazo abierto (ω_p es la frecuencia en la resonancia)						
	z [m]	l_1 [m]	l_2 [m]	l_3 [m]	l_4 [m]	ω_p [rad/s]	ω_p [rpm]
1	0	0.15	0.3	0.3	0.25	160.8	1535
2	-0.08	0.15	0.3	0.22	0.33	182.7	1743
3	0.08	0.15	0.3	0.38	0.17	141.1	1346

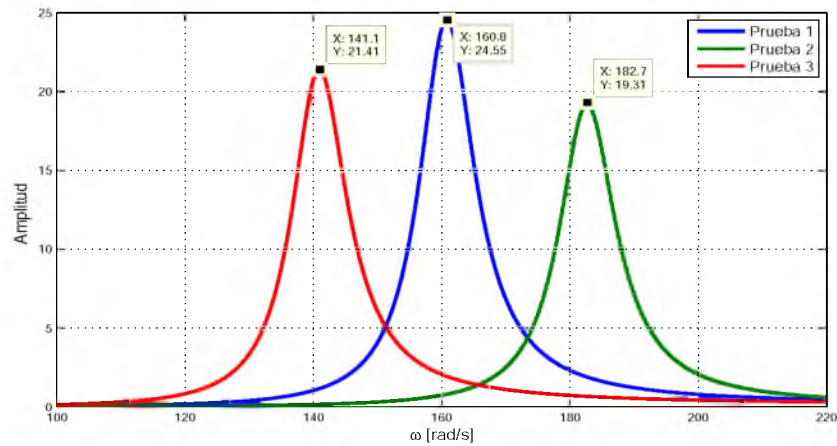


Figura 4.11: Comparación de las pruebas en lazo abierto

Para la planificación de la trayectoria de posición del servomecanismo, evitando los picos de frecuencias resonantes, el servomecanismo debe desplazarse de la posición $z = -0,08$ hacia la posición de $z = 0,08$, además, puesto que dichas velocidades tienen como punto medio la posición de $z = 0$ también debe de evitarse. Lo anterior involucra planificar la trayectoria entre las velocidades de $165,5 \text{ rad/s}$ y $173,5 \text{ rad/s}$, Figura (4.12), ya que son los puntos con menor amplitud dentro del rango establecido por las pruebas, es decir, que presentan menos oscilaciones.

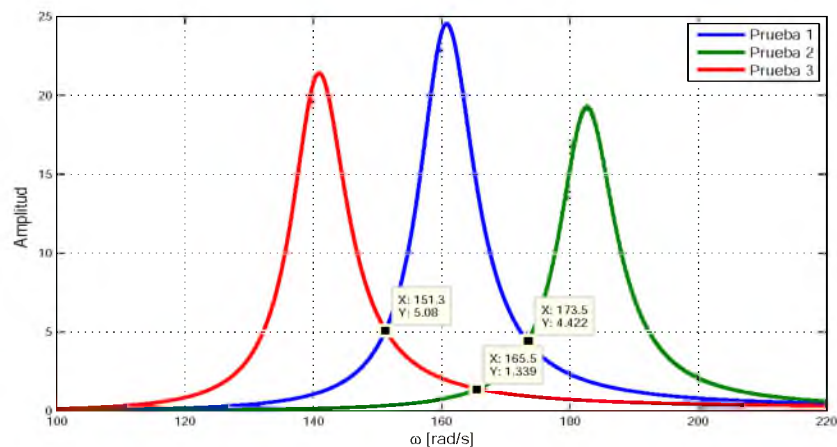


Figura 4.12: Ubicación de los puntos de cruce para la planificación de la trayectoria de desplazamiento

El perfil para el desplazamiento del servomecanismo fue basado en la velocidad angular $\omega(t)$. Mediante esta estrategia de control se reduce la respuesta al desbalance en la resonancia.

La trayectoria de z en la simulación, se planifica que el servomecanismo parta de la posición inicial $z(t) = 0$ m, hasta alcanzar la posición de $z = -0,08$ m en un tiempo de 3 s mediante una trayectoria de Bézier. Se mantiene en esta posición hasta alcanzar la segunda velocidad de cruce $\omega_{c2} = 165,5$ rad/s, a partir de allí comenzará una trayectoria, dictada por una curva de Bézier, hasta alcanzar la posición de $z = 0,08$ m, en un periodo de 8 rad, que tiene como punto final la tercera velocidad de cruce $\omega_{c3} = 173,5$ rad/s. Este movimiento es descrito por la función en la ec. (4.2) y mostrado en la Figura (4.13).

$$z(\omega) = \begin{cases} z_0 + (z_1 - z_0) \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} \right)^5 \left[\sum_{i=0}^{i=5} (-1)^i \gamma_i \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} \right)^i \right] & 0 \leq \omega \leq 2 \text{ rad/s} \\ z_1, & 2 \leq \omega \leq 165.5 \text{ rad/s} \\ z_1 + (z_2 - z_1) \left(\frac{\omega - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \right)^5 \left[\sum_{i=0}^{i=5} (-1)^i \gamma_i \left(\frac{\omega - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \right)^i \right] & 165,5 \leq \omega \leq 173,5 \text{ rad/s} \\ z_2, & \omega \geq 173.5 \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \text{ m}, z_1 = -0.08 \text{ m}, z_2 = 0.08 \text{ m} \\ \omega_0 &= 0 \text{ rad/s}, \omega_1 = 165.5 \text{ rad/s}, \omega_2 = 173.5 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (4.2)$$

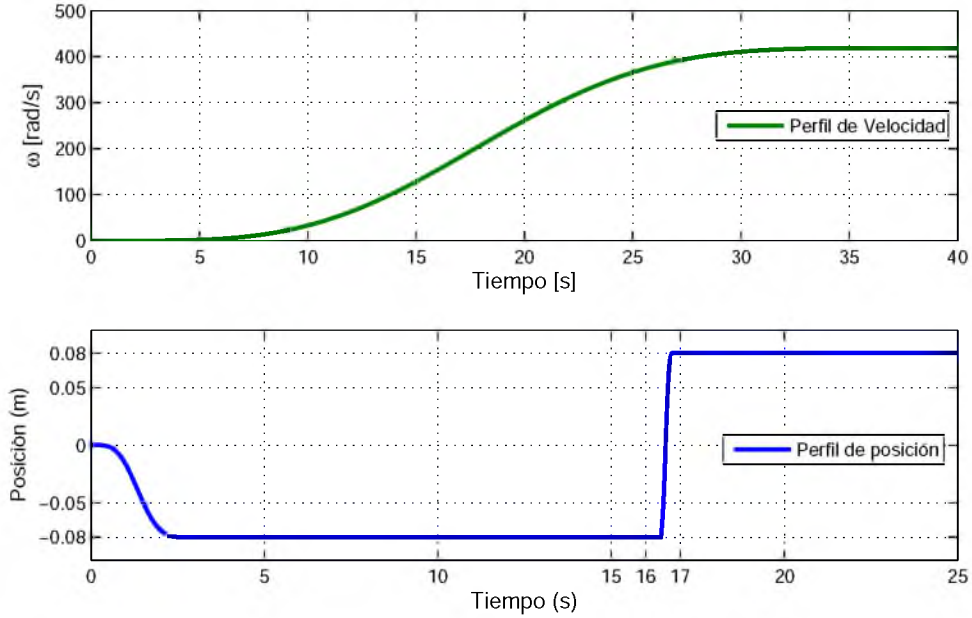


Figura 4.13: Perfil de velocidad vs perfil de posición

Se utilizo la segunda velocidad de cruce para comenzar la trayectoria debido a que se evita el segundo pico de resonancia. De utilizarse la primera velocidad de cruce se sumaria el efecto resonante al momento de cruzar por la posición de $z = 0$ m.

En la prueba del control semi-activo se aprecia una reducción en la amplitud de las oscilaciones presentes en el disco. Asimismo se reduce la duración de dichas oscilaciones siendo la característica más favorable, debido a que cuanto menor sea su duración, menor será el desgaste/daño que presente el sistema Figura (4.14). Se observa que la señal de respuesta en frecuencia no pasa de una amplitud mayor a $|5|$, contrario a las pruebas en lazo abierto en donde las amplitudes se encontraban en el rango de $|20|$ a $|25|$ (Ver Figura (4.11))

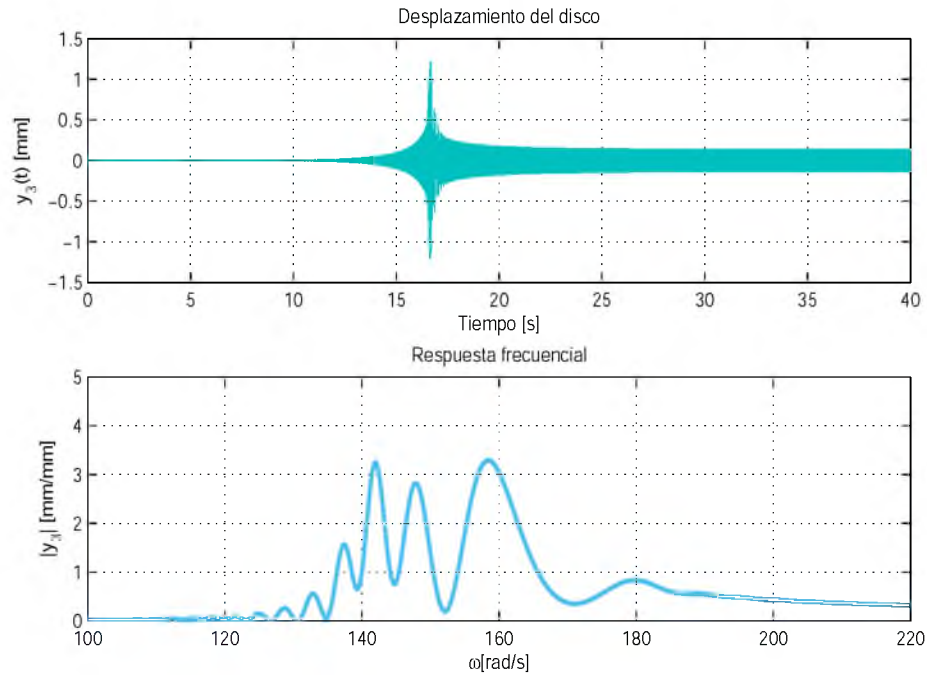


Figura 4.14: Respuesta en frecuencia al aplicar la estrategia de control semi-activo mediante el servomecanismo Chumacera móvil.

Aunque dichos picos están presentes mucho antes de que comience el movimiento de la chumacera móvil, esto se atribuye a los cálculos que realiza el software y no al comportamiento propio del servomecanismo. Durante el periodo de la trayectoria generada se observa que la señal tiende a permanecer cerca de cero.

Analizando la Figura (4.15) se observa que, para lograr que el control semi-activo funcione dentro del rango de velocidades establecido, siguiendo el perfil de Bézier, es necesario un esfuerzo de control u de 679,3 N. Esto excede las capacidades con las cuales cuenta el servomecanismo.

Mediante la realización de pruebas y aumentando el rango de velocidades, se establece la trayectoria z entre las frecuencias $\omega_1 - \delta = 163 \text{ rad/s}$ y $\omega_2 + \delta = 176 \text{ rad/s}$ ($\delta = 2,5 \text{ rad/s}$). Se logró reducir el esfuerzo de control, con un comportamiento similar en la respuesta en frecuencia mostrado en la Figura (4.16). Obsérvese que el esfuerzo máximo requerido es $|u| = 15,4 \text{ N m}$, lo que se considera como un esfuerzo dentro de las capacidades del servomecanismo.

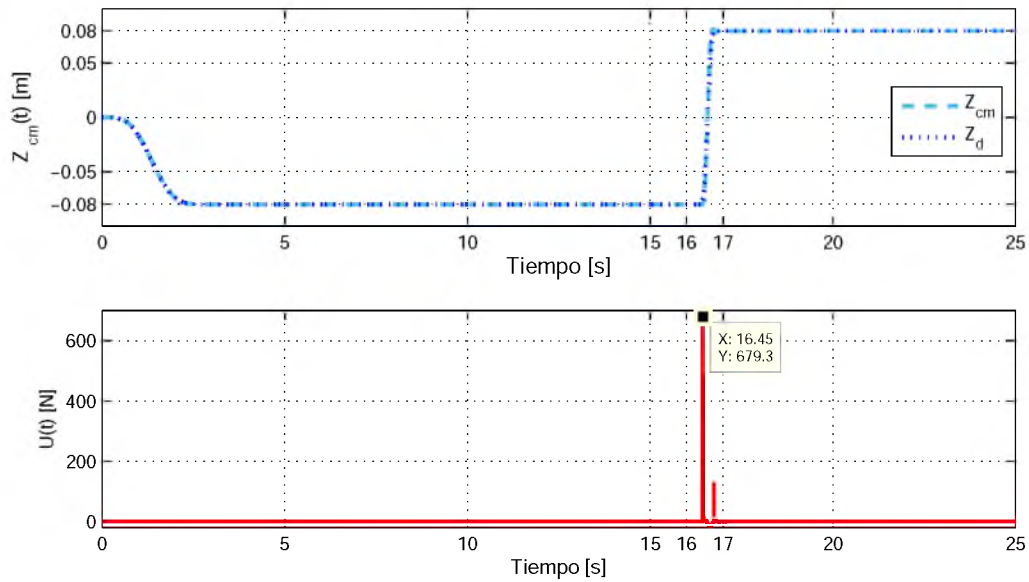


Figura 4.15: a) Comparación de la respuesta del sistema contra la trayectoria planificada $z(t)$ b) Esfuerzo de control $u(t)$ para el cambio de posición

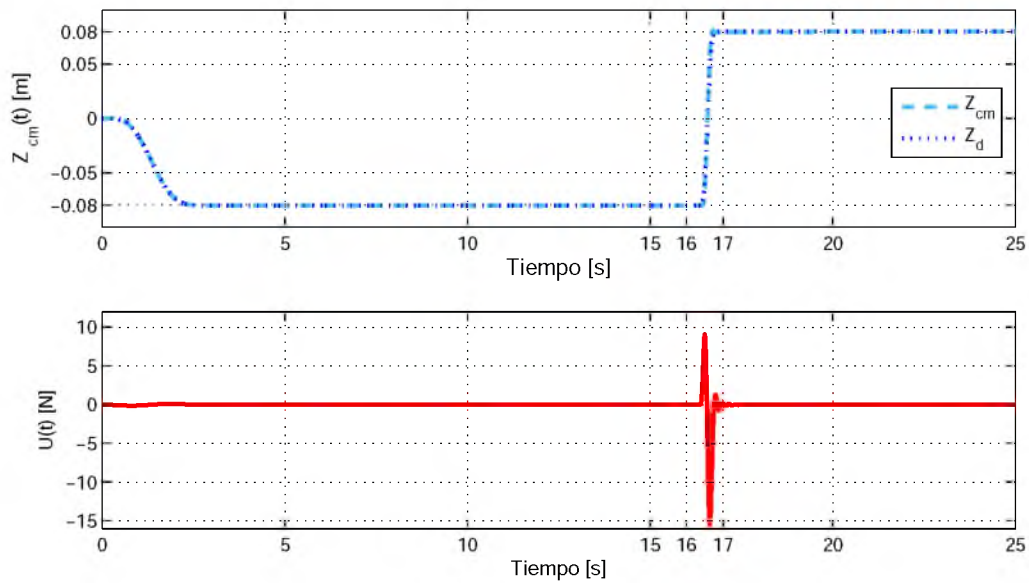


Figura 4.16: a) Comparación de la respuesta del sistema contra la trayectoria planificada, b) Esfuerzo de control para el cambio de posición

En la Figura (4.17) se observa la comparación del comportamiento del rotor en las pruebas de lazo abierto contra el comportamiento una vez aplicado el esquema de control semi-activo. Se aprecia las oscilaciones en el disco del rotor, pero a diferencia de las demás, estas son de menor duración y menor amplitud. Lo anterior es debido a que el rotor gira a una velocidad próxima a la velocidad de resonancia en el momento que cruza rápidamente por el punto medio cuando $z = 0$, es decir, el tiempo que se encuentra en esta velocidad no es lo suficiente como para generar más oscilaciones

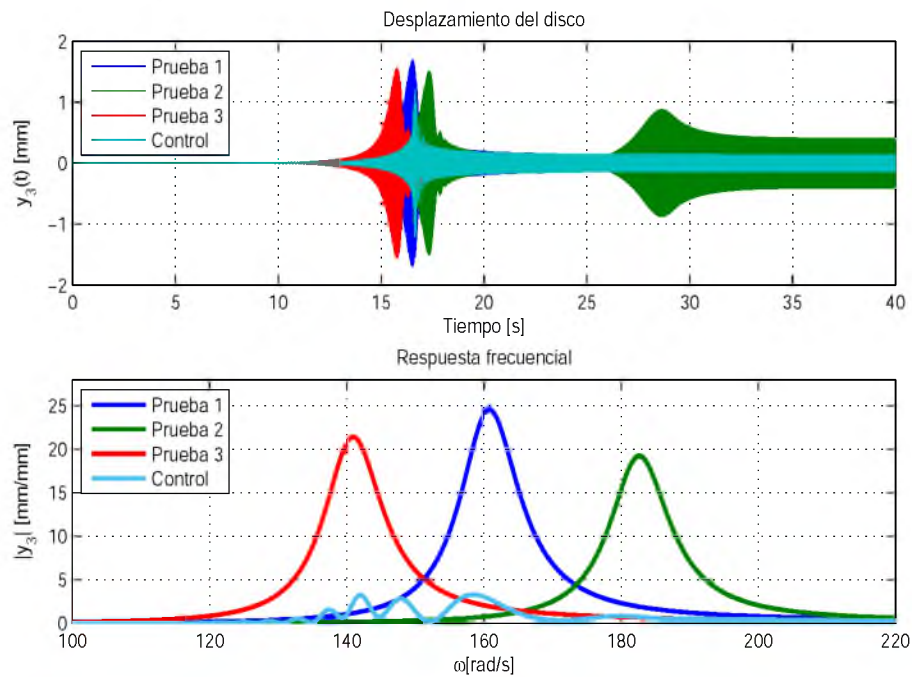


Figura 4.17: Respuesta final de la aplicación de control semiactivo mediante el servomecanismo Chumacera móvil

Capítulo 5

Pruebas adicionales

5.1. Control semi-activo mas contrapeso

Durante las pruebas en lazo abierto y las pruebas de control semi-activo se notó una respuesta inesperada en el comportamiento del rotor. Se apreció que al incrementar la longitud del último elemento de la flecha l_4 aparecía un segundo efecto de resonancia en el rotor Figura (5.1). Este efecto aumentaba en medida que se incrementó dicha longitud y a su vez la amplitud de la primera resonancia disminuía.

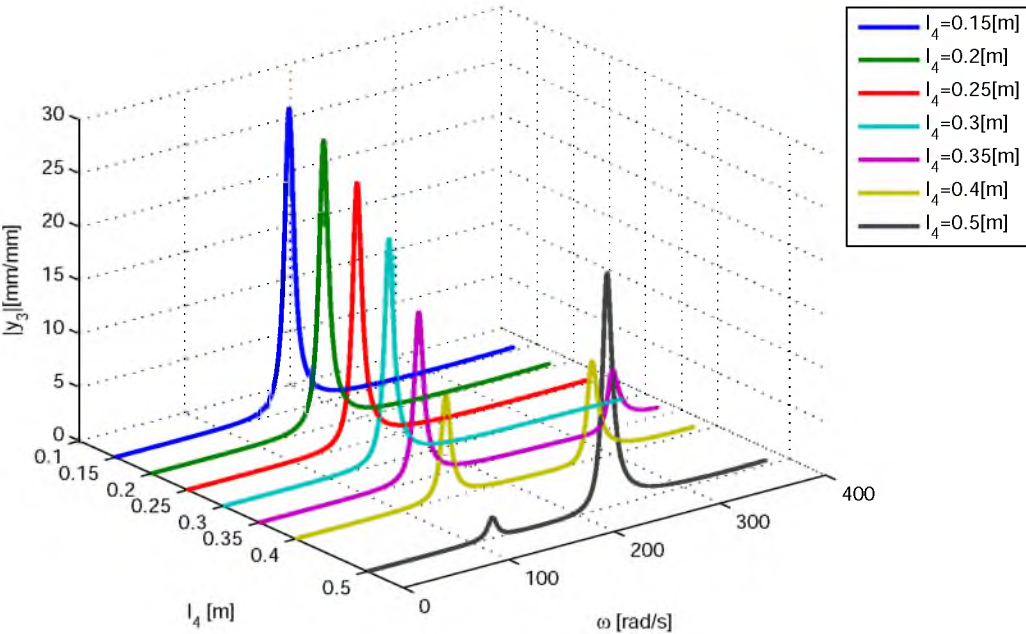


Figura 5.1: Respuesta al desbalance en el disco y_3 ante la variación de la longitud del elemento finito l_4 .

Lo anterior generó una idea para complementar la estrategia de control de cambio de posición. Y es, en esencia utilizar una masa en el extremo libre que funcione como contrapeso y absorbedor de vibraciones Figura(5.2).

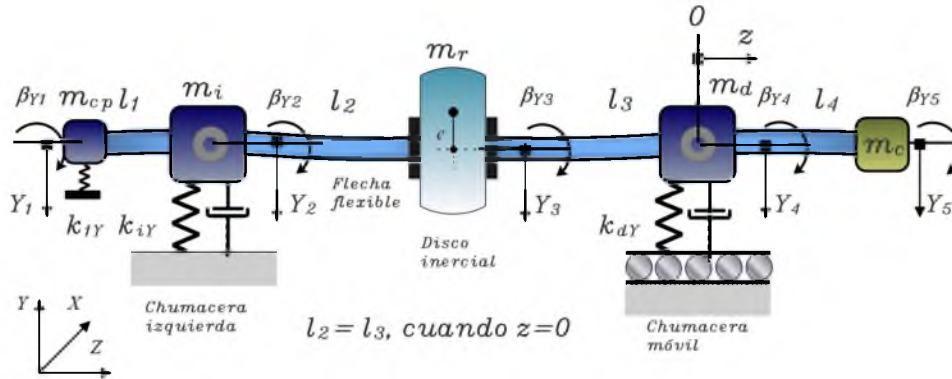


Figura 5.2: Rotor con chumacera móvil y contrapeso.

En la Figura (5.3) se muestra una prueba realizada con un contrapeso equivalente a un décimo del peso del disco, es decir una masa concentrada en el extremo libre $m_c = 0,19 \text{ kg}$. Esta masa se selecciona arbitrariamente, respetando su colocación en el extremo de la flecha. Los parámetros de referencia y de control son los mismos a las pruebas anteriores.

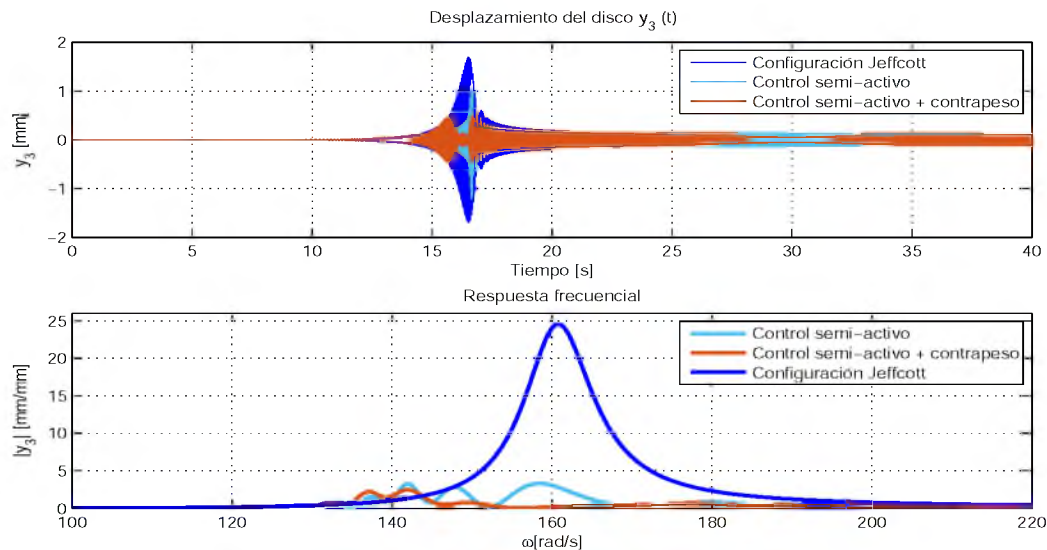


Figura 5.3: Respuesta comparativa $y_3(t)$ entre esquema semi-activo control de la rigidez, control semi-activo mas contrapeso y respuesta sin control.

Se observa que la amplitud de las oscilaciones en el disco del rotor son considerablemente reducidas, así como la duración de las mismas. Aunque las oscilaciones siguen presentes

dentro del rango de operación de la máquina, las amplitudes en la respuesta en frecuencia son reducidos cerca del 80% en comparación al comportamiento de una configuración del rotor tipo Jeffcott.

En la Figura (5.4) se aprecia el esfuerzo de control que se necesita con esta variante de control. Este es prácticamente igual al de la estrategia de control de cambio de posición, lo cual representa un mejor comportamiento del sistema con los mismos recursos.

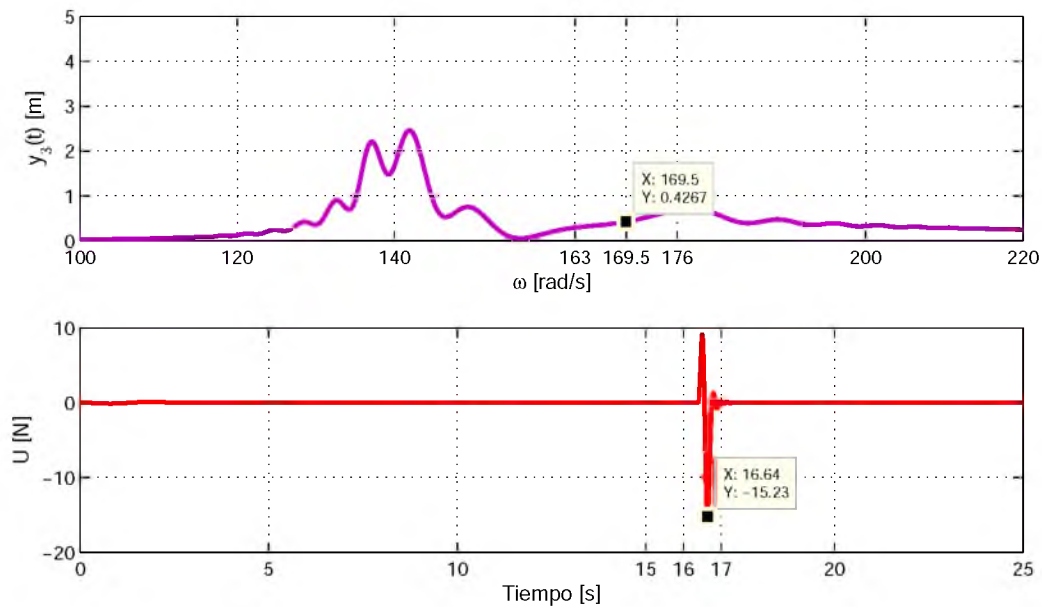


Figura 5.4: a) Respuesta en frecuencia $y_3(t)$ del control semi-activo con contrapeso y b) Esfuerzo de control $u(t)$.

Capítulo 6

Conclusiones generales y trabajos futuros

Sin duda las máquinas rotativas permanecen en un papel de suma importancia y fundamental, cambiando apenas un poco desde sus inicios. Aunque los elementos que la conforman han evolucionado para mejor con los años, su principal problema, la problemática de vibraciones y desbalance, ha continuado presente a pesar de las muchas investigaciones de las cual ha sido objeto.

En el presente trabajo se abordó la problemática de las vibraciones en un rotor, visto bajo la premisa de evitar las frecuencias resonantes del sistema, proponiendo un modelo matemático más extenso que los clásicos y tratando de aproximarlos más a la realidad de las máquinas, en conjunto con un esquema de control semi-activo (modificación de la rigidez) basado en el cambio de posición de uno de sus soportes.

A continuación se discutirán las pruebas realizadas mediante simulación y se formularán las conclusiones referentes a este proyecto de tesis, basadas en los objetivos. Posteriormente se hará mención de los posibles trabajos a futuro que se pueden realizar a partir de la finalización del prototipo rotor-chumacera móvil.

6.1. Conclusiones

Es claro que para representar de manera completa un sistema real deben considerarse propiedades intrínsecas de cada uno de ellos, las cuales pueden, de manera general, ser introducidas en el modelo presentado en el presente trabajo. Con este modelo extendido del típico Rotor tipo *Jeffcott* es posible observar el comportamiento que presentan los principales puntos de interés del sistema (disco inercial, punto de contacto de chumacera, extremos de la flecha). Con lo anterior se da por cumplido dos de los siete objetivos establecidos para la presente tesis.

Considerando la velocidad a la cual trabaja el rotor fue posible reducir de manera significativa las vibraciones presentes en elemento de interés del rotor (disco inercial). Esto se logró mediante la implementación del control semi-activo.

Se observaron también algunos efectos inesperados que llevaron a realizar simulaciones no

contempladas al inicio de la presente tesis. Con lo cual se abre la oportunidad al estudio de los efectos que tienen los elementos secundarios de un rotor. Así, se cumple con dos objetivos más de los propuestos.

Por otra parte, se logró realizar un diseño y posteriormente se manufacturaron los elementos que conformarían el servomecanismo mediante el uso de la maquinaria disponible en la universidad. Estos elementos fueron mecanizados siguiendo los estándares de fabricación para elementos de máquinas. Sin embargo, la falta de herramientas especiales para el alineamiento de todos los elementos provocó que el desalineamiento en el sistema aumentará gradualmente en todas las piezas rotatorias de la máquina. Para reducir este desalineamiento se contemplaron en la etapa de diseño: Un cople flexible, que ayuda a corregir el desalineamiento entre el motor y las poleas. Un rodamiento autoalineable, que compensa el desalineamiento entre la chumacera fija y la chumacera móvil. Siendo así, que se concluyeron los objetivos establecidos para la tesis.

Finalmente, es importante mencionar que el sistema obedece al patrón de comportamiento del modelo del rotor *Jeffcott*. Es decir, las amplitudes aumentan a medida que la velocidad de operación se acercaba a la frecuencia natural. Con la implementación de la chumacera móvil se establecen varias configuraciones de rotor, cambio de longitud de la flecha, las cuales pueden ser sujeto de estudios, a fin de establecer una trayectoria de posición óptima para las velocidades de arranque, operación y paro del rotor. Y mediante el modelo presentado, es posible simular rotores de uso general.

6.2. Trabajos futuros y sugerencias

Los resultados obtenidos en la simulación del sistema prospectan una línea de trabajo para la implementación del esquema de control, para lo cual se proponen una serie de actividades antes de llegar a un resultado concluyente. A continuación se proponen algunas de ellas:

- Instrumentación: Dotar de sensores y equipos de medición la plataforma experimental Rotor-Chumacera móvil, que permitan observar las vibraciones presentes en el disco inercial, así como la precisa ubicación del soporte móvil.
- Fuente de potencia: Establecer etapas de potencia que permitan controlar a plenitud los motores asignados para la plataforma.
- Validación: Experimentar con la plataforma para llevar a cabo la validación del modelo propuesto, en su defecto establecer un modelo aproximado mediante la identificación de parámetros.
- Implementación: Aplicar el esquema de control semi-activo desarrollado en el presente.

Por otra parte, se propone que el buje que soporta el deslizamiento de la flecha sea cambiado por otro de algún material con menor fricción, sea un bronce lubricado (*S.A.E.* 62/40/64) que permitan un deslizamiento suave de la flecha. Aunque se recomienda la utilización de un bronce grafitado que es el material antifricción de más alto desarrollo

comercial que ofrece ventajas superiores a un bronce lubricado estandar como los son: una duración mas prolongada de vida, menor desgaste en las contrapiezas y menor peso que los bronce convensionales.

También se puede considerar la utilización del *Babbitt*, un metal antifricción. Existiendo dos tipos, uno con base en estaño y otro con base en plomo. Ambos utilizados para condiciones de carga y velocidad en un movimiento deslizante de dos superficies metalicas de diferente dureza.

Se sugiere también, la alineación del sistema mediante dispositivos especificos para ello. Con lo cual se buscará reducir los efectos de desalineamiento a fin de establecer un sistema ideal.

Para la etapa de sensado de posición se recomienda establecer un equipo extra, para confirmar el desplzamiento realizado por la chumacera móvil. El motor maxon cuenta con encoders de efecto Hall, aunque primeramente deberia sensarse y establecer los límites de movimiento del servomecanismo.

Bibliografía

- [1] D.W. Childs, *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis*, 1993.
- [2] V. Wowk. *Machinery vibration: Balancing*, Mc-Graw Hill, 1995.
- [3] J.M. Vance, *Rotordynamics of Turbomachinery*. John Wiley & Sons, NY, 1988.
- [4] Lee, Chong-Wong, *Mechatronics in rotating machinery*, 7th IFToMM - Conference on Rotordynamics, Vienna, Austria, pp. 1-16, 2006.
- [5] Lin, Y-H. and Yu, H-C., Active modal control of a flexible rotor, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 18, Num. 5, pp. 334-347, 2004.
- [6] Yu, H-C.; Lin, Y-H. and Chu C-L., Robust modal vibration suppression of a flexible rotor, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, No. 1, pp. 334-347, 2007.
- [7] Lewis, A. S.; Sinha, A. and Wang, K. W., Sliding mode output feedback control of a flexible rotor supported by magnetic bearings, *International Journal of Rotating Machinery*, Vol. 7, No. 2, pp. 117-129, 2001
- [8] .P.Y. Couzon and J. D. Hagopian, Neuro-fuzzy active control of rotor suspended on active magnetic bearings, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 13, No. 4, pp. 365-384,2007.
- [9] Chen, Y-H. and Huang, Y-H., Timoshenko beam with tuned mass dampers and its design curves, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 278, pp. 873-888, 2004.
- [10] G. Silva-Navarro and A. Cabrera-Amado. Semiactive Sliding-Mode Control of the Unbalance Response in a Rotor-Bearing System Supported on MR Dampers, *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4513-4518, New Orleans, USA, 2007.
- [11] G. Silva-Navarro, F. Lopez-Medina and A. Cabrera-Amado, Unbalance compensation in a rotor-bearing system by dynamic stiffness control and acceleration scheduling, *IS-MA2010 International Conference on Noise and Vibration Engineering*, Katholieke Universiteit Leuven (Belgium), September 2010.
- [12] H. H. Jeffcott, "The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed-the effect of want of balance," *Phil. Mag.*, vol. 37, 1919.

- [13] C.W. De Silva, *Vibration: Fundamentals and Practice*, CRC Press, Boca Raton, FL 2000.
- [14] S. Zhou and J. Shi, Active balancing and vibration control of rotating machinery: a survey, *The Shock and Vibration Digest*, 33-4, pp. 361-371, 2001.
- [15] H. van Brussel, P. Sas, W. Dehandschutter, P. Van den Braembussche and Indrawanto. New Methods for Active and Semi-Active Vibration Control in Machines. *Dept. of Mech. Eng., Katholieke Universiteit Leuven, Belgium*.
- [16] Lei, S. and Palazzolo, A., Control of flexible rotor systems with active magnetic bearings, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 314, No. 1-2, pp. 19-38, 2008.
- [17] A. Blanco-Ortega, G. Silva-Navarro and J.C. Gómez-Mancilla, Dynamic Stiffness Control and Acceleration Scheduling for the Active Balancing Control of a Jeffcott-Like Rotor System, Proc. The tenth International Congress on Sound and Vibration, pp. 227-234, Stockholm, July 2003.
- [18] A. Blanco Ortega, Control del desbalance en sistemas rotor-chumacera utilizando chumacera móvil y presurizada, *Tesis de Doctorado, CINVESTAV, Sección de Mecatrónica, México D.F, Noviembre 2004*.
- [19] Cabrera-Amado A., Arias-Montiel M. and Silva-Navarro G. Vibration Absorption in a Rotor-Bearing System Using a Cantilever Beam Absorber, 7th International Conference on Electrical, Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2010), Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México; September 8-10, 2010
- [20] Stefal Heindel, Fabian Becker, Stephan RinderKnecht, Unbalance and Resonance Elimination with active bearings on a Jeffcott Rotor, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017.
- [21] C. Zhu, D.A. Robb and D.J. Ewins, A Magneto-rheological fluid squeeze film damper for rotor vibration control. *Conference on Structural Dynamics*, February 2002.
- [22] C. Zhu, A disk-type magneto-rheological fluid damper for rotor system vibration control. *Journal of Sound and Vibration*, December 2004.
- [23] Fabian G. Pierart y Ilmar F.Santos, *Lateral vibration control of a flexible overcritical rotor via an active gas bearing—Theoretical and experimental comparisons*, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 383, pp. 20–34, August 2016.
- [24] Xuan, D. J.; Kim, Y. B.; Kim, J. W. and Shen, Y. D., Magnetic bearing application by time delay control, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 15, No. 9, pp. 1307-1324, 2009.
- [25] K.T. Millsaps and G.L. Reed, Reducing lateral vibrations of a rotor passing through critical speeds by acceleration scheduling, *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 120, No. 3, pp. 615-620, July 1998.

- [26] S.S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Addison-Wesley, 3rd edition, NY, 1995.
- [27] S. Graham Kelly, *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*. Mc Graw-Hill, NY, 1996.
- [28] G. Genta, *Dynamics of Rotating Systems*, Springer-Verlag, NY, 2005.
- [29] Gates, *Catalogo de diseño de transmisión por banda del 2016*.
- [30] L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, Mc Graw Hill, 1986.
- [31] M. Rios-Gutierrez, G. Silva-Navarro, Vibration Absorption in a Multi-Mass Mechanical System Using Positive Position Feedback, *Proceedings of the 5th International Conference Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2008)*, Mexico city, D.F., November 12-14, 2008.
- [32] Wells, D. A. 1967. *Lagrangian Dynamics*. Schaum's Outlines, McGraw-Hill, USA.
- [33] A. D. Dimarogonas, "The origins of vibration theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 140, no. 2, pp. 181—189, 1990.
- [34] A. D. Dimarogonas, "A brief history of rotor dynamics," Springer - Keynote Paper Session, 1992.
- [35] Katsuhiko Ogata, *Ingenieria de control moderna*, Quinta edición, Prentice Hall, p. 2, Madrid 2010.
- [36] A.D. Dimarogonas, *Vibration for Engineers*, Prentice Hall, 2a ed., New York, 1995.
- [37] Joseph E. Shigley and Charles R. Mischke, *Diseño en Ingeniería Mecánica*. 6ª edición Mc-Graw Hill, 2002.
- [38] José Luis J. O., *Modelado por Elemento Finito y Manufactura de una Plataforma Experimental Rotor tipo Jeffcott con Modulación de la Velocidad Angular*, Tesis de Licenciatura en Mecatrónica, UNPA, Loma Bonita Oax., Junio del 2018.
- [39] <https://www.gemeasurement.com/>
- [40] G. Silva-Navarro and A. Cabrera-Amado. Semiactive Sliding-Mode Control of the Unbalance Response in a Rotor-Bearing System Supported on MR Dampers, *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4513-4518, New Orleans, USA, 2007.
- [41] Roy R. Craig, Jr. 2002. *Mecánica de Materiales*. Continental México.
- [42] Robert L. Mott. 2006. *Diseño de elementos de máquina*. McGraw-Hill. México.
- [43] Katsuhiko Ogata. 2010. *Ingeniería en Control Moderna*. Pearson Madrid.
- [44] *Catalogo de Rodamientos SKF*.

- [45] Richard G. Budynas and J. Keith Nisbett. 2008. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. McGraw-Hill Interamericana
- [46] R.L. Norton, *Diseño de máquinas*. Prentice Hall, México, 1999.

Apéndice

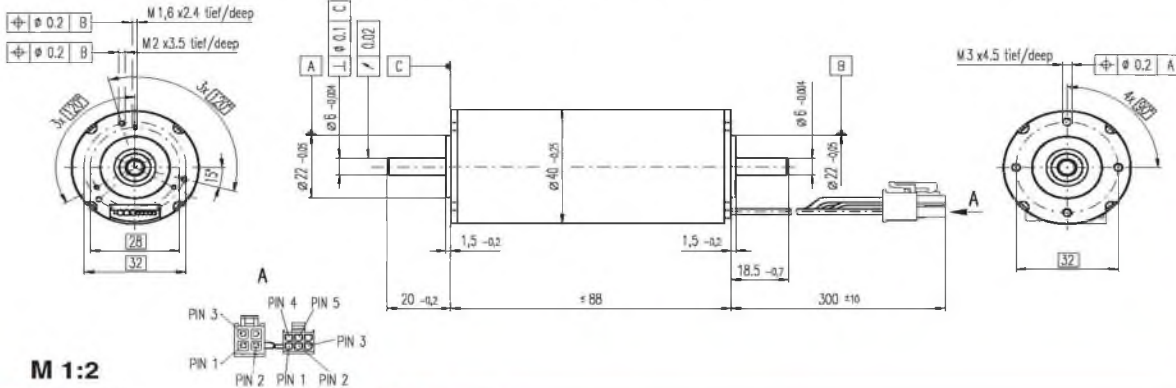
A. Programas y bloques de simulación

31/03/19 09:36PM C:\Users\jmtiv\Desktop\Tesis\Primera redaccion\modelo mat.m 1 of 3

```
function salidas = modelo_mat(p)
%% Vector de datos del diagrama a bloques %%
%%Velocidades de los nodos
Dy1 =p(1);
DBy1 =p(2);
Dy2 =p(3);
DBy2 =p(4);
Dyr =p(5);
DByr =p(6);
Dy3 =p(7);
DBy3 =p(8);
Dy4 =p(9);
DBy4 =p(10);
Dx1 =p(11);
DBx1 =p(12);
Dx2 =p(13);
DBx2 =p(14);
Dxr =p(15);
DBxr =p(16);
Dx3 =p(17);
DBx3 =p(18);
Dx4 =p(19);
DBx4 =p(20);
%%Posiciones de los nodos
y1 =p(21);
By1 =p(22);
y2 =p(23);
By2 =p(24);
yr =p(25);
Byr =p(26);
y3 =p(27);
By3 =p(28);
y4 =p(29);
By4 =p(30);
x1 =p(31);
Bx1 =p(32);
x2 =p(33);
Bx2 =p(34);
xr =p(35);
Bxr =p(36);
x3 =p(37);
Bx3 =p(38);
x4 =p(39);
Bx4 =p(40);
%%Aceleración, Velocidad y Posición angular del rotor
DDphi=p(41);
Dphi =p(42);
Phi =p(43);
%%Posición de la chumacera móvil
Z =p(44);
```


B. Hojas de datos de dispositivos

EC-max 40 Ø40 mm, brushless, 120 Watt



M 1:2

- Stock program
- Standard program
- Special program (on request)

Order Number

283870 283871 283872 283873

Motor Data

Values at nominal voltage		48.0	48.0	48.0	48.0
1	Nominal voltage	V	48.0	48.0	48.0
2	No load speed	rpm	10100	7240	4720
3	No load current	mA	348	202	105
4	Nominal speed	rpm	9280	6290	3770
5	Nominal torque (max. continuous torque)	mNm	164	183	203
6	Nominal current (max. continuous current)	A	3.95	3.08	2.19
7	Stall torque	mNm	2090	1490	1050
8	Starting current	A	46.7	23.7	10.9
9	Max. efficiency	%	84	83	82
Characteristics					
10	Terminal resistance phase to phase	Ω	1.03	2.02	4.40
11	Terminal inductance phase to phase	mH	0.204	0.400	0.937
12	Torque constant	mNm / A	44.8	62.8	96.1
13	Speed constant	rpm / V	213	152	99.4
14	Speed / torque gradient	rpm / mNm	4.89	4.90	4.55
15	Mechanical time constant	ms	5.17	5.19	4.81
16	Rotor inertia	gcm ²	101	101	101

Specifications

Thermal data		
17	Thermal resistance housing-ambient	3.45 K / W
18	Thermal resistance winding-housing	0.29 K / W
19	Thermal time constant winding	3.87 s
20	Thermal time constant motor	1140 s
21	Ambient temperature	-20 ... +100°C
22	Max. permissible winding temperature	+155°C
Mechanical data (preloaded ball bearings)		
23	Max. permissible speed	12000 rpm
24	Axial play at axial load < 10 N	0 mm
	> 10 N	0.14 mm
25	Radial play	preloaded
26	Max. axial load (dynamic)	9 N
27	Max. force for press fits (static) (static, shaft supported)	170 N
		5000 N
28	Max. radial loading, 5 mm from flange	80 N
Other specifications		
29	Number of pole pairs	1
30	Number of phases	3
31	Weight of motor	650 g

Values listed in the table are nominal.

Connection motor (Cable AWG 20)		
red	Motor winding 1	Pin 1
black	Motor winding 2	Pin 2
white	Motor winding 3	Pin 3
	N.C.	Pin 4

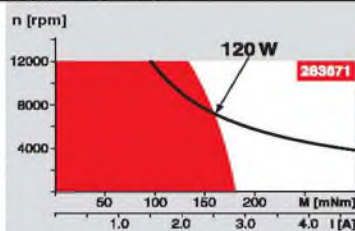
Connector Article number		
Molex	39-01-2040	

Connection sensors (Cable AWG 26)		
yellow	Hall sensor 1	Pin 1
brown	Hall sensor 2	Pin 2
grey	Hall sensor 3	Pin 3
blue	GND	Pin 4
green	V _{Hall} 4.5 ... 24 VDC	Pin 5
	N.C.	Pin 6

Connector Article number	
Molex	430-25-0600

Wiring diagram for Hall sensors see page 27

Operating Range



Comments

Continuous operation
In observation of above listed thermal resistance (lines 17 and 18) the maximum permissible winding temperature will be reached during continuous operation at 25°C ambient = Thermal limit.

Short term operation
The motor may be briefly overloaded (recurring).

Assigned power rating

maxon Modular System

Planetary Gearhead
Ø52 mm
4 - 30 Nm
Page 244



Recommended Electronics:
DECS 50/5 Page 288
DEC 50/5 289
DECV 50/5 295
DEC 70/10 295
DES 50/5 296
DES 70/10 296
EPOS2 50/5 303
EPOS 70/10 303
Notes 20

Overview on page 16 - 21

Encoder MR
256 - 1024 CPT,
3 channels
Page 265

Encoder HEDL 5540
500 CPT,
3 channels
Page 271

Brake AB 28
Ø28 mm
24 VDC, 0.4 Nm
Page 315

DISAI

Automatic Systems

T-962 448 450 www.disai.net

ACOPLAMIENTOS FLEXIBLES



■ Importancia del acoplamiento

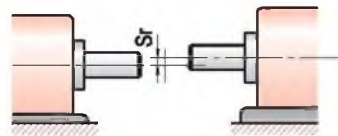
En un gran número de montajes mecánicos se presenta el problema de la transmisión del movimiento entre los ejes o árboles de las máquinas. El acoplamiento es la forma más sencilla de conseguir esta transmisión ya que opera uniendo los extremos de dichos árboles, transmitiendo de esta forma la rotación del uno al otro. De una buena resolución de dicha transmisión depende, no sólo el correcto funcionamiento del equipo, sino también la vida útil de los encóders o máquinas acopladas.

■ Selección

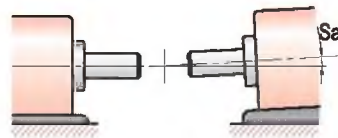
La selección de un acoplamiento debe ser un compromiso entre factores como el coste, el espacio de montaje, la duración prevista y las prestaciones de transmisión, que deben satisfacer los requerimientos tales como:

■ Absorción de las desalineaciones y carga sobre los ejes

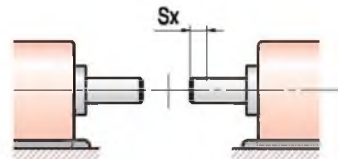
Debido a los errores dimensionales inherentes a todo montaje mecánico, los ejes correspondientes a los árboles a unir mantendrán entre sí unas diferencias posicionales o "desalineaciones" que dificultan la transmisión del movimiento. Estas desalineaciones pueden ser axiales, radiales o angulares.



Desalineamiento radial



Desalineamiento angular



Desplazamiento axial

En todos los casos el sistema de acoplamiento utilizado para la transmisión deberá ser capaz de absorberlas, evitando los efectos nocivos de cargas sobre los ejes, rodamientos, apoyos y bastidores. Las desalineaciones también provocan fatiga o desgaste en el acoplamiento, por tanto, al escogerlo deberá tenerse en cuenta la velocidad de rotación, minorando los desalineamientos

máximos admisibles que se adjuntan en las tablas para cada modelo.

■ Par a transmitir

No tiene importancia en acoplamientos para sistemas de medida. Para accionamientos de potencia se deberá comprobar que el par a transmitir sea menor que el par nominal adjuntado en las tablas de prestaciones, en un margen más grande cuanto mayor sea la desalineación previsible.

■ Precisión cinemática

En sistemas de medida y accionamientos de gran precisión es importante que el acoplamiento no provoque desfases posicionales entre los árboles.

Todos los modelos de la gama ENCO-FLEX están libres de juego torsional y sólo el OLDHAM puede adquirir un cierto juego después de un tiempo de funcionamiento con un desalineamiento radial importante (que se puede corregir substituyendo el disco). Si el par resistente o la inercia en el eje conducido son importantes, se pueden producir desfases debidos a la elasticidad torsional del acoplamiento. En estos casos se evitará utilizar modelos poco rígidos como el SPRING-FLEX o POLY-FLEX.

■ Velocidad de rotación

Los OLDHAM-FLEX y SPRING-FLEX no son adecuados para ejes de gran velocidad, especialmente si existen desalineamientos importantes. Para el resto de acoplamientos debe tenerse en cuenta que la vida útil de los mismos está en función de la fatiga y, por tanto, de la velocidad a la que operan.

■ Fijación a los ejes

Los acoplamientos pueden suministrarse con fijación por prisioneros (2 a 90°) o con brida-abrazadera integral.

La fijación por abrazadera tiene la ventaja que no produce marcas en los ejes, resistiendo mejor la inversiones bruscas y las vibraciones. La fijación por prisioneros resulta más económica y permite utilizar diámetros de eje mayores para un mismo acoplamiento. El inconveniente de los prisioneros es que estos pueden producir mellas sobre los ejes. Además pueden aflojarse debido a vibraciones, lo cual puede evitarse fijándolos con un adhesivo semi-permanente.

ACOPLAMIENTOS **ALU-FLEX**

ACOPLAMIENTOS FLEXIBLES RANURADOS DE ALUMINIO

- Sin juego. No producen variaciones de velocidad en la transmisión
- Elevada rigidez torsional
- Disponibles con prisionero y con abrazadera
- Resistentes a aceites y productos químicos
- Protección mecánica ante pares excesivos



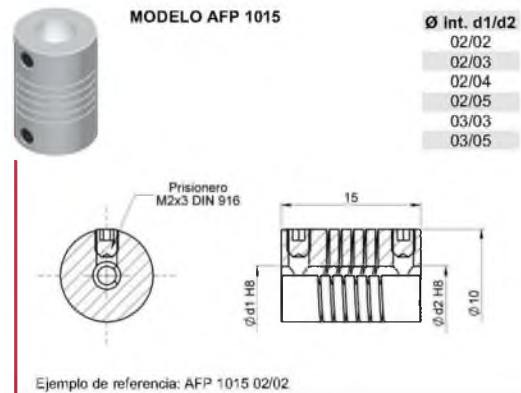
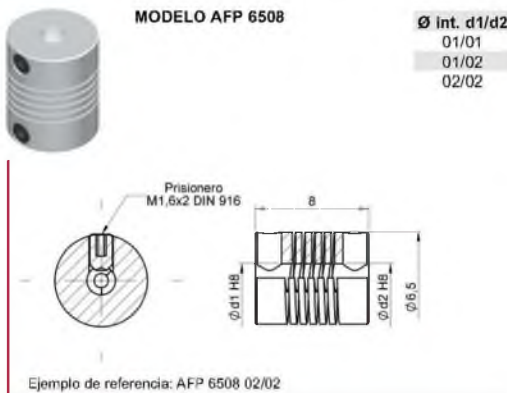
Los ALU-FLEX son acoplamientos flexibles simples, de una sola pieza, mecanizados en aleación de aluminio endurecido.


Son aptos para transmisiones que requieran pares moderados y cuando la desalineación en los ejes no sea muy grande. Actúan de fusible mecánico ante pares excesivos.

Estos acoplamientos resultan apropiados en sistemas de medición y control, así como accionamientos de par reducido. Permiten una transmisión del movimiento de gran precisión cinemática, sin juego y con una baja elasticidad torsional. Se recomiendan para máquinas auxiliares, generadores tacométricos, potenciómetros, encoders, etc. El acoplamiento absorberá los errores de alineación o de montaje de los ejes.

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS

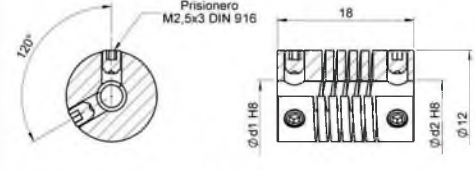
Modelo	Par Ncm	Par apriete Ncm	Velocidad máxima r.p.m.	Desalineamientos máximos admisibles			Constantes elástica torsional Ncm/rad	Constantes elástica radial N/mm	Masa gr	Inercia gcm ²
				Angular grad.	Axial mm	Radial mm				
AFP 6508	2	8	8.000	±2	±0,15	±0,1	0,55	24	0,5	0,02
AFP 1015	15	15	8.000	±2	±0,2	±0,15	2,2	22	2,4	0,34
AFP 1218	25	35	8.000	±2,5	±0,25	±0,15	2,8	28	4	0,83
AFP 1622	40	50	8.000	±3	±0,3	±0,2	5	34	9,5	3,2
AFP 1922	60	50	8.000	±3,5	±0,4	±0,25	9	40	13	6,7
AFP 2524	100	120	8.000	±4	±0,5	±0,3	20	60	26	22,2
AFP 2532	100	120	8.000	±4	±0,5	±0,3	18	50	35	30
AFP 3030	150	120	8.000	±4	±0,5	±0,3	21	60	45	57
AFP 3038	150	120	8.000	±4	±0,5	±0,3	21	60	60	76
AFA 1421	50	50	6.000	±3	±0,25	±0,2	4,5	22	6,5	1,9
AFA 1625	60	50	6.000	±3,5	±0,3	±0,2	5,5	30	10	3,8
AFA 1928	80	80	6.000	±4	±0,4	±0,25	8	36	16	8,7
AFA 2532	120	100	6.000	±4	±0,5	±0,35	16	45	34	29
AFA 3038	150	100	6.000	±0,4	±0,5	±0,35	19	60	58	76






MODELO AFP 1218

Ø int. d1/d2
 02/04
 03/03
 03/04
 04/04



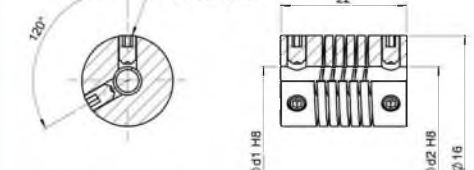
Prisionero M2,5x3 DIN 916

Ejemplo de referencia: AFP 1218 04/04




MODELO AFP 1622

Ø int. d1/d2
 03/03
 04/04
 04/05
 05/05
 06/06



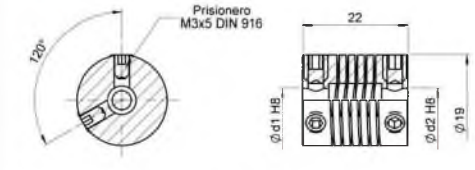
Prisionero M3x5 DIN 916

Ejemplo de referencia: AFP 1622 06/06




MODELO AFP 1922

Ø int. d1/d2
 04/06
 05/05
 06/06



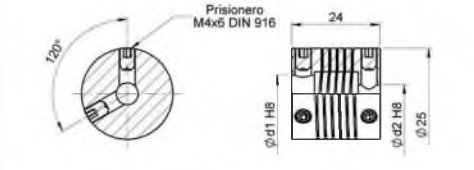
Prisionero M3x5 DIN 916

Ejemplo de referencia: AFP 1922 06/06




MODELO AFP 2524

Ø int. d1/d2
 06/06
 06/08
 06/10
 08/08
 10/10
 12/12



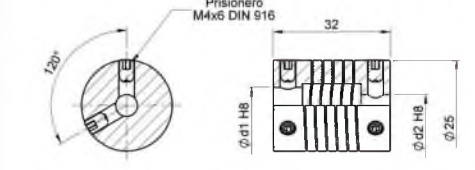
Prisionero M4x5 DIN 916

Ejemplo de referencia: AFP 2524 06/06




MODELO AFP 2532

Ø int. d1/d2
 06/06
 06/08
 08/08
 08/10
 10/10
 10/12
 10/10



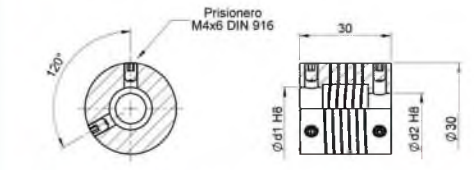
Prisionero M4x6 DIN 916

Ejemplo de referencia: AFP 2532 10/10



MODELO AFP 3030

Ø int. d1/d2
 10/10
 10/12
 10/14



Prisionero M4x6 DIN 916

Ejemplo de referencia: AFP 3030 10/10

Rodamientos FAG oscilantes de bolas

Jaulas · Aptitud para altas velocidades · Tratamiento térmico · Pesos · Carga equivalente · Medidas auxiliares

Jaulas

Los rodamientos oscilantes de bolas con jaulas de poliamida 66 reforzada con fibra de vidrio tienen el sufijo TV. Las jaulas de poliamida soportan temperaturas constantes de hasta 120° C. Al lubricar con aceite aditivado, este puede perjudicar la vida en servicio de la jaula de poliamida. Un estado envejecido del aceite también puede afectar la vida en servicio de la jaula por lo cual, es necesario observar los intervalos recomendados para el cambio de aceite (ver también Pág. 85).

Las jaulas macizas de latón guiadas por las bolas se reconocen por el sufijo M.

▼ Jaulas estándar de los rodamientos oscilantes de bolas

Serie	Jaula maciza de poliamida (TV) Número característico del agujero	Jaula maciza de latón (M)
10	8	
12	hasta 18	a partir de 19
13	hasta 13	a partir de 14
22	hasta 13, 15, 16, 18	14, 17, a partir de 19
23	hasta 13	a partir de 14
112	04 hasta 12	

Bajo demanda también son suministrables otras ejecuciones de jaula. Con tales jaulas la aptitud para altas velocidades y temperaturas así como las capacidades de carga pueden diferir de los valores para rodamientos con jaulas estándar.

Aptitud para altas velocidades

Los conceptos generales sobre adaptación a altas velocidades se exponen en las páginas 87 y siguientes.

Bajo condiciones de servicio adecuadas, la velocidad de referencia puede superar a la velocidad límite. En el caso de tener condiciones de servicio especiales, estas deben de tenerse en cuenta para determinar el valor de la velocidad térmicamente permisible de servicio.

Cuando en las tablas se indica una velocidad de referencia mayor que la velocidad límite, no debemos utilizar este valor mayor.

En rodamientos con obturaciones rozantes (ejecución 2RS) es la velocidad deslizante permisible de los labios obturadores la que limita la velocidad de giro de modo que no se ha indicado la velocidad de referencia.

Tratamiento térmico

Los rodamientos FAG oscilantes de bolas se someten a un tratamiento térmico de manera que se pueden utilizar para temperaturas de servicio de hasta 150° C. En rodamientos con jaula de poliamida hay que observar el límite de aplicación del material. En rodamientos obturados hay que tener en cuenta los límites establecidos.

Pesos

Los pesos indicados en las tablas valen tanto para los rodamientos con agujero cilíndrico como para los rodamientos con agujero cónico. En los rodamientos con manguito de montaje se incluye el peso del manguito de forma separada.

Carga dinámica equivalente

$$P = F_r + Y \cdot F_a \quad [\text{kN}] \text{ para } \frac{F_a}{F_r} \leq e$$

$$P = 0,65 \cdot F_r + Y \cdot F_a \quad [\text{kN}] \text{ para } \frac{F_a}{F_r} > e$$

Los valores de Y, y e se indican en las tablas.

Carga estática equivalente

$$P_0 = F_r + Y_0 \cdot F_a \quad [\text{kN}]$$

Los factores axiales Y₀ se indican en las tablas.

Medidas auxiliares

En la página 123 se encuentra información general sobre las medidas auxiliares de estos rodamientos

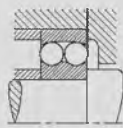
En las tablas se indican los valores máximos del radio r_g de la garganta y los diámetros de los resaltes.

Al montar rodamientos oscilantes de bolas con manguitos de montaje hay que tener en cuenta las medidas del aro de apoyo.

Rodamientos FAG oscilantes de bolas

Medidas auxiliares · Sufijos

En algunos rodamientos oscilantes de bolas hay que tener en cuenta además que las bolas sobresalen algo. Los tipos en que las bolas sobresalen algo más son los siguientes:

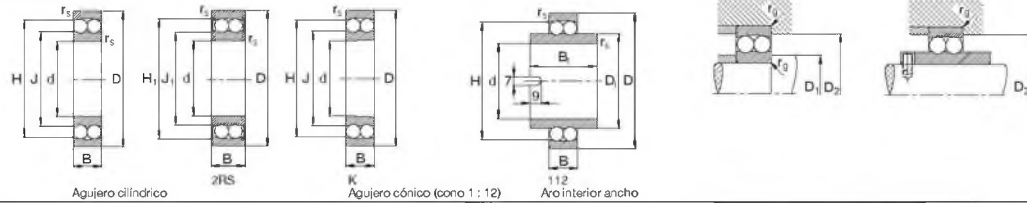
Rodamientos	Resalte mm	Resalte
1224M	1,8	
1226M	0,6	
1228M	2,7	
1230M	3,8	
1319M	1,6	
1320M	2,4	
1321M	2,5	
1322M	2,7	

Sufijos

- C3 Juego radial mayor que el normal
- K Agujero cónico
- M Jaula maciza de latón, guiada por las bolas
- .2RS Dos tapas de obturación
- TV Jaula maciza de poliamida reforzada con fibra de vidrio, guiada por las bolas

Rodamientos FAG oscilantes de bolas con agujero cilíndrico y cónico

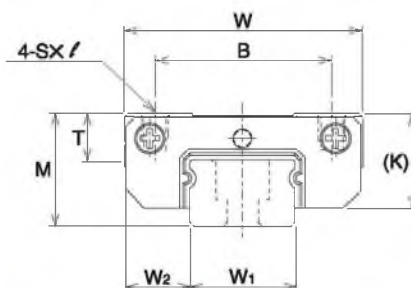
Los rodamientos pueden alcanzar una duración de vida ilimitada, si $C_0/P_0 \geq 8$, ver Pág. 41.



Eje	Dimensiones										Peso kg	Capacidad de carga - Factor						Velocidad límite min ⁻¹	Velocidad de referencia	Denominación abreviada	Medidas auxiliares		
	d	D	B	r _s min	B _i	D ₁ ~	H ~	H ₁ ~	J ~	J ₁ ~		dín. C	F _r /F _e ≤ e kN	F _r /F _e > e kN	C ₀ estát. kN	Y ₀	Rodamiento FAG				D ₁ min mm	D ₂ max	r _{ga} max
5	5	19	6	0,3			14,4		10,1		0,01	2,5	0,35	1,82	2,82	0,48	1,91	36000	40000	136TV	7,4	16,6	0,3
6	6	19	6	0,3			14,4		10,1		0,009	2,5	0,35	1,82	2,82	0,48	1,91	36000	45000	126TV	8,4	16,6	0,3
7	7	22	7	0,3			16,8		12,4		0,014	2,65	0,33	1,92	2,97	0,56	2,01	36000	43000	127TV	9,4	19,6	0,3
8	8	22	7	0,3			16,6		12,4		0,014	2,65	0,33	1,92	2,97	0,56	2,01	36000		106TV	10,6	19,4	0,3
9	9	26	8	0,6			20		14,5		0,022	3,0	0,32	1,95	3,01	0,8	2,04	32000	36000	129TV	13,2	21,0	0,6
10	10	30	9	0,6			23,5		16,3		0,034	5,5	0,32	1,95	3,02	1,2	2,05	30000	32000	1200TV	14,2	25,8	0,6
10	10	30	14	0,6			24,2		15,1		0,035	6,3	0,58	1,09	1,89	1,73	1,14	28000	32000	2200TV	14,2	25,0	0,6
10	10	30	14	0,6			23,4	25,0	16,3	14,1	0,053	5,5	0,32	1,95	3,02	1,2	2,05	18000		2200.2RS.TV	14,2	25,6	0,6
12	12	32	10	0,6			25,4		18,2		0,041	5,6	0,37	1,69	2,62	1,27	1,77	30000	32000	1201TV	16,2	27,0	0,6
12	12	32	14	0,6			26,2		17,1		0,05	9	0,53	1,2	1,85	1,96	1,25	26000	28000	2201TV	16,2	27,8	0,6
12	12	32	14	0,6			25,4	27,9	18,2	16,2	0,058	5,6	0,37	1,69	2,62	1,27	1,77	17000		2201.2RS.TV	16,2	27,8	0,6
15	15	35	11	0,6			29,2		20,1		0,040	7,5	0,34	1,66	2,88	1,76	1,95	26000	28000	1202TV	19,2	30,0	0,6
15	15	35	14	0,6			29,5		20,3		0,057	9,15	0,46	1,37	2,13	2,08	1,44	24000	24000	2202TV	19,2	30,0	0,6
15	15	35	14	0,6			29,1	30,9	20,1	19	0,061	7,5	0,34	1,66	2,88	1,76	1,95	15000		2202.2RS.TV	19,2	30,0	0,6
15	15	42	17	1			34,8		22,5		0,111	16	0,51	1,23	1,91	3,75	1,29	18000	20000	2302TV	20,6	36,4	1
17	17	40	12	0,6			32,3		23,7		0,073	8	0,33	1,93	2,99	2,04	2,03	22000	26000	1203TV	21,2	35,8	0,6
17	17	40	16	0,6			34,1		23,9		0,098	11,4	0,46	1,37	2,12	2,75	1,43	19000	24000	2303TV	21,2	35,8	0,6
17	17	40	16	0,6			32,1	35,2	23,7	21,6	0,090	8	0,33	1,93	2,99	2,04	2,03	14000		2203.2RS.TV	21,2	35,8	0,6
17	17	47	14	1			37,3		26,7		0,065	12,5	0,32	1,94	3	3,2	2,03	18000	20000	1303TV	22,6	41,4	1
17	17	47	19	1			37,3		26,1		0,155	13,4	0,53	1,19	1,85	3,2	1,25	17000	19000	2303TV	22,6	41,4	1
17	17	47	19	1			37,2	40,3	26,5	23,9	0,176	12,5	0,32	1,94	3	3,2	2,03	11000		2303.2RS.TV	22,6	41,4	1
20	20	47	14	1			38,1		29,2		0,118	10	0,28	2,24	3,46	2,65	2,34	18000	24000	1204TV	25,6	41,4	1
20	20	47	14	1			38,1		29,2		0,116	10	0,28	2,24	3,46	2,65	2,34	18000	24000	1204K.TV.C3	25,6	41,4	1
20	20	47	14	1	40	29,2	38,1		29,2		0,085	10	0,28	2,24	3,46	2,65	2,34	13000		11204TV	25,6	41,4	1
20	20	47	18	1			39,5		28		0,134	14,3	0,44	1,45	2,24	3,55	1,51	17000	20000	2204TV	25,6	41,4	1
20	20	47	18	1			39	41,7	28,4	25,9	0,151	10	0,28	2,24	3,46	2,65	2,34	11000		2204.2RS.TV	25,6	41,4	1
20	20	52	15	1,1			41,0		31,6		0,163	12,5	0,29	2,17	3,35	3,35	2,27	16000	19000	1304TV	27	45	1

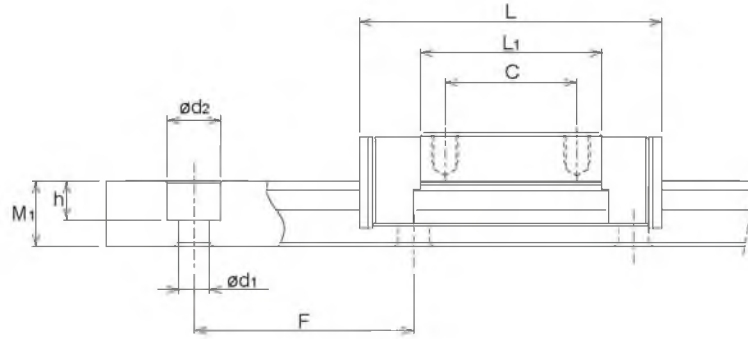
TIPO COMPACTO

TIPO SRS-M



N° de modelo	Dimensiones externas			Dimensiones del bloque de movimiento lineal					
	Altura M	Ancho W	Longitud L	B	C	SX /	L _i	T	K
SRS 9M	10	20	30.8	15	10	M3X2.8	19.8	4.9	9.1
SRS 12M	13	27	34.4	20	15	M3X3.2	20.6	5.7	11.0
SRS 15M	16	32	43.0	25	20	M3X3.5	25.7	6.5	13.3
SRS 20M	20	40	50.0	30	25	M4X6	34.0	9.1	16.6
SRS 25M	25	48	77.0	35	35	M6X7	56.0	11.0	20.0

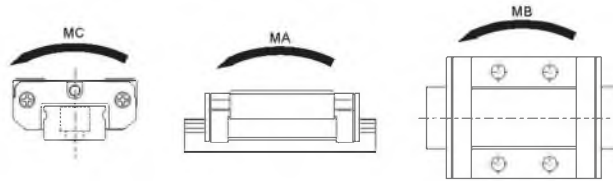
- Notas:
- El mecanizado para instalar un engrasador y el orificio de lubricación no se puede realizar en un modelo de especificación estándar. (Ver la pág. 84 para obtener más detalles).
 - Consultar la pág. 89 si la codificación del número está rota.
 - Consultar la pág. 89 para obtener información sobre las longitudes del riel de movimiento lineal.
 - La M en el código indica que se utiliza acero inoxidable para el bloque de movimiento lineal, para el riel de movimiento lineal y para los rodamientos de bolas, lo que brinda una excelente resistencia a la corrosión y una excelente capacidad para funcionar en una amplia gama de ambientes.



SRS

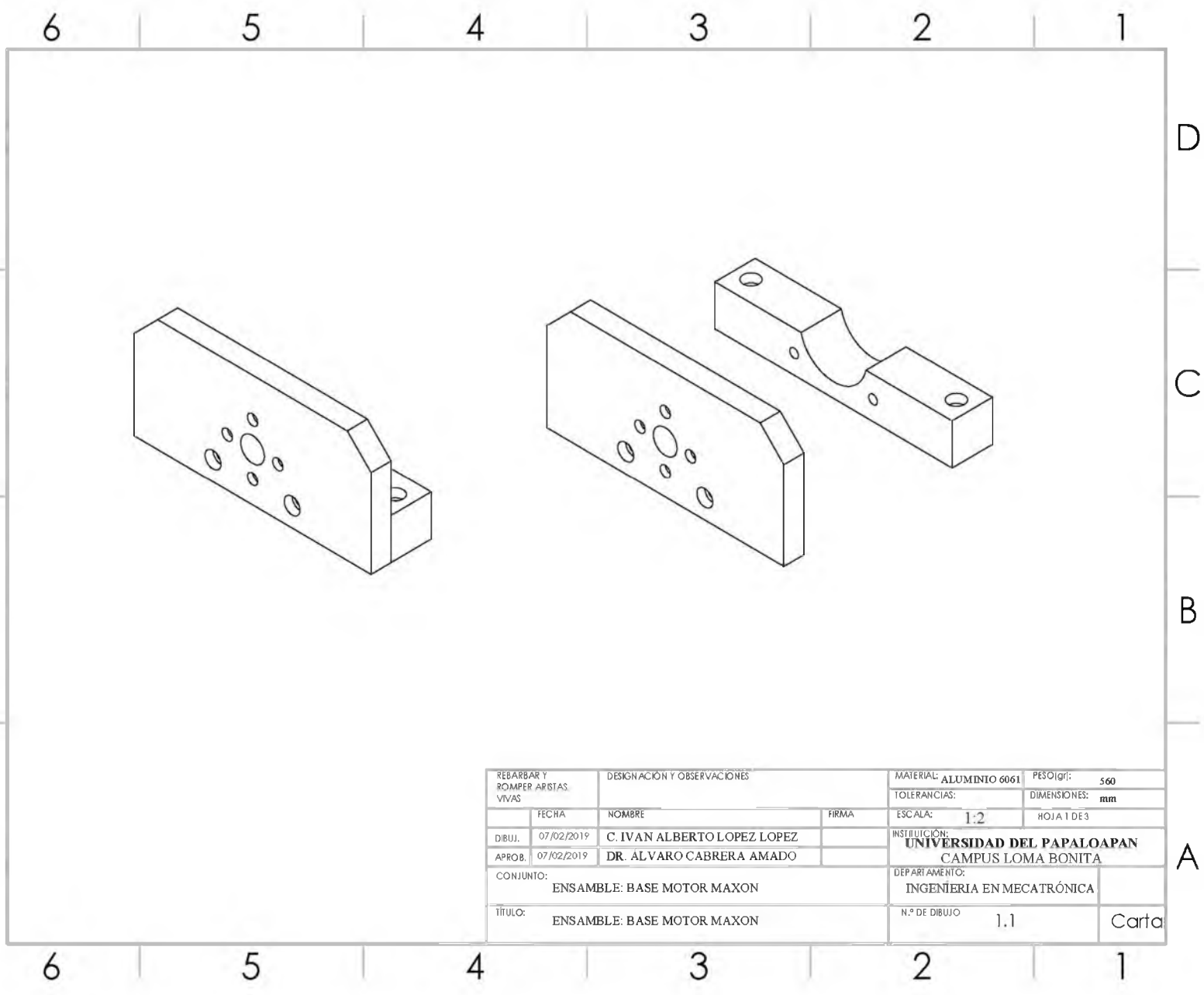
Unidad: mm

Dimensiones del riel de movimiento lineal					Valor de carga básica		Momento estático admisible			Bloque de movimiento lineal	Masa	Riel de movimiento lineal
Ancho W _i	W _i	Altura M	Paso F	d ₁ Xd ₂ Xh	C kN	C ₀ Kn	MA N·m	MB N·m	MC N·m	kg/bloque	kg/m	
9 ⁰ _{-0.02}	5.5	5.5	20	3.5X6X3.3	2.69	2.31	7.82	9.03	10.6	0.016	0.32	
12 ⁰ _{-0.02}	7.5	7.5	25	3.5X6X4.5	4	3.53	12	12	23.1	0.027	0.65	
15 ⁰ _{-0.02}	8.5	9.5	40	3.5X6X4.5	6.66	5.70	26.2	26.2	40.4	0.047	0.96	
20 ⁰ _{-0.03}	10.0	11.0	60	6X9.5X8	7.75	9.77	54.3	62.4	104	0.11	1.68	
23 ⁰ _{-0.09}	12.5	15.0	60	7X11X9	16.5	20.2	177	177	248.0	0.24	2.6	



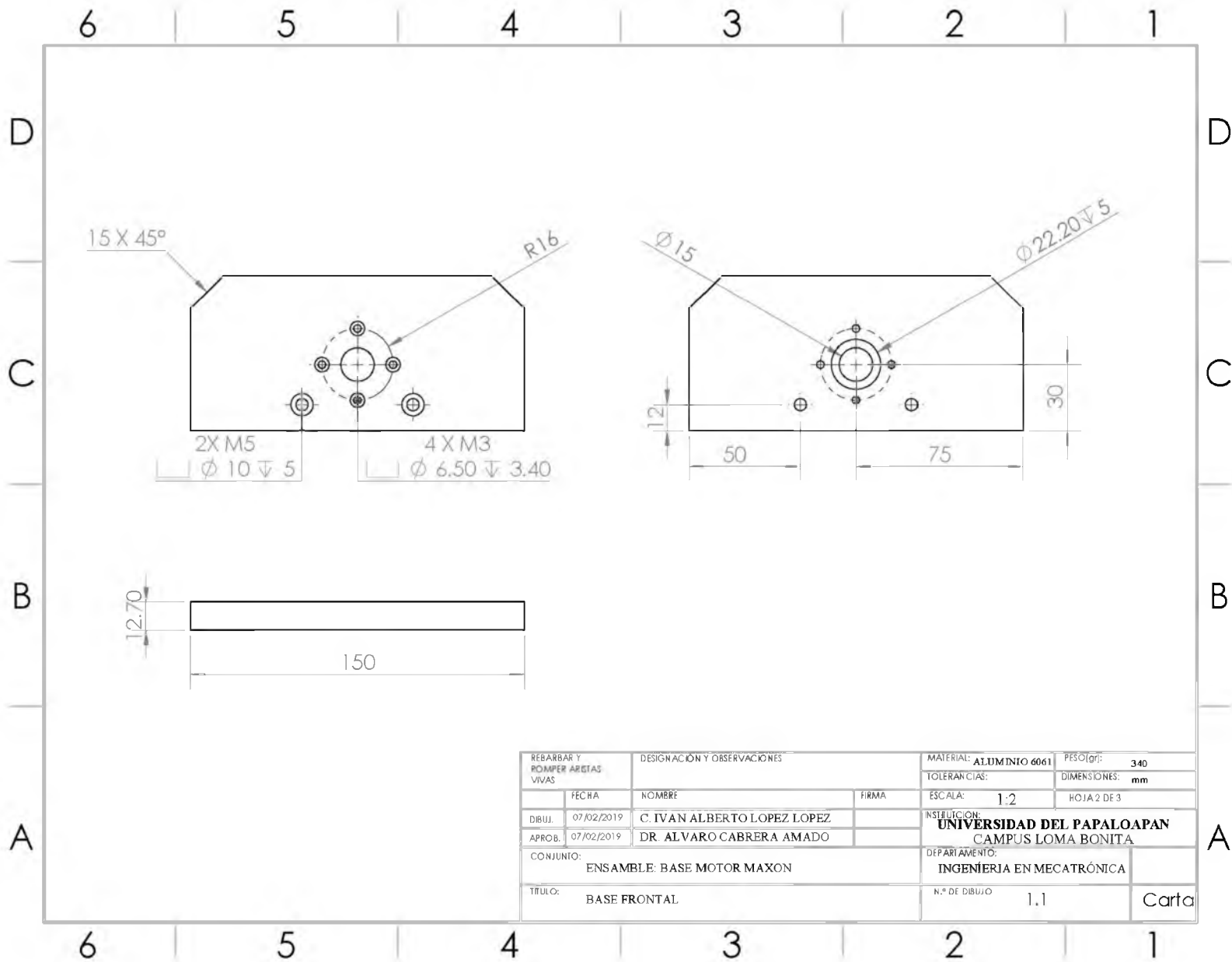
1 kN ≈ 102 kgf
 1 kN ≈ 225 lb
 1 N·m ≈ 8.86 in·lb

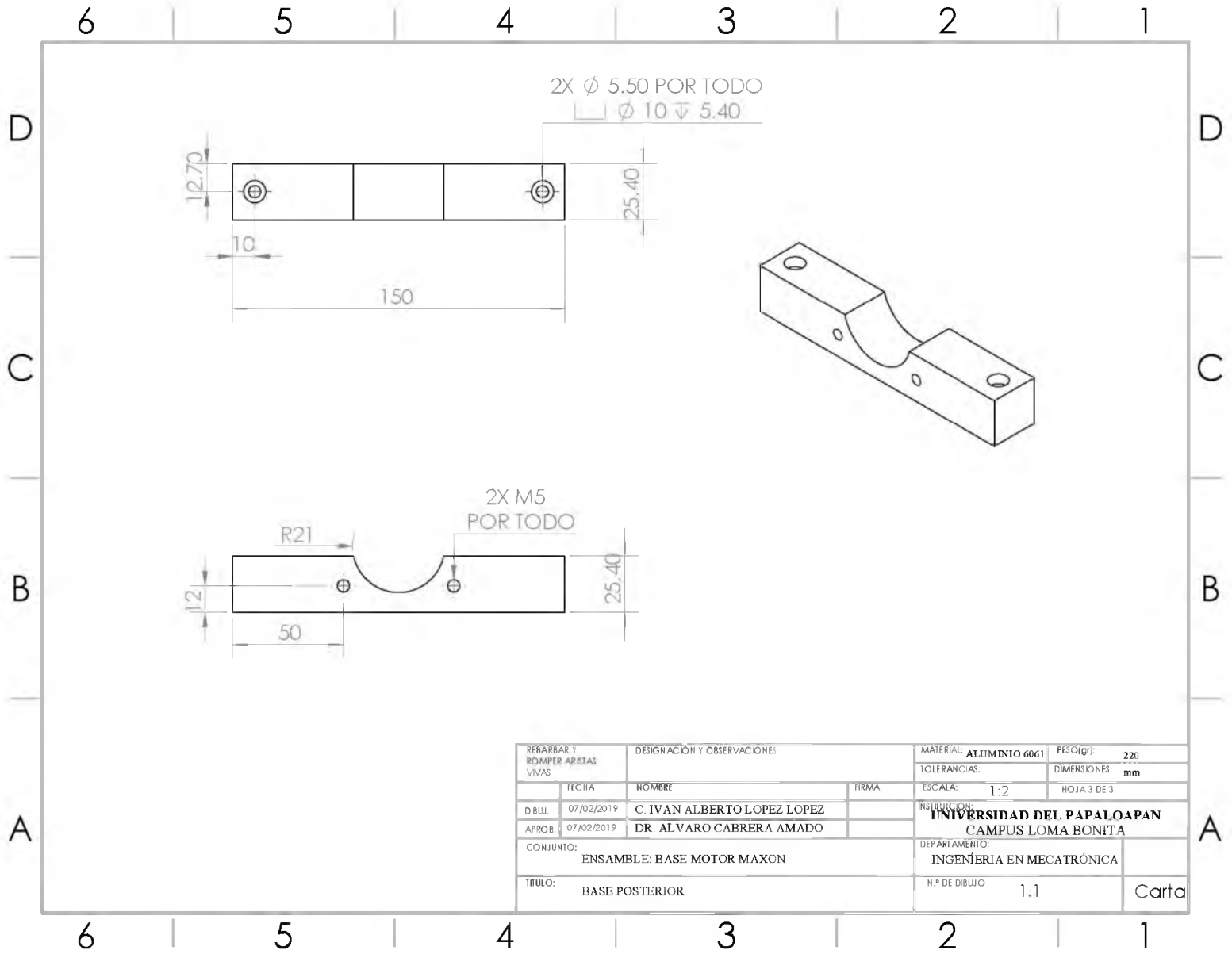
C. Dibujos técnicos

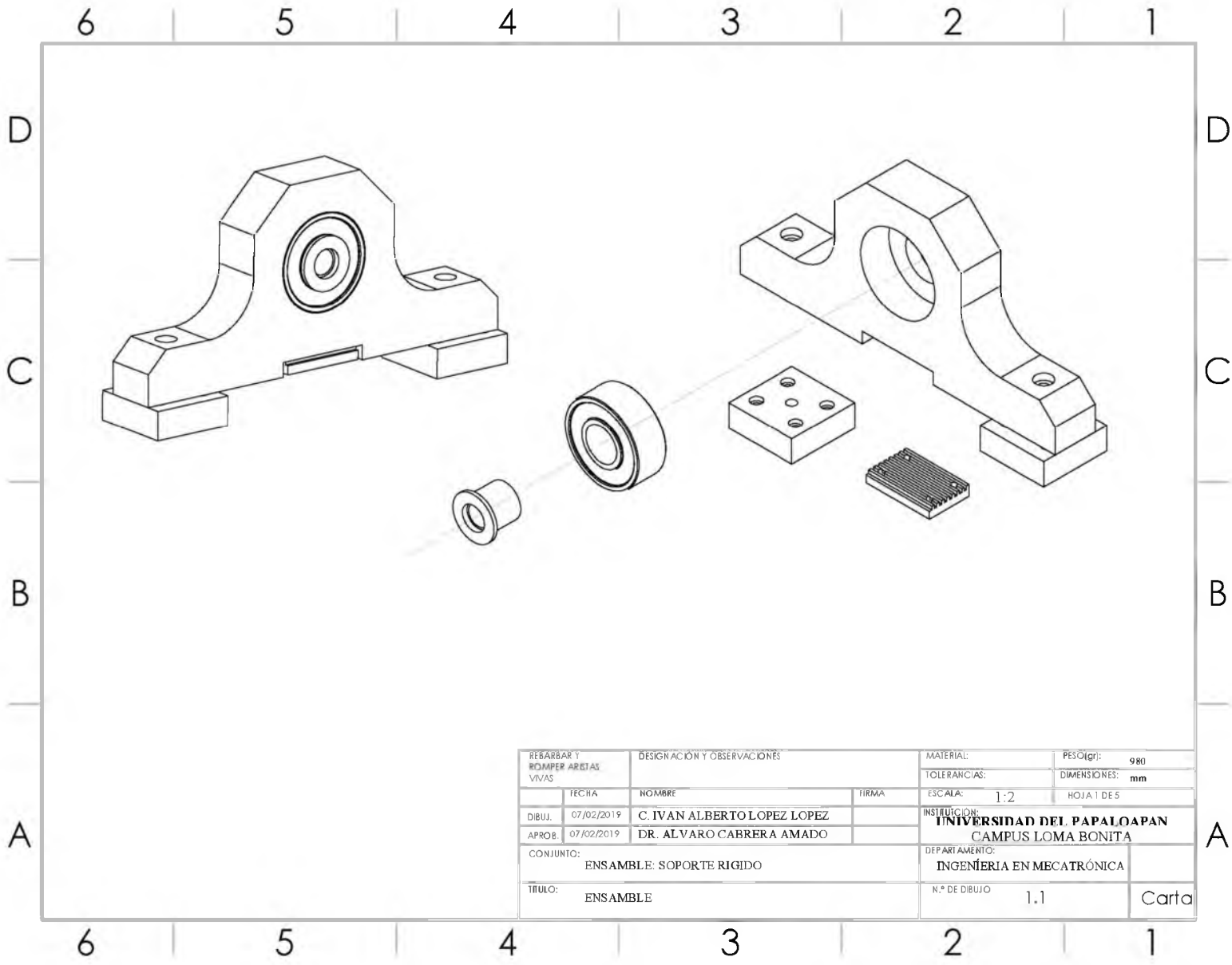


89

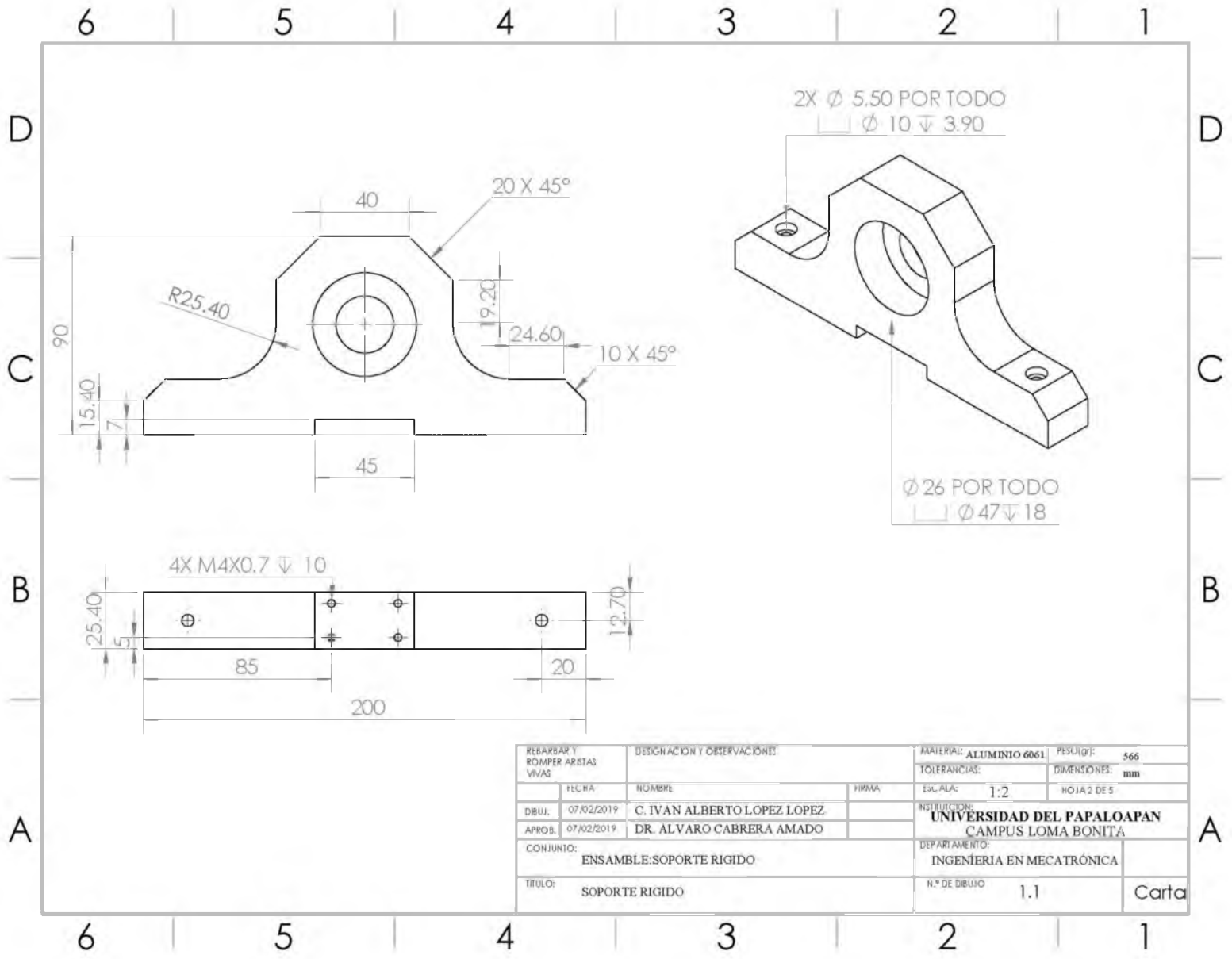
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES		MATERIAL: ALUMINIO 6061	PESO (gr): 560
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:2	HOJA 1 DE 3
DIBUJ.	07/02/2019	C. IVAN ALBERTO LOPEZ LOPEZ		INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	07/02/2019	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRÓNICA	
CONJUNTO: ENSAMBLE: BASE MOTOR MAXON					
TÍTULO: ENSAMBLE: BASE MOTOR MAXON				N.º DE DIBUJO 1,1	Carta

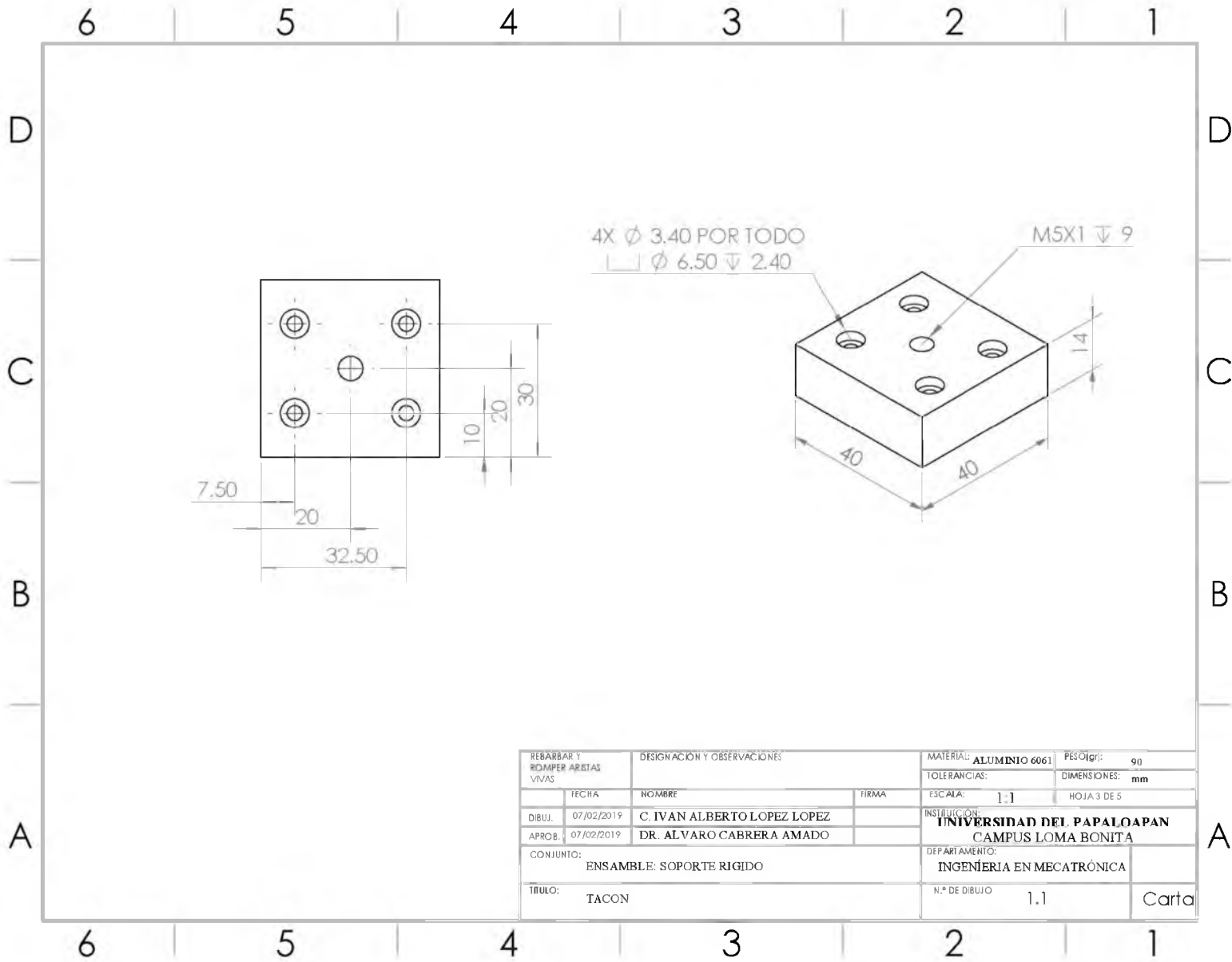


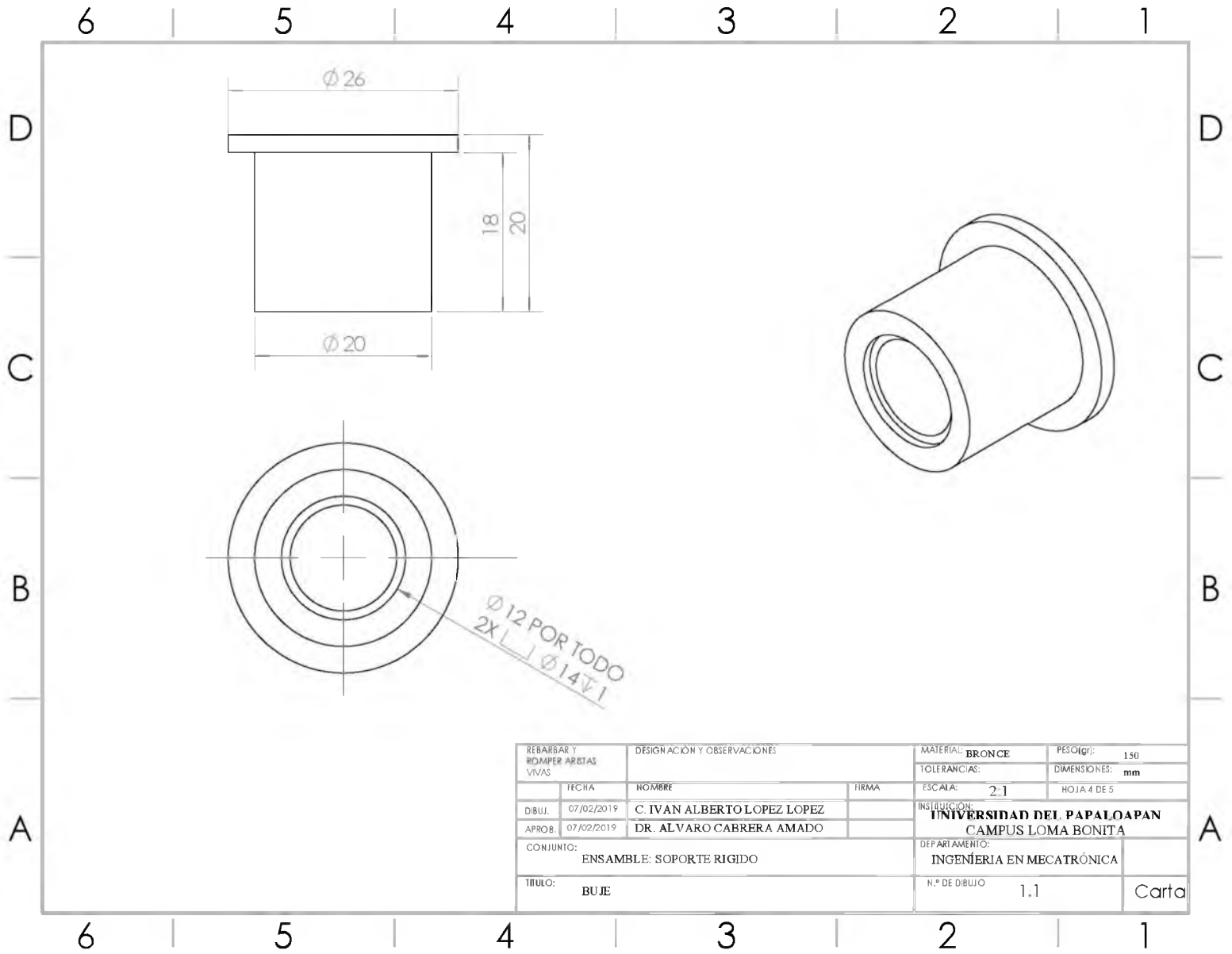


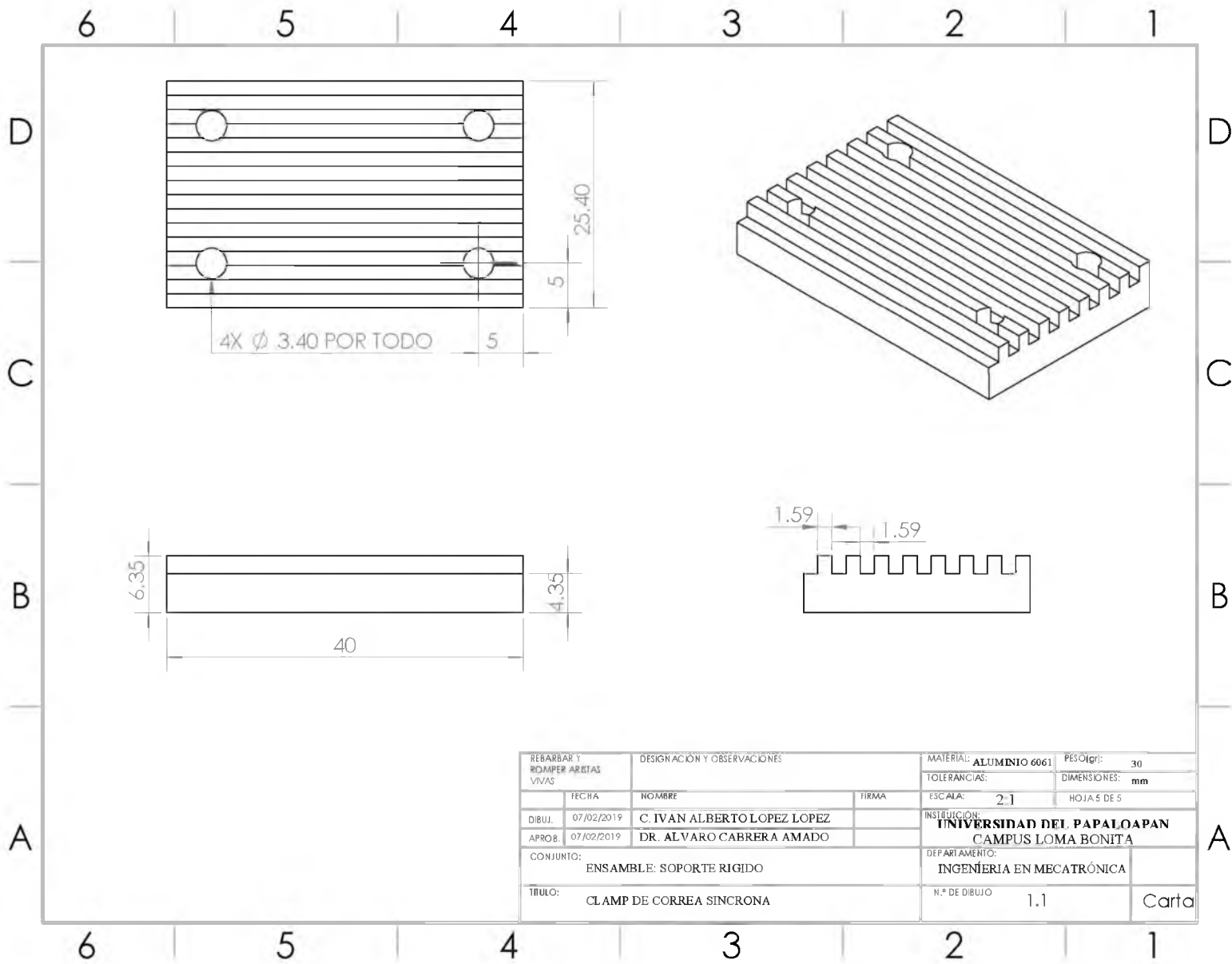


REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES		MATERIAL:		PESO(gr): 980	
				TOLERANCIAS:		DIMENSIONES: mm	
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:2		HOJA 1 DE 5	
DIBUJ.	07/02/2019	C. IVAN ALBERTO LOPEZ LOPEZ		INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA			
APROB.	07/02/2019	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA			
CONJUNTO: ENSAMBLE: SOPORTE RIGIDO				N.º DE DIBUJO		1.1	
TITULO: ENSAMBLE						Carta	

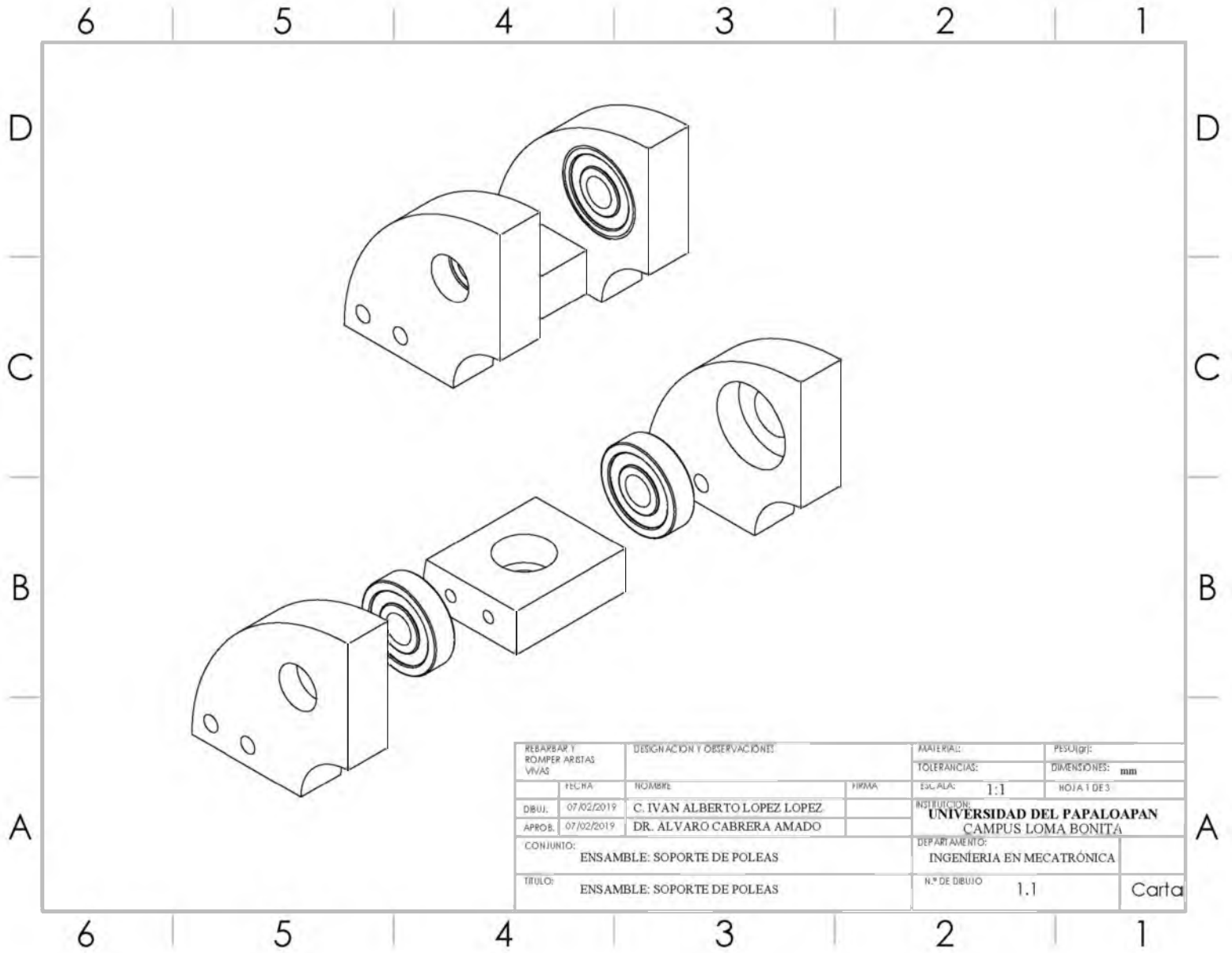


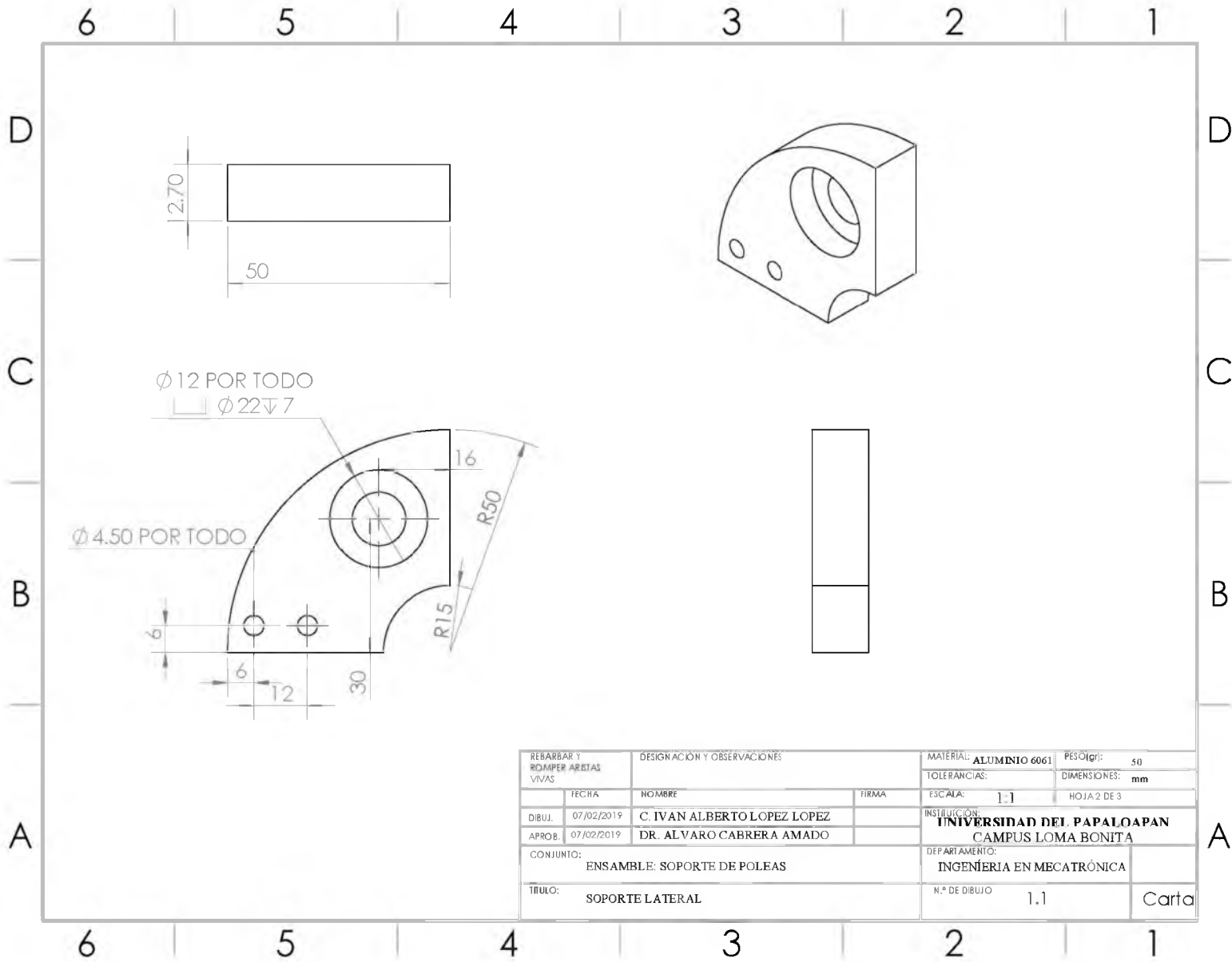


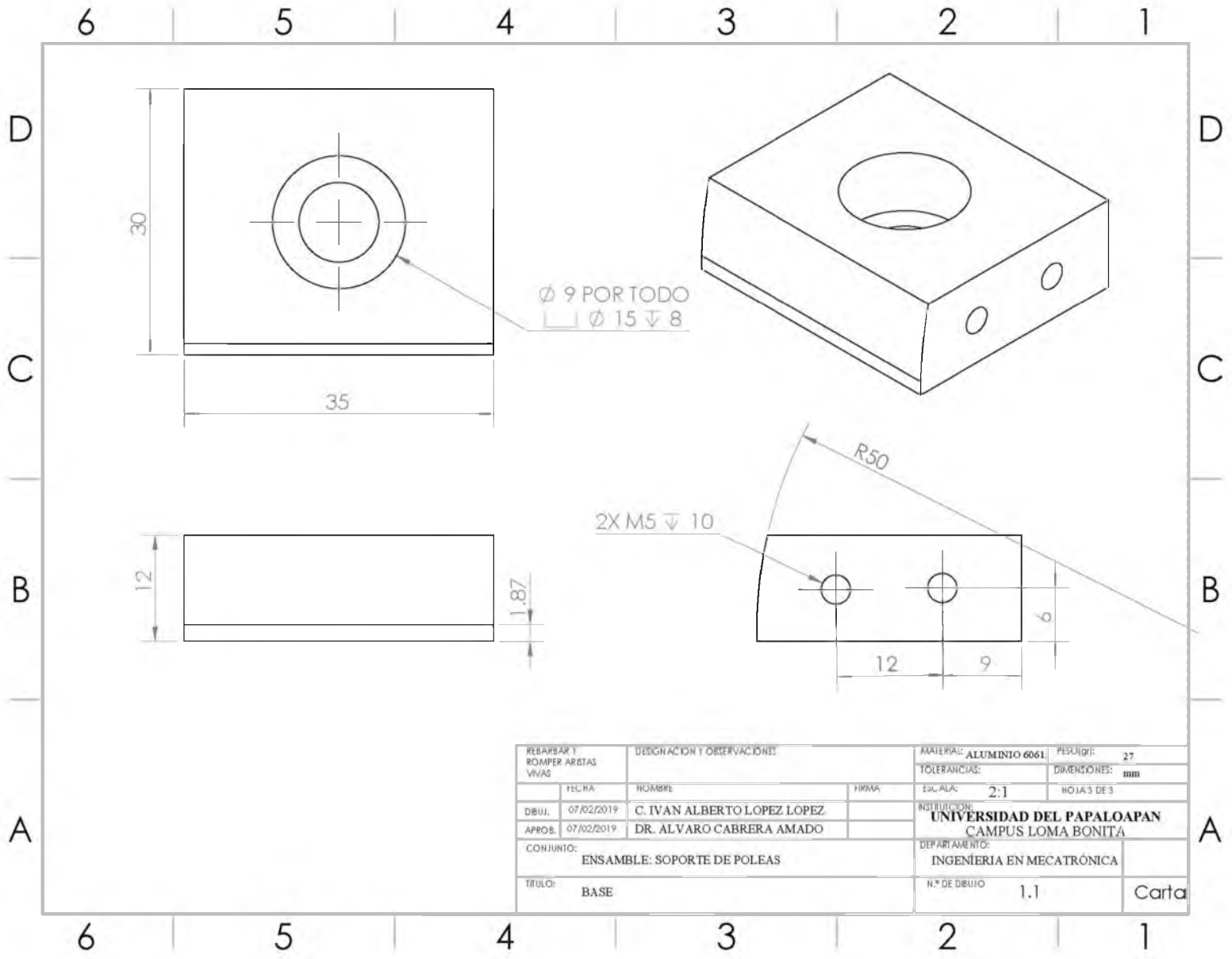




REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES			MATERIAL: ALUMINIO 6061	PESO(g): 30
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
DIBUJ.	07/02/2019	C. IVAN ALBERTO LOPEZ LOPEZ		ESCALA: 2:1	HOJA 5 DE 5
APROB.	07/02/2019	DR. ALVARO CABRERA AMADO		INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
CONJUNTO: ENSAMBLE: SOPORTE RIGIDO				DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA	
TITULO: CLAMP DE CORREA SINCRONA				N.º DE DIBUJO 1.1	Carta







REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	DESIGNACION Y OBSERVACIONES:			MATERIAL: ALUMINIO 6061	PESQUÍE: 27
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
DBUJ:	07/02/2019	C. IVAN ALBERTO LOPEZ LOPEZ		ESCALA: 2:1	HOJA 3 DE 3
APROB:	07/02/2019	DR. ALVARO CABRERA AMADO		INSTITUCION: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
CONJUNTO: ENSAMBLE: SOPORTE DE POLEAS				DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA	
TITULO:	BASE			N.º DE DIBUJO	1.1
					Carta