



**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN**

**CAMPUS LOMA BONITA**

**INGENIERÍA EN MECATRÓNICA**

**APLICACIÓN DE ESTRATEGIAS DE CONTROL  
LINEAL Y NO LINEAL EN EL MODELO  
MATEMÁTICO DE UN ROBOT MÓVIL.**

Tesis profesional para obtener el grado de  
**INGENIERO EN MECATRÓNICA**

Presenta:

**ESTHER GUADALUPE DIAZ SARMIENTOS**

Asesor de tesis:

Dr. Hiram Netzahualcóyotl García Lozano

**LOMA BONITA, OAX.**

**JULIO 2014**

## **Dedicatoria**

A Dios, por darme la fortaleza necesaria para cumplir esta meta.

A mi madre, que ha hecho todo para que yo pudiera lograr mis sueños.

A mi padre, que a pesar del tiempo y la distancia, su ejemplo y amor me acompañarán siempre.

A mis hermanos, que siempre han sido mi motor para seguir.

A mi novio, que me ha apoyado para seguir.

A amigos y compañeros, que estuvieron ahí cuando los necesite.

## **Agradecimientos**

Agradezco a todos los profesores que han sabido ser parte de mi formación, a todos aquellos que me compartieron un poco de lo mucho que saben.

Al Dr. Hiram Netzahualcóyotl García Lozano por su tiempo, apoyo y atención. Sin su ayuda, este trabajo no hubiese sido posible.

Es necesario también reconocer y agradecer el apoyo recibido por parte del CONACYT con el proyecto ciencia básica CONACyT2009 con número de registro REF\_PROY: CB-2009/134982, que permitio concluir mi formación profesional.

## Resumen

Los robots móviles a ruedas destacan dentro de la robótica debido a su diversidad de aplicaciones. Si bien todos estos robots poseen las mismas ventajas, en cuanto a su velocidad, movilidad y control, cada uno de ellos adquiere características especiales acorde a su configuración (la forma en que se organizan sus componentes: motores, ruedas, entre otros). Una de estas configuraciones, cuyas características facilitan su descripción matemática, se conoce como síncrona.

Un robot móvil, sea cual sea su configuración, tiene como finalidad seguir una trayectoria sin colisionar con obstáculos. Para realizar esta tarea cuenta con tres sistemas importantes: sistema de adquisición de información, sistema de generación de trayectorias y un sistema de control.

En esta tesis se aborda el problema de control de robots móviles a ruedas. Este consiste en generar una entrada de control tal que la posición del robot se aproxime asintóticamente a una trayectoria preestablecida por el sistema de generación de trayectorias, lo cual puede lograrse utilizando distintas estrategias de control. Dichas estrategias son desarrolladas con base a la descripción matemática del robot (modelo matemático), la cual depende de las características propias del mismo. En particular, el problema se aborda para un robot móvil síncrono, cuyas características de movilidad se representan por medio de la construcción de los modelos matemáticos: cinemático y dinámico. Para solucionar este problema se sintonizaron distintas estrategias de control (control lineal y no lineal) a fin de comparar su desempeño.

Este trabajo forma parte del proyecto ciencia básica CONACyT2009 con número de registro REF\_PROY: CB-2009/134982. Este consiste en diseñar un

robot móvil autónomo, sin embargo aún no se cuenta con el prototipo construido por lo que en este trabajo solo se realizarán las simulaciones pertinentes.

## **Abstract**

Wheeled mobile robots excel in Robotics due to its diversity applications. All wheeled mobile robots have the same advantages accord to velocity, mobility and control, but each one get special characteristics by its components organization. The characteristics of synchronous configuration facilitate its mathematical description.

The objective of any mobile robot system is following tracking without colliding with obstacles. Mobile robot has three important systems for realized this function: data acquisition system, system of path generation and control system. Each of these systems has degree of difficulty due to characteristics and functions.

This thesis expounds the problem of control of wheeled mobile robots. This problem consists that a robot must pass near, as much as possible, to the trajectory pre-established by the system of generation of trajectories. Different control strategies must be designed to find the solution to this problem. Such strategies are developed based on the mathematical model of robot. The mathematical model depends of physical laws and properties of the robots. For this case the kinematic and dynamic models for the synchronous configuration are developed, being the kinematic model used to develop strategies of linear and non-linear control

This work is part of the project basic science CONACyT2009 with number of registration (REF\_PROY: CB-2009/134982). This is the design of an autonomous mobile robot, but has not still built the prototype therefore this will work only in simulation.

# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Definición de robot móvil. . . . .	1
1.2. Tipos de robots móviles. . . . .	2
<b>2. MODELO CINEMÁTICO</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción. . . . .	5
2.2. Bases matemáticas. . . . .	6
2.2.1. Restricciones cinemáticas . . . . .	6
2.3. Modelo cinemático. . . . .	10
2.3.1. Relación controlabilidad y no holonomicidad. . . . .	11
2.4. Modelo cinemático de un robot móvil síncrono. . . . .	12
<b>3. MODELO DINÁMICO</b>	<b>19</b>
3.1. Introducción . . . . .	19
3.2. Modelo dinámico del robot móvil síncrono. . . . .	24
<b>4. CONTROL DE MOVIMIENTO</b>	<b>27</b>
4.1. Introducción . . . . .	27

4.1.1. Seguimiento de trayectoria. . . . .	29
4.2. Control lineal . . . . .	32
4.3. Control no lineal . . . . .	34
<b>5. SIMULACIONES</b>	<b>37</b>
5.1. Control lineal. . . . .	39
5.2. Control no lineal. . . . .	41
<b>6. CONCLUSIONES GENERALES</b>	<b>43</b>
1. Bloques simulink de las estrategias de control.	46
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>

# Índice de figuras

1.1. Configuraciones de robots móviles a ruedas. . . . .	3
2.1. Diagrama físico de movimiento de un disco. . . . .	7
2.2. Rotación de ejes. . . . .	7
2.3. Sistemas de referencia en robots móviles. . . . .	13
2.4. Círculo osculador. . . . .	13
2.5. Ubicación de componentes en los sistemas de referencia $\{G\}$ y $\{L\}$ . . . . .	16
2.6. Rotación de ejes de referencia. . . . .	16
4.1. Error $e$ en el seguimiento de trayectoria . . . . .	30
5.1. Diagrama a bloques de la implementación de los controladores en el robot móvil síncrono. . . . .	37
5.2. Trayectoria generada. . . . .	38
5.3. Funciones escalón que forman la velocidad lineal deseada. . . . .	38
5.4. Funciones escalón que forman la velocidad angular deseada. . . . .	39
5.5. Velocidad lineal deseada y obtenida con el control lineal. . . . .	40
5.6. Velocidad angular deseada y obtenida con el control lineal. . . . .	40
5.7. Trayectoria esperada vs trayectoria obtenida con el control lineal. . . . .	40
5.8. Velocidad lineal deseada y obtenida con el controlador no lineal. . . . .	41
5.9. Velocidad angular deseada y obtenida con el control no lineal. . . . .	41
5.10. Trayectoria esperada vs trayectoria obtenida con el control no lineal. . . . .	42
6.1. Comportamiento de $e$ en el control lineal. . . . .	44

6.2.	Comportamiento de $e$ en el control no lineal. . . . .	44
I.1.	Diagrama general del control lineal. . . . .	47
I.2.	Bloque de control lineal. . . . .	48
I.3.	Bloque de estimación de posición del robot para el control lineal.	49
I.4.	Bloque de cálculo del error $e$ en el control lineal. . . . .	49
I.5.	Bloque de cálculo de $u$ en el control lineal. . . . .	49
I.6.	Diagrama general del control no lineal. . . . .	50
I.7.	Bloque del control no lineal. . . . .	51
I.8.	Bloque del cálculo de posición para el control no lineal. . . . .	52
I.9.	Cálculo de $u$ en el controlador no lineal. . . . .	52
I.10.	Cálculo de $k_1$ en el control no lineal. . . . .	52

# Capítulo 1

## Introducción

La idea de desplazarse de un lugar a otro sin tener que manejar o dirigir un vehículo ha sido un tema presente en la mente del ser humano desde que se tiene uso de razón. El desarrollo de la robótica y la tecnología innovadora utilizada en los nuevos vehículos los ha llevado a realizar tareas autónomas tales como detectar intensidad de luz para encender las luces del auto, estacionarse sin intervención del conductor y hasta conducirse solos por medio de un sistema de control para evitar accidentes, capacidad que estará presente en los próximos autos TOYOTA [Toyota Prensa]. El área de la ciencia y tecnología que se encarga de estudiar este tipo de vehículos se conoce como robótica móvil. De esta forma, la robótica móvil busca resolver los problemas de robots con espacio de trabajo ilimitado, es decir, en robots móviles. Un robot móvil está constituido por un mecanismo, con cierto grado de autonomía, que combina la mecánica, la electrónica, los sistemas computacionales y el control para realizar tareas complejas [Ollero, 2001].

### 1.1. Definición de robot móvil.

Una definición correcta de robot móvil plantea la capacidad autónoma de movimiento sobre entornos no estructurados (entornos cuyas características físicas y geométricas no son conocidas *a priori* [Siciliano *et. al*, 2011]) mediante la interpretación de la información suministrada a través de sus sensores y del

estado actual del vehículo. Esto se logra por medio de tres sistemas: el sistema de control, el sistema de adquisición de información y el sistema de locomoción.

Es necesario aclarar que el concepto de autonomía no sólo se relaciona con cuestiones energéticas, sino que también se refiere a la capacidad de percibir, modelar, planificar y actuar para alcanzar determinados objetivos, sin la intervención del operador humano. El papel de este debe ser desempeñado por el propio sistema de control del vehículo, el que debe contar con la “*inteligencia*” necesaria para mover al robot correctamente.

## 1.2. Tipos de robots móviles.

Actualmente existe gran variedad de robots móviles con diversas estructuras geométricas y mecánicas que definen su funcionalidad y aplicación. Por ejemplo, aplicaciones en rastreo y traslado de objetos, evasión de obstáculos, traslado de instrumental quirúrgico en hospitales, limpieza del área del hogar, ambientes cooperativos, análisis e inspección de fisuras en gaseoductos y contenedores de petróleo [Reyes 2011].

Los robots móviles se clasifican acorde a diversos aspectos: por el medio en el que se desplazan (terrestres, marinos y aéreos), por el tipo de locomoción (en los terrestres mediante ruedas, patas u otros) o por el tipo de control (seguimiento de caminos explícitos o métodos de control reactivo).

En particular son de nuestro interés los robots terrestres con locomoción a ruedas. Estos tienen mayor movilidad en diferentes ambientes (terrenos duros y libres de obstáculos), alcanzan velocidades altas y sus funciones de planificación y control son menos complejas que en otros robots móviles [Ollero, 2001].

En los robots móviles a ruedas existen distintas configuraciones, entre las cuales están: diferencial, triciclo, ackerman, síncrona, omnidireccional, entre otras (Figura 1.1).

La configuración síncrona es un arreglo que simplifica el modelo matemático en los robots móviles. Esta configuración es interesante porque aunque posee tres ruedas, solo son necesarios dos motores. El motor de traslación es usado

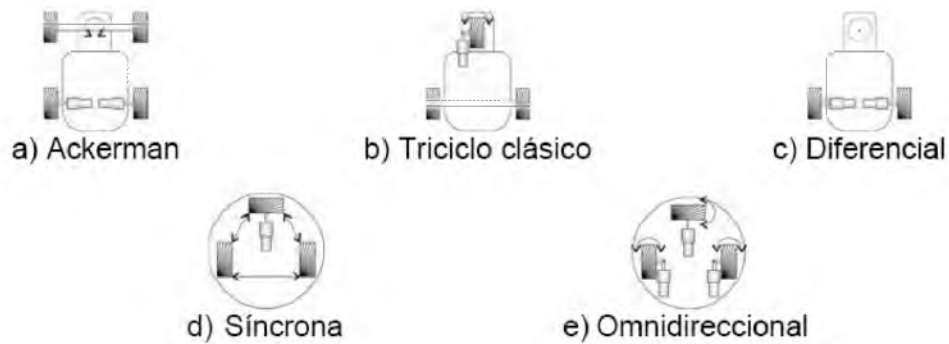


Figura 1.1: Configuraciones de robots móviles a ruedas.

para fijar la velocidad de sus ruedas, mientras que el motor de dirección las gira sobre cada uno de sus ejes de dirección vertical. Nótese que las ruedas son dirigidas en relación al chasis del robot, y por lo tanto, este no cambia de orientación [Siegwart y Nourbakhsh, 2004].

Sea la configuración síncrona o cualquier otra, los robots móviles son diseñados para realizar movimientos acordes a una trayectoria, los cuales pueden ser logrados construyendo una descripción matemática del robot y modificándola de tal forma que la diferencia entra la posición actual del robot y la posición deseada sea cero. A la descripción matemática del robot se le conoce como modelo matemático y al proceso de modificación, estrategia de control. Los modelos matemáticos no son únicos para cada robot, sino que dependen de las características que se deseen analizar. De esta forma, si se consideran solo las características del movimiento que realizan sin las fuerzas que los producen, se obtiene el modelo cinemático; en cambio, si el sistema se describe acorde a las fuerzas que generan su movimiento, entonces es el modelo dinámico.

En este trabajo se presenta la simulación del modelo matemático de un robot móvil con configuración síncrona sujeto a distintas estrategias de control; su organización se describe a continuación.

Inicialmente se han presentado los conceptos principales, haciendo énfasis en las características y tipos de robots móviles. Posteriormente, en el capítulo

2, se desarrolla el modelo cinemático del robot móvil síncrono.

Se incluye también, en el capítulo 3, el desarrollo del modelo dinámico obtenido a partir de la formulación de Lagrange y usando una linealización parcial por medio de retroalimentación. En el capítulo 4 se describe el control en robots móviles y el procedimiento matemático para diseñar las estrategias de control que se aplican al modelo cinemático. Las simulaciones de dichas estrategias se incluyen en el capítulo 5. Por último se incluyen las conclusiones generales y los diagramas de simulación implementados.

# Capítulo 2

## MODELO CINEMÁTICO

### 2.1. Introducción.

El propósito de cualquier sistema robótico es realizar tareas peligrosas o repetitivas de forma más eficiente que una persona. Con este fin, el robot requiere la ejecución de movimientos específicos con una precisión determinada. La correcta ejecución de estos movimientos depende del sistema de control, que debe proporcionar a los actuadores del robot los comandos adecuados al movimiento deseado. El control de movimiento exige un análisis preciso de las características de la estructura mecánica, actuadores y sensores. Este análisis debe derivar en un modelo matemático (equilibrando complejidad y exactitud), que describa la relación entrada/salida que caracteriza a los componentes del robot. El modelado es, por consiguiente, una premisa necesaria para diseñar y aplicar estrategias de control [Siciliano *et. al*, 2011].

Los modelos matemáticos se representan por ecuaciones que describen las relaciones entre la entrada y la salida de un sistema. Estos son usados para predecir el comportamiento del sistema en condiciones específicas. Las bases para tales modelos se obtienen de las leyes físicas fundamentales que rigen dichos sistemas. Existen distintos enfoques que se pueden seguir para la construcción del modelo matemático. El enfoque seleccionado definirá las características que se desean estudiar. Por ejemplo: el análisis cinemático de la estructura mecánica de un robot se refiere a la descripción del movimiento con respecto a un

eje de referencia cartesiano fijo sin considerar las fuerzas y momentos que lo causan [Siciliano *et. al*, 2011].

En el presente capítulo se desarrollan las consideraciones y bases necesarias para la obtención del modelo cinemático del robot móvil síncrono.

## 2.2. Bases matemáticas.

Un robot móvil con ruedas (RMR) es un robot capaz de moverse sobre una superficie mediante la acción de ruedas montadas en él. De acuerdo a esta definición se asumen las siguientes hipótesis:

- El robot móvil se mueve sobre una superficie plana horizontal, es decir, la energía potencial es constante.
- Los ejes de guiado son perpendiculares al suelo.
- No existen elementos flexibles en la estructura del robot, incluyendo las ruedas.
- El contacto entre cada rueda y el suelo se reduce a un solo punto.
- No existe deslizamiento.

El modelo cinemático de un robot móvil es esencialmente la descripción de los movimientos instantáneos con respecto a sus restricciones [Siciliano *et. al*, 2011]. Dichas restricciones son descritas a continuación.

### 2.2.1. Restricciones cinemáticas

Para analizar los RMR's es necesario entender cómo se comportan sus ruedas. De manera general se considera una rueda como un disco, con un punto de contacto  $(x, y)$ , que gira en un plano horizontal mientras se mantiene vertical (Figura 2.1). En este punto de contacto se fijan dos vectores perpendiculares, el vector de dirección  $P_a$  y un vector normal a este  $P_e$ . El ángulo formado entre el vector  $P_a$  y el eje  $x$  del plano se conoce como  $\theta$  (orientación).

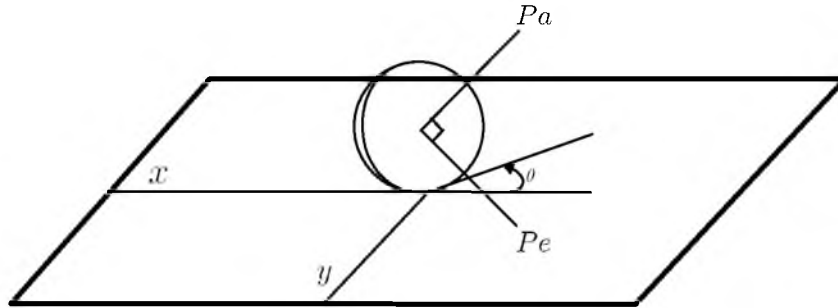


Figura 2.1: Diagrama físico de movimiento de un disco.

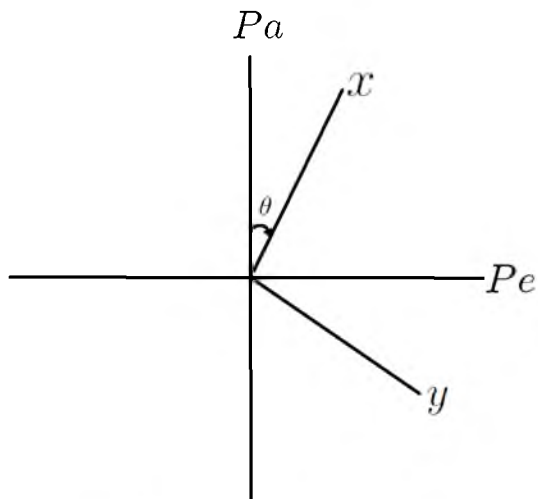


Figura 2.2: Rotación de ejes.

A fin de encontrar una representación matemática de las restricciones físicas del movimiento de la rueda, se rotan los ejes  $x, y$ , como se muestra en la figura 2.2. Supongamos que la rueda avanza en dirección  $P_a$ . Las componentes de velocidad del vector  $P_e$  son:

$$\begin{aligned} \dot{x} \cos(90 - \theta) - \dot{y} \cos(\theta) &= 0, \\ \dot{x} \sin\theta - \dot{y} \cos\theta &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Debido a que el punto de contacto se mueve en dirección  $P_a$ , la velocidad en dirección de  $P_e$  es cero. La velocidad angular del disco alrededor del eje vertical no está restringida. Estas dos afirmaciones se consideran como una restricción, esto es, una condición que limita la movilidad de las ruedas de manera instantánea en dirección perpendicular al eje de dirección.

Existen diversos tipos de restricciones, de entre las cuales nos interesa presentar las holonómicas y las no holonómicas.

Sea  $q$  el conjunto de coordenadas generalizadas  $(x, y, \theta)$ , las restricciones que pueden representarse como

$$h_i(q) = 0 \quad i = 1, \dots, k < n, \tag{2.2}$$

son llamadas holonómicas (o integrables)[Siciliano *et. al*, 2011]. Un sistema mecánico para el cual todas sus restricciones pueden ser expresadas en la forma (2.2) es llamado holonómico. Las restricciones holonómicas reducen el espacio de movimiento y son, generalmente, el resultado de la interconexión mecánica entre varios cuerpos, como es el caso de los robots manipuladores.

Las restricciones que involucran coordenadas generalizadas y velocidades

$$a_i(q, \dot{q}) = 0 \quad i = 1, \dots, k < n,$$

son llamadas cinemáticas. Estas limitan el movimiento instantáneo admisible del sistema mecánico mediante la reducción del conjunto de velocidades generalizadas que se puede alcanzar en cada configuración.

Si un sistema de restricciones cinemáticas, en la forma (2.2), no es integrable, entonces se conoce como sistema de restricciones no holonómicas. Un sistema mecánico sometido al menos a una de estas restricciones es llamado no holonómico. Las restricciones no holonómicas reducen la movilidad de un sistema mecánico en una forma completamente diferente con respecto a las restricciones holonómicas. Para apreciar este hecho, considere una restricción:

$$a^T(q)\dot{q} = 0, \quad (2.3)$$

representada en forma matricial

$$A^T(q)\dot{q} = 0. \quad (2.4)$$

Si la restricción es holonómica, esta puede ser integrada y escrita como

$$h(q) = c,$$

Por lo tanto, hay una pérdida de la accesibilidad en el espacio de configuración  $C$ . Esto es debido a que el movimiento del sistema mecánico en  $C$  se limita a una superficie de nivel particular de la función escalar  $h$ . Esta superficie, que depende de la configuración inicial a través de  $q_0$  el valor de  $h(q_0) = c$ , tiene dimensión  $n - 1$ .

Supongamos en cambio que la restricción (2.3) es no holonómica. En este caso, las velocidades generalizadas están obligadas a pertenecer a un subespacio de dimensión  $n - 1$ , es decir, el espacio nulo de la matriz  $a^T(q)$ . Sin embargo, el hecho de que la restricción es no integrable significa que no hay pérdida de la accesibilidad en  $C$  para el sistema. En otras palabras, mientras que el número de grados de libertad disminuye a  $n - 1$ , debido a la restricción, el número de coordenadas generalizadas no se puede reducir, ni siquiera a nivel local.

En conclusión, un sistema mecánico de dimensión  $n$  sujeto a  $k$  restricciones no holonómicas puede acceder a toda su espacio de configuración  $C$ , aunque sus velocidades generalizadas deben pertenecer a un subespacio ( $n -$

$k$ )—dimensional.

La restricción (2.1) es no holonómica, ya que implica que no hay pérdida de la accesibilidad en el espacio. Esto se puede corroborar si se considera que el disco puede desplazarse desde cualquier configuración inicial  $q_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & \theta_i \end{bmatrix}^T$  a cualquier configuración final  $q_f = \begin{bmatrix} x_f & y_f & \theta_f \end{bmatrix}^T$  a través de la siguiente secuencia de movimientos, que no violan la restricción (2.1) :

1. Girar el disco alrededor de su eje vertical, de manera que llegue a la orientación  $\theta_v$  para la cual el eje de dirección pasa por el punto de contacto final  $(x_f, y_f)$ ;
2. Rodar el disco en el plano en una orientación constante  $\theta_v$  hasta que el punto de contacto alcanza su posición final  $(x_f, y_f)$ ;
3. Girar de nuevo el disco alrededor de su eje vertical para cambiar la orientación de  $\theta_v$  a  $\theta_f$ .

La descripción matemática de los movimientos instantáneos admisibles de un RMR, considerando sus restricciones, se conoce como modelo cinemático del RMR [Siciliano *et. al*, 2011]. A continuación se presenta la construcción del modelo cinemático de un RMR con configuración síncrona.

### 2.3. Modelo cinemático.

El modelado de los RMR's requiere un análisis preliminar de las restricciones cinemáticas impuestas por la presencia de ruedas. Según la estructura mecánica, tales restricciones pueden ser integrables o no; esto tiene consecuencia directa en la movilidad de un robot.

El sistema de  $k$  restricciones implica que las velocidades generalizadas admisibles en cada configuración  $q$  pertenecen al espacio nulo  $(n-k)$ —dimensional de la matriz  $A^T(q)$ , el cual se representará como  $N(A^T(q))$ .

Las trayectorias admisibles pueden caracterizarse como la solución al sistema dinámico no lineal

$$\dot{q} = \sum_{j=1}^m g_j(q)u_j = G(q)u \text{ donde } m = n - k, \quad (2.5)$$

$q \in \mathbb{R}$  es el vector de estados,  
 $u = [u_1 \dots u_m] \in \mathbb{R}$  es el vector de entradas,  
 donde  $\{g_1(q), \dots, g_{n-k}(q)\}$  es base de  $N(A^T(q))$ .

La elección de  $g_1(q), \dots, g_m(q)$  no es única.

Es posible seleccionar la base de  $N(A^T(q))$  de tal forma que las entradas  $u_j$ 's tengan una interpretación física.

La ecuación (2.5) es referida como el modelo cinemático para los sistemas mecánicos restringidos.

### 2.3.1. Relación controlabilidad y no holonomicidad.

Las restricciones holonómicas o no holonómicas (2.3) se pueden establecer mediante el análisis de las propiedades de controlabilidad del modelo cinemático asociado (2.5). Existen dos casos posibles:

1. Si el sistema (2.5) es controlable, dadas dos configuraciones arbitrarias  $q_i$  y  $q_f$  en  $C$ , existe una entrada de control  $u(t)$  que dirige el sistema de  $q_i$  a  $q_f$ , es decir, existe una trayectoria que une a las dos configuraciones y satisface la restricciones cinemáticas (2.3). Por lo tanto, éstas no afectan de ninguna manera la accesibilidad de  $C$ , y son (completamente) no holonómicas.

2. Si el sistema (2.5) es no controlable, las restricciones cinemáticas (2.3) reducen el conjunto de configuraciones accesibles en  $C$ . Por lo tanto, las restricciones son parcialmente o completamente integrables en función de la dimensión del espacio de configuración accesible  $v$  el cual es menor que la dimensión del espacio de configuración  $n$ . En particular:

2a. Si  $m < v < n$ , la pérdida de accesibilidad no es máxima, y por lo tanto las restricciones (2.3) son sólo parcialmente integrables. El sistema mecánico

es todavía no holonómico.

- 2b. Si  $v = m$ , la pérdida de la accesibilidad es máxima, y las restricciones de (2.3) son completamente integrables. Por lo tanto, el sistema mecánico es holonómico.

## 2.4. Modelo cinemático de un robot móvil síncrono.

Un RMR con configuración síncrona consta de tres ruedas orientables, las cuales le sirven tanto para dirección como para tracción. Dichas ruedas llevan siempre la misma dirección y velocidad angular, por lo que esta configuración puede simplificarse a una sola rueda. De esta manera el comportamiento cinemático de un robot síncrono es equivalente al de un unicycle. Un unicycle es un robot con un grave problema de equilibrio en condiciones estáticas, desventaja que no posee un síncrono, cuyas tres ruedas le proporcionan estabilidad.

Las coordenadas generalizadas de un robot síncrono, simplificado a una sola rueda, se representan con el vector  $q$ :

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix},$$

donde:

$\theta$  representa la orientación de la rueda respecto al eje  $x$ .

$x, y$  son las coordenadas cartesianas del punto de contacto rueda-superficie (o equivalente al centro de la rueda).

La rueda posee una única restricción de rotación pura:

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix} \dot{q} = 0, \quad (2.6)$$

la cual indica que la velocidad del punto de contacto es cero en dirección

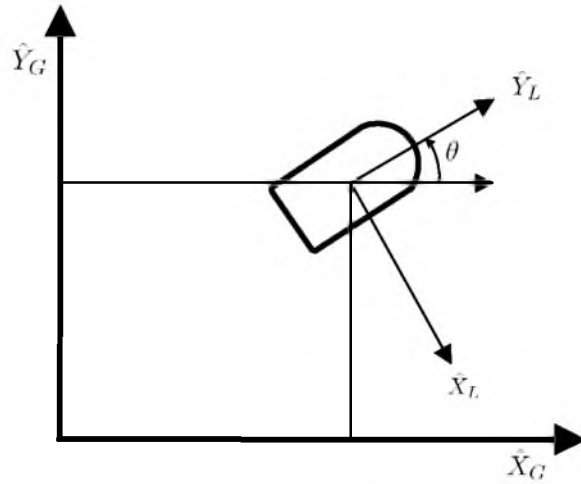


Figura 2.3: Sistemas de referencia en robots móviles.

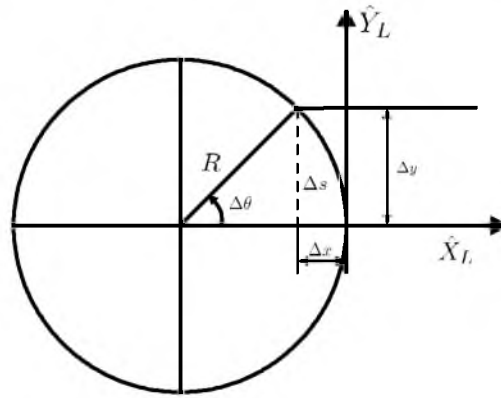


Figura 2.4: Círculo osculador.

ortogonal al eje vertical (eje sagital) de la rueda (la simplificación del vehículo).

Considérese un sistema de referencia  $\{G\}$  y un sistema  $\{L\}$  con centro en el punto de guiado del robot y eje  $\hat{Y}_L$  coincidente con el eje de dirección (figura 2.3).

Supóngase que el robot se desplaza en un intervalo de control según un arco de circunferencia como se muestra en la figura 2.4, donde  $\Delta x$  es el incremento en el eje  $x$  y  $\Delta y$  el incremento de  $y$  en el sistema de referencia  $\{L\}$ . Esta suposición es válida para intervalos de control suficientemente pequeños.

La velocidad lineal del robot es:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (2.7)$$

y la velocidad angular:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (2.8)$$

donde:

$\Delta t$  : intervalo de control.

$\Delta s$  : desplazamiento del robot durante  $\Delta t$ .

$\Delta\theta$  : cambio de orientación del robot durante  $\Delta t$ .

La longitud  $\Delta s$  viene dada por:

$$\Delta s = R\Delta\theta, \quad (2.9)$$

siendo  $R$  el radio de giro o radio de la circunferencia que describe al punto de dirección.

La curvatura se define como la inversa del radio de giro:

$$\gamma = \frac{1}{R} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}, \quad (2.10)$$

Las ecuaciones de movimiento en el sistema  $\{L\}$  de la figura 2.4 en la posición inicial son:

$${}^L(\Delta x) = -(R - R \cos(\Delta\theta)) = R(\cos(\Delta\theta) - 1), \quad (2.11)$$

$${}^L(\Delta y) = R \operatorname{sen}(\Delta\theta). \quad (2.12)$$

En la figura 2.5 se muestra la ubicación del sistema  $\{G\}$  en el sistema  $\{L\}$ , así como sus componentes en  $\{G\}$ . Si la orientación del robot respecto al sistema  $\{G\}$  es de  $(90 - \theta)$ , el movimiento en el sistema  $\{G\}$  se determina rotando  $(90 - \theta)$  (Figura 2.6):

$${}^G(\Delta x) = \Delta x_{x_L} + \Delta x_{y_L},$$

$$\begin{aligned}
{}^G(\Delta x) &= -(\Delta x_L) \cos(90 - \theta) + \Delta y_L \cos \theta, \\
&= -(\Delta x_L) \operatorname{sen} \theta + \Delta y_L \cos \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^G(\Delta x) &= (R(\cos(\Delta\theta) - 1)) \operatorname{sen} \theta + (R \operatorname{sen}(\Delta\theta)) \cos \theta, \quad (2.13) \\
&= R(\cos(\Delta\theta) - 1) \operatorname{sen} \theta + (R \operatorname{sen}(\Delta\theta)) \cos \theta,
\end{aligned}$$

$${}^G(\Delta y) = \Delta y_{x_L} + \Delta y_{y_L},$$

$$\begin{aligned}
{}^G(\Delta y) &= (\Delta x_L) \cos \theta + \Delta y_L \cos(90 - \theta), \\
&= (\Delta x_L) \cos \theta + \Delta y_L \operatorname{sen} \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^G(\Delta y) &= (R(\cos(\Delta\theta) - 1)) \cos \theta + (R \operatorname{sen}(\Delta\theta)) \operatorname{sen} \theta, \quad (2.14) \\
&= R(\cos(\Delta\theta) - 1) \cos \theta + (R \operatorname{sen}(\Delta\theta)) \operatorname{sen} \theta,
\end{aligned}$$

Suponiendo que el intervalo de control es lo suficientemente pequeño, también lo será el cambio de orientación  $\Delta\theta$  con lo cual

$$\cos(\Delta\theta) \equiv 1, \quad (2.15)$$

$$\operatorname{sen}(\Delta\theta) \equiv \Delta\theta, \quad (2.16)$$

Sustituyendo (2.15) en las ecuaciones (2.13) y (2.14) se tiene que:

$$\Delta x = R\Delta\theta \cos \theta, \quad (2.17)$$

$$\Delta y = R\Delta\theta \operatorname{sen} \theta,$$

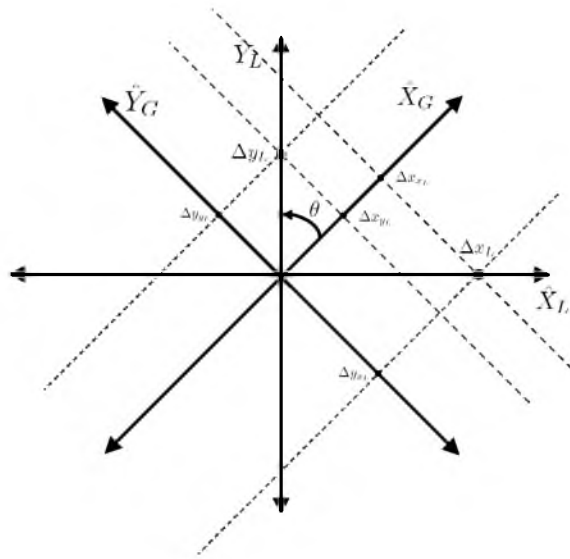


Figura 2.5: Ubicación de componentes en los sistemas de referencia  $\{G\}$  y  $\{L\}$ .

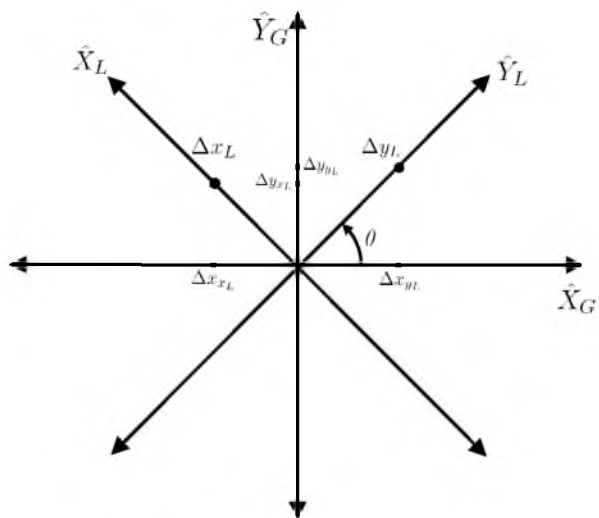


Figura 2.6: Rotación de ejes de referencia.

y teniendo en cuenta (2.9)

$$\Delta x = \Delta s \cos \theta, \quad (2.18)$$

$$\Delta y = \Delta s \operatorname{sen} \theta,$$

Dividiendo ambas ecuaciones por  $\Delta t$ , teniendo en cuenta 2.7 y haciendo tender  $\Delta t$  a cero se llega a

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad (2.19)$$

$$\dot{y} = v \operatorname{sen} \theta, \quad (2.20)$$

ecuaciones a las que puede añadirse la que se obtiene a partir de (2.8)

$$\dot{\theta} = \omega \quad (2.21)$$

la cual proporciona la variación de la orientación.

Las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) se pueden escribir en forma matricial  $G$

$$G(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) & g_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

donde  $g_1(q)$  y  $g_2(q)$  son una base del espacio nulo de la matriz asociada con las restricciones  $G$ . Todas las velocidades generalizadas en  $q$  son obtenidas como una combinación lineal de  $g_1(q)$  y  $g_2(q)$ .

El modelo cinemático es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (2.23)$$

donde las entradas  $v$  y  $\omega$  tienen una interpretación física.

La equivalencia del modelo cinemático (2.23) entre un robot móvil síncrono y un unicycle también se observa en las entradas de control que son de hecho la velocidad  $v$  de conducción y la velocidad  $\omega$  de dirección, que son comunes en las tres ruedas orientables. En el caso de las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , que en un unicycle corresponden al centro de su rueda, pueden representar en el caso de un síncrono cualquier punto del robot (por ejemplo, su centroide), mientras que  $\theta$  es la orientación común de las ruedas.

# Capítulo 3

## MODELO DINÁMICO

### 3.1. Introducción

El modelo dinámico considera las fuerzas de reacción y describe la relación entre los movimientos y las fuerzas generalizadas que actúan en el robot. De la misma forma que en los robots manipuladores para obtener el modelo dinámico se utiliza el lagrangiano para sistemas mecánicos. La diferencia radica en que para un sistema  $n - dimensional$  se tienen  $k < n$  restricciones cinemáticas no holonómicas en las coordenadas generalizadas. Una consecuencia importante de la no holonomía es que la linealización exacta del modelo dinámico no es posible. Sin embargo puede ser linealizado parcialmente vía retroalimentación.

El lagrangiano se define como la diferencia entre la energía cinética  $T(q, \dot{q})$  y la energía potencial  $U(q)$  de un sistema:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q).$$

Aquí la energía cinética puede ser representada como una forma cuadrática (en función de  $q$ ) simétrica y definida positiva

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q}.$$

El lagrangiano puede ser representado como sigue

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} - U(q),$$

donde  $B(q)$  se conoce como la matriz de inercias.

Las ecuaciones lagrangianas son:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = S(q)\tau + A(q)\lambda, \quad (3.1)$$

donde:

$S(q)$  matriz  $n \times n$  asignando  $m - k$  entradas externas;

$A(q)$  transpuesta de la matriz  $k \times n$  de restricciones cinemáticas ;

$\lambda$  vector de multiplicadores lagrangianos;

$A(q)\lambda$  vector de fuerzas de reacción en el nivel de coordenadas generalizadas.

Para el modelo anterior se asume que el número de grados de libertad son los mismos que el número de entradas (dimensión de  $\Pi$ ), que es igual a  $n - k$ .

Calculando las derivadas involucradas en el lagrangiano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q} &= -\frac{\partial U(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \dot{q}^T B(q) \dot{q}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= \frac{1}{2} B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) = B(q) \dot{q}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= B(q) \ddot{q} + \dot{B}(q) \dot{q}, \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación (3.1)

$$\begin{aligned} B(q) \ddot{q} + \dot{B}(q) \dot{q} - \left( -\frac{\partial U(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \right) &= S(q)\tau + A(q)\lambda, \\ B(q) \ddot{q} + \dot{B}(q) \dot{q} + \frac{\partial U(q)}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \dot{q}^T B(q) \dot{q} &= S(q)\tau + A(q)\lambda. \end{aligned}$$

Si definimos:

$$\eta(q, \dot{q}) = B(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{\partial U(q)}{\partial q},$$

entonces el modelo dinámico del sistema mecánico restringido es el siguiente

$$B(q)\ddot{q} + \eta(q, \dot{q}) = S(q)\tau + A(q)\lambda, \quad (3.2)$$

$$A^T(q)\dot{q} = 0. \quad (3.3)$$

Considerando la matriz  $G(q)$ , definida en (2.22) cuyas columnas son una base para el espacio nulo de  $A^T(q)$ , tal que  $A^T(q)G(q) = 0$ , las restricciones dadas pueden remplazarse con el modelo cinemático.

$$\dot{q} = G(q)\vec{v} = \sum_{i=1}^m g_i(q)\nu_i, \quad (3.4)$$

con lo que tenemos el primer conjunto de ecuaciones del modelo dinámico. Aquí  $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de pseudo velocidades, que en el caso de un síncrono son  $v$  y  $\omega$ .

En la ecuación (3.2), se desconoce el término  $\lambda$  (multiplicador de Lagrange). Debido a que su cálculo es relativamente complicado eliminaremos  $\lambda$ . Con este fin se multiplica la ecuación (3.2) por  $G^T(q)$

$$G^T(q)B(q)\ddot{q} + G^T(q)\eta(q, \dot{q}) = G^T(q)S(q)\tau + G^T(q)A(q)\lambda,$$

$$G^T(q)B(q)\ddot{q} = G^T(q)S(q)\tau - G^T(q)\eta(q, \dot{q}). \quad (3.5)$$

La derivada de (3.4) con respecto al tiempo es

$$\ddot{q} = \dot{G}(q)\vec{v} + G(q)\dot{\vec{v}}.$$

Ahora, se premultiplica la ecuación anterior por  $G^T(q)B(q)$

$$G^T(q)B(q)\ddot{q} = G^T(q)B(q)\dot{G}(q)\vec{v} + G^T(q)B(q)G(q)\dot{\vec{v}}.$$

y usando el modelo dinámico reducido de (3.5) se tiene

$$\begin{aligned} G^T(q)S(q)\tau - G^T(q)\eta(q, \dot{q}) &= G^T(q)B(q)\dot{G}(q)\vec{v} + G^T(q)B(q)G(q)\dot{\vec{v}}, & (3.6) \\ G^T(q)S(q)\tau &= G^T(q)\eta(q, \dot{q}) + G^T(q)B(q)\dot{G}(q)\vec{v} + G^T(q)B(q)G(q)\dot{\vec{v}}. \end{aligned}$$

si llamamos

$$\begin{aligned} M(q) &= G^T(q)B(q)G(q), \\ m(q, \vec{v}) &= G^T(q)B(q)\dot{G}(q)\vec{v} + G^T(q)\eta(q, G(q), \vec{v}), \end{aligned}$$

tenemos

$$M(q)\vec{v}\dot{\vec{v}} + m(q, \vec{v}) = G^T(q)S(q)\tau, \quad (3.7)$$

donde  $M(q)$  definida positiva y

$$\dot{G}(q)\vec{v} = \sum_{i=1}^m \left( v_i \frac{\partial g_i(q)}{\partial q} \right) G(q)\vec{v}.$$

Finalmente la representación de las ecuaciones (3.4) y (3.7) en el espacio de estados es el siguiente

$$\dot{q} = G(q)\vec{v}, \quad (3.8)$$

$$\dot{\vec{v}} = M^{-1}(q)m(q, \vec{v}) + M^{-1}(q)G^T(q)S(q)\tau. \quad (3.9)$$

El sistema (3.8) representa en forma compatible los modelos cinemático y dinámico del sistema restringido como un conjunto de  $n + m$  ecuaciones diferenciales.

Suponiendo que

$$\det(G^T(q)S(q)) \neq 0,$$

podemos suponer que existe una entrada de control  $\tau$  que nos permite manipular el comportamiento del sistema

$$\tau = (G^T(q)S(q))^{-1}(M(q)a + m(q, \vec{v})) \quad (3.10)$$

donde  $a = \dot{v} \in \mathbb{R}^m$  es la pseudo-aceleración.

Por lo tanto, utilizando esta  $\tau$  en (3.9), el sistema resultante es:

$$\dot{q} = G(q)\vec{v}, \quad (3.11)$$

$$\dot{v} = a. \quad (3.12)$$

En el sistema de ecuaciones (3.11) y (3.12), las primeras  $n$  ecuaciones corresponden al modelo cinemático y las últimas  $m$  ecuaciones representan la inclusión de  $m$  integradores de las entradas, lo cual es solo una extensión dinámica.

Si el sistema no tiene restricciones y está totalmente actuado

$$G(q) = S(q) = I_n,$$

entonces, la ley de retroalimentación (3.10) simplemente se reduce a una dinámica de control inverso, y el correspondiente lazo cerrado del sistema es equivalente a  $n$  integradores dobles desacoplados.

La implementación de la ley de retroalimentación (3.10) requiere la medida de  $v$  y esto puede no ser posible. Por tanto la pseudovelocidad puede ser obtenida por el modelo dinámico como:

$$G(q)\dot{q} = (G^T(q)G(q))^{-1}G^T(q)\dot{q},$$

donde  $(G^T(q)G(q))^{-1}$  representa la pseudoinversa por la izquierda.

Definiendo el estado como:

$$x = (q, v) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

y la entrada:

$$u = a \in \mathbb{R}^m,$$

el sistema (3.11) y (3.12) puede escribirse como

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u = \begin{bmatrix} G(q)u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} u,$$

esto conocido como el modelo cinemático de segundo orden de un sistema mecánico restringido. En consecuencia, la ecuación (3.11) a veces se llama modelo cinemático de primer orden.

Resumiendo, en los sistemas mecánicos holonómicos, como los robots móviles a ruedas, es posible “cancelar” los efectos dinámicos a través de retroalimentación no lineal del estado, siempre y cuando los parámetros dinámicos se conozcan con exactitud y el estado completo del sistema (coordenadas y velocidades generalizadas  $q$  y  $\dot{q}$ ) pueda medirse.

Bajo estos supuestos, el problema de control puede ser dirigido directamente a nivel (pseudo)-velocidad, es decir, por la elección de  $v$  de tal manera que el modelo cinemático (3.8) se comporte como se desea. A partir de  $v$ , es posible derivar las entradas de control reales a nivel de fuerza generalizada a través de (3.10). Puesto que  $a = \dot{v}$  aparece en esta ecuación, la pseudo-velocidad  $v$  debe ser diferenciable con respecto al tiempo.

## 3.2. Modelo dinámico del robot móvil síncrono.

Sea  $m$  la masa del robot,  $I$  su momento de inercia alrededor del eje vertical que pasa por su centro,  $\tau_1$  la fuerza de conducción y  $\tau_2$  el par de dirección. Con la restricción cinemática expresada como (2.6), el modelo dinámico (3.2) toma la forma:

$$B(q)\ddot{q} + \eta(q, \dot{q}) = S(q)\tau + A(q)\lambda.$$

En este caso:

$$\begin{aligned}\eta(q, \dot{q}) &= 0; \\ G(q) &= S(q); \\ G^T(q)S(q) &= I; \\ G^T(q)B(q)\dot{G}(q) &= 0;\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{sen} \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \lambda, \\ \dot{x} \text{sen} \theta - \dot{y} \cos \theta &= 0.\end{aligned}$$

Para obtener el modelo reducido simplifiquemos las ecuaciones (3.8) considerando las condiciones anteriores

$$\dot{q} = G(q)v,$$

$$\dot{v} = M^{-1}(q)m(q, v) + M^{-1}(q)G^T(q)S(q)\tau,$$

como

$$m(q, v) = G^T(q)B(q)\dot{G}(q)v + G^T(q)\eta(q, G(q), v),$$

podemos simplificar como

$$\begin{aligned}\dot{v} &= M^{-1}(q)(G^T(q)B(q)\dot{G}(q)v + G^T(q)\eta(q, G(q), v)) + M^{-1}(q)I\tau, \\ \dot{v} &= M^{-1}(q)((0)v + G^T(q)(0)) + M^{-1}(q)\tau, \\ \dot{v} &= M^{-1}(q)\tau,\end{aligned}$$

donde:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$M^{-1}(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I} \end{bmatrix},$$

usando la transformación de entrada

$$\tau = Mu = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} u,$$

el modelo cinemático de segundo orden es obtenido como:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega,$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= M^{-1}(q)\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} u, \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \end{aligned}$$

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \text{sen} \theta \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

con el vector de estados  $\xi = [x \ y \ \theta \ v \ \omega]^T \in \mathbb{R}^5$

# Capítulo 4

## CONTROL DE MOVIMIENTO

### 4.1. Introducción

El control de un robot móvil difiere del problema análogo en robots manipuladores, debido a que dispone de menos entradas de control que variables de configuración. Una consecuencia importante es que la estructura de un controlador que permite a un robot seguir una trayectoria (problema de seguimiento) es inevitablemente diferente a la de un controlador encaminado a llevar el robot a una configuración determinada (problema de regulación). Además, ya que los sensores propioceptivos<sup>1</sup> de un robot móvil no otorgan ningún dato de la configuración del vehículo, es necesario desarrollar métodos de localización para el robot en el ambiente [Siciliano *et. al*, 2011].

El control de movimiento, para robots móviles a ruedas, es formulado generalmente con referencia al modelo cinemático (2.5) asumiendo que las entradas de control determinan directamente las velocidades generalizadas  $\dot{q}$ . Por ejemplo, en el caso de un síncrono significa que las entradas son las velocidades de conducción y dirección,  $v$  y  $\omega$ . Hay esencialmente dos razones para tomar esta suposición.

- Primera, bajo suposiciones adecuadas es posible cancelar los efectos dinámicos a través de la retroalimentación de estados, de tal manera que el

---

<sup>1</sup>Un sensor propioceptivo es cualquier sensor usado para medir el estado interno del robot.

problema de control es transferido a un modelo cinemático de segundo orden y de este a uno de primer orden.

- Segunda, en la mayoría de los robots móviles es complejo controlar directamente los torques de las ruedas porque hay lazos de control de bajo nivel que son integrados en la arquitectura del software y hardware. Estos lazos aceptan como entradas un valor de referencia para la velocidad angular de la rueda que es reproducida con la mayor precisión posible por acciones de control estándar (PID por ejemplo). En este caso, para evitar estas complicaciones las entradas reales válidas para el control serán precisamente las velocidades de referencia.

En el caso del robot síncrono (sistema 2.23) se deben de considerar 2 problemas de control que son:

1. Seguimiento de trayectoria: El robot debe seguir asintóticamente una trayectoria cartesiana deseada  $(x_d(t), y_d(t))$ , partiendo de una configuración inicial  $q_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & \theta_0 \end{bmatrix}^T$  que puede o no partir en la trayectoria.
2. Regulación de postura: el robot debe asintóticamente alcanzar una postura determinada  $q_d$ , partiendo de una configuración inicial  $q_0$ .

Desde un punto de vista práctico, el más relevante de estos problemas es, sin duda, el primero. Esto es porque, a diferencia de los manipuladores industriales, los robots móviles operan siempre en espacios de trabajo no estructurados que contienen obstáculos.

El hecho de que el robot se mueva a lo largo de una trayectoria planeada de antemano reduce considerablemente el riesgo de colisiones. Por otra parte, no se requiere una etapa de planeación preliminar cuando se lleva a cabo la regulación de postura, pero a lo largo de la trayectoria cartesiana los enfoques del robot  $q_d$  pueden no ser especificados por el usuario. Por lo tanto en este trabajo solo se realizará seguimiento de trayectorias.

### 4.1.1. Seguimiento de trayectoria.

Para solucionar el problema de seguimiento es necesario que la trayectoria cartesiana deseada  $(x_d(t), y_d(t))$  sea admisible para el modelo cinemático (2.23) esto es, debe satisfacer las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= v_d \cos \theta_d \\ \dot{y}_d &= v_d \operatorname{sen} \theta_d \\ \dot{\theta}_d &= \omega_d\end{aligned}\tag{4.1}$$

para alguna elección de entradas de referencia  $v_d$  y  $\omega_d$ . En cualquier caso ya que las coordenadas  $x$  y  $y$  en un síncrono son salidas planas, la orientación a lo largo de la trayectoria deseada  $(x_d(t), y_d(t))$  puede ser calculadas como:

$$\theta_d(t) = A \tan 2(\dot{y}_d(t), \dot{x}_d(t)) + k\pi \text{ con } k = 0, 1\tag{4.2}$$

así como las entradas de referencia

$$v_d(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}\tag{4.3}$$

$$\omega_d(t) = \frac{\ddot{y}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}\tag{4.4}$$

En lo siguiente se asume el valor de  $k$  en (4.2), y el signo de  $v_d$  en (4.3), han sido elegidos.

Por comparación el estado deseado  $q_d = \begin{bmatrix} x_d(t) & y_d(t) & \theta_d(t) \end{bmatrix}^T$  con el estado medido actual  $q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & \theta(t) \end{bmatrix}^T$  es posible calcular un vector de error que puede ser proporcionado al controlador. Sin embargo, en lugar de usar la diferencia entre  $q_d$  y  $q$  directamente, es conveniente definir el error de

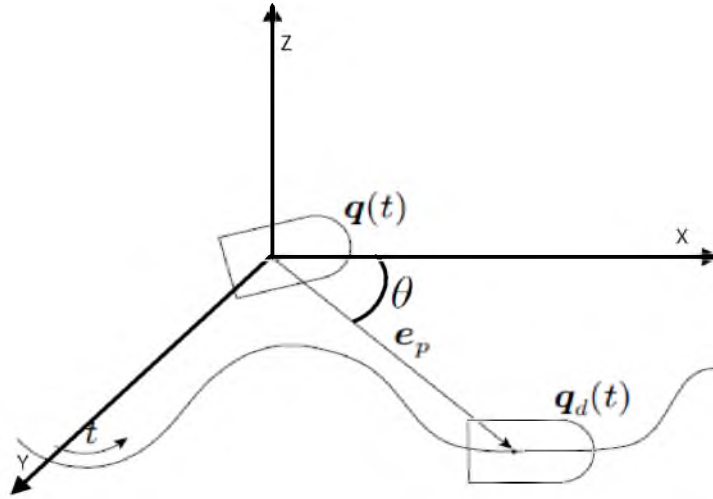


Figura 4.1: Error  $e$  en el seguimiento de trayectoria

seguimiento como:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

La parte posicional de  $e$  es el error cartesiano  $e_p = \begin{bmatrix} x_d - x & y_d - y \end{bmatrix}^T$  expresada en un eje de referencia alineado con la orientación actual  $\theta$  del robot (figura 4.1). Diferenciando  $e$  con respecto al tiempo y usando (2.23) y (4.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (\dot{x}_d - \dot{x}) \cos \theta - \dot{\theta}(x_d - x) \text{sen} \theta + (\dot{y}_d - \dot{y}) \text{sen} \theta + \dot{\theta}(y_d - y) \cos \theta \\ \dot{e}_1 &= ((x_d - x) + (y_d - y) \cos \theta) \text{sen} \theta \omega + \dot{x}_d \cos \theta - \dot{x} \cos \theta + \dot{y}_d \text{sen} \theta - \dot{y} \text{sen} \theta \\ \dot{e}_1 &= e_2 \omega + (v_d \cos \theta_d) \cos \theta - (v \cos \theta) \cos \theta + (v_d \text{sen} \theta_d) \text{sen} \theta - (v \text{sen} \theta) \text{sen} \theta \\ \dot{e}_1 &= e_2 \omega + (v_d \cos \theta_d \cos \theta + v_d \text{sen} \theta_d \text{sen} \theta) - v(\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) \\ \dot{e}_1 &= e_2 \omega + v_d \cos(\theta_d - \theta) - v \\ \dot{e}_1 &= e_2 \omega + v_d \cos e_3 - v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{e}_2 &= -(\dot{x}_d - \dot{x})\text{sen}\theta - \dot{\theta}(x_d - x)\cos\theta + (\dot{y}_d - \dot{y})\cos\theta - \dot{\theta}(y_d - y)\text{sen}\theta \\
\dot{e}_2 &= \omega(-(x_d - x)\cos\theta - (y_d - y)\text{sen}\theta) - \dot{x}_d\text{sen}\theta + \dot{x}\text{sen}\theta + \dot{y}_d\cos\theta - \dot{y}\cos\theta \\
\dot{e}_2 &= -e_1\omega - v_d\cos\theta_d\text{sen}\theta + (v\cos\theta)\text{sen}\theta + (v_d\text{sen}\theta_d)\cos\theta - (v\text{sen}\theta)\cos\theta \\
\dot{e}_2 &= -e_1\omega + v_d(-\cos\theta_d\text{sen}\theta + \text{sen}\theta_d\cos\theta) \\
\dot{e}_2 &= -e_1\omega + v_d\text{sen}(\theta_d - \theta) \\
\dot{e}_2 &= -e_1\omega + v_d\text{sen}(e_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{e}_3 &= \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \\
\dot{e}_3 &= \omega_d - \omega
\end{aligned}$$

usando la transformación de entrada:

$$v = v_d \cos e_3 - u_1 \quad (4.6)$$

$$\omega = \omega_d - u_2 \quad (4.7)$$

se obtiene la siguiente expresión para la dinámica del error de seguimiento:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2(\omega_d - u_2) + v_d \cos e_3 - (v_d \cos e_3 - u_1) \\
\dot{e}_1 &= e_2\omega_d - e_2u_2 - u_1
\end{aligned}$$

$$\dot{e}_2 = -e_1\omega_d + e_1u_2 + v_d\text{sen}(e_3)$$

$$\dot{e}_3 = \omega_d - \omega_d + u_2$$

$$\dot{e}_3 = u_2$$

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen}(e_3) \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & -e_2 \\ 0 & e_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Note que el primer término de la dinámica es lineal, mientras el segundo y tercero son no lineales. Más aún el primero y el segundo son variantes en el tiempo debido a la presencia de las entradas  $v_d(t)$  y  $\omega_d(t)$ .

## 4.2. Control lineal

El enfoque más simple para el diseño de un controlador de seguimiento consiste en utilizar la linealización aproximada de la dinámica del error alrededor de la trayectoria de referencia, en la que  $e = 0$ . Esta aproximación, cuya precisión aumenta a medida que el error de seguimiento  $e$  disminuye, se obtiene a partir de (4.8) simplemente definiendo el  $sen(e_3) = e_3$  y evaluando la matriz de entrada en la trayectoria. El resultado es

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Tome en cuenta que el sistema sigue siendo variante en el tiempo. Considerando ahora la retroalimentación lineal:

$$u_1 = -k_1 e_1 \tag{4.9}$$

$$u_2 = -k_2 e_2 - k_3 e_3 \tag{4.10}$$

se obtiene la siguiente dinámica linealizada de circuito cerrado.

$$\dot{e} = A(t)e = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} e \tag{4.11}$$

de donde el polinomio característico de  $A$  es:

$$P(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \det \left[ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} \right]$$

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda + k_1 & -\omega_d & 0 \\ \omega_d & \lambda & -v_d \\ 0 & k_2 & \lambda + k_3 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda + k_1)(\lambda + k_3) + \omega_d^2(\lambda + k_3) + v_d k_2(\lambda + k_1)$$

si se hace  $k_1 = k_3$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda(\lambda + k_1)^2 + \omega_d^2(\lambda + k_1) + v_d k_2(\lambda + k_1) = 0 \\ &= (\lambda + k_1)(\lambda(\lambda + k_1) + \omega_d^2 + v_d k_2) \\ &= (\lambda + k_1)(\lambda^2 + k_1 \lambda + \omega_d^2 + k_2 v_d) \end{aligned}$$

Si se hace

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\zeta a \\ k_2 &= \frac{a^2 - \omega_d^2}{v_d} \end{aligned} \tag{4.12}$$

el polinomio característico queda:

$$= (\lambda + 2\zeta a) \left( \lambda^2 + 2\zeta a \lambda + \omega_d^2 + \frac{a^2 - \omega_d^2}{v_d} \right)$$

La dinámica de error linealizada en lazo cerrado se caracteriza por tres valores propios constantes: un valor propio real negativo en  $2\zeta a$  y un par de valores propios complejos con parte real negativa, coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  y la frecuencia natural  $a$ . Sin embargo, en vista de su naturaleza variable en el tiempo, no hay garantía de que el sistema (4.11) es asintóticamente estable.

Una notable excepción es cuando  $v_d$  y  $\omega_d$  son constantes, como en el caso de las trayectorias circulares o rectilíneas. De hecho, el sistema linealizado (4.11)

es entonces invariante en el tiempo y por lo tanto asintóticamente estable con la elección de las ganancias en (4.12). Por lo tanto, mediante el uso de la ley de control (4.9), (4.10) con las mismas ganancias, el origen del error original del sistema (4.8) también es asintóticamente estable, aunque este resultado no garantiza mantenerla a nivel global. Para errores iniciales lo suficientemente pequeños, el robot síncrono sin duda converge a la trayectoria cartesiana deseada (ya sea circular o rectilínea).

En general, el controlador de realimentación (4.9), (4.10) es lineal pero también variante en el tiempo en vista de la expresión de  $k_2$  en (4.12). Las entradas de velocidad reales  $v$  y  $\omega$  deben ser reconstruidas a partir de  $u_1$  y  $u_2$  a través de (4.6), (4.7). En particular, es fácil verificar que  $v$  y  $\omega$  tienden a coincidir con las entradas de referencia  $v_d$  y  $\omega_d$  (esto es que se reducen a una acción de alimentación directa pura) conforme el error de seguimiento  $e$  se desvanece.

Por último, observese que  $k_2$  en (4.12) diverge cuando  $v_d$  tiende a cero, es decir, cuando la trayectoria de referencia cartesiana tiende a detenerse. Por lo tanto, el esquema de control anterior sólo se puede utilizar para trayectorias cartesianas persistentes, es decir, trayectorias de tal manera que  $|v_d(t)| \geq \bar{v} > 0, \forall t \geq 0$ . Esto también significa que no se permiten inversiones de movimiento (de avance a marcha atrás, o viceversa) en la trayectoria de referencia.

### 4.3. Control no lineal

Considerando de nuevo la expresión exacta de (4.8) de la dinámica del error de la trayectoria ahora se reescribe por conveniencia en la forma mixta:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2\omega + u_1 \\ \dot{e}_2 &= v_d \text{sen}(e_3) - e_1\omega \\ \dot{e}_3 &= u_2\end{aligned}\tag{4.13}$$

y la siguiente versión no lineal de la ley de control de (4.9) y (4.10)

$$u_1 = -k_1(v_d, \omega_d)e_1 \quad (4.14)$$

$$u_2 = -k_2v_d \frac{\text{sen}(e_3)}{e_3} e_2 - k_3(v_d, \omega_d)e_3 \quad (4.15)$$

donde  $k_1(\cdot, \cdot) > 0$  y  $k_3(\cdot, \cdot) > 0$  son funciones delimitadas con derivadas limitadas, y  $k_2 > 0$  es constante. Si las entradas de referencia  $v_d$  y  $\omega_d$  son también limitadas con derivadas limitadas, y ambas no convergen a cero, el error de trayectoria  $e$  converge a cero globalmente, esto es, para cualquier condición inicial.

Considere la dinámica del error de ciclo cerrado

$$\dot{e}_1 = e_2\omega - k_1(v_d, \omega_d)e_1 \quad (4.16)$$

$$\dot{e}_2 = v_d \text{sen}(e_3) - e_1\omega$$

$$\dot{e}_3 = -k_2v_d \frac{\text{sen}(e_3)}{e_3} e_2 - k_3(v_d, \omega_d)e_3$$

y la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{k_2}{2}(e_1^2 + e_2^2) + \frac{e_3^2}{2} \quad (4.17)$$

derivando en (4.17):

$$\dot{V} = k_2(e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2) + e_3\dot{e}_3$$

Sustituyendo (4.16) en la expresión anterior:

$$\dot{V} = k_2(e_1(e_2\omega - k_1(v_d, \omega_d)e_1) + e_2(v_d \text{sen}(e_3) - e_1\omega)) + e_3(-k_2v_d \frac{\text{sen}(e_3)}{e_3} e_2 - k_3(v_d, \omega_d)e_3)$$

y simplificando

$$\dot{V} = k_2 e_1 e_2 \omega - k_1(v_d, \omega_d) k_2 e_1^2 + k_2 e_2 v_d \sin(e_3) - k_2 e_2 e_1 \omega - k_2 e_2 v_d \sin(e_3) - k_3(v_d, \omega_d) e_3^2$$

se obtiene

$$\dot{V} = -k_1(v_d, \omega_d) k_2 e_1^2 - k_3(v_d, \omega_d) e_3^2$$

Con esta expresión se demuestra que con las leyes de control (4.14) y (4.15),  $e_1$ ,  $e_3$ ,  $e_2$  y  $V$  tienden a cero.

Para utilizar las leyes de control (4.14) y (4.15) en el modelo del robot móvil síncrono, se define  $k_1$  y  $k_3$  como sigue:

$$k_1(v_d, \omega_d) = k_3(v_d, \omega_d) = 2\delta(\omega_d^2 + \beta v_d^2)^{1/2}$$

# Capítulo 5

## SIMULACIONES

En este capítulo se muestran las respuestas obtenidas al implementar las estrategias de control, diseñadas en los apartados anteriores, en el modelo matemático del robot móvil síncrono. Las simulaciones fueron realizadas en la plataforma de Matlab<sup>®</sup>, específicamente en la herramienta Simulink<sup>®</sup>. Los diagramas utilizados se muestran en los Anexos I y II.

La simulación de las estrategias de control presentadas anteriormente necesita de ciertos elementos, cuya organización general se muestra en la figura 5.1.

Para llevar la simulación se necesita de una trayectoria que el robot deba seguir. Dicha trayectoria es generada con las velocidades lineal y angular [Ollero, 2001], que son definidas como 5.1 y 5.2

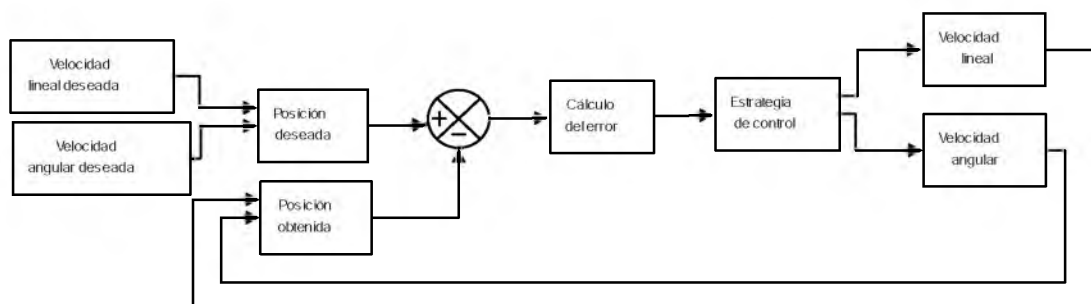


Figura 5.1: Diagrama a bloques de la implementación de los controladores en el robot móvil síncrono.

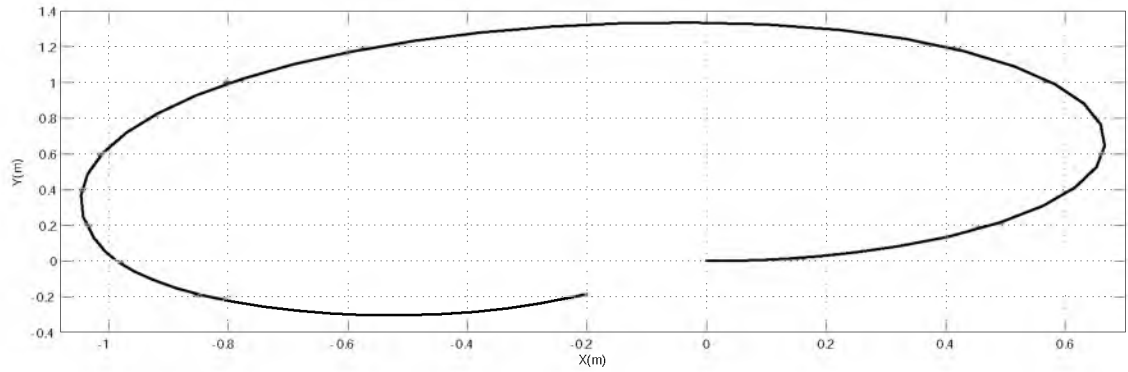


Figura 5.2: Trayectoria generada.

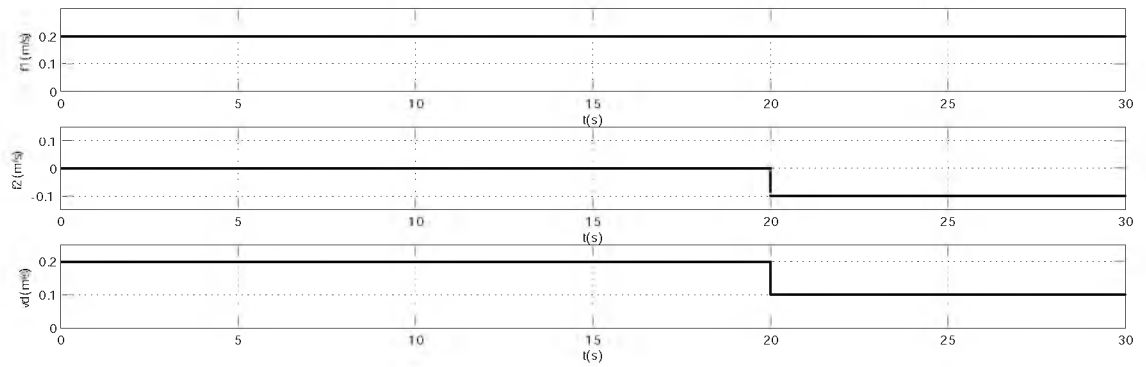


Figura 5.3: Funciones escalón que forman la velocidad lineal deseada.

$$v_d = \begin{cases} 0,2 \text{ m/s} & 0 \text{ s} \leq t < 20 \text{ s} \\ 0,1 \text{ m/s} & 20 \text{ s} \leq t \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\omega_d = \begin{cases} 0,3 \text{ rad/s} & 0 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s} \\ 0,2 \text{ rad/s} & 10 \text{ s} \leq t \end{cases} \quad (5.2)$$

La trayectoria a seguir por el robot se presenta en la figura 5.2.

Las velocidades deseadas corresponden a funciones generadas a partir de la suma de señales escalón. La figura 5.3 muestra cómo se obtiene la velocidad lineal y la figura 5.4, la angular.

Debido a que las trayectorias son determinadas con las funciones de velocidad angular y lineal, la estimación de la posición  $(x, y, \theta)$  se obtiene por medio

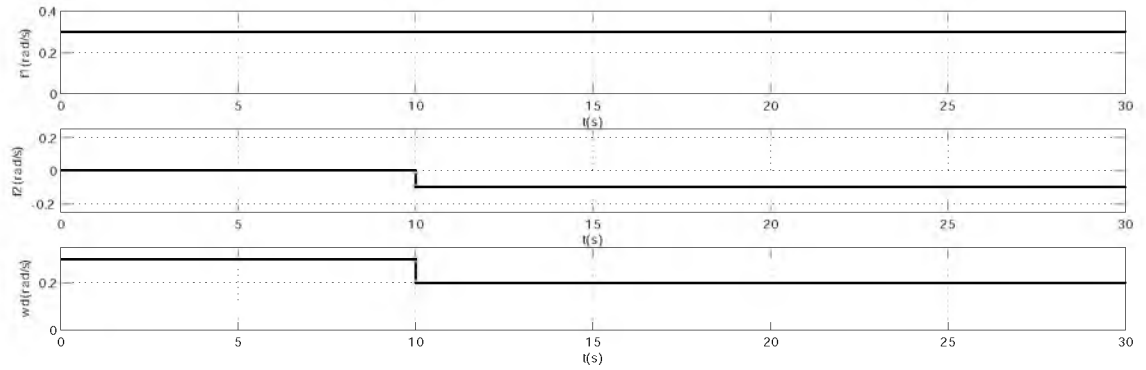


Figura 5.4: Funciones escalón que forman la velocidad angular deseada.

de una integración del modelo (2.23) como sigue:

$$\begin{bmatrix} \int x \\ \int y \\ \int \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t v \cos \theta \\ \int_0^t \text{sen} \theta \\ \int_0^t \omega \end{bmatrix}$$

El problema de seguimiento involucra una ecuación dinámica del error. El cálculo del error está dado por la matriz (4.5) cuya salida es el error de seguimiento. Dicho error es la entrada para la estrategia de control, cuya salida determina la velocidad lineal y angular que serán aplicadas al bloque de posición obtenida.

A continuación se presentan los resultados de las simulaciones realizadas con las estrategias de control lineal y no lineal.

## 5.1. Control lineal.

Se supondrá que el robot móvil parte de las coordenadas (0,3466, 0,3426) con una orientación de  $\frac{\pi}{6} \text{rad}$ . Así mismo se consideran los siguientes valores arbitrarios de las constantes:

$$k_1 = 1; k_2 = 2; k_3 = 4.$$

En la figura 5.5 se muestra la velocidad lineal obtenida junto con la velocidad lineal de referencia; de igual manera se muestra la velocidad angular deseada y obtenida en la figura 5.6.

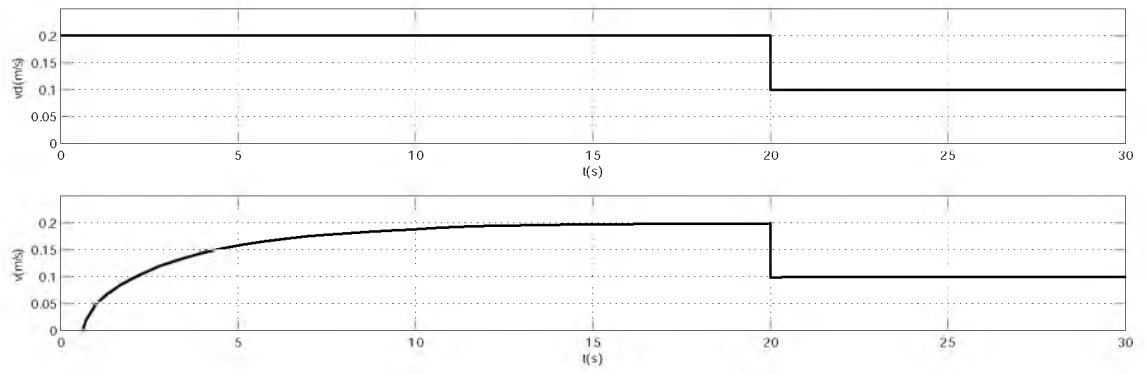


Figura 5.5: Velocidad lineal deseada y obtenida con el control lineal.

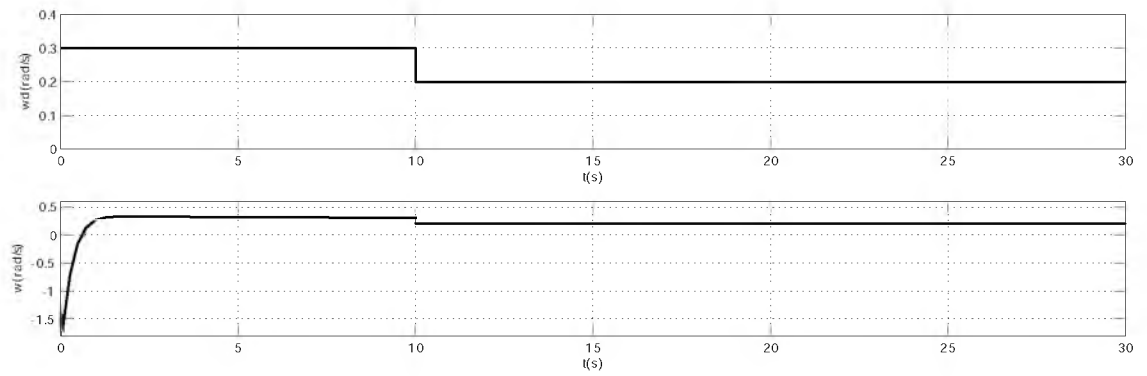


Figura 5.6: Velocidad angular deseada y obtenida con el control lineal.

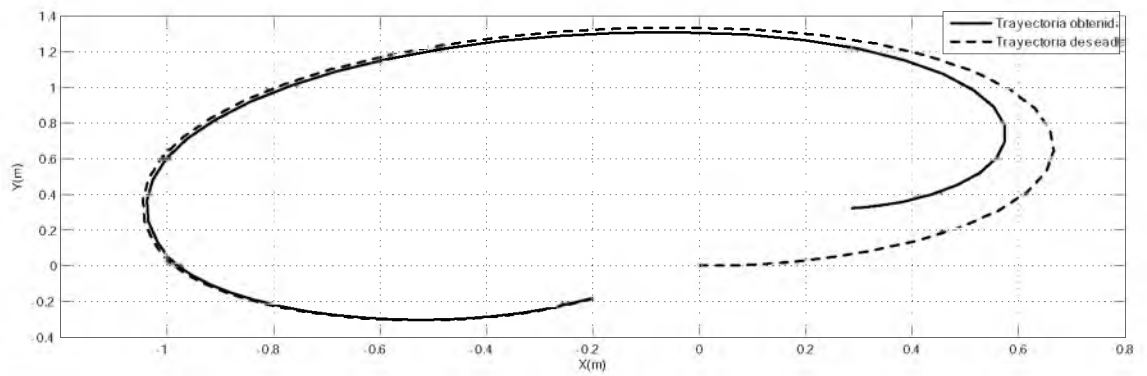


Figura 5.7: Trayectoria esperada vs trayectoria obtenida con el control lineal.

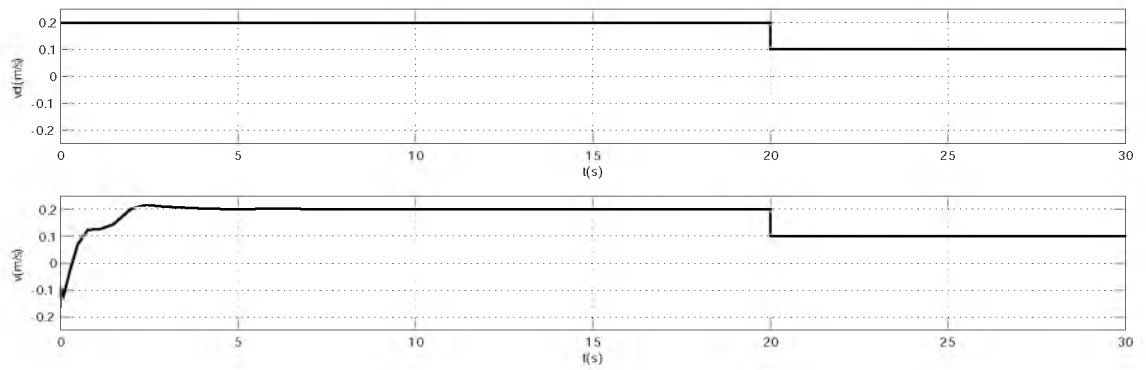


Figura 5.8: Velocidad lineal deseada y obtenida con el controlador no lineal.

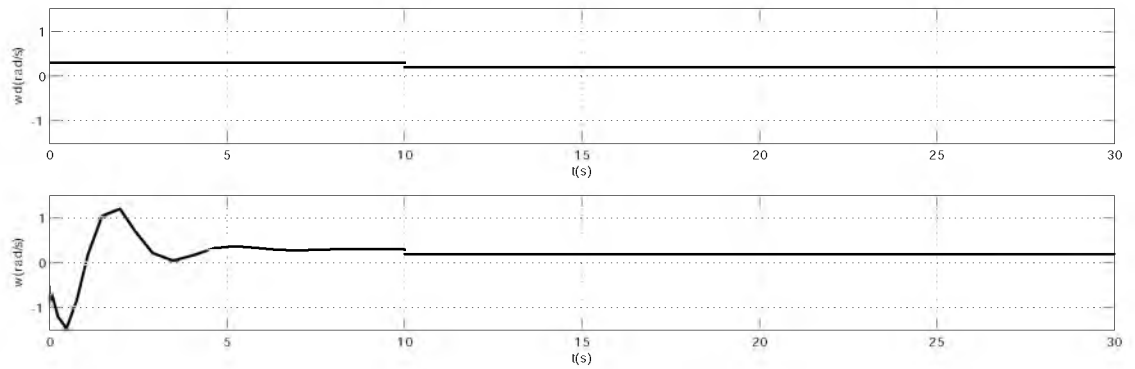


Figura 5.9: Velocidad angular deseada y obtenida con el control no lineal.

## 5.2. Control no lineal.

Las constantes elegidas para el controlador no lineal son:

$$\beta = 13,75; \delta = 0,9; k_2 = 19$$

Y las coordenadas iniciales son  $(0,2,0,12)$  con una orientación de  $\frac{\pi}{6}rad$ .

A continuación en la figura 5.7 se muestran la trayectoria obtenida usando el control lineal, y la deseada. Posteriormente, en las figuras 5.5 y 5.6 se muestra la comparación entre las velocidades lineales y angulares deseadas y obtenidas.

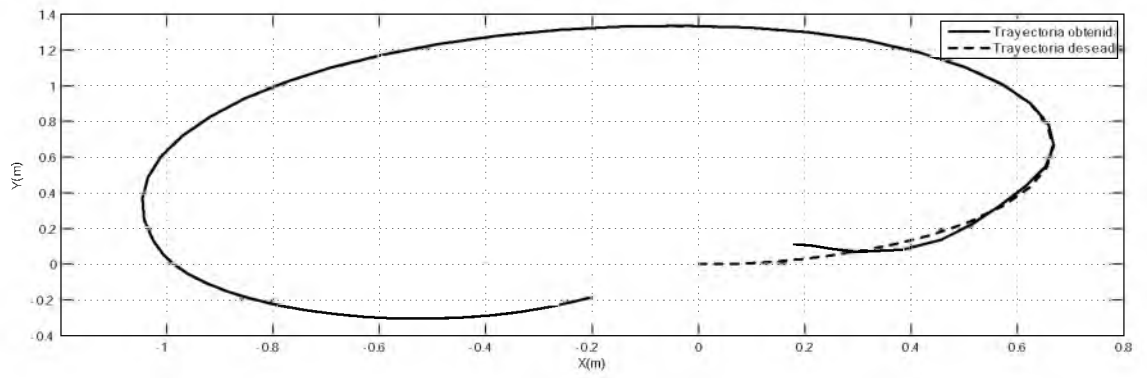


Figura 5.10: Trayectoria esperada vs trayectoria obtenida con el control no lineal.

## Capítulo 6

# CONCLUSIONES GENERALES

En este trabajo se presentó el diseño y simulación del sistema de control para un robot móvil a ruedas con configuración síncrona. Para lograrlo fue necesario la construcción del modelo cinemático y el modelo dinámico del robot. Al construir el modelo dinámico nos dimos cuenta que este es solo una extensión del modelo cinemático, combinado con una retroalimentación parcial del lagrangiano.

Se implementaron dos estrategias de control. Cada una basada en que el comportamiento del sistema sea asintóticamente estable, es decir que el error de seguimiento tienda a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

La primer estrategia utiliza el hecho de que, para ángulos muy pequeños (en radianes),  $\text{sen}(\theta) = \theta$  a fin de linealizar el modelo. El modelo resultante es un sistema lineal e invariante en el tiempo, para el cual la condición suficiente y necesaria para asegurar la estabilidad asintótica es que los polos del sistema se encuentren en el semiplano complejo izquierdo.

Para escoger los parámetros del controlador en la segunda estrategia de control se utilizó el enfoque del segundo método de Lyapunov. Para este enfoque se hizo uso de la función candidata de Lyapunov reportada en ([Ollero, 2001] y [Siciliano *et. al*, 2011]). Esta función candidata no fue desarrollada en esta tesis. Esto es debido que el método de Lyapunov no explica la forma de

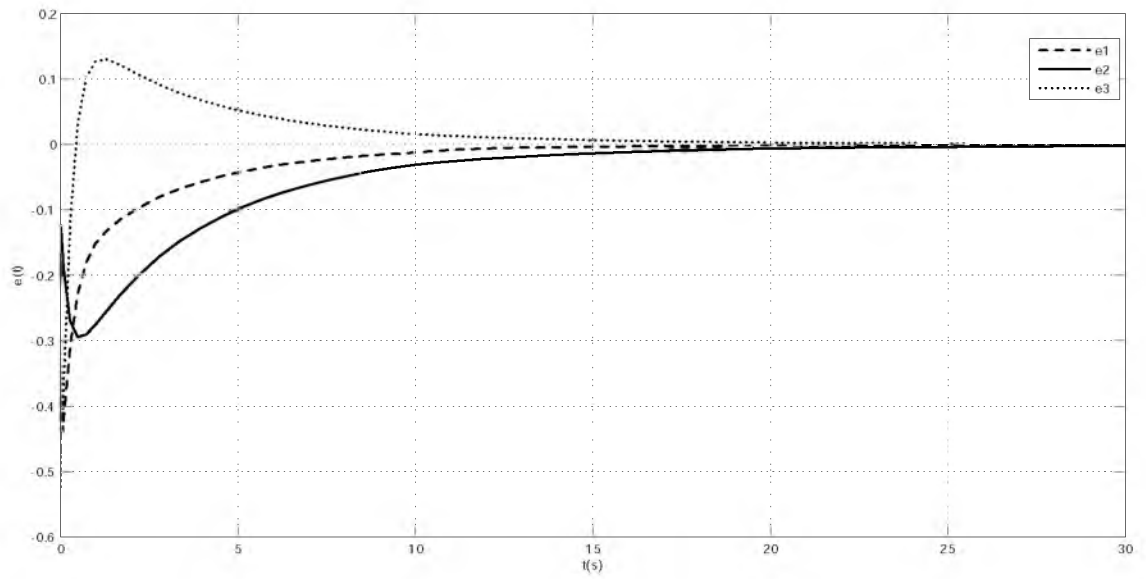


Figura 6.1: Comportamiento de  $e$  en el control lineal.

obtenerla y la construcción de estas funciones esta fuera del alcance de esta tesis.

Como podemos observar en las figuras 6.1 y 6.2, que representan el comportamiento del error en el controlador lineal y no lineal, el error se reduce con respecto del tiempo.

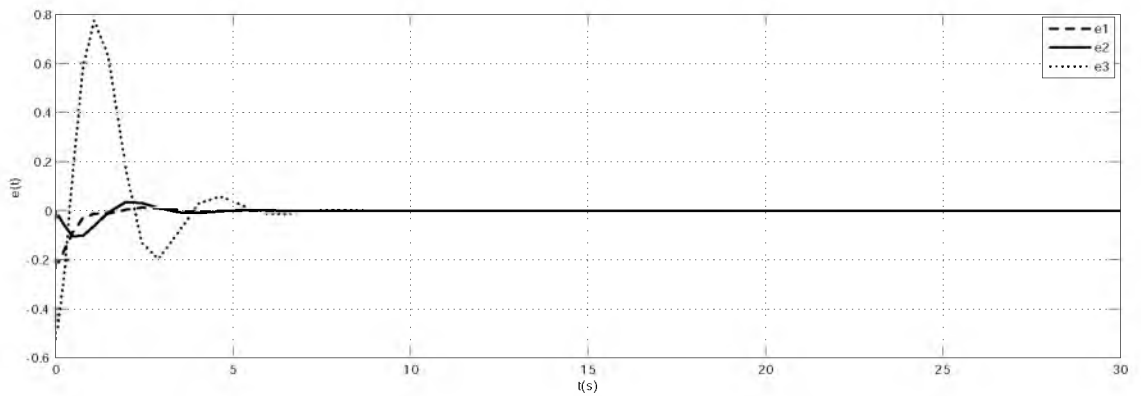


Figura 6.2: Comportamiento de  $e$  en el control no lineal.

Si bien las dos estrategias de control poseen la misma características en cuanto al diseño, su rapidez para alcanzar la estabilidad asintótica difiere. Observando las figuras 6.1 y 6.2, puede notarse que es más rápido en minimizar el error el controlador no lineal, aunque su sobreimpulso es más grande. Esta característica es debido a que al no linealizarse, el comportamiento del sistema es más acercado a la realidad, contrario al control lineal que minimiza las dinámicas pero su aproximación al sistema real es menor.

## **Anexo I**

**Bloques simulink de las  
estrategias de control.**

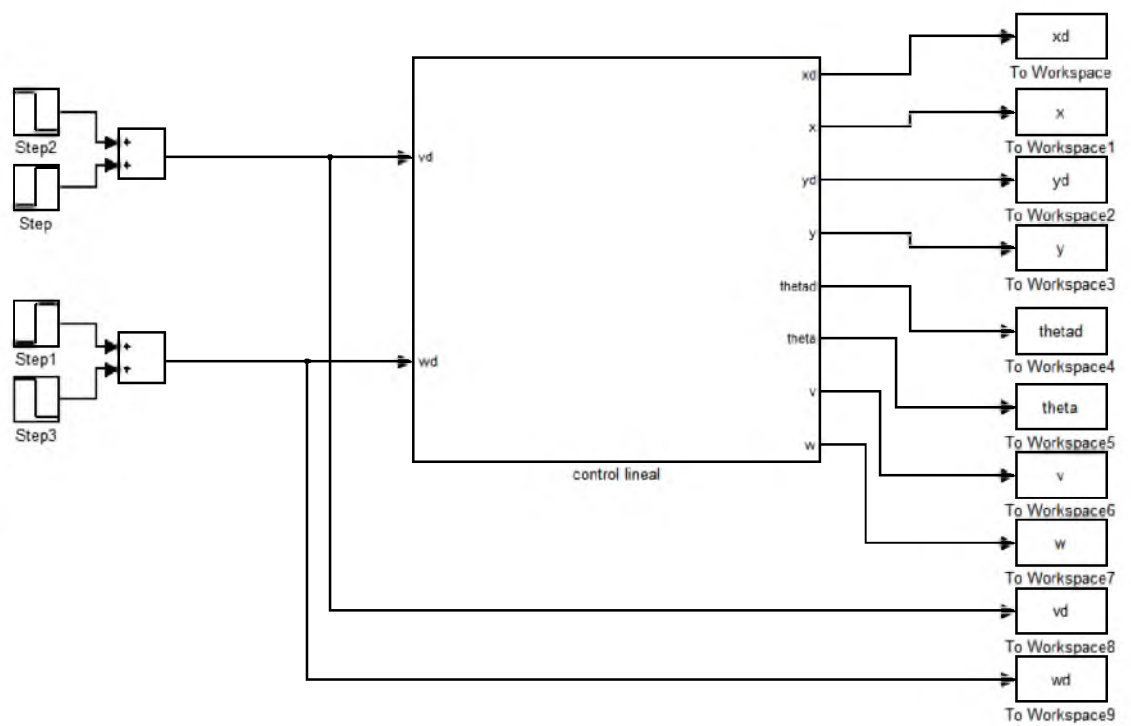


Figura 1.1: Diagrama general del control lineal.

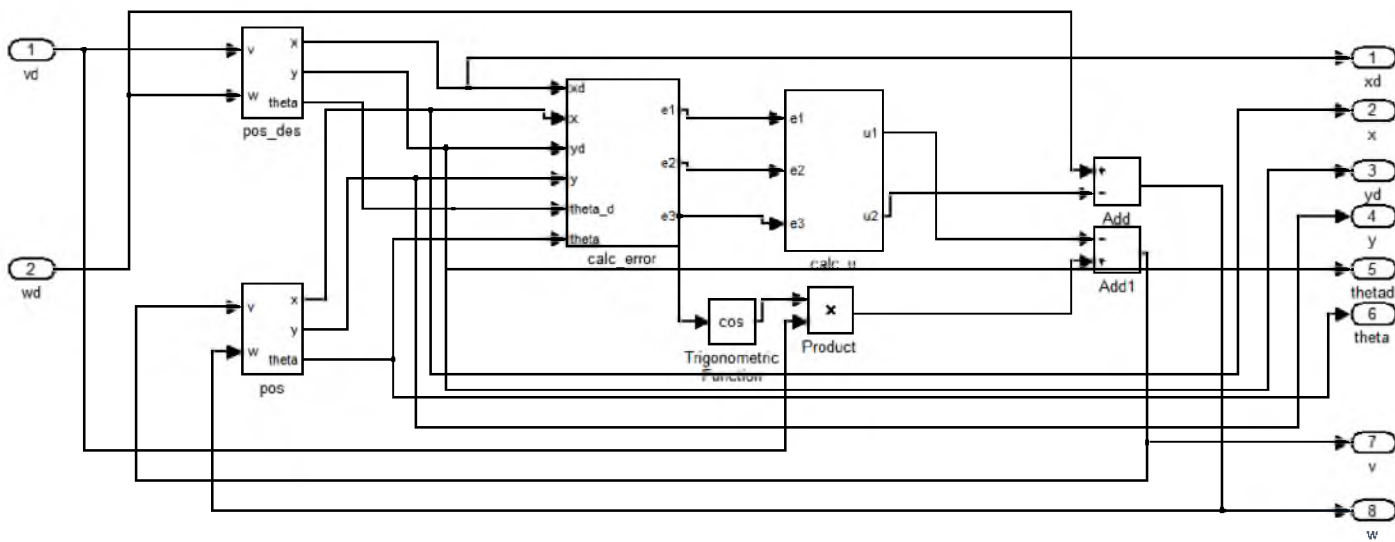


Figura 1.2: Bloque de control lineal.

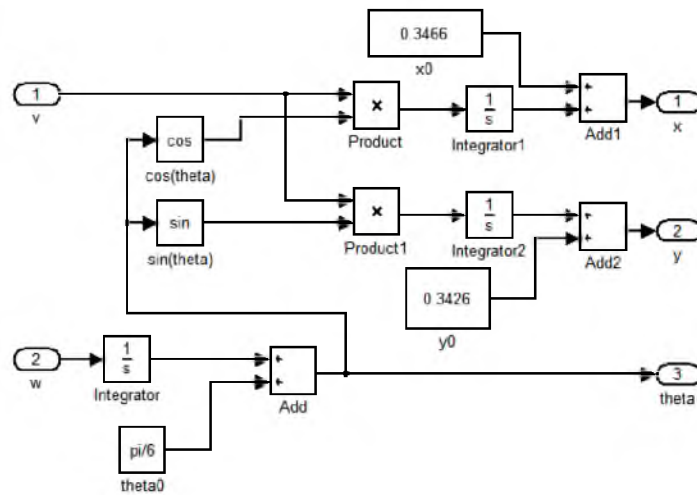


Figura I.3: Bloque de estimación de posición del robot para el control lineal.

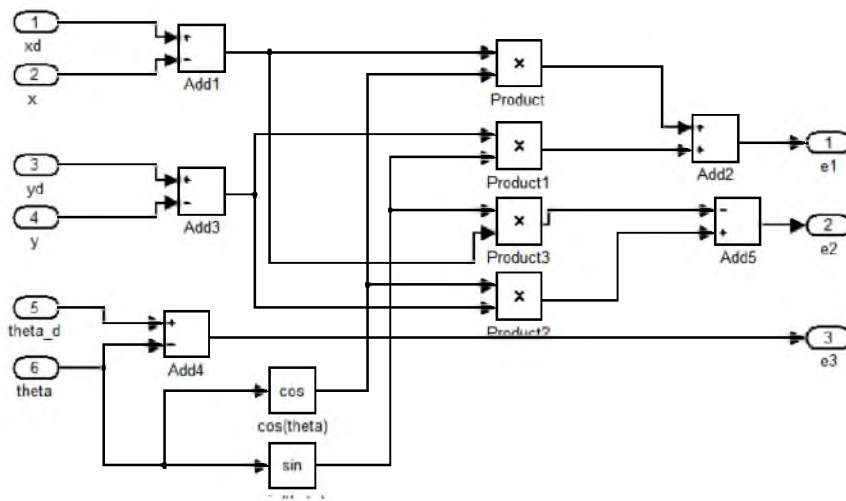


Figura I.4: Bloque de cálculo del error  $e$  en el control lineal.

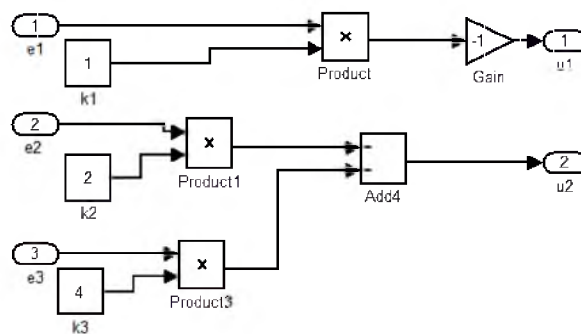


Figura I.5: Bloque de cálculo de  $u$  en el control lineal.

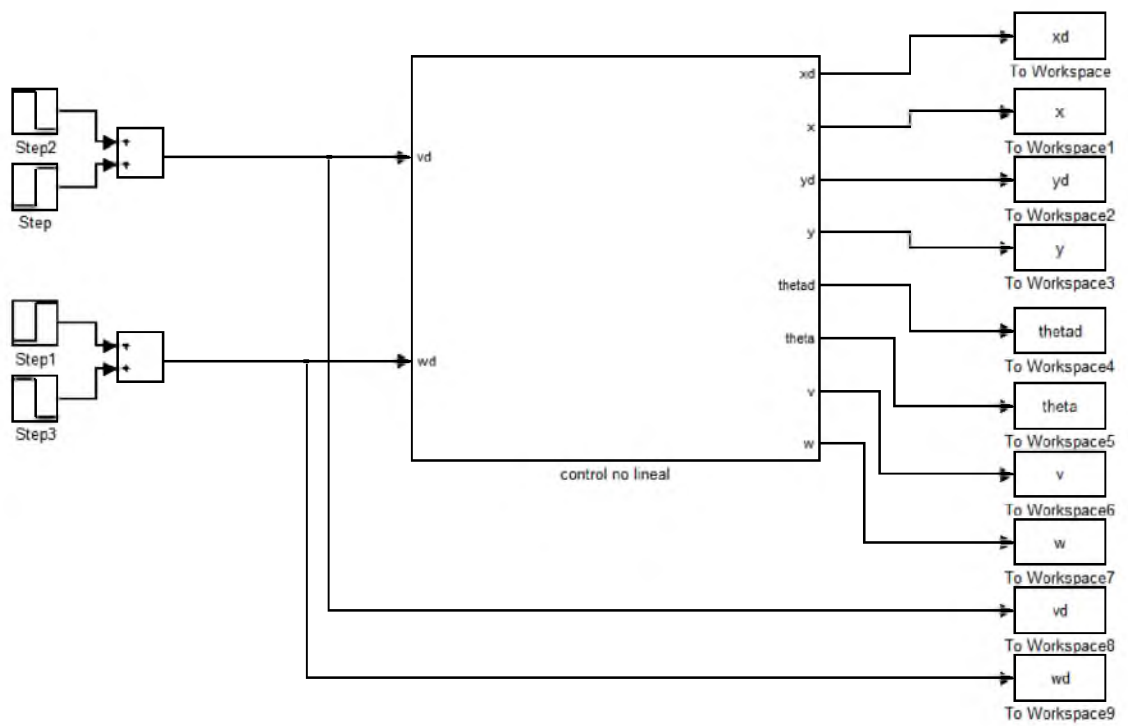


Figura 1.6: Diagrama general del control no lineal.

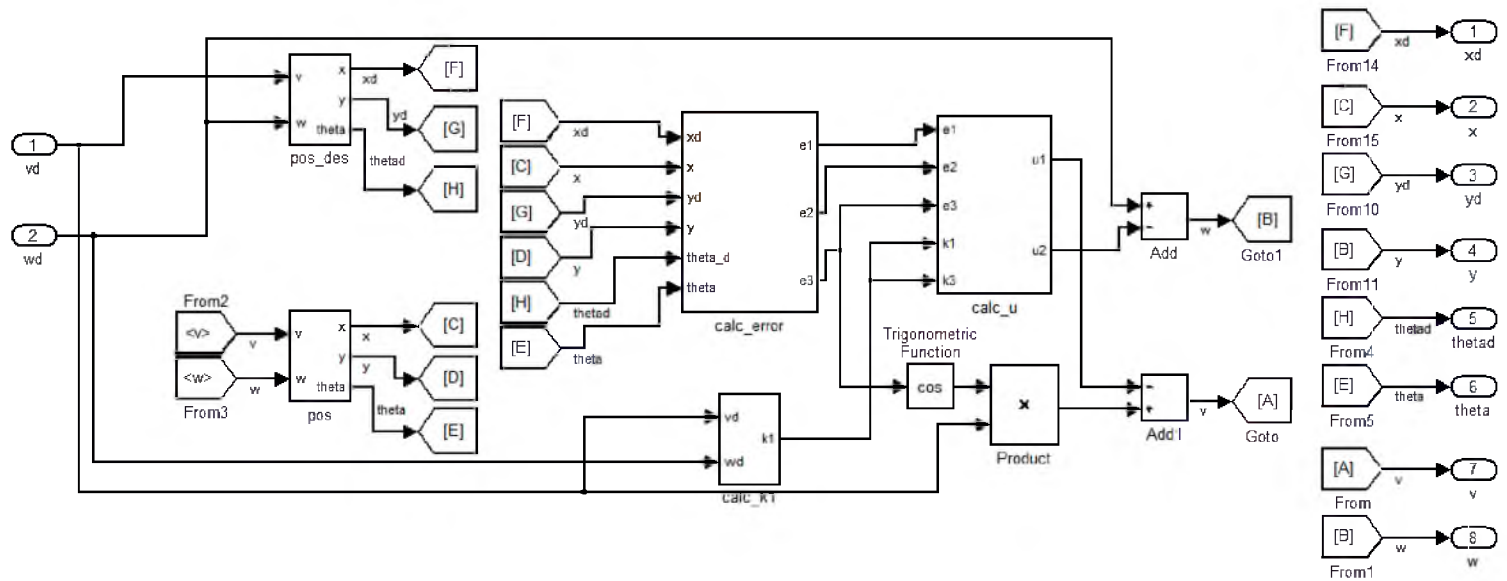


Figura 1.7: Bloque del control no lineal.

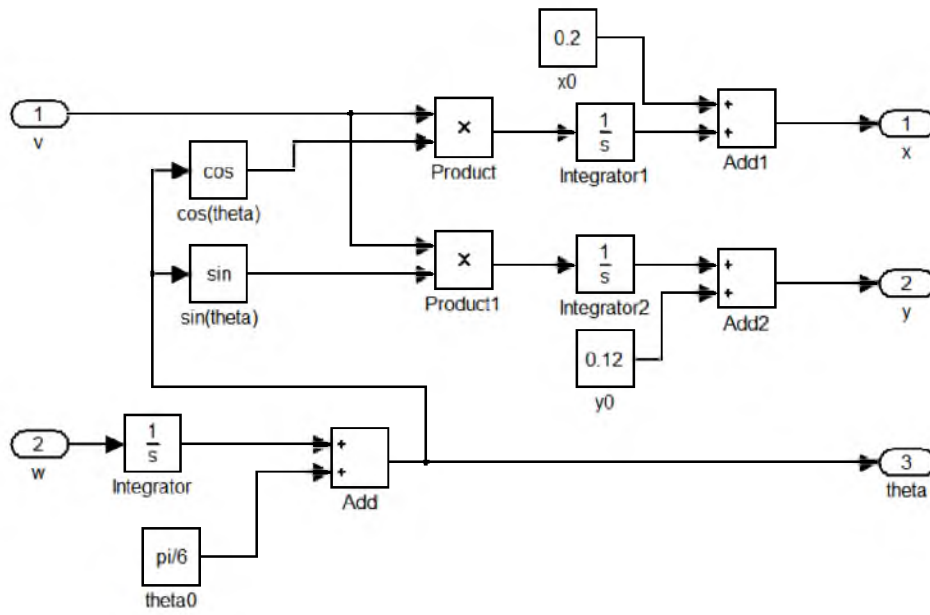


Figura 1.8: Bloque del cálculo de posición para el control no lineal.

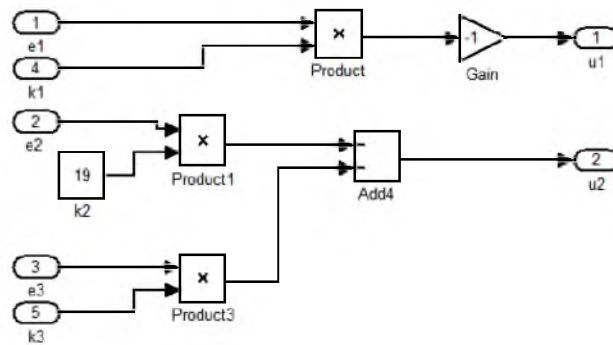


Figura 1.9: Cálculo de  $u$  en el controlador no lineal.

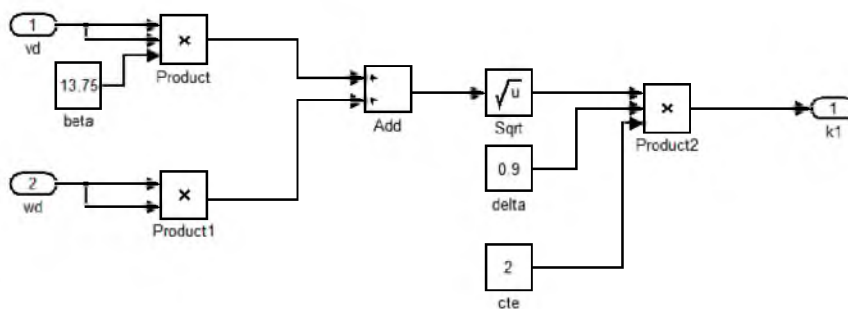


Figura 1.10: Cálculo de  $k_1$  en el control no lineal.

# Bibliografía

- [Ollero, 2001] Ollero Baturone, Aníbal. 2001. ROBOTICA Manipuladores y robots móviles. Ed. Marcombo. Barcelona, España. 448 p.
- [Reyes 2011] Reyes Cortés, Fernando. 2011. Control de robots manipuladores. Ed. Alfaomega. México. 557 p.
- [Siciliano *et. al*, 2011] Siciliano Bruno, Sciavicco Lorenzo, Villani Luigi y Oriolo Giuseppe. 2009. Robotics Modelling, Planning and Control. Ed. Springer. 644 p.
- [Siegwart y Nourbakhsh, 2004] Siegwart, Roland y Nourbakhsh, Illah R. 2004. Autonomous mobile robots. MIT Press. 321 p.
- [Toyota Prensa] Toyota Prensa. 2013. Toyota lanzará un sistema avanzado de asistencia a la conducción con tecnologías de conducción automatizada a mediados de esta década. Consultado el 16 de febrero de 2014 en [http://www.toyotaprensa.es/prensa/toyota\\_lanzara\\_un\\_sistema\\_avanzado\\_de\\_asistencia\\_a\\_la\\_conduccion\\_con.asp](http://www.toyotaprensa.es/prensa/toyota_lanzara_un_sistema_avanzado_de_asistencia_a_la_conduccion_con.asp)