Capítulo 6

Más nociones relacionadas con la transitividad topológica

Anahí Rojas, Aura L. Kantún-Montiel, José N. Méndez-Alcocer
Víctor M. Méndez-Salinas
Universidad del Papaloapan, Oaxaca, México

1. Introducción

Este capítulo expositorio se encuentra ubicado dentro de dos ramas de la Matemática: Topología y Sistemas Dinámicos. Un sistema dinámico es una pareja formada por un espacio topológico X (espacio fase) y una función $f : X \to X$, y es denotado por (X, f). Dependiendo de las propiedades del espacio fase o de la función, se han definido y clasificado tipos de sistemas dinámicos (clases de funciones dinámicas). Dentro de los sistemas dinámicos más conocidos y estudiados hoy en día se encuentran los siguientes: exactos, mezclantes, transitivos, débilmente mezclantes, totalmente transitivos, fuertemente transitivos, caóticos, minimales e irreducibles [**8, 12, 14**]. El estudio de estos sistemas ha cobrado tanta popularidad que ha sido llevado a otras áreas de la matemática, como por ejemplo a la teoría de hiperespacios [**4, 10, 15**]. Además, estas clases de funciones han dado pie a la definición de otras: órbita-transitivas, estrictamente órbita-transitivas, ω-transitivas, TT_{++}, suavemente mezclantes, exactamente Devaney caóticas, totalmente minimales, dispersoras, Touhey y los F-sistemas [**2, 21, 9, 17**]. Dentro de la teoría de los sistemas dinámicos discretos resulta importante e interesante conocer las relaciones que existen entre los distintos tipos de sistemas.

En [**6**], F. Barragán y A. Rojas realizan un estudio detallado de las siguientes clases de funciones: exactas, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivas, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, caóticas, minimales, irreducibles, semiabiertas, turbulentas, órbita-transitivas, estrictamente órbita-transitivas, ω-transitivas, IN, TT y TT_{++}. En dicho artículo estudian relaciones que existen entre estas clases de funciones para un caso general (X espacio topológico y f cualquier función). Además, mediante la construcción de contraejemplos se verifica que estas contenciones entre clases de funciones son propias en su mayoría. Finalmente, se dan condiciones al espacio fase o a la función para obtener contenciones que no son posibles para el caso general. Siguiendo estas ideas, en el presente capítulo se introducen y se analizan más clases de funciones del tipo dinámicas: exactas en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, completamente exactas, fuertemente transitivas en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas y fuertemente producto transitivas. El trabajo está basado en algunas partes del artículo de E. Akin, J. Auslander y A. Nagar, *Variations on the concept of topological transitivity* [**1**], del cuál hemos extraído algunos resultados y detallado sus demostraciones.

Para un mejor desarrollo de este capítulo, se ha distribuido su contenido en cinco secciones. En la Sección 2 se presentan los conceptos básicos necesarios para una completa comprensión del capítulo. En la Sección 3 se revisan algunos resultados preliminares que facilitarán el desarrollo de la Sección 5. En la Sección 4 se presentan las definiciones de las funciones exactas en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, completamente exactas, fuertemente transitivas en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas y fuertemente producto transitivas, se muestran relaciones entre ellas y relaciones de éstas con las clases de funciones estudiadas en [**6**]. Además, en esta sección también se analizan contraejemplos que demuestran que estas contenciones entre clases son propias. Finalmente, en la Sección 5 se revisan algunos resultados que se obtienen al pedir condiciones adicionales al espacio fase o a la función.

2. Preliminares

En esta sección presentamos la notación y conceptos básicos necesarios para un buen desarrollo de este capítulo.

Considerando un espacio topológico X y un subconjunto A de X, el interior y cerradura de A en X los denotamos por $\mathrm{int}_X(A)$ y $\mathrm{cl}_X(A)$, respectivamente. Si no existe riesgo de confusión escribiremos simplemente $\mathrm{int}(A)$ y $\mathrm{cl}(A)$. Como es usual, denotamos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_+$ al conjunto de los números naturales, números enteros y números enteros no negativos, respectivamente.

Definición 2.1. *Sean m un entero mayor o igual que dos y para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, sea X_i un conjunto no vacío. Se define y denota su* ***producto cartesiano*** *como el conjunto:*

$$\prod_{i=1}^{m} X_i = \{(x_1,\dots,x_m) : x_i \in X_i,\ \text{para cada } i \in \{1,\dots,m\}\}.$$

Cuando $X_1 = X_2 = \cdots = X_m$ al conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ se le denota por X_1^m.

Definición 2.2. *Sean m un entero mayor o igual que dos y para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, sea (X_i,τ_i) un espacio topológico. La* ***topología producto*** *$\mathcal{X}$ sobre el conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ es la topología que tiene como base la colección $\beta = \{U_1 \times \cdots \times U_m : U_i \in \tau_i,\ \text{para cada } i \in \{1,\dots,m\}\}$. El espacio topológico $(\prod_{i=1}^{m} X_i, \mathcal{X})$ se llama* ***espacio producto*** *de la familia $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^{m}$ y se denota simplemente por $\prod_{i=1}^{m} X_i$.*

Definición 2.3. *Sean m un entero mayor o igual que dos y para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, sea X_i un conjunto no vacío y $f_i : X_i \to X_i$ una función. Se define la* ***función producto*** *$\prod_{i=1}^{m} f_i : \prod_{i=1}^{m} X_i \to \prod_{i=1}^{m} X_i$ como:*

$$\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)((x_1,\dots,x_m)) = (f_1(x_1),\dots,f_m(x_m)),$$

para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$.

Cuando $f_1 = f_2 = \cdots = f_m$ *a la función* $\prod_{i=1}^m f_i$ *se le denota por* $f_1^{\times m}$.

Definición 2.4. *Sea* (X, d) *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $\epsilon > 0$. *La* ***bola abierta*** *con centro en* x *y radio* ϵ, *se define y denota por:*

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Definición 2.5. *Sean* X *un espacio topológico y* E *un subconjunto de* X. *Se dice que* E *es* ***denso*** *en* X *si* $\mathrm{cl}(E) = X$.

A continuación se presenta una caracterización de conjunto denso que será fundamental para este capítulo, la prueba de este resultado se puede consultar en [**13**, pág. 173].

Teorema 2.6. *Sean* X *un espacio topológico y* $E \subseteq X$. *El conjunto* E *es denso si y sólo si para cada subconjunto abierto no vacío* U *de* X, *se cumple que* $U \cap E \neq \emptyset$.

Definición 2.7. *Un* ***sistema dinámico*** *es una pareja formada por un espacio topológico* X *y una función* $f : X \to X$ *y lo denotamos por* (X, f).

Para referirse al sistema dinámico (X, f) generalmente se hace referencia únicamente a la función f.

Por otro lado, si $f : X \to X$ es una función, para cada $k \in \mathbb{N}$, la ***k-ésima iteración de*** f la definimos como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k. Esto es, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ y en general $f^{k+1} = f \circ f^k$. Se entiende que $f^1 = f$ y definimos $f^0 = id_X$ (la función identidad en X). No es difícil ver que $f^k \circ f^s = f^{k+s}$ y $(f^k)^s = f^{ks}$. Para un subconjunto A de X y k un entero, denotamos por $f^k(A)$ a la imagen de A bajo f^k cuando $k \geq 0$ y la preimagen bajo $f^{|k|}$ cuando $k < 0$. En el caso del conjunto que consta de un único punto x, escribimos $f^{-k}(x)$ para denotar al conjunto $f^{-k}(\{x\})$, donde $k > 0$.

Uno de los conceptos más importantes en el estudio de los sistemas dinámicos discretos es el de órbita de un punto, el cual presentamos a continuación.

Definición 2.8. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. La* ***órbita de un punto $x \in X$ bajo f***, *denotada por* $\mathcal{O}(x, f)$, *es el conjunto* $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$. *Esto es:*

$$\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

La órbita de un punto puede llegar a ser un conjunto finito, denso o tener alguna otra propiedad. Estas propiedades van a depender fuertemente del punto x que se tome. Esto da pie a la definición de clases de puntos.

Definición 2.9. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico y* $x, y \in X$. *Se dice que* x *es:*

(1) ***punto fijo*** *de* f *si* $f(x) = x$.

(2) ***Punto periódico*** *de* f *si existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^k(x) = x$. *El conjunto de puntos periódicos de* f *es denotado por* $Per(f)$.

(3) ***Punto transitivo*** *de* f *si* $\mathcal{O}(x, f)$ *es denso en* X. *El conjunto de todos los puntos transitivos de* f *es denotado por* $trans(f)$.

(4) ***Punto recurrente*** *de* f *si para cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$, *existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^l(x) \in U$.

(5) ***Punto casi-periódico*** *de* f *si para cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$, *existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^{kl}(x) \in U$ *para todo* $k \geq 0$.

(6) ***Punto no errante*** *de* f *si para cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$, *existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^l(U) \cap U \neq \emptyset$.

(7) ***Punto ω-límite de** y **bajo** f si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un entero positivo $l \geq k$ tal que $f^l(y) \in U$. El conjunto de puntos ω-límite de y bajo f, es denotado por $\omega(y, f)$ y es llamado **conjunto ω-límite de** y.*

Proposición 2.10. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) Si x es un punto fijo de f, entonces x es un punto periódico de f.
(2) Si x es un punto periódico de f, entonces x es un punto casi-periódico de f.
(3) Si x es un punto casi-periódico de f, entonces x es un punto recurrente de f.
(4) Si x es un punto transitivo de f y f es continua, entonces x es un punto recurrente de f.
(5) Si x es un punto recurrente de f, entonces x es un punto no errante de f.

Demostración: La prueba de *(1)* se sigue directamente de la definición.
(2) Supongamos que x un punto periódico de f. De aquí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Sean U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$ y $k \geq 0$. Puesto que $f^{kn}(x) = (f^n)^k(x) = x$, para cada $k \geq 0$, se tiene que x es un punto casi-periódico de f.
(3) Supongamos que x es un punto casi-periódico de f y sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. De aquí, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^{kl}(x) \in U$ para todo $k \geq 0$. En particular, para $k = 1$, $f^l(x) \in U$. Por lo tanto, x es un punto recurrente de f.
(4) Supongamos que x es un punto transitivo de f y sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Puesto que f es continua, $\mathcal{O}(x, f) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. En consecuencia, existe $l_1 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^{l_1}(x) \in f^{-1}(U)$. De aquí, $f^{l_1+1}(x) \in f(f^{-1}(U)) \subseteq U$. Por lo tanto, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(x) \in U$ y así, x es un punto recurrente de f.
(5) Supongamos que x es un punto recurrente de f y sea U un subconjunto abierto no vacío de X tal que $x \in U$. De aquí, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(x) \in U$. En consecuencia, $f^l(x) \in f^l(U) \cap U$ y así, $f^l(U) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, x es un punto no errante de f. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \text{Transitivo} \arrow[d] & \\
\text{Fijo} \arrow[r] & \text{Periódico} \arrow[r] & \text{Casi-periódico} \arrow[r] & \text{Recurrente} \arrow[r] & \text{No errante}
\end{tikzcd}
$$

Figura 1. Relaciones entre clases de puntos.

Sin embargo, los recíprocos no se cumplen en general.

Ejemplo 2.11. *Sean $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ con la topología cofinita y $f : X \to X$ dada por*

$$f(0) = 0 \text{ y } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Sean U un subconjunto abierto de X y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} \in U$. De aquí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \geq n$ tal que $U = \left\{\dfrac{1}{n_0 + l} : l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \cup \left\{\dfrac{1}{n}\right\} \cup V$, con V un *subconjunto finito de* X*. Notemos que* $f^{(n_0-n)k}\left(\frac{1}{n}\right) \in U$*, para cada* $k \geq 0$*. Por lo tanto,* $\frac{1}{n}$ *es un punto casi-periódico pero no es periódico.*

Ejemplo 2.12. *Sean* $X = [0,1]$ *con la topología usual y* $f : X \to X$ *la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ x - \frac{1}{2}, & si\ \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

No es difícil verificar que $x = 1$ *es un punto periódico pero no es fijo.*

Ejemplo 2.13. *Sean* $X = [0,1]$ *con la topología usual y* $f : X \to X$ *la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & si\ 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ x - \frac{1}{2}, & si\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que si U *es un abierto en* $[0,1]$ *tal que* $1 \in U$*, entonces se cumple que* $f^2(U) \cap U \neq \emptyset$*. De aquí,* $x = 1$ *es un punto no errante. Sin embargo,* $x = 1$ *no es recurrente ya que para el abierto* $U = \left(\frac{3}{4}, 1\right]$ *se cumple que* $f^n(1) \notin U$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*.*

Ejemplo 2.14. *Sea* $f : X \to X$ *como en el Ejemplo 2.12. Claramente* $x = 1$ *es un punto recurrente pero no es transitivo.*

Ejemplo 2.15. *Sean* $X = \{1,2,3\}$ *con la topología* $\tau = \{\emptyset, \{1,2\}, X\}$ *y* $f : X \to X$ *dada por* $f(1) = 2$*,* $f(2) = 3$ *y* $f(3) = 3$*. Se cumple que* $x = 1$ *es un punto recurrente pero no es casi-periódico.*

Definición 2.16. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico y* A *y* B *subconjuntos de* X*. Se define el siguiente conjunto:*

$$n_f(A,B) = \{k \in \mathbb{N} : A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset\}.$$

Definición 2.17. *Sean* X *un espacio topológico,* A *un subconjunto de* X *y* $f : X \to X$ *una función. Se dice que* A *es* $+$***invariante*** *bajo* f *si* $f(A) \subseteq A$*,* A *es* $-$***invariante*** *bajo* f *si* $f^{-1}(A) \subseteq A$*,* A *es* ***débilmente*** $-$***invariante*** *bajo* f *si* $A \subseteq f(A)$ *y* A *es* ***invariante*** *bajo* f *si* $f(A) = A$*.*

Observación 2.18. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. El conjunto* $\mathcal{O}(x, f)$ *es* $+$*invariante bajo* f*.*

Retomando el concepto de sistema dinámico, estos objetos matemáticos quedan completamente determinados por las propiedades del espacio fase y de la función. De esta manera, se han clasificado varios tipos de sistemas dinámicos o clases de funciones dinámicas. Dentro de las funciones más conocidas y estudiadas en el área de los sistemas dinámicos (y también en otras áreas), se encuentran los siguientes.

Definición 2.19. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Se dice que* f *es:*

(1) ***exacta*** *si para cada subconjunto abierto no vacío* U *de* X*, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^k(U) = X$*.*
(2) ***Mezclante*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos* U *y* V *de* X*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$*, para cada* $k \geq N$*.*
(3) ***Transitiva*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos* U *y* V *de* X*, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$*.*
(4) ***Débilmente mezclante*** *si* $f^{\times 2}$ *es transitiva.*

(5) ***Totalmente transitiva*** *si* f^s *es transitiva, para cada* $s \in \mathbb{N}$.
(6) ***Fuertemente transitiva*** *si para cada subconjunto abierto no vacío* U *de* X, *existe* $s \in \mathbb{N}$ *tal que* $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$.
(7) ***Caótica*** *si* f *es transitiva y* $Per(f)$ *es denso en* X *(esta definición corresponde al caos en el sentido de Devaney* [**5**, pág. 332]*).*
(8) ***Minimal*** *si no existe un subconjunto propio* A *de* X *el cuál es no vacío, cerrado e invariante.*
(9) ***Irreducible*** *si el único subconjunto cerrado* A *de* X *tal que* $f(A) = X$ *es* $A = X$.
(10) ***Órbita-transitiva*** *si existe* $x \in X$ *tal que* $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$.
(11) ***Estrictamente órbita-transitiva*** *si existe* $x \in X$ *tal que* $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$.
(12) $\boldsymbol{\omega}$***-transitiva*** *si existe* $x \in X$ *tal que* $\omega(x, f) = X$.
(13) $\boldsymbol{TT_{++}}$ *si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos* U *y* V *de* X, *el conjunto* $n_f(U, V)$ *es infinito.*
(14) ***Suavemente mezclante*** *si para cualquier espacio topológico* Y *y cualquier función transitiva,* $g : Y \to Y$, *la función* $f \times g$ *es transitiva.*
(15) ***Exactamente Devaney caótica*** *si* f *es exacta y* $Per(f)$ *es denso en* X.
(16) ***Totalmente minimal*** *si para cada* $s \in \mathbb{N}$, f^s *es minimal.*
(17) ***Dispersora*** *si para cualquier espacio topológico* Y *y cualquier función minimal,* $g : Y \to Y$, *la función* $f \times g$ *es transitiva.*
(18) ***Touhey*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos* U *y* V *de* X, *existen un punto periódico* $x \in U$ *y* $k \in \mathbb{Z}_+$ *tales que* $f^k(x) \in V$.
(19) ***Un F-sistema*** *si* f *es totalmente transitiva y* $Per(f)$ *es denso en* X.

En el diagrama de la Figura 2 presentamos las relaciones que se dan de manera general entre las funciones dadas en la Definición 2.19. Es decir, considerando a X como cualquier espacio topológico y a $f : X \to X$ cualquier función. La prueba de estas inclusiones se pueden consultar en [**3, 6, 7**] y [**17**]. Por conveniencia, denotamos con T. transitiva, F. transitiva, E. Devaney caótica y E. órbita-transitiva a las funciones totalmente transitivas, fuertemente transitivas, exactamente Devaney caóticas y estrictamente órbita-transitivas, respectivamente.

Lema 2.20. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Entonces* f *es exacta si y sólo si, para cada subconjunto abierto no vacío* U *de* X, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^k(U) = X$, *para cada* $k \geq N$.

Demostración: Supongamos que f es exacta y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. De aquí, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) = X$. Si $k \geq N$, entonces existe $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k = l + N$. Así, $f^k(U) = f^l(f^N(U)) = f^l(X)$. Por otro lado, por el diagrama de la Figura 2, ya que f es exacta, f es sobreyectiva. En consecuencia, $f^l(X) = X$. Por lo tanto, $f^k(U) = X$. □

Una pregunta que surge de manera natural, es si estas contenciones entre clases son propias. En [**6**], F. Barragán y A. Rojas, mediante la construcción de contraejemplos muestran que la mayoría de estas contenciones son propias. En el mismo trabajo se dan condiciones bajo las cuales algunos de estos sistemas son equivalentes.

En la Sección 4 introduciremos más funciones dinámicas y veremos qué relaciones existen entre éstas y las funciones definidas en la presente sección.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Sobreyectiva} & \text{Exacta} \arrow[l] \arrow[dr] & & \text{Suavemente mezclante} \arrow[d] \\
\text{Irreducible} \arrow[u] & & \text{Mezclante} \arrow[r] \arrow[dl] & \text{Débilmente mezclante} \arrow[ddl] \\
\text{Un } F\text{-sistema} \arrow[r] & \text{T. transitiva} \arrow[d] & \text{F. transitiva} \arrow[d] & \\
\text{Touhey} \arrow[r] & \text{Caótica} \arrow[r] & \text{Transitiva} & \omega\text{-transitiva} \arrow[l] \arrow[d] \\
\text{E. Devaney caótica} \arrow[ur] & \mathrm{TT}_{++} \arrow[ur] & \text{Dispersora} \arrow[u] & \text{E. órbita-transitiva} \arrow[d] \\
 & & & \text{Órbita-transitiva}
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 2. Resumen de relaciones que se dan de manera general.

3. Resultados preliminares

Dedicamos esta sección al análisis de resultados que necesitaremos para un mejor desarrollo de la Sección 5.

Una prueba detallada del Teorema de Baire se puede consultar en [**20**, Teorema 15, pág. 139].

Teorema 3.1 (Teorema de Baire)**.** *Sean X un espacio métrico completo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos no vacíos, abiertos y densos en X. Entonces se cumple que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.*

Teorema 3.2. *Sean X un espacio topológico compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X tales que $X_{n+1} \subseteq X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Luego, $X = X \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n)$. De aquí, $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus X_n) = X$. Puesto que X es compacto y $X \setminus X_n$ es abierto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $n_1, \dots, n_k$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{k}(X \setminus X_{n_j})$. Sea $m = \text{máx}\{n_1, \dots, n_k\}$. Luego, $X = X \setminus X_m$. De aquí, $X_m = \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$. $\square$

Lema 3.3. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente:*

$$\bigcup_{m=0}^{2^k-1} \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right] = [0,1].$$

Demostración: La prueba se hará por inducción sobre k. Si $k=1$, entonces

$$\bigcup_{m=0}^{1} \left[\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}\right] = \left[\frac{0}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right] = [0,1].$$

Supongamos que el resultado se cumple para k y veamos que se cumple para $k+1$. Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{m=0}^{2^{k+1}-1} \left[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}\right]$ y pongamos $s = 2^{k+1}$. De aquí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \left[\frac{0}{s}, \frac{1}{s}\right] \cup \left[\frac{1}{s}, \frac{2}{s}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{s-2}{s}, \frac{s-1}{s}\right] \cup \left[\frac{s-1}{s}, \frac{s}{s}\right] \\
&= \left[\frac{0}{2^{k+1}}, \frac{2}{2^{k+1}}\right] \cup \left[\frac{2}{2^{k+1}}, \frac{4}{2^{k+1}}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}}, \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}}\right] \\
&= \left[\frac{0}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right] \cup \left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{2^k-1}{2^k}, \frac{2^k}{2^k}\right] \\
&= \bigcup_{m=0}^{2^k-1} \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right] \\
&= [0,1].
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. □

Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ 2-2x, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esta función se conoce como ***la función tienda*** y a continuación presentamos una de sus tantas propiedades.

Teorema 3.4. *La función tienda es exacta en el intervalo* $[0,1]$.

Demostración: Sea U un subconjunto abierto no vacío de $[0,1]$. De aquí, existen $a, b \in [0,1]$ tales que $a < b$ y $(a,b) \subseteq U$. Se tiene que $b - a > 0$. Luego, por la propiedad Arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $2N < b - a$. Por otro lado, ya que $2N > \frac{2N}{2^N}$, se cumple que $\frac{2N}{2^N} < b - a$. En consecuencia, $\frac{N}{2^N} < \frac{b-a}{2}$ y así, $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Ahora bien, por el Lema 3.3,

$$\bigcup_{m=0}^{2^N-1} \left[\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}\right] = [0,1].$$

Puesto que $a \in [0,1]$, existe $l \in \{0, \ldots, 2^N - 1\}$ tal que $\frac{l}{2^N} \leq a < \frac{l+1}{2^N}$. Veamos que $\frac{l+2}{2^N} < b$. Supongamos que $b \leq \frac{l+2}{2^N}$. De aquí, $\frac{l+2}{2^N} - \frac{l}{2^N} \geq b - \frac{l}{2^N} \geq b - a$. En consecuencia, $\frac{2}{2^N} \geq b - a$ y así, $\frac{1}{2^N} \geq \frac{b-a}{2}$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\frac{l+2}{2^N} < b$ y así, $a < \frac{l+1}{2^N} < \frac{l+2}{2^N} < b$. Lo cual implica que $\left[\frac{l+1}{2^N}, \frac{l+2}{2^N}\right] \subseteq (a,b)$. Pongamos $m = l+1$, de [**16**, Proposición 1.6.2], $T^N : \left[\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}\right] \to [0,1]$ es un homeomorfismo, Consecuentemente, T^N es sobreyectiva y así, $T^N\left(\left[\frac{m}{2^N},\frac{m+1}{2^N}\right]\right)=[0,1]$. De aquí, $[0,1]\subseteq T^N((a,b))\subseteq T^N(U)$. Por lo tanto, f es exacta. $\square$

Como podemos observar en el Ejemplo 3.5, si un conjunto es $+$invariante, $-$invariante, débilmente $-$invariante o invariante, no siempre ocurre que su clausura tenga la misma propiedad.

Ejemplo 3.5. *Sean $X=[0,1]$ con la topología usual y $f:X\to X$ la función dada por*

$$f(x)=\begin{cases} x, & si\ 0\leq x<\frac{1}{2};\\ \frac{3}{4}, & si\ x=\frac{1}{2};\\ 2(x-\frac{1}{2}), & si\ \frac{1}{2}<x\leq 1.\end{cases}$$

Notemos que $f\left(\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Esto es, el conjunto $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ es $+$invariante e invariante. Sin embargo, $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)=\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{3}{4}\right\}\not\subseteq\left[0,\frac{1}{2}\right]$ y en consecuencia, $\operatorname{cl}\left(\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$ no es ni $+$invariante ni invariante. Por otro lado, $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\subseteq f\left(\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\right)$, es decir, $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ es débilmente $-$invariante, pero $\operatorname{cl}\left(\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\right)\not\subseteq f\left(\operatorname{cl}\left(\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\right)\right)=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{3}{4}\right\}$. También, $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ pero $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\right)=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{3}{4}\right\}\not\subseteq\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$. De lo anterior se concluye que en general un conjunto $+$invariante, $-$invariante, débilmente $-$invariante o invariante, no hereda la respectiva propiedades a su clausura.

Ahora nos interesa saber bajo qué condiciones la cerradura de un conjunto $+$invariante, $-$invariante, débilmente $-$invariante o invariante se hereda la respectiva propiedad.

Teorema 3.6. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff, $f:X\to X$ una función continua y $A\subseteq X$. Si A es $+$invariante, débilmente $-$invariante o invariante, entonces $\operatorname{cl}(A)$ es $+$invariante, débilmente $-$invariante o invariante, respectivamente.*

Demostración: Dado que f es continua, $f(\operatorname{cl}(A))\subseteq\operatorname{cl}(f(A))$. Por otro lado, ya que X es compacto, $\operatorname{cl}(A)$ es compacto y además, como f es continua $f(\operatorname{cl}(A))$ es compacto. Finalmente, puesto que X es de Hausdorff, $f(\operatorname{cl}(A))$ es cerrado. Es decir, $f(\operatorname{cl}(A))=\operatorname{cl}(f(\operatorname{cl}(A)))$. Por lo tanto, $\operatorname{cl}(f(A))\subseteq\operatorname{cl}(f(\operatorname{cl}(A)))=f(\operatorname{cl}(A))$.

Ahora bien, si A es $+$invariante, entonces $f(\operatorname{cl}(A))=\operatorname{cl}(f(A))\subseteq\operatorname{cl}(A)$ y así, $\operatorname{cl}(A)$ es $+$invariante. Si A es débilmente $-$invariante, entonces $\operatorname{cl}(A)\subseteq\operatorname{cl}(f(A))=f(\operatorname{cl}(A))$. De aquí, $\operatorname{cl}(A)$ es débilmente $-$invariante. Finalmente, si A es invariante, entonces $f(\operatorname{cl}(A))=\operatorname{cl}(f(A))=\operatorname{cl}(A)$. Por lo tanto, $\operatorname{cl}(A)$ es invariante. $\square$

Teorema 3.7. *Sean X un espacio topológico, $f:X\to X$ una función abierta y $A\subseteq X$. Si A es $-$invariante, entonces $\operatorname{cl}(A)$ es $-$invariante.*

Demostración: Supongamos que A es $-$invariante y sean $x\in f^{-1}(\operatorname{cl}(A))$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x\in U$. Esto es, $f(x)\in\operatorname{cl}(A)$ y $f(x)\in f(U)$. Como f es abierta, $f(U)$ es un subconjunto abierto y así, $f(U)\cap A\neq\emptyset$. De aquí, existe $a\in U$ tal que $f(a)\in A$. Esto implica que $a\in f^{-1}(A)\cap U$. Finalmente, $x\in\operatorname{cl}(f^{-1}(A))$ y así, $f^{-1}(\operatorname{cl}(A))\subseteq\operatorname{cl}(f^{-1}(A))$. Más aún, ya que A es $-$invariante, $f^{-1}(\operatorname{cl}(A))\subseteq\operatorname{cl}(A)$. Por lo tanto, $\operatorname{cl}(A)$ es $-$invariante. $\square$

De la Definición 2.17 se deduce fácilmente que todo conjunto invariante es también $+$invariante. Sin embargo, existen conjuntos $+$invariantes que no son invariantes. En el Teorema 3.8 se dan condiciones bajo las cuales es posible construir un conjunto invariante a partir de uno $+$invariante.

Teorema 3.8. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff, $f : X \to X$ una función continua y A un subconjunto cerrado no vacío de X. Si A es $+$invariante, entonces A contiene a un subconjunto no vacío, cerrado e invariante.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $A_0 = A$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $A_n = f^n(A)$. Notemos que, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, A_n es un subconjunto cerrado y no vacío, pues X es compacto y de Hausdorff y f es continua, además $A_{n+1} = f^{n+1}(A) = f^n(f(A)) \subseteq f^n(A) = A_n$. Es decir, $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X. Pongamos $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, claramente B es cerrado y, por el Teorema 3.2, es no vacío. Ahora veamos que B es $+$invariante bajo f. Primero observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(A_n) = f(f^n(A)) = f^{n+1}(A) = A_{n+1}$. De aquí,

$$f(B) = f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} f(A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = B.$$

Así, B es $+$invariante. Finalmente, veamos que B es débilmente $-$invariante. Sea $x \in B$. De aquí, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in A_{n+1} = f(A_n)$ y, en consecuencia, existe $z \in A_n$ tal que $f(z) = x$. Así, $f^{-1}(x) \cap A_n \neq \emptyset$. Como X es de Hausdorff y f es continua, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $f^{-1}(x) \cap A_n$ es un subconjunto cerrado y no vacío y además $f^{-1}(x) \cap A_{n+1} \subseteq f^{-1}(x) \cap A_n$. De lo anterior se tiene que $\{f^{-1}(x) \cap A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados y no vacíos. Nuevamente, por el Teorema 3.2, $\bigcap_{n=0}^{\infty}(f^{-1}(x) \cap A_n) \neq \emptyset$. Por otro lado, $\bigcap_{n=0}^{\infty}(f^{-1}(x) \cap A_n) = f^{-1}(x) \cap B$ por lo cual, $f^{-1}(x) \cap B \neq \emptyset$ y así, existe $z \in B$ tal que $f(z) = x$, esto prueba que B es débilmente $-$invariante. Por lo tanto, B es un subconjunto invariante de X contenido en A. $\square$

Recordemos que una función es minimal si no existe un subconjunto propio cerrado no vacío e invariante en el espacio fase. Por otro lado, existen subconjuntos $+$invariantes que no son invariantes. Así que podría darse el caso en el que, en un sistema minimal exista un subconjunto propio cerrado, no vacío y $+$invariante. Sin embargo, si el espacio fase es compacto y de Hausdorff y la función es continua, también podemos descartar la existencia de subconjuntos propios cerrados no vacíos y $+$invariantes en un sistema minimal.

Teorema 3.9. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces no existen subconjuntos propios de X que sean no vacíos, cerrados y $+$invariantes.*

DEMOSTRACIÓN: Sea A un subconjunto propio de X el cual es cerrado no vacío y $+$invariante. De aquí, por el Teorema 3.8, existe un subconjunto E de A cerrado no vacío e invariante. Puesto que f es minimal, se tiene que $E = X$ y así, $A = X$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existen subconjuntos propios de X que sean cerrados no vacíos y $+$invariantes. $\square$

Teorema 3.10. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si X no tiene subconjuntos propios no vacíos cerrados y $+$invariantes, entonces para cada $x \in X$, $x \in trans(f)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in X$. Por la Observación 2.18 y el Teorema 3.6, $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es un subconjunto cerrado no vacío y $+$invariante. Así, por hipótesis, $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Esto es $x \in trans(f)$. $\square$

Teorema 3.11. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces f es transitiva.*

Demostración: Si f es minimal, por el Teorema 3.9, X no tiene subconjuntos propios no vacíos, cerrados y +invariantes. De aquí, por el Teorema 3.10, $trans(f) = X$. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y $x \in U$. Por hipótesis, $V \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. De aquí, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^n(x) \in V$. Luego, $f^n(x) \in f^n(U) \cap V$. Por lo tanto, f es transitiva. □

Teorema 3.12. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es un subconjunto abierto y denso en X.*

Demostración: Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Ya que f es continua, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es abierto. Por otro lado, puesto que f es transitiva, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(V) \cap U \neq \emptyset$. De aquí, $V \cap f^{-n_0}(U) \neq \emptyset$ y así, $V \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es un subconjunto denso en X. □

Teorema 3.13. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si $trans(f) = X$, entonces para cada subconjunto abierto no vacío U de X se cumple que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U) = X$.*

Demostración: Sean U un subconjunto abierto no vacío de X y $x \in X$. Por hipótesis, $\mathcal{O}(f(x), f) \cap U \neq \emptyset$. De aquí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$. Esto es, $x \in f^{-n}(U)$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ y así, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U) = X$. □

Finalizamos esta sección con un resultado que muestra una relación entre una función transitiva y una función órbita-transitiva. Observe que en el caso general no hay relación entre estas dos clases de funciones.

Teorema 3.14. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces f es órbita-transitiva.*

Demostración: Puesto que X es métrico y compacto, para cada $k \in \mathbb{N}$ existen puntos $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{l_k k} \in X$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{l_k} B(x_{jk}, \frac{1}{k})$. Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ la colección formada por todas estas bolas abiertas. Esto es:

$$U_1 = B(x_{11}, 1), U_2 = B(x_{21}, 1), \ldots, U_{l_1} = B(x_{l_1 1}, 1)$$

$$U_{l_1+1} = B\left(x_{12}, \frac{1}{2}\right), U_{l_1+2} = B\left(x_{22}, \frac{1}{2}\right), \ldots, U_{l_1+l_2} = B\left(x_{l_2 2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$U_{l_1+l_2+1} = B\left(x_{13}, \frac{1}{3}\right) \cdots$$

$$\vdots$$

Luego, para cada $i \in \mathbb{N}$, pongamos $A_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(U_i)$. Claramente, para cada $i \in \mathbb{N}$, A_i es un subconjunto abierto de X y por el Teorema 3.12, A_i es denso en X. Luego, por el Teorema de Baire, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$. Veamos que para cada $x \in A$, x es un punto transitivo. Sean $x_0 \in A$ y U un subconjunto abierto no vacío de X. Así, podemos tomar $y_0 \in U$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que $B(y_0, \epsilon_0) \subseteq U$. Ahora sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon_0}{2}$. Ya que $y_0 \in U \subseteq X = \bigcup_{j=1}^{n_k} B(x_{jk}, \frac{1}{k})$, existe $j_0 \in \{1, \ldots, n_k\}$ tal que $y_0 \in B(x_{j_0k}, \frac{1}{k})$. Notemos que si $z \in B(x_{j_0k}, \frac{1}{k})$, entonces:

$$d(z, y_0) \leq d(z, x_{j_0k}) + d(x_{j_0k}, y_0) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} < \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_0}{2} = \epsilon_0.$$

En consecuencia, $z \in B(y_0, \epsilon_0)$ y así, $B(x_{j_0k}, \frac{1}{k}) \subseteq B(y_0, \epsilon_0)$. De lo anterior se tiene que $y_0 \in B(x_{j_0k}, \frac{1}{k}) \subseteq B(y_0, \epsilon_0) \subseteq U$. Por otro lado, ya que $x \in A$, $x \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y así, $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(B(x_{j_0k}, \frac{1}{k}))$. De aquí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-n}(B(x_{j_0k}, \frac{1}{k}))$, lo cual implica que:

$$f^n(x) \in f^n\left(f^{-n}\left(B\left(x_{j_0k}, \frac{1}{k}\right)\right)\right) \subseteq B\left(x_{j_0k}, \frac{1}{k}\right) \subseteq B(y_0, \epsilon_0) \subseteq U.$$

Finalmente, $\mathcal{O}(x, f) \cap U \neq \emptyset$ luego, $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Por lo tanto, x es un punto transitivo de f y así, f es órbita-transitiva. $\square$

4. Más clases de funciones dinámicas

Dedicamos esta sección a la introducción de más clases de funciones dinámicas y veremos cómo éstas se relacionan con las clases de funciones proporcionadas en la Definición 2.19, para el caso general.

Definición 4.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es:*

(1) ***exacta en el sentido de Akin-Auslander-Nagar*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$.*

(2) ***Completamente exacta*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(f^k(U) \cap f^k(V)) \neq \emptyset$.*

(3) ***Fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar*** *si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = X$.*

(4) ***Muy fuertemente transitiva*** *si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{k=1}^{N} f^k(U) = X$.*

(5) ***Exacta transitiva*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ es denso en X.*

(6) ***Fuertemente exacta transitiva*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V)) = X$.*

(7) ***Fuertemente producto transitiva*** *si para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $f^{\times k}$ es fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar.*

Por conveniencia, de aquí en adelante nos referiremos a las funciones exacta en el sentido de Akin-Auslander-Nagar y fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar con exacta en el sentido de Akin y fuertemente transitiva en el sentido de Akin, respectivamente.

Proposición 4.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces se cumplen las siguientes condiciones.*

(1) Si f es completamente exacta, entonces f es exacta en el sentido de Akin.

(2) Si f es exacta, entonces f es exacta en el sentido de Akin.

(3) Si f es muy fuertemente transitiva, entonces f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.

(4) Si f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin, entonces f es transitiva.

(5) Si f es fuertemente exacta transitiva, entonces f es exacta transitiva.
(6) Si f es exacta transitiva, entonces f es transitiva.
(7) Si f es fuertemente producto transitiva, entonces f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.

Demostración: *(1)* Supongamos que f es completamente exacta y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(f^k(U) \cap f^k(V)) \neq \emptyset$. Puesto que $\operatorname{int}(f^k(U) \cap f^k(V)) \subseteq f^k(U) \cap f^k(V)$, se tiene que $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es exacta en el sentido de Akin.
(2) Supongamos que f es exacta y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por el Lema 2.20, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{k_1}(U) = X$ y $f^{k_2}(V) = X$, para cada $k_1 \geq N_1$ y $k_2 \geq N_2$. De aquí, $f^{k_1+k_2}(U) = X$ y $f^{k_1+k_2}(V) = X$. Por lo tanto, $f^{k_1+k_2}(U) \cap f^{k_1+k_2}(V) \neq \emptyset$ y así, f es exacta en el sentido de Akin.
(3) Supongamos que f es muy fuertemente transitiva y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. De aquí, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{k=1}^{N} f^k(U) = X$. Dado que $\bigcup_{k=1}^{N} f^k(U) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$, se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = X$. Por lo tanto, f es exacta en el sentido de Akin.
(4) Supongamos que f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = X$ y en consecuencia, para cada $v \in V$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $v \in f^{k_1}(U)$. Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ y así, f es transitiva.
(5) Supongamos que f es fuertemente exacta transitiva y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V)) = X$. En consecuencia, para cualquier abierto no vacío W de X, $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))\right) \cap W \neq \emptyset$ y así, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ es un subconjunto denso en X. Por lo tanto, f es exacta transitiva.
(6) Supongamos que f es exacta transitiva y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(U)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ es denso en X. En consecuencia, $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)\right) \cap V \neq \emptyset$ y así, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva.

La prueba de *(7)* se sigue directamente de las definiciones. □

En el diagrama de la Figura 3 se resumen los resultados obtenidos en la Proposición 4.2.

Otras relaciones entre las funciones de la Definición 4.1 que no aparecen en el diagrama de la Figura 3 son las que se muestran a continuación.

Teorema 4.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) Si f es exacta, entonces f es muy fuertemente transitiva.
(2) Si f es exacta, entonces f es fuertemente producto transitiva.
(3) Si f es exacta, entonces f es exacta transitiva.
(4) Si f es fuertemente producto transitiva, entonces f es fuertemente exacta transitiva.
(5) Si f es exacta transitiva, entonces f es exacta en el sentido de Akin.

Demostración: La prueba de *(1)* se sigue directamente de las definiciones.
(2) Supongamos que f es exacta y sea $k \in \mathbb{Z}_+$. Por [**18**, Teorema 4.3], $f^{\times k}$ es exacta. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $X^{\times k}$. De aquí, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$(f^{\times k})^l(\mathcal{U}) = X^{\times k}$. Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty}(f^{\times k})^i(\mathcal{U}) = X^{\times k}$ y así, $f^{\times k}$ es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.

(3) Supongamos que f es exacta y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, existen $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{l_1}(U) = X$ y $f^{l_2}(V) = X$. Además, por el Lema 2.20, $f^{l_1+l_2}(U) \cap f^{l_1+l_2}(V) = X$. De aquí, para cualquier subconjunto abierto no vacío W de X, se cumple que $(f^{l_1+l_2}(U) \cap f^{l_1+l_2}(V)) \cap W \neq \emptyset$. En consecuencia, $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)\right) \cap W \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)$ es denso en X y así, f es exacta transitiva.

(4) Supongamos que f es fuertemente producto transitiva y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Ya que $f^{\times 2}$ es fuertemente transitiva en el sentido de Akin, se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^{\times 2})^k(U \times V) = X^{\times 2}$. Si $x \in X$, entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $(x, x) \in (f^{\times 2})^{k_1}(U \times V)$. Esto es, $(x, x) \in f^{k_1}(U) \times f^{k_1}(V)$, lo cual implica que $x \in f^{k_1}(U) \cap f^{k_1}(V)$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)$ y así, f es fuertemente exacta transitiva.

(5) Supongamos que f es exacta transitiva y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)$ es denso en X. Consecuentemente, $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)\right) \cap U \neq \emptyset$, lo cual implica que existen $k_1 \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tales que $x \in f^{k_1}(U) \cap f^{k_1}(V) \cap U$. Finalmente, $f^{k_1}(U) \cap f^{k_1}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es exacta en el sentido de Akin. □

Los siguientes son ejemplos de funciones con las propiedades presentadas en la Definición 4.1.

Ejemplo 4.4. *Sean $X = [-1, 1]$ y $f : X \to X$ la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -(2+2x), & si \ -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}; \\ 2x, & si \ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2-2x, & si \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esta función es exacta en el sentido de Akin.

En efecto, por el Teorema 3.4, $f\big|_{[0,1]}$ y $f\big|_{[-1,0]}$ son funciones exactas, por lo que cualquier intervalo abierto contenido en $[0, 1]$ o $[-1, 0]$, eventualmente cubrirá a $[0, 1]$ o a $[-1, 0]$, respectivamente, cuya intersección es $\{0\}$, y puesto que 0 es un punto fijo de f, para cada par de intervalos abiertos U y V de $[-1, 1]$, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in f^n(U) \cap f^n(V)$. Por lo tanto, f es exacta en el sentido de Akin.

Ejemplo 4.5. *Sean $X = [-1, 1]$ y $f : X \to X$ la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -(2+2x), & si \ -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}; \\ 2x, & si \ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 3-4x, & si \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esta función es completamente exacta.

En efecto, observemos que f es una función abierta y que cualquier intervalo abierto $\mathcal{O} \subset [-1, 0] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ cumplirá que $f(\mathcal{O}) \subset [-1, 0]$ y, por tanto, $f^k(\mathcal{O}) \subset [-1, 0]$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Además, la imagen de $\mathcal{O}$ va "creciendo" después de cada iteración, de manera que existe una $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\mathcal{O}) = (-1, 0)$ para toda $n \geq n_0$.

Ahora bien, si $\mathcal{O} \subset \left[0, \frac{3}{4}\right]$, existe alguna $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(\mathcal{O}) \cap [\frac{3}{4}, 1] \neq \emptyset$, lo que significa que $f^{m+1}(\mathcal{O}) \cap (-1, 0) \neq \emptyset$.

De esta forma, para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, siempre existirá alguna $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_0}(U) \cap f^{k_0}(V) \cap (-1, 0) \neq \emptyset$. Por lo tanto f es completamente exacta.

Ejemplo 4.6. *Dado que la función tienda T es exacta, por el Teorema 4.3, T es muy fuertemente transitiva, fuertemente producto transitiva, exacta transitiva y fuertemente exacta transitiva. Además, por la Proposición 4.2, (3), T es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.*

Como era de esperarse, las contenciones entre clases de funciones que se muestran en el diagrama de la Figura 3 son propias. Los contraejemplos para las funciones de la Definición 2.19 se pueden consultar en [**6**]. Para las funciones de la Definición 4.1, se tienen los siguientes.

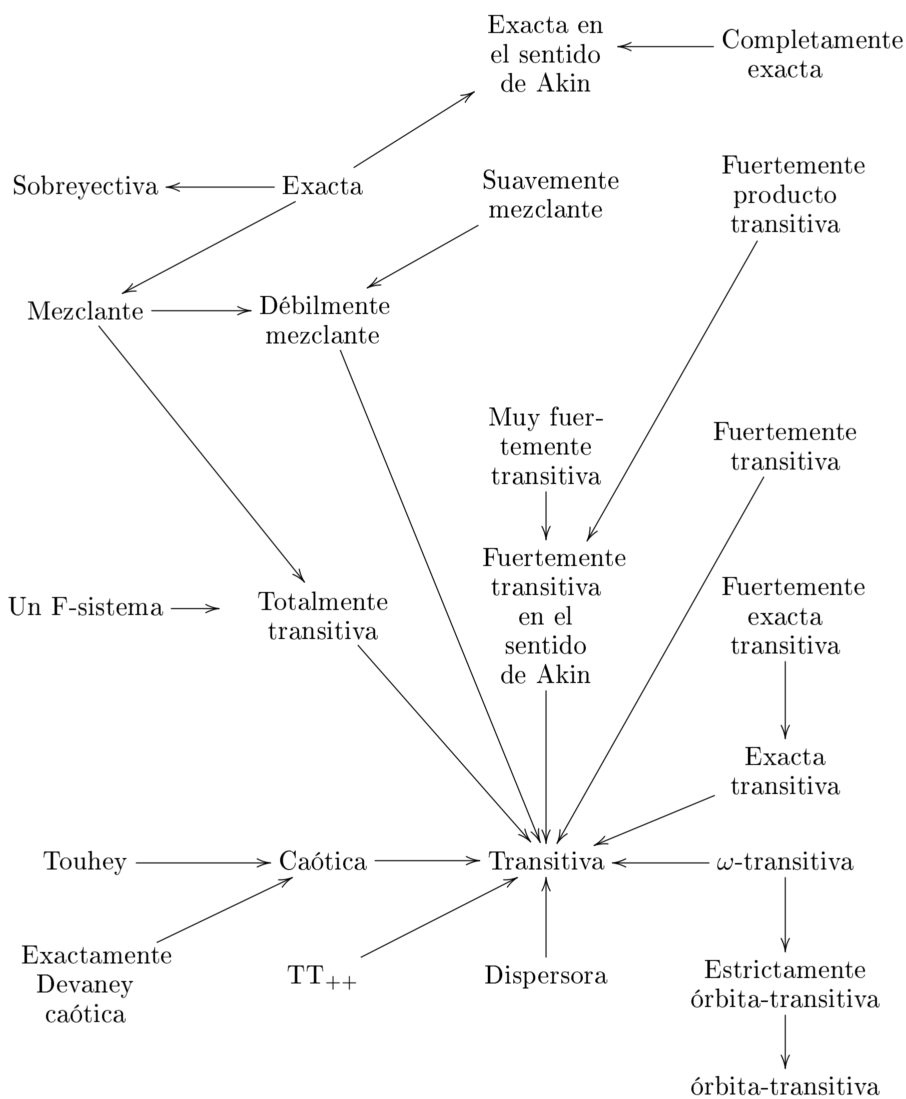

FIGURA 3. Inclusiones entre clases de funciones, caso general.

Ejemplo 4.7. *Sean $X = [-1,1]$ y $f : X \to X$ la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -(2+2x), & si\ -1 \le x \le -\frac{1}{2}; \\ 2x, & si\ -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}; \\ 2-2x, & si\ \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Se tiene que f es exacta en el sentido de Akin y f no es completamente exacta.

En efecto, sean (a,b) y (c,d) en $[-1,1]$. Se tienen los siguientes casos:
Caso (1): $(a,b),(c,d) \subseteq [0,1]$ o $(a,b),(c,d) \subseteq [-1,0]$. Puesto que en el intervalo $[0,1]$ la función f coincide con la función tienda y además la función tienda es exacta, por el Lema 2.20, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{k_1}((a,b)) = [0,1]$ y $f^{k_2}((c,d)) = [0,1]$, para cada $k_1 \ge N_1$ y $k_2 \ge N_2$. De aquí, para $k = \text{máx}\{k_1,k_2\}$ se cumple que $f^k((a,b)) \cap f^k((c,d)) \neq \emptyset$. Si $(a,b),(c,d) \subseteq [-1,0]$, con un argumento análogo al anterior se tiene que $f^k((a,b)) \cap f^k((c,d)) \neq \emptyset$ para un $k \in \mathbb{N}$.
Caso (2): $0 \in (a,b)$ o $0 \in (c,d)$. Si $0 \in (a,b)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k((a,b)) = [-1,1]$ y así, $f^k((a,b)) \cap f^k((c,d)) = f^k((c,d)) \neq \emptyset$. Análogamente, si $0 \in (c,d)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k((a,b)) \subseteq f^k((c,d)) = [-1,1]$ y por lo tanto $f^k((a,b)) \cap f^k((c,d)) \neq \emptyset$.
Caso (3): $(a,b) \subseteq [-1,0]$ y $(c,d) \subseteq [0,1]$. En este caso, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{k_1}((a,b)) = [0,1]$ y $f^{k_2}((c,d)) = [-1,0]$. De aquí, para $N = \text{máx}\{k_1,k_2\}$ se cumple que $f^k((a,b)) \cap f^k((c,d)) = \{0\}$, para cada $k \ge N$.

De los casos (1), (2) y (3) se concluye que f es una función exacta en el sentido de Akin. Además, por el caso (3), se tiene que f no es completamente exacta.

Ejemplo 4.8. *Sean $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subseteq [0,1]$ con la topología $\tau = \{A \subseteq X : X \backslash A \text{ es finito}\}$ y $f : X \to X$ la función dada por $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$, para cada $n \neq 0$ y $f(0) = 0$. Entonces f es exacta transitiva pero no es fuertemente exacta transitiva.*

En efecto, para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, $0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ y así, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ es denso en X. Sin embargo, para los abiertos $U = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2,3,4\}\} \cup \{0\}$ y $V = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2,3\}\} \cup \{0\}$, se cumple que $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V)) \neq X$.

Ejemplo 4.9. *Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 4.8. Entonces f es exacta en el sentido de Akin pero no es exacta.*

En efecto, para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X se cumple que $0 \in f(U) \cap f(V)$ y así, $f(U) \cap f(V) \neq \emptyset$. En consecuencia, f es exacta en el sentido de Akin. Sin embargo, para el conjunto abierto $U = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\right\} \cup \{0\}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $1 \notin f^k(U)$. Por lo tanto, f no es exacta.

Ejemplo 4.10. *Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 4.8. Se cumple que f es transitiva pero no es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.*

En efecto, si U y V son subconjuntos abiertos no vacíos de X, entonces $U = \left[0, \frac{1}{n}\right] \cup W_1$ y $V = \left[0, \frac{1}{m}\right] \cup W_2$ con $n, m \in \mathbb{N}$ y $W_1, W_2 \subseteq X$ finitos. Se cumple que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n(U) = \left[0, \frac{1}{n+1}\right] \cup f^n(W_1)$. Así, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, f es transitiva. Por otro lado, para el abierto $U = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2,3\}\right\} \cup \{0\}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \neq X$. Por lo tanto, f no es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.

Ejemplo 4.11. *Sea $S^1 = \{e^{2\pi i \alpha} : \alpha \in [0,1]\}$ y $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(\theta) = \theta + k$ donde $\frac{k}{\pi}$ es irracional. De aquí, f es transitiva pero no es exacta en el sentido de*

Akin [**11**, Ejemplo 1]. *Por otro lado, por el Teorema 4.3, se sabe que toda función exacta transitiva es exacta en el sentido de Akin. Por lo tanto, f no puede ser una función exacta transitiva.*

5. Condiciones al espacio fase o a la función

En esta sección analizamos otras relaciones que se pueden establecer entre las funciones presentadas en las definiciones 2.19 y 4.1 cuando se piden condiciones adicionales al espacio fase o a la función.

Para el caso general no es posible establecer una relación entre las funciones completamente exactas y transitivas. Sin embargo, para funciones continuas cuyo conjunto de puntos periódicos es denso, se puede establecer el siguiente:

Teorema 5.1. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua tal que $Per(f)$ es denso en X. Si f es completamente exacta, entonces f es transitiva.*

Demostración: Supongamos que f es completamente exacta y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por hipótesis, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(f^l(U) \cap f^l(V)) \neq \emptyset$. Esto es, existe un subconjunto abierto no vacío W de X tal que $W \subseteq f^l(U) \cap f^l(V)$. Sea $a \in W$. De aquí, existe $x \in V$ tal que $f^l(x) = a$, lo cual implica que $f^{-l}(\{a\}) = f^{-l}\left(f^l\left(\{x\}\right)\right)$. Ya que $\{x\} \subseteq f^{-l}\left(f^l\left(\{x\}\right)\right)$, entonces $\{x\} \subseteq f^{-l}(\{a\}) \subseteq f^{-l}(W)$. En consecuencia, $x \in f^{-l}(W) \cap V$. Además, ya que f es continua, $T = f^{-l}(W) \cap V$ es un subconjunto abierto no vacío de X y dado que $Per(f)$ es un subconjunto denso, existen $s \in T$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(s) = s$. Notemos que para cada $p \in \mathbb{N}$, se cumple que $f^{pm}(s) = s$, lo cual implica que podemos tomar $i > l$ tal que $f^i(s) = s$. Por otra parte, ya que $s \in f^{-l}(W) \cap V$, se tiene que $f^l(s) \in f^l\left(f^{-l}(W)\right) \subseteq W$. Además, como $W \subseteq f^l(U) \cap f^l(V)$, existe $u \in U$ tal que $f^l(u) = f^l(s)$. De aquí:

$$f^i(u) = f^{i-l}\left(f^l(u)\right) = f^{i-l}\left(f^l(s)\right) = f^i(s) = s.$$

Finalmente, $s \in f^i(U) \cap V$. Por lo tanto, $f^i(U) \cap V \neq \emptyset$ y así, f es transitiva. □

Teorema 5.2. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función abierta. Si f es exacta en el sentido de Akin, entonces f es completamente exacta.*

Demostración: Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Como f es exacta en el sentido de Akin, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$. Por otro lado, ya que f es abierta, $f^n(U) \cap f^n(V)$ es un subconjunto abierto de X, de aquí, $\text{int}(f^n(U) \cap f^n(V)) = f^n(U) \cap f^n(V)$. Por lo tanto, $\text{int}(f^n(U) \cap f^n(V)) \neq \emptyset$ y así, f es completamente exacta. □

Teorema 5.3. *Sean X un espacio topológico compacto y $f : X \to X$ una función abierta. Si f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin, entonces f es muy fuertemente transitiva.*

Demostración: Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Dado que f es abierta, para cada $l \in \mathbb{N}$, $f^l(U)$ es un subconjunto abierto. Además, ya que f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = X$. Así, $\left\{f^l(U) : l \in \mathbb{N}\right\}$ es una cubierta abierta para X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita de X, $\left\{f^{l_1}(U), f^{l_2}, \ldots, f^{l_s}(U)\right\}$ con $s \in \mathbb{N}$. Sea $N = \text{máx}\{l_1, \ldots, l_s\}$. De aquí, $\bigcup_{k=1}^{N} f^k(U) = X$. Por lo tanto, f es muy fuertemente transitiva. □

Teorema 5.4. *Sean X un espacio métrico compacto y perfecto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva y completamente exacta, entonces f es exacta transitiva.*

DEMOSTRACIÓN: Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Ya que f es completamente exacta, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}\left(f^{k_0}(U) \cap f^{k_0}(V)\right) \neq \emptyset$. Más aún, como

$$f^{k_0}(U) \cap f^{k_0}(V) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(f^k(U) \cap f^k(V)\right),$$

se tiene que

$$\operatorname{int}\left(f^{k_0}(U) \cap f^{k_0}(V)\right) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)\right).$$

Así, $\operatorname{int}(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)) \neq \emptyset$. Por otro lado, por el Teorema 3.14, f es órbita-transitiva. Esto es, existe $x \in X$ tal que $\operatorname{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$. De aquí, $\operatorname{int}(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Consecuentemente, existe $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^l(x) \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$. Luego, para cada $s \in \mathbb{N}$, $f^s(f^l(x)) \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ y así,

$$\mathcal{O}(f^l(x), f) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V)).$$

Por otro lado, ya que x es un punto transitivo, de [**19**, Lema 1.3.16], se tiene que $f^l(x)$ también es un punto transitivo, esto es, $\mathcal{O}(f^l(x), f)$ es denso en X. Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ es un subconjunto denso de X y así, f es exacta transitiva. □

Teorema 5.5. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función abierta. Si f es fuertemente transitiva, entonces f es muy fuertemente transitiva.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que f es abierta, $f(U)$ es un subconjunto abierto y como f es fuertemente transitiva, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(f(U)) = \bigcup_{i=1}^{s+1} f^i(U)$. Por lo tanto, f es muy fuertemente transitiva. □

Teorema 5.6. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función abierta. Si f es fuertemente transitiva, entonces f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.*

DEMOSTRACIÓN: Si f es fuertemente transitiva, por el Teorema 5.5, f es muy fuertemente transitiva. Además, por el Diagrama de la Figura 3, si f es muy fuertemente transitiva, entonces f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin. □

Teorema 5.7. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es minimal y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Por el Teorema 3.9, X no tiene subconjuntos propios no vacíos cerrados y +invariantes. Además, por el Teorema 3.10, $trans(f) = X$ y así, por el Teorema 3.13, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U) = X$. Dado que f es una función continua, se cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(U)$ es un subconjunto abierto de X. Esto es, $\{f^{-n}(U) :$

$n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta para X y como X es compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{N} f^{-n}(U) = X$. Por otro lado, como f es minimal, por el Teorema 3.11, f es transitiva. Veamos que además f es sobreyectiva. Notemos que para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X se cumple que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{n}(U)$ es un subconjunto denso, pues f es transitiva. Además, ya que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{n}(U) \subseteq f(X)$, se cumple que $f(X)$ también es un subconjunto denso. Esto es $\mathrm{cl}(f(X)) = X$. Ya que X es compacto y f continua, $f(X)$ es compacto y como X es de Hausdorff, $f(X)$ es cerrado. En consecuencia, $f(X) = X$, esto es, f es sobreyectiva. Esto implica que f^{N+1} también es sobreyectiva. Así:

$$\begin{aligned}
f^{N+1}(X) &= f^{N+1}\left(\bigcup_{n=1}^{N} f^{-n}(U)\right) \\
&= f^{N+1}\left(f^{-1}(U) \cup f^{-2}(U) \cup \cdots \cup f^{-N}(U)\right) \\
&= f^{N+1}\left(f^{-1}(U)\right) \cup f^{N+1}\left(f^{-2}(U)\right) \cup \cdots \cup f^{N+1}\left(f^{-N}(U)\right) \\
&= f^{N}\left(f\left(f^{-1}(U)\right)\right) \cup f^{N-1}\left(f^{2}\left(f^{-2}(U)\right)\right) \cup \cdots \cup f\left(f^{N}\left(f^{-N}(U)\right)\right) \\
&= f^{N}(U) \cup f^{N-1}(U) \cup \cdots \cup f(U) \\
&= \bigcup_{n=1}^{N} f^{n}(U).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $X = \bigcup_{n=1}^{N} f(U)$ y así, f es muy fuertemente transitiva. □

Para finalizar este capítulo, invitamos al lector a seguir recopilando más clases de funciones dinámicas y, de ser posible, seguir expandiendo el diagrama de la Figura 3.

Agradecimientos: Los autores agradecemos al revisor o a la revisora el tiempo dedicado a la lectura de este escrito y sus valiosas recomendaciones que sin duda alguna, mejoraron la presentación de este capítulo.

Bibliografía

[1] E. Akin, J. Auslander y A. Nagar, Variations on the concept of topological transitivity, *Studia Mathematica*, 235(3): 225-249, 2016.

[2] E. Akin, J. Auslander y A. Nagar, Dynamics of induced systems, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 37(7): 2034-2059, 2017.

[3] E. Akin y J. D. Carlson, Conceptions of topological transitivity, *Topology and its Applications*, 159(12): 2815-2830, 2012.

[4] G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez-Lango, The transitivity of induced maps, *Topology and its Applications*, 156(5): 1013-1033, 2009.

[5] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stace, On Devaney's definition of chaos, *The American Mathematical Monthly*, 99(4): 332-334, 1992.

[6] F. Barragán y A. Rojas-Carrasco, *Nociones relacionadas con la transitividad topológica*. Capítulo 9 en Topología y sus aplicaciones 7. Editores: Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto. Dirección General de Publicaciones, BUAP, Manuales y Textos, 2019.

[7] E. Bilokopytov y S. F. Kolyada, Transitive Maps on Topological Spaces, *Ukrainian Mathematical Journal*, 65(9): 1163-1185, 2013.

[8] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 9. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1927.

[9] F. Blanchard, B. Host y A. Maass, Topological complexity, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 20(3): 641-662, 2000.

[10] J. Camargo, C. García y A. Ramírez, Transitivity of the Induced Map $C_n(f)$, *Revista Colombiana de Matemáticas*, 48(2): 235-245, 2014.
[11] A. Crannell, The Role of Transitivity in Devaney's Definition of Chaos, *The American Mathematical Montly*, 102(9): 788-793, 1995.
[12] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989.
[13] H. Diederich, J. L. Fernández, A. Fraguela y A. Álvarez, *Topología General*, Serie Textos No. 22, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.
[14] H. Furstenberg, Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets, and a Problem in Diophantine Approximation, *Mathematical Systems Theory*, 1(1): 1-49, 1967.
[15] J. Gómez-Rueda, A. Illanes y H. Méndez, Dynamic properties for the induced maps in the symmetric products, *Chaos Solitons & Fractals*, 45(9/10): 1180-1187, 2012.
[16] J. King y H. Méndez, *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México: Prensa de Ciencias, 2014.
[17] J. H. Mai y W. H. Sun, Transitivities of maps of general topological spaces, *Topology and its Applications*, 157(5): 946-953, 2010.
[18] A. Rojas, F. Barragán y S. Macías, Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products, *Turkish Journal of Mathematics*, 44(2): 491-523, 2020.
[19] A. Rojas, *Nociones de Transitividad Topológica en Productos Simétricos Generalizados*, Tesis de Maestría en Modelación Matemática, Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2017.
[20] H. L. Royden, *Real Analysis*, MacMillan Publishing, 1968.
[21] P. Touhey, Yet Another Definition of Chaos, *The American Mathematical Montly*, 104(5): 411-414, 1997.

Correos electrónicos:
arojas@unpa.edu.mx (Anahí Rojas),
alkantun@unpa.edu.mx (Aura L. Kantún-Montiel),
jmendez@unpa.edu.mx (José N. Méndez-Alcocer),
vmendez@unpa.edu.mx (Víctor M. Méndez-Salinas),