

UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

CAMPUS LOMA BONITA

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

**DISEÑO INTEGRAL Y CONTROL DE UN ROBOT
PARALELO TIPO DELTA PARA USO DIDÁCTICO**

Tesis profesional para obtener el título de

INGENIERA EN MECATRÓNICA

Presenta:

C. MAYTHÉ HERNÁNDEZ RIVADENEYRA

Director de tesis:

Dr. Álvaro Cabrera Amado

LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO, 2018



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
Campus Loma Bonita

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

LA PRESENTE TESIS TITULADA “DISEÑO INTEGRAL Y CONTROL DE UN ROBOT PARALELO TIPO DELTA PARA USO DIDÁCTICO”, PRESENTADA POR LA SUSTENTANTE DE LICENCIATURA C. MAYTHÉ HERNÁNDEZ RIVADENEYRA BAJO LA DIRECCIÓN DEL DR. ÁLVARO CABRERA AMADO, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITÉ EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERA EN MECATRÓNICA.


M. en C. José Luis Nájera Sánchez
Jefe de la Carrera de Ingeniería en Mecatrónica


Dr. Álvaro Cabrera Amado
Director de Tesis


Dr. Hiram Netzahualcoyotl García Lozano
Presidente


M. en C. Esteban Chávez Conde
Secretario


Dr. Álvaro Cabrera Amado
Vocal

Loma Bonita, Oaxaca, México. Febrero 2018.



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

CAMPUS LOMA BONITA

INGENIERÍA MECATRÓNICA

Diseño Integral y Control de un Robot Paralelo Tipo
Delta para Uso Didáctico

Tesis que presenta la

C. Maythé Hernández Rivadeneyra

Para obtener el título de Licenciatura
en la especialidad de

Ingeniería en Mecatrónica

Director de Tesis:
Dr. Álvaro Cabrera Amado

Loma Bonita, Oaxaca, México 2018.

Dedicatoria

Este proyecto de tesis esta dedicado en especial a mi madre, quién me formó en valores y me hizo quién soy ahora. A mi padre porque su apoyo fue imprescindible para que todos mis proyectos y mis metas fueran logradas.

Agradecimientos

Agradezco principalmente a Dios quién me dió la vida, quién permitió cada cosa que he logrado y ha bendecido cada paso que he dado.

Tambien agradezco a mi familia, a mis amigos y a mi novio por que ellos me han impulsado a seguir adelante en todo. Gracias por cada momento de apoyo.

Agradezco a cada persona que depositó su confianza en mí para que este proyecto de vida se cumpliera.

Gracias le doy también a los profesores que me formaron, por todo el conocimiento que compartieron conmigo y que el día de hoy rindió frutos.

De todo corazón, ¡GRACIAS!

Resumen

Este proyecto de tesis aborda el análisis de la cinemática directa e inversa, el desarrollo del modelo matemático dinámico y la propuesta de algoritmos de control activo para un robot paralelo tipo Delta. El modelo matemático se obtiene por medio de la formulación Lagrangiana, basada en el análisis de las energías dinámicas y de las ecuaciones de restricción del robot. El análisis cinemático es abordado por métodos geométricos, considerando que los eslabones mecánicos no poseen restricción angular y las trayectorias de los eslabones se intersectan en un punto del espacio de trabajo. Las matrices Jacobianas son obtenidas a partir de la derivación de las ecuaciones de restricción del espacio de trabajo.

El diseño integral del robot paralelo está dividido en tres etapas: diseño mecánico, Instrumentación electrónica/eléctrica y sistemas de adquisición de datos del sistema integral. En la etapa mecánica se muestra el modelo computarizado de cada uno de los eslabones, uniones articuladas y chumaceras, diseñadas en el software SolidWorks 2016. En la etapa de instrumentación se seleccionan los motores de CD junto con sus etapas de potencia para el movimiento angular de cada eslabón y el movimiento angular es medido usando codificadores electrónicos. En la tercera etapa se selecciona una tarjeta de adquisición de datos.

En este proyecto se emplean los esquemas de control PD con Compensación de Gravedad, Par Calculado y PID para regulación y seguimiento de trayectoria de la posición del efector final del robot, usados bajo el criterio de estabilidad de Lyapunov. El desempeño de los controladores es evaluado bajo el criterio de seguimiento de trayectoria en el espacio de trabajo del robot.

Los resultados numéricos obtenidos en la plataforma Matlab muestran el desempeño del modelo dinámico y cinemático. Finalmente, el análisis de control de lazo cerrado usando los esquemas de control propuestos cumple satisfactoriamente el seguimiento de trayectorias dentro del espacio de trabajo del robot.

Abstract

The project deals with the analysis of the direct and inverse kinematics, the dynamic mathematical model and the proposal of active control algorithms for a Delta-like Parallel Robot. The modelling is obtained by means of the Lagrangian formulation, based on the dynamic energies and the restriction equations analysis of the robot. The kinematic analysis is approached by geometric methods, considers that the mechanical links are not have restriction in the angular movement and the tracking for links interacts at one point in the work space. The Jacobian matrixes are obtained from the derivation of the restriction of the work space.

The integral design of the parallel robot is composed for three steps: mechanical design, electronic/electrical instrumentation and data acquisition system of the integral design. The mechanical step shows a computerized model for mechanical links, articulated joints and journal bearings, designed with SolidWork 2016 software. In the instrumentation step, the CD motors are selected along with their power stages for the angular movement of each link and the angular displacement is measured using electronic encoders. In the three step a data acquisition target is selected.

In this project the PD with gravity compensation, computed torque and PID control schemes are used to regulation and trajectory tracking of the end effector position under the criteria of Lyapunov's stability. The controllers performance is evaluated under the criteria of cartesian trajectory tracking at the work space of the robot.

The numerical results obtained of the Matlab Platform shows the performance of the Dynamic and Kinematic models. Finally, the analysis of control of the closed loop using the proposed schemes comply satisfactorily the trajectory tracking within the space of the robot.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Justificación	2
1.3. Objetivos	3
1.4. Metodologías y técnicas	3
1.5. Marco teórico	4
1.5.1. Clasificación de los Robots	4
1.5.2. Robots Manipuladores	5
1.5.3. Robots paralelos	6
1.5.4. Análisis Cinemático	9
1.5.5. Jacobiano	11
1.5.6. Espacio de trabajo	12
1.5.7. Modelo Dinámico	13
1.5.8. Esquemas de control	14
1.6. Antecedentes	15
1.6.1. Orígenes de los robots paralelos espaciales	15
1.6.2. Robots Delta en la investigación	18
2. Análisis Cinemático	21
2.1. Geometría del Robot	21
2.2. Cinemática Inversa	25
2.3. Cinemática Directa.	30
2.4. Jacobiano	33
2.5. Estudio del espacio de trabajo	35
2.5.1. Restricciones físicas	35
2.5.2. Espacio de trabajo del robot	36
3. Propuesta de diseño integral del Robot Delta	41
3.1. Diseño mecánico	41
3.1.1. Estructura base	42
3.1.2. Plataforma fija	43
3.1.3. Eslabón principal	43
3.1.4. Articulación esférica	44

3.1.5.	Plataforma móvil	44
3.1.6.	Ensamble final	47
3.1.7.	Selección de Materiales	47
3.1.8.	Selección de actuadores	48
3.2.	Diseño electrónico	50
3.2.1.	Selección de sensores	50
3.2.2.	Selección de Servoamplificador	50
3.2.3.	Selección de tarjeta de adquisición de datos	50
4.	Modelo dinámico del robot Delta	55
4.1.	Formulación Lagrangiana	55
4.1.1.	Funciones de restricción	55
4.2.	Ecuaciones de movimiento	56
5.	Control del robot	65
5.1.	Control PD compensado	65
5.2.	Control PID	66
5.2.1.	Análisis de estabilidad del control PID	69
5.3.	Control por Par Calculado	70
5.3.1.	Análisis de estabilidad	71
6.	Resultados Numéricos	73
6.1.	Resultados en lazo abierto	73
6.2.	Planificación de trayectorias	74
6.2.1.	Tipos de trayectorias	74
6.2.2.	Curvas de bezier	75
6.2.3.	Trayectoria cartesiana para el Robot Delta	76
6.2.4.	Curva de bezier para el robot Delta	77
6.3.	Resultados del seguimiento de trayectorias	78
7.	Conclusión	85
	Bibliografía	87
	Apéndices	91
A.	Programas y bloques de simulación	93
• • •	Cinemática Directa y Cinemática Inversa	
• • •	Jacobiano	
• • •	Espacio de trabajo (método Monte Carlo)	
• • •	Modelo dinámico y diagramas a bloques de controladores	
B.	Hojas de datos de dispositivos	103
C.	Dibujos técnicos	109

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad los sistemas mecánicos son indispensables tanto en la industria, para automatizar los procesos de producción, como en la investigación para el desarrollo de nuevas tecnologías. Para ello se requiere que dichos sistemas sean precisos y rápidos por lo cual se hace uso de robots. Estos pueden realizar múltiples tareas con mucha mayor rapidez y a un bajo costo si se compara con un elemento humano.

Un robot industrial es definido por el “*Robot Institute of America*” (Ollero A. [1]), como un manipulador programable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales mediante movimientos variados, programados para la ejecución de distintas tareas, lo que lo convierte en la máquina ideal para la industria, principalmente para la automotriz y la de embalaje.

Las investigaciones y avances prácticos en el campo de los robots paralelos han incrementado en los últimos años. Las principales razones son que estos mecanismos son mucho más fuertes, rápidos y exactos.

El robot Delta (ver Figura 1.1) es uno de los robots paralelos más empleados en la actualidad. Este robot consiste en tres cadenas cinemáticas idénticas que van conectadas desde una plataforma fija hasta una plataforma móvil considerada efector final. Cada cadena cinemática consiste en un eslabón principal unido a la base fija mediante una articulación rotacional actuada, y un mecanismo paralelogramo unido a este eslabón por el otro extremo empleando articulaciones esféricas pasivas. Esto restringe totalmente la orientación de la plataforma móvil, la cual permanece con solo tres grados de libertad de traslación. Es común encontrar robots Delta provistos de un cuarto grado de libertad el cual hace rotar el efector final.

Unas de las dificultades que presenta esta clase de robots, es la complejidad de sus ecuaciones cinemáticas, debido a que no es posible establecer una relación directa entre un punto en el espacio y las variables articulares activas del robot.

Las aplicaciones del robot paralelo tipo Delta son muy variadas. Estos son empleados para tareas de posicionamiento, impresoras 3D, máquinas de control numérico, e incluso como material didáctico, por lo cual es muy importante que los ingenieros de hoy en día conozcan este tipo de plataformas e interactúen con ellas.

Esta tesis presenta una propuesta de diseño integral de un robot paralelo tipo Delta con



Figura 1.1: Robot Delta.

finés didácticos El prototipo resultante podría ser utilizado en la Universidad del Papaloapan para complementar el perfil académico de los alumnos.

1.1. Planteamiento del problema

Los robots manipuladores son mecanismos capaces de realizar movimientos rápidos y exactos a través de esquemas de control. El estudio de estos mecanismos es de gran importancia en la industria, debido a que permite realizar distintas tareas de manera eficiente como: ensamblado, fresado, torneado, soldadura, pintura, etc.

Para entender el comportamiento dinámico de estos robots, así como las técnicas de control que permiten su manipulación, es necesario contar con una plataforma experimental en la que se puedan realizar distintas tareas. Sin embargo, aún no se cuenta con dicha plataforma para que los alumnos de Ingeniería Mecatrónica de la Universidad del Papaloapan realicen las prácticas necesarias para complementar sus estudios.

1.2. Justificación

La Universidad del Papaloapan cuenta con un laboratorio de Mecatrónica en el que se imparten cátedras de robótica, sin embargo no cuenta con una plataforma experimental en la que se puedan estudiar técnicas de modelado e identificación de parámetros, así como probar algoritmos de control de movimientos para manipuladores.

Es importante tener una plataforma con el fin de que el estudiante pueda comprobar todos los análisis teóricos, planificación de trayectorias, control de posición y control fuerza sobre una plataforma experimental.

La propuesta del robot Delta incluye el diseño mecánico, que abarque la integración de los actuadores, sensores de posición angular, y sistemas de adquisición de señales. Con la

propuesta de diseño se pretende cubrir una de las necesidades en la carrera de Ingeniería en Mecatrónica.

El estudio de la configuración Delta ayudará al estudiante a comprender las dinámicas, cinemática, programación y control de robots paralelos, problemáticas similares serán a las que se enfrentarán en la industria que en su mayoría están automatizadas mediante el uso de robots industriales.

1.3. Objetivos

El objetivo principal de este proyecto es realizar el diseño integral, modelado dinámico y control de un robot paralelo tipo Delta para cubrir las necesidades de algunas asignaturas de la carrera en Ingeniería mecatrónica.

A partir del objetivo principal se derivan los siguientes objetivos particulares:

- Diseñar los eslabones y elementos mecánicos que componen un sistema robótico.
- Proponer un diseño integral de un robot paralelo de tres grados de libertad que integre todos los elementos mecánicos, eléctricos, electrónicos, actuadores, sensores y sistemas de adquisición de señales.
- Obtener un modelo matemático que describa las dinámicas del robot paralelo, así como la obtención de las relaciones cinemáticas.
- Aplicar y analizar esquemas de control de movimiento, PID, Par calculado y PD con compensación en gravedad.
- Obtener de resultados numéricos en pruebas en lazo abierto y seguimiento de trayectoria mediante el uso del modelo dinámico del robot.

1.4. Metodologías y técnicas

El diseño integral y control del robot Delta consta de seis etapas las cuales se detallan a continuación.

1. Revisión bibliográfica. Esta etapa consiste en el estado del arte del robot, revisión y análisis de trabajos existentes y antecedentes.
2. Estudio de la geometría del robot y modelado cinemático. Consiste en el estudio de cada una de las partes del robot y su representación vectorial dado un sistema coordinado de referencia. También se realiza el modelo cinemático directo e inverso empleando técnicas geométricas y analíticas para el caso de la cinemática diferencial (Jacobiano). Las ecuaciones cinemáticas obtenidas se validan empleando el entorno MATLAB.

3. Estudio del espacio de trabajo y dimensionado. Esta etapa consiste en el desarrollo de un algoritmo que permita obtener las configuraciones no singulares del robot para trazar el espacio de trabajo del robot en base a un conjunto de dimensiones propuestas.
4. Diseño integral del prototipo virtual. Este se desarrolla con el uso del Software de diseño SolidWorks. Primero se realiza el diseño conceptual del robot, es decir, se determina la morfología de éste en base las dimensiones establecidas para cada eslabón. Se lleva a cabo una selección de las articulaciones requeridas. Posteriormente se seleccionan los materiales para cada una de las piezas. Se realiza también la selección de los sensores y actuadores que, junto con el sistema mecánico, conformarán al robot en su totalidad. Se seleccionan motores de CD (corriente directa) y los servoamplificadores correspondientes. También se seleccionan los sensores de posición en base a la precisión deseada en los movimientos del robot y la tarjeta de adquisición de señales para su respectivo procesamiento.
5. Estudio de la dinámica del robot. Se emplea la formulación Lagrangiana para obtener las ecuaciones dinámicas, las cuales se programarán en la plataforma MATLAB-Simulink.
6. Implementación de esquemas de control. Se estudian algunos esquemas de control y se planifican trayectorias con el objetivo de evaluar el desempeño de cada esquema de control. En esta etapa se realizan todas las simulaciones necesarias empleando la plataforma MATLAB-Simulink.

1.5. Marco teórico

En este capítulo se presentan los conceptos y fundamentos básicos para el estudio de robots comenzando por su clasificación según su estructura cinemática haciendo énfasis en robots con estructura paralela. Se realiza una revisión bibliográfica sobre los principales métodos empleados en la investigación para el estudio cinemático, dinámico y del espacio de trabajo de robots paralelos. También se aborda el tema de control haciendo mención de algunos de los esquemas más empleados en el seguimiento de trayectorias para este tipo de robots.

1.5.1. Clasificación de los Robots

Los robots pueden clasificarse en robots manipuladores (figura 1.2 (a)) y robots móviles (figura 1.2 (b)). Los primeros son robots que poseen una base fija, eslabones, articulaciones y un efector final (Urrea M. y Medina P. [2]). Las articulaciones de estos robots son regularmente prismáticas o rotacionales. Cada uno de los movimientos independientes corresponde a un grado de libertad del robot.

Por otro lado, Ollero [1] señala que los robots móviles son aquellos que pueden desplazarse en su entorno por sí mismos. Esto se trata de que el robot tenga la suficiente inteligencia

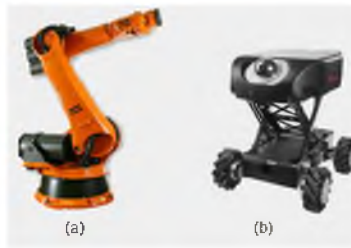


Figura 1.2: Tipos de robots. (a) Manipuladores (Robot industrial KUKA) y (b) Móviles (Robot Móvil Robotnik) [3]

como para reaccionar y tomar decisiones basándose en observaciones de su entorno. Dichos robots pueden ser terrestres, acuáticos, aéreos, de patas o de ruedas.

Tanto los robots móviles como los manipuladores son parte esencial de lo que actualmente es la robótica y son comúnmente empleados en actividades peligrosas para un ser humano, disminuyendo así el riesgo de muerte y haciendo más eficaz la tarea a realizar.

1.5.2. Robots Manipuladores

Un robot manipulador industrial es una máquina con varios grados de libertad controlada automáticamente, reprogramable y de múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil para su empleo en aplicaciones industriales (ver Kelly R. [4]).

La mayor parte de los robots manipuladores industriales actuales son esencialmente brazos articulados los cuales están formados por una sucesión de cuerpos rígidos. Cada uno de ellos están conectados entre sí mediante articulaciones de un grado de libertad; es decir, solo existe una posibilidad para unir el efector final con la base fija. La arquitectura de estos robots es llamada serial, por lo que son conocidos como robots tipo serie (Merlet J. [5]).

La estructura serial mostrada en la figura 1.3 (a) tiene severas desventajas entre las cuales está su baja capacidad de esfuerzo y una baja relación peso-carga. Por otro lado, existen robots manipuladores paralelos cuya arquitectura elimina estas desventajas. Estos robots poseen mayor rigidez, y ligado a ello que la masa de los eslabones es más baja, la posibilidad de transportar cargas más pesadas, y alta precisión (Laribi M. *et. al.*[6]).

La estructura cinemática paralela mostrada en la figura 1.3 (b) es un mecanismo de cadena cinemática cerrada cuyo efector está conectado a la base mediante varias cadenas cinemáticas independientes. También puede definirse como un robot hecho con una base fija y un efector final con n -grados de libertad que están conectados mediante al menos dos cadenas cinemáticas independientes (Bulej V. *et. al.* [8]). Las articulaciones de los eslabones de las cadenas cinemáticas regularmente son rotacionales, esféricas e incluso prismáticas en algunos casos. Dichas articulaciones poseen actuadores, sin embargo existen algunas estructuras en las cuales no todas sus articulaciones son actuadas.

A pesar de las múltiples ventajas que presentan los manipuladores paralelos sobre los manipuladores serie, también presentan algunas desventajas. Una de ellas es el espacio de trabajo reducido, debido a que estos mecanismos poseen restricciones de movimiento que

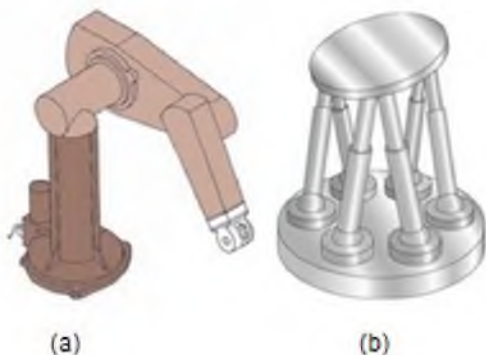


Figura 1.3: Estructuras cinemáticas. a) Serial y b) Paralela [7].

provocan múltiples singularidades. Otra desventaja es la complejidad de tanto de sus ecuaciones cinemáticas como de su arquitectura.

1.5.3. Robots paralelos

Yañez [9] plantea que los robots paralelos pueden subdividirse en dos tipos: planares y espaciales. Los primeros solo pueden moverse en el plano xy , como es el caso del robot 3RRR (figura 1.4). Este robot posee tres grados de libertad (uno rotacional y dos de traslación) y consiste en tres brazos con tres articulaciones rotacionales, los actuadores se encuentran en la base.



Figura 1.4: Robot paralelo planar 3RRR [10].

Los robots espaciales pueden moverse en tres dimensiones y tener tres o más grados de libertad. Existe una gran variedad de robots paralelos espaciales, uno de ellos es la plataforma Stewart (ver [11]) la cual posee seis grados de libertad (figura 1.5). A partir de este robot, se desarrollaron otros manipuladores paralelos como el Maryland que consiste en una plataforma móvil conectada a la plataforma fija mediante tres cadenas cinemáticas donde el brazo superior de cada cadena es un mecanismo paralelogramo y el brazo inferior es un es-

labón unido al brazo superior mediante articulaciones puramente rotaciones. Este mecanismo posee tres grados de libertad puramente de traslación.



Figura 1.5: Plataforma Stewart [11]

El robot Delta surge a partir del manipulador Maryland, siendo ambas plataformas similares a excepción que en el Delta las articulaciones pasivas son esféricas mientras que el manipulador Maryland emplea dos articulaciones rotacionales para lograr el mismo movimiento.

Existen otras variantes de estos robots en las cuales su estudio se centra en mejorar sus características y propiedades, por ejemplo en 2003, Xin-Jun [12] y sus colaboradores presentaron el diseño de un robot Delta a partir de un espacio de trabajo deseado reemplazando las articulaciones rotacionales comunes por articulaciones prismáticas (ver figura 1.6).



Figura 1.6: Robot Delta con articulaciones prismáticas (Xin-Jun [12])

Otro modelo de robot paralelo es el H4 propuesto por Pierrot [13], el cual consiste en cuatro cadenas cinemáticas que unen a la base fija con el efector final, permitiéndole un grado de libertad extra rotacional además de los tres grados de libertad de traslación.

Robot Delta en el mercado

La historia del robot Delta en el mercado, presentada en (Rueda, [14]), data del año 1987 cuando la empresa Suiza Demarex compró una licencia para el robot Delta. El objetivo de esta empresa era comercializarlo como herramienta para la industria del embalaje (ver figura 1.7).



Figura 1.7: Instalación Demarex para el envasado en una panadería industrial (Ángel [21]).

En 1996 Demarex compró una patente para éste robot. Posteriormente la patente fue revendida a la empresa DeeMed la cual se especializa en operaciones quirúrgicas. Ellos diseñaron el robot Delta para que trasladara en su efector final un microscopio de aproximadamente 20kg (ver figura 1.8).



Figura 1.8: Robot Delta DeeMed para aplicaciones quirúrgicas (Ángel [21]).

Años más tarde, ABB Flexible Automation adquirió una licencia para la construcción de éstos. En 1999 lanzó su robot Delta llamado IRB 340 FlexPicker (ver figura 1.9), con el

objetivo de llegar a los sectores alimentario, farmacéutico y las industrias electrónicas. Esta empresa ha instalado alrededor de 1800 robots Delta en todo el mundo y es el líder en el campo de la tecnología avanzada de embalaje (Bulej V. *et. al.* [15]).



Figura 1.9: Robot Delta de ABB FlexPicker (Ángel [21]).

Otra empresa que también obtuvo la patente del robot Delta fue la compañía japonesa Hitachi Seiki la cual se dedica a la construcción de robots Delta de pequeñas dimensiones, para empaquetado y perforación.

Actualmente los robots Delta son empleados como máquinas router de control numérico para fresado, grabado, perforado e incluso como impresora 3D.

1.5.4. Análisis Cinemático

El modelo *cinemático directo* consiste en encontrar la posición del efector final dadas las posiciones de las variables articulares del robot y el modelo cinemático inverso consiste en encontrar las posiciones de las variables articulares a partir de la posición del efector final.

Existen diversas técnicas para encontrar las ecuaciones cinemáticas de estos robots. Cortés [16], hace uso del álgebra de cuaterniones para encontrar vectores dinámicos que proporcionen los modelos cinemáticos del robot Delta. Otro método para conocer la cinemática directa es la convención de Denavit-Hartenberg, que se basa en matrices de transformación para obtener el desplazamiento y orientación del efector final a partir de las variables articulares.

Se ha empleado método geométrico para encontrar la cinemática directa que se basa en considerar el movimiento del mecanismo paralelogramo como una esfera cuyo centro es la unión entre el eslabón principal L_1 y el mecanismo paralelo L_2 (ver figura 1.10). La posición del efector final se determina a partir de la intersección de las tres esferas formadas por los eslabones, haciendo uso de la ecuación de la esfera se localizan las coordenadas en el espacio (x, y, z) del efector final (ver Balmaceda A. [17], Sanfilippo F. [18] y Mantyla J. *et. al.* [19]).

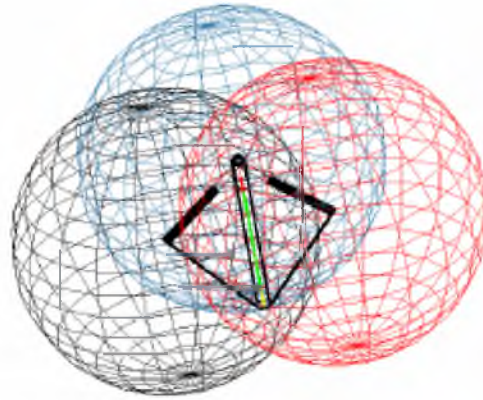


Figura 1.10: Intersección de los movimientos esféricos. (Ángel [39])

Otro método es emplear un modelo multicuerpo de restricciones y el método de Newton-Raphson para aproximar la respuesta (ver Cardona M. [20] y Angel L. *et. al.* [21]), con el fin de obtener ecuaciones por cada articulación que definan las restricciones en su movimiento.

En cuanto a la *cinemática inversa* se pueden emplear métodos geométricos y productos vectoriales para obtener las variables articulares a partir de un punto dado en el espacio. La forma más común de encontrar las variables articulares es considerando el movimiento rotatorio del eslabón principal y el movimiento esférico del mecanismo paralelogramo (ver figura 1.11) (Martinez E. *et. al.* [22] y Bulej V. *et. al.* [8]).

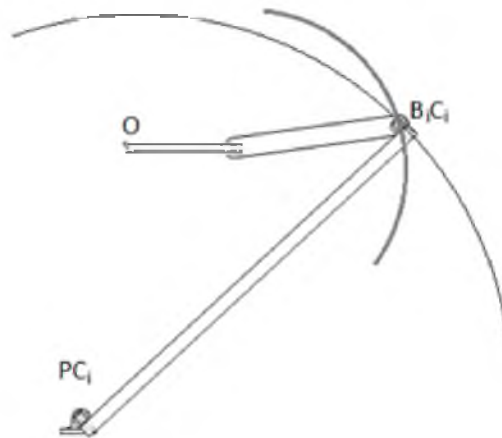


Figura 1.11: Intersección de la trayectoria de los eslabones.

Obteniendo las ecuaciones correspondientes a dichos movimientos y encontrando su intersección se obtienen las coordenadas del punto \mathbf{B}_i , y por trigonometría se determinan las variables articulares θ_i .

Algunos otros métodos sugieren el uso de algoritmos computacionales para resolver los problemas cinemáticos de manera numérica. Sin embargo, los métodos geométricos siguen siendo los más empleados.

1.5.5. Jacobiano

La herramienta principal para el análisis de singularidades es el Jacobiano el cual establece una relación entre las velocidades de las variables articulares y las velocidades de las coordenadas de posición del efector final.

Gosselin [23] clasificó las singularidades de los robots paralelos usando dos matrices Jacobianas; una matriz inversa J_q y una matriz directa J_x

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}}, \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

El método propuesto por López [24], consiste en emplear la ecuación de restricción del robot en su forma vectorial con el fin de encontrar mediante productos vectoriales dos términos que relacionen a las variables articulares con las coordenadas del efector final, siendo éstos dos términos las matrices Jacobianas. La derivada de la ecuación de restricción en forma matricial se puede expresar de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{A}}_i + \dot{\mathbf{B}}_i.$$

Las velocidades lineales se expresan en función de las velocidades angulares como lo muestra la ecuación (1.1). Realizando un producto punto por un vector unitario $\hat{\mathbf{B}}$ se llega a la ecuación (1.2) de la cual se obtienen las matrices Jacobianas en función de las articulaciones activas y pasivas del robot

$$\bar{\mathbf{V}} = \omega_{ai} \times \mathbf{A}_i + \omega_{bi} \times \mathbf{B}_i, \quad (1.1)$$

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{B}} \cdot \omega_{ai} \times \mathbf{A}_i. \quad (1.2)$$

Otro método es el propuesto por Lung Wen [25] en el cual se obtienen las matrices Jacobianas empleando la ecuación de restricción y derivando respecto del tiempo. Siendo $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ la ecuación de restricción:

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = 0,$$

dónde:

$$\mathbf{J}_q = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}}. \quad (1.4)$$

Aquí J_q se conoce como matriz Jacobiana inversa; mientras que J_p se le denomina matriz Jacobiana directa. Ambas matrices están en función de las variables articulares del sistema. En ocasiones, estas matrices pueden estar en términos tanto de las variables articulares como de las coordenadas de posición del efector final.

La ventaja de obtener la matriz Jacobiana mediante las derivadas parciales de las ecuaciones de restricción es que las matrices quedan expresadas en función de las variables articulares activas. En cambio, si se calcula de forma vectorial, se obtienen Jacobianos en términos tanto de las articulaciones activas como de las pasivas, las cuales por lo general no son medidas. Esto conllevaría a emplear sensores redundantes en dichas articulaciones lo cual aumenta el costo del robot.

1.5.6. Espacio de trabajo

Una característica de gran importancia para el diseño del robot delta es el espacio de trabajo. Este se puede definir como la región que puede ser alcanzada por el efector final del robot. En el caso de los robots paralelos se puede definir como la intersección de los volúmenes de trabajo de las diferentes cadenas cinemáticas que lo componen (Clavel R. [26]).

Existen diversas formas de calcular el espacio de trabajo de los robots paralelos. Una de las formas que se han empleado es la resolución de la cinemática inversa realizando un barrido de coordenadas correspondientes al de dimensiones de un poliedro cuyas longitudes son definidas a partir del alcance máximo de las cadenas cinemáticas y al límite máximo de los ángulos de giro de los brazos (ver Velázquez M. [27]).

Otra forma es el método Monte Carlo (ver Stamper R. [28] y Briones J. [29]), el cual consta de cinco pasos:

1. Se define un hemisferio cuyo radio es igual a la longitud total de la cadena cinemática.
2. Se selecciona un gran número de puntos dentro de esa región hemisférica.
3. Cada punto se evalúa resolviendo la cinemática inversa del robot para determinar si se encuentra dentro del espacio de trabajo. Si los ángulos son números reales, entonces esa configuración está dentro del espacio de trabajo.
4. Se cuenta el número de puntos que se hallan dentro del espacio de trabajo del robot.
5. Se obtiene un volumen aproximado empleando la relación entre la cantidad de puntos evaluados y la cantidad de puntos contados dentro del espacio de trabajo:

$$W_s = V_{hemisferio} \cdot \frac{\eta_{ws}}{\eta_{total}}$$

El espacio de trabajo de los robots paralelos se ve limitado por las múltiples singularidades que presentan, siendo esa una desventaja frente a otros manipuladores seriales. Sin embargo, se han hecho trabajos de investigación para resolver este problema.

Las investigaciones más recientes en cuanto a cómo mejorar el espacio de trabajo de un robot paralelo, se han basado en el cálculo óptimo de las dimensiones del robot a partir de un espacio de trabajo propuesto.

Se han empleado distintas herramientas para la optimización de las dimensiones de los robots paralelos, en particular los robots Delta. Una de ellas es el uso de algoritmos genéticos (GAs) (ver Laribi M. [6]), lo cual consiste en la optimización de una función objetivo. Otro método planteado es la optimización de las dimensiones basándose en el menor consumo de energía, empleando el modelo dinámico inverso y la cinemática inversa para obtener los pares en cada uno de los motores generados por una trayectoria que recorre un espacio de trabajo propuesto (Peña C. *et. al.* [30]).

1.5.7. Modelo Dinámico

El modelo dinámico de los robots paralelos es una tarea complicada debido a las múltiples cadenas cinemáticas que unen a la base fija con la base móvil. Existen varias técnicas de modelado como Newton Euler y Euler Lagrange. La formulación Newton Euler es un método de balance de fuerzas dinámicas, mientras que la formulación Euler - Lagrange es un método de balance de energías de la dinámica (Craig J. [31]).

Otra metodología es la formulación Lagrangiana cuyas ecuaciones de primer tipo son escritas en términos de un conjunto de coordenadas redundantes. Por lo tanto, la formulación requiere un conjunto de ecuaciones de restricción derivadas de la cinemática del manipulador. Esas ecuaciones de restricción deben ser agregadas a las ecuaciones de movimiento para producir un número de ecuaciones igual al número de incógnitas.

Las ecuaciones lagrangianas de primer tipo se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_j} = Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial \mathbf{q}_j} \quad \text{para } j = 1 \text{ a } n.$$

donde L es la función de Lagrange basada en la diferencia entre la energía cinética y potencial, Γ_i denota la i -ésima función de restricción, k es el número de funciones de restricción, y λ_i es el multiplicador de Lagrange. El número de coordenadas, n , excede el número de grados de libertad por k (Lung wen Tsai, [25]). Uno de los problemas con los que se pueden presentar al emplear la formulación Lagrangiana es la eliminación de los multiplicadores de Lagrange. Para lograr excluir esas variables algunos autores emplean la matriz Jacobiana (Guglielmetti P. [32]), pues las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones corresponden a las matrices Jacobianas inversa y directa.

Ambas formulaciones, tanto Newton-Euler como Lagrange, aplicadas a un mismo robot, generan las mismas ecuaciones de movimiento.

Otra aproximación es el principio de trabajos virtuales, el cual también es una aproximación energética. Algunos autores hacen uso de este principio combinándolo con el uso de los modelos reducidos (ver Nakamura Y. y Godoussi M. [33], Murrat J. y Lovell G. [34]). Este método considera al robot paralelo con un conjunto de elementos libres y un conjunto de restricciones. El objetivo es encontrar una relación entre el sistema libre y el sistema de restricciones, y representar dicha relación en una sola matriz de transformación T .

Los métodos mencionados permiten una variedad de estrategias para abordar el modelado matemático de robots paralelos. Otra variante es el uso de sensorica redundante. Esto consiste en emplear la matriz de transformación antes mencionada y aplicar la formulación lagrangiana con multiplicadores de Lagrange. Agregado a esto se considera el uso de sensores en las articulaciones pasivas del robot. El objetivo es implementar dicho modelo con sistemas de control avanzados que permitan mejorar la precisión y el rendimiento del robot (Zubizarreta A. *et. al.* [35]).

1.5.8. Esquemas de control

Para que un robot realice las trayectorias propuestas de manera eficiente se debe hacer uso de un controlador. Los esquemas de control más comunes son los de tipo PID. Estos son una serie de controladores con distintas configuraciones de los términos Proporcional, Integral y Derivativo. En el controlador, el término Proporcional reduce el error de seguimiento, el término integral reduce o elimina el error en estado estable y el término derivativo compensa los sobre impulsos.

Algunos de estos esquemas de control pueden ser empleados en robots manipuladores basándose en el criterio de estabilidad de Lyapunov con el objetivo de garantizar que el sistema de control sea estable asintóticamente. Un caso es el del control PD con compensación en gravedad, el cual consiste en añadir directamente el término gravitatorio del modelo. La ley de control presentada en (Siciliano B. *et. al.* [36]) está dada por la siguiente expresión:

$$\tau = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_p\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_D\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},$$

donde \mathbf{J} es la matriz Jacobiana y $\bar{\mathbf{x}}$ es el error de posición.

Dicha ley se obtiene a partir de un análisis de estabilidad en el espacio operacional el cual asegura que el sistema es estable asintóticamente.

El esquema de control PD extendido es una variación del PD convencional que puede ser aplicado a robots con restricciones cinemáticas. Éste posee una compensación de la dinámica del robot la cual se suma directamente a la señal de control. El esquema se muestra en la figura 1.12. La ley de control del PD extendido presentada por Cheng [37] es la siguiente:

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + N(q) - k_p(q_d - q) - k_v(\dot{q}_d - \dot{q}).$$

Otro esquema comúnmente empleado para el control de robots es el control por Par Calculado. Este esquema utiliza una retroalimentación no lineal para desacoplar el manipulador. El algoritmo de control está dada por la siguiente ecuación:

$$\tau = M(q) (\ddot{q}_d - k_p(q_d - q) - k_v(\dot{q}_d - \dot{q})) + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + G(q).$$

La gran desventaja de los últimos dos controladores mencionados es que requieren del conocimiento del modelo exacto del robot, por lo tanto, no hay una garantía de que funcionen en su totalidad en aplicaciones prácticas.

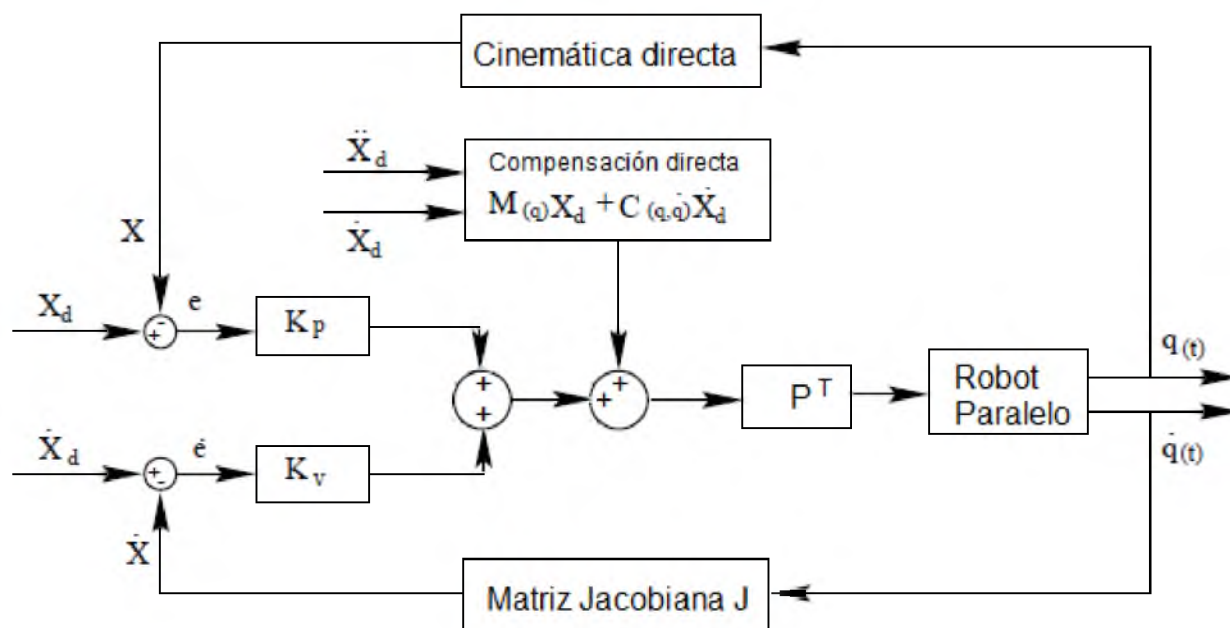


Figura 1.12: Diagrama a bloques del esquema de control PD aumentado.

Un controlador con grandes capacidades para el control de robots paralelos es el Predictivo Funcional presentado por Vivas [38]. La estrategia de control se muestra en la figura 1.13. Dada una consigna deseada definida en el horizonte finito $[0 h]$, la predicción de la salida futura \hat{y}_p deberá alcanzar la consigna futura siguiendo una trayectoria de referencia y_r .

1.6. Antecedentes

En este capítulo se presenta una revisión bibliográfica sobre el origen de los robots paralelos, los primeros estudios y las primeras aplicaciones prácticas que se le dieron a este robot. También se presentan algunos trabajos de investigación publicados en los últimos años sobre el estudio, uso y variaciones del robot Delta.

1.6.1. Orígenes de los robots paralelos espaciales

Los robots paralelos fueron introducidos hace algunas décadas. En 1813 Cauchy estudió la rigidez de un robot octaedro articulado. Sin embargo, el primer mecanismo paralelo fue propuesto en 1962 por Gough (figura 1.14). Stewart en 1965 propuso una plataforma con seis cadenas cinemáticas que unían a la base del robot con el efector final, empleada en la construcción de simuladores de vuelo (Ángel L., [39]).

En 1967 K.L. Cappel [40] patentó un simulador de vuelo utilizando la misma estructura que la plataforma de Gough, mostrada en la figura 1.15).

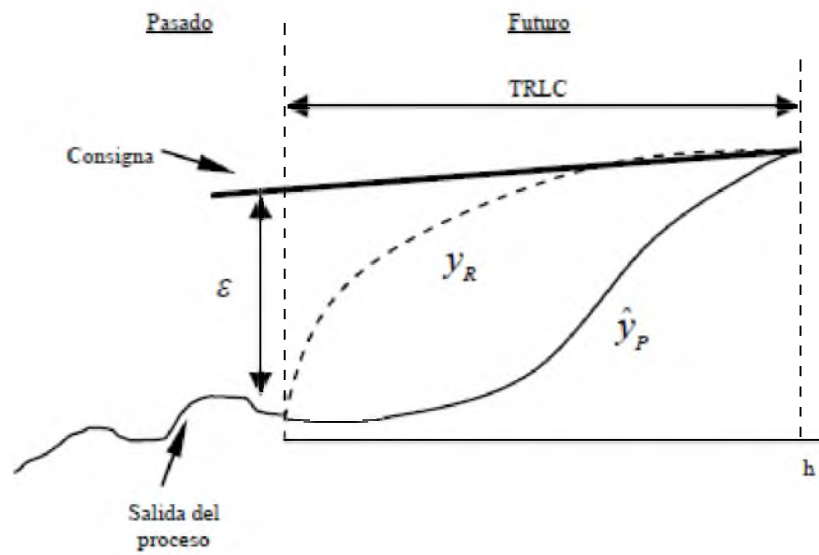


Figura 1.13: Diagrama de funcionamiento del control predictivo funcional (Vivas A. [38])



Figura 1.14: Plataforma paralela propuesta por Gough (Merlet J.P. [5])

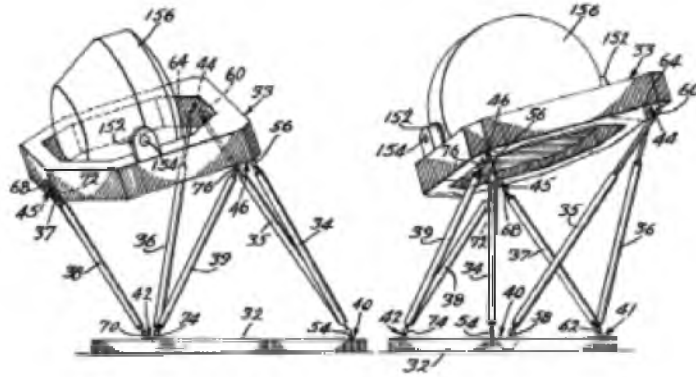


Figura 1.15: Patente de Cappel de un simulador de vuelo (Zabalza *et. al.* [42])

Otro manipulador paralelo fue el presentado por Hunt en 1983 [41] el cual lleva por nombre 6-RUS. Consiste en una plataforma de seis grados de libertad los cuales son accionados por actuadores giratorios (ver figura 1.16).

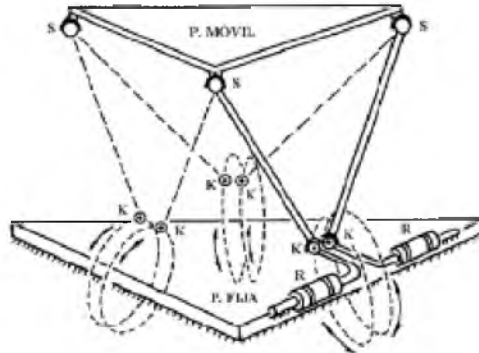


Figura 1.16: Manipulador paralelo propuesto por Hunt (Zabalza *et. al.* [42])

Clavel en 1989 propuso el uso de mecanismos paralelogramos para construir una plataforma paralelo de tres grados de libertad a la cual denominó robot Delta, el cual hoy en día es utilizado en aplicaciones de alta velocidad en la industria (Cortés B. *et. al.*[16]).

Otras plataformas robóticas paralelas citadas por Zabalza [42] son el Ojo de Águila propuesto por C. Gosselin (figura 1.17(a)) y el Capaman propuesto por M. Ceccarelli (figura 1.17(b)).

Todos los autores mencionados desarrollaron dichas plataformas sin conocimiento previo de robótica paralela, gracias a ellos se desarrolló dicha rama. Desde entonces se ha estudiado exhaustivamente las plataformas paralelas permitiendo que el campo de aplicación de las mismas siga extendiéndose cada vez más.

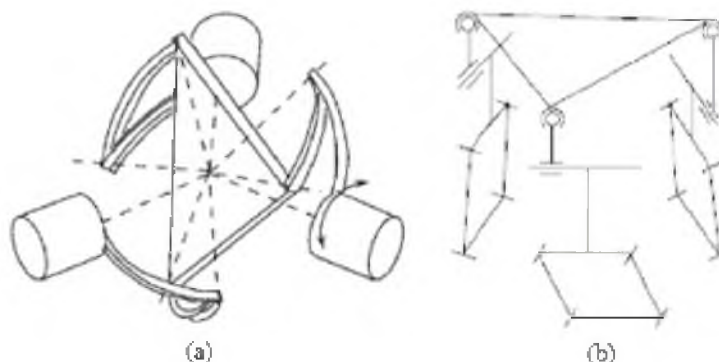


Figura 1.17: a) Ojo de Águila. b) Capaman. (Zabalza *et. al.* [42])

1.6.2. Robots Delta en la investigación

La investigación acerca de estos robots se ha incrementado en los últimos años dado los retos que implica el diseño, construcción y control de éste tipo de plataformas y sus múltiples aplicaciones.

En la Universidad de Maryland en 1995, Lung Wen Tsai [43] inventó un robot paralelo de tres grados de libertad que emplea uniones de revoluta únicamente. Este robot presenta varias ventajas sobre las versiones de la plataforma Stewart debido a que el espacio de trabajo del manipulador Maryland es mucho más grande.

Luis Ángel Silva [44], de la Universidad Politécnica de Madrid, llevó a cabo el diseño, construcción y control de un robot Paralelo tipo delta al cual denominaron RoboTennis. Para ello usaron el esquema de control "Feed Forward compensation", que hace uso del modelo matemático inverso para calcular los pares en cada motor. La plataforma es una estructura paralela abierta para la puesta en práctica de diversas estrategias del control visual, entre ellas permitir que el robot juegue al tenis de mesa.

Edward Wong [45], de la Universidad de Canterbury, Nueva Zelanda, estudió al robot Delta como máquina caminadora.

En 2012, Medina y Urrea de la Universidad Militar Nueva Granada, en Colombia, llevaron a cabo el diseño integral e implementación de un robot Delta para uso didáctico (figura 1.18), solucionando los problemas de espacio de trabajo reducido y gran número de singularidades, optimizando las dimensiones de sus eslabones para maximizar su espacio de trabajo y su destreza.

En el mismo año, el Instituto Politécnico Nacional (IPN) en México desarrolló una plataforma robótica denominada Parallax LKF-240, la cual parte de la estructura cinemática de un robot Delta pero empleando articulaciones rotacionales en lugar de articulaciones esféricas con el objetivo de ampliar el espacio de trabajo del robot. Además, proponen técnicas basadas en análisis de imágenes para determinar la precisión y la repetibilidad del robot, así como la rigidez bajo diferentes condiciones de carga (Castillo C. *et. al.* [46]).

Actualmente, el campo de aplicación de los robots Delta se ha ampliado y las líneas

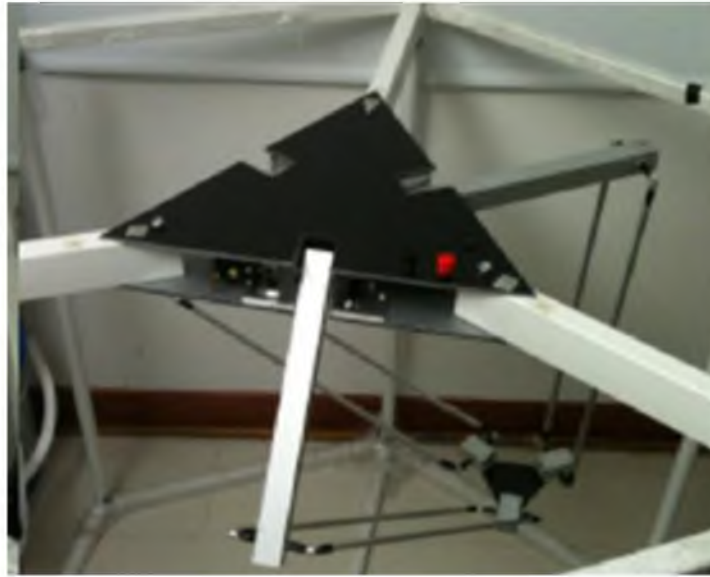


Figura 1.18: Prototipo de robot delta (Urrea [2])

de investigación siguen creciendo. El estudio de estos robots espaciales es muy importante para los ingenieros del futuro, cada vez se desarrollan nuevas técnicas de estudio y diversos esquemas de control que ayudan a mejorar las características de los robots haciéndolos más atractivos para la industria.

Capítulo 2

Análisis Cinemático

2.1. Geometría del Robot

El análisis cinemático y dinámico del robot requiere un estudio previo de su geometría. Como se puede apreciar en la figura 2.1, el robot consta de una plataforma fija, una plataforma móvil y tres cadenas cinemáticas separadas 120° cada una las cuales unen a ambas plataformas. Dichas cadenas consisten en un eslabón principal, el cual se acopla directamente al actuador y a un mecanismo paralelogramo con articulaciones esféricas. Dicho mecanismo paralelogramo restringe la orientación de la plataforma móvil.

El sistema coordenado de referencia $OXYZ$ se ubica en el centro de la base fija (O). El ángulo ϕ indica la rotación de cada cadena cinemática respecto al eje x .

El punto A_i es la articulación rotacional que une al eslabón principal L_1 con la base fija. Cada articulación se ubica a una distancia a del origen del sistema de referencia. El punto B_i representa la unión del eslabón principal con el mecanismo paralelo L_2 ; el punto C_i es la unión del mecanismo paralelo con la plataforma móvil. Dicha unión se encuentra ubicada en los extremos de la plataforma a una distancia r del punto P el cual es el vector de coordenadas cartesianas del efector final que se ubica en el centroide de la plataforma móvil.

En la figura 2.2 se observa como están definidos cada uno de los ángulos formados por las articulaciones del robot. El vector $\overrightarrow{A_i B_i}$ forma un ángulo con respecto el eje X_i el cual se denominará θ_i . En este caso, se asume un mayor desplazamiento angular sobre el espacio negativo, por lo tanto se considera positivo el valor del ángulo en dicha región.

En el mecanismo paralelo se pueden identificar dos ángulos de movimiento, uno de ellos es el que se forma a partir de la proyección de $\overrightarrow{B_i C_i}$ sobre el plano $X_i Z_i$ con respecto al vector $\overrightarrow{A_i B_i}$, al cual se le denomina α_i . El ángulo β_i se forma a partir de $\overrightarrow{B_i C_i}$ con respecto a la vertical.

De esta forma cada cadena cinemática posee tres ángulos θ_i , α_i y β_i , donde θ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) representa a las variables articulares activas debido a que poseen actuadores.

Los grados de libertad del manipulador se calculan empleando el criterio de Kutzbach-Grübler [47]

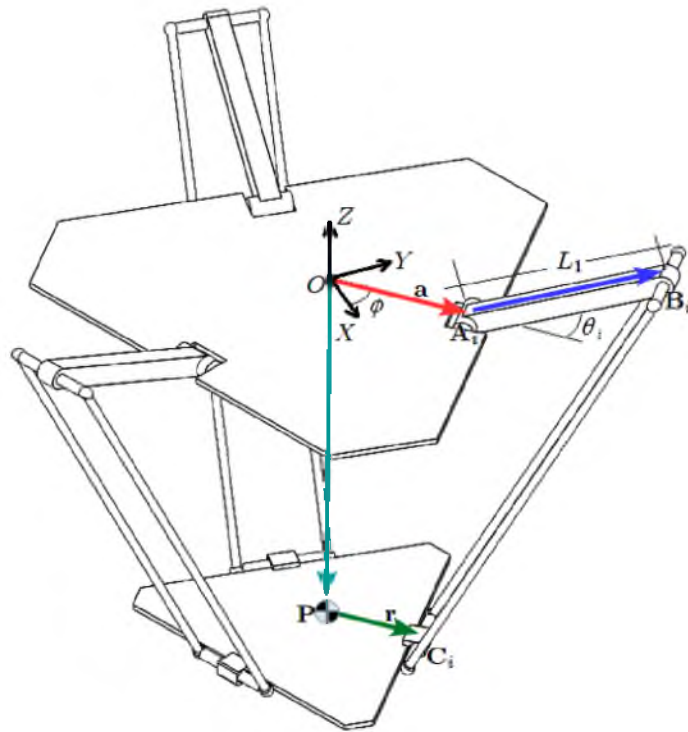


Figura 2.1: Geometría del robot Delta

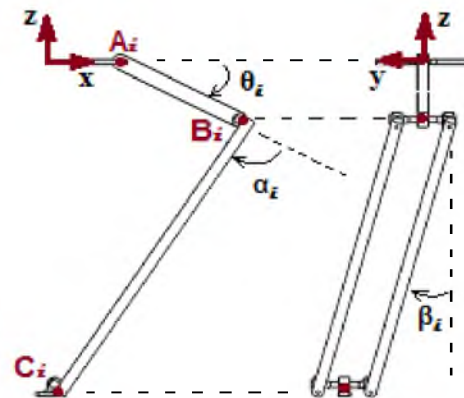


Figura 2.2: Ángulos de las articulaciones del robot.

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i,$$

donde F son los grados de libertad del manipulador, λ es el número de grados de libertad que tendría un elemento libre, n es el número de eslabones, j es el número de articulaciones y f_i son los grados de libertad de la i -ésima articulación donde $i = 1, 2, \dots, j$.

Al tratarse de un manipulador espacial, cada elemento libre en el espacio posee seis grados de libertad, tres de rotación y tres de traslación, por lo tanto $\lambda = 6$.

El robot cuenta con tres eslabones principales, tres mecanismos paralelos los cuales se consideran como un eslabón cada uno; una base fija y una plataforma móvil, por lo tanto el número de eslabones es $n = 8$. El número de articulaciones que posee es $j = 9$ puesto que cuenta con tres articulaciones rotacionales y seis esféricas. Las articulaciones rotacionales solo poseen un grado de libertad, mientras que las esféricas poseen dos, por lo tanto $\sum_{i=1}^j f_i = 15$, entonces los grados de libertad del manipulador Delta son:

$$F = 6(8 - 9 - 1) + 15 = 3.$$

Cada cadena cinemática del robot posee una ecuación de lazo cerrado la cual se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\overrightarrow{A_i B_i} + \overrightarrow{B_i C_i} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC_i} - \overrightarrow{OA_i}. \quad (2.1)$$

Donde $\overrightarrow{OP} = [P_x, P_y, P_z]$ es el vector de coordenadas cartesianas, $\overrightarrow{OA_i}$ es el vector que va desde el origen hasta la articulación A_i y $\overrightarrow{PC_i}$ es el vector que va desde el punto P hasta la articulación C_i . Dichos vectores representados sobre el sistema de referencia $X_i Y_i Z_i$ son:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_i A_i} &= [a, 0, 0], \\ \overrightarrow{A_i B_i} &= [L_1 \cos \theta_i, 0, -L_1 \sin \theta_i], \\ \overrightarrow{P C_i} &= [r, 0, 0]. \end{aligned}$$

Para obtener una representación de estos vectores en el sistema coordenado XYZ , se emplea la siguiente matriz de rotación sobre el eje z :

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En la figura 2.3 se definen las componentes de los vectores $\overrightarrow{OA_i}$, $\overrightarrow{PC_i}$ y $\overrightarrow{A_i B_i}$ con respecto a la orientación del sistema coordenado XYZ .

Los vectores representados en el sistema coordenado original se obtienen de la siguiente forma:

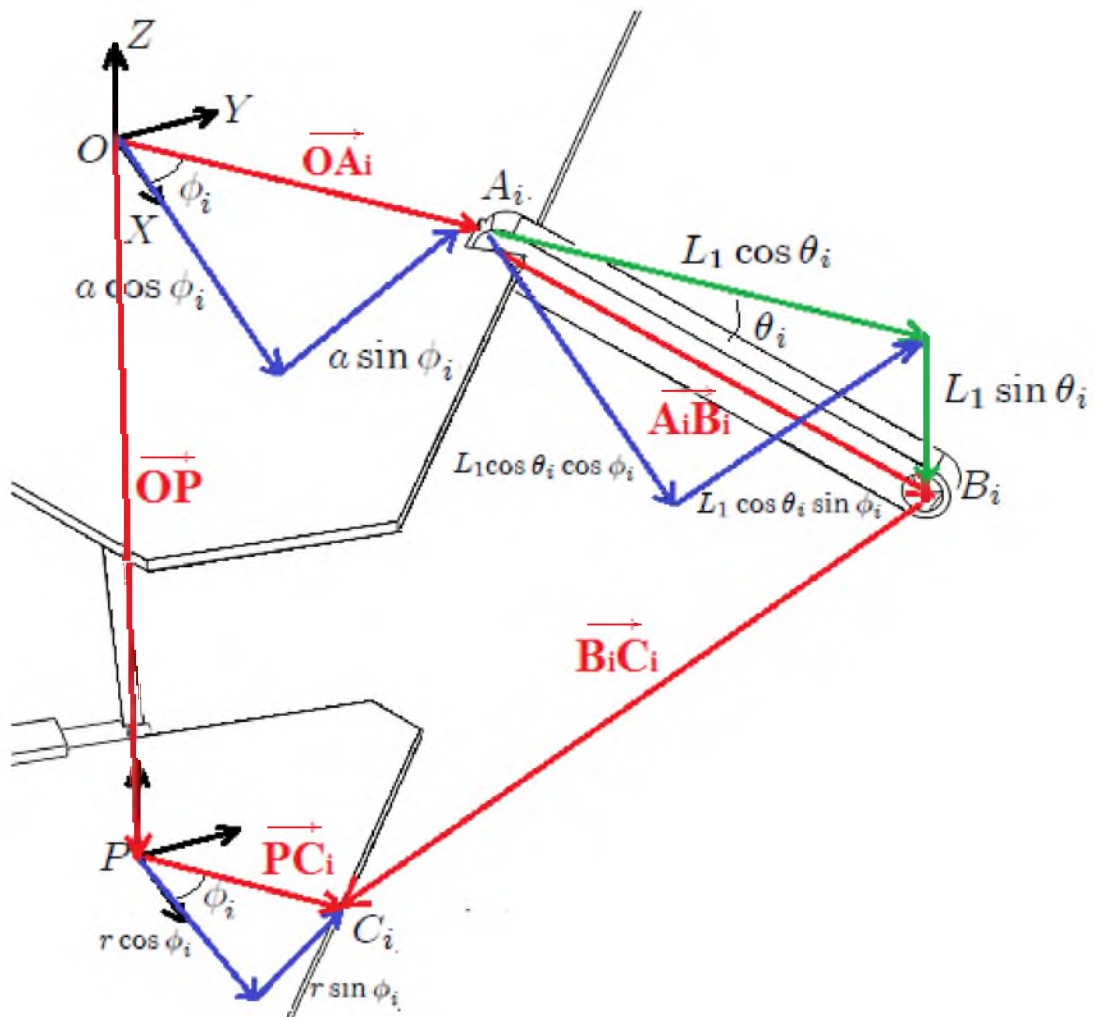


Figura 2.3: Proyección de las componentes de la cadena cinemática.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_i} &= (R_0^1) \overrightarrow{O_iA} = [a \cos \phi_i, a \sin \phi_i, 0]; \\ \overrightarrow{A_iB_i} &= (R_0^1) \overrightarrow{AB} = [L_1 \cos \theta_i \cos \phi_i, L_1 \cos \theta_i \sin \phi_i, -L_1 \sin \theta_i]; \\ \overrightarrow{PC_i} &= (R_0^1) \overrightarrow{PC} = [r \cos \phi_i, r \sin \phi_i, 0].\end{aligned}$$

Con el objetivo de obtener una ecuación de lazo cerrado en términos de las variables articulares activas, se calculan los vectores OB_i y OC_i a partir de los vectores calculados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB_i} &= \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iB_i}; \\ \overrightarrow{OB_i} &= [(a + L_1 \cos \theta_1) \cos \phi_1, (a + L_1 \cos \theta_1) \sin \phi_1, -L_1 \sin \theta_1]; \\ \overrightarrow{OC_i} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC_i}; \\ \overrightarrow{OC_i} &= [P_x + r \cos \phi_i, P_y + r \sin \phi_i, P_z].\end{aligned}$$

A partir de estos vectores es posible obtener el vector $\overrightarrow{B_iC_i}$ expresado en términos de θ_i y P .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_iC_i} &= \overrightarrow{OC_i} - \overrightarrow{OB_i}, \\ \overrightarrow{B_iC_i} &= [P_x + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \cos \phi_1, P_y + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \sin \phi_i, \dots \\ &\quad \dots P_z + L_1 \sin \theta_i]\end{aligned}\tag{2.2}$$

El vector $\overrightarrow{B_iC_i}$ es la resultante de la suma vectorial de la cadena cinemática y representa la ubicación en el espacio del eslabón que corresponde a las barras paralelas cuya longitud es constante. De esta forma se evita emplear las variables articulares pasivas pudiendo así generar modelos cinemáticos en términos únicamente de las variables articulares activas.

2.2. Cinemática Inversa

El modelo cinemático inverso consiste en una serie de ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas con las variables articulares activas del robot, permitiendo obtener θ_i a partir de las coordenadas del punto P . En este caso las ecuaciones se obtienen geométricamente empleando el planteamiento propuesto por Lung Wen en [25].

El robot es completamente simétrico, lo que permite analizar cada cadena cinemática por separado.

Se puede observar que la articulación A_i permite que el eslabón $\overrightarrow{A_iB_i}$ tenga un movimiento circular cuyo radio es L_1 . Por otro lado, la articulación esférica C_i permite un movimiento esférico del eslabón $\overrightarrow{B_iC_i}$ de radio L_2 . Puesto que B_i es donde se unen ambos eslabones, tal como se muestra en la figura 2.4, se emplea como punto de intersección de las trayectorias.

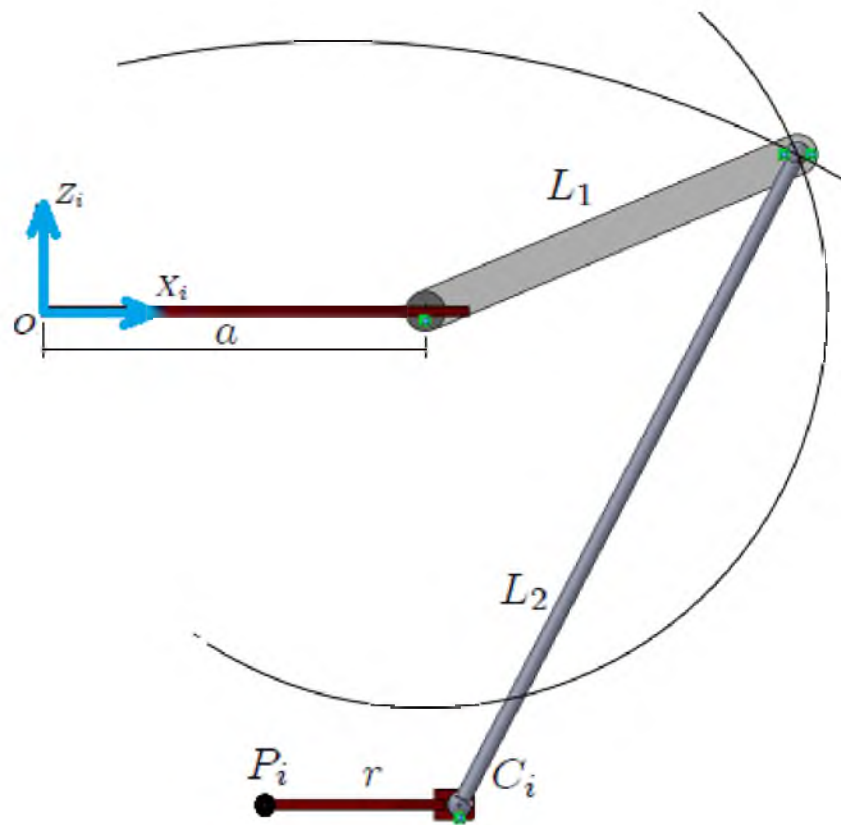


Figura 2.4: Intersección de las trayectorias circular y esférica.

Dicha intersección se calcula con cada movimiento de la cadena cinemática con el objetivo de encontrar las componentes del punto B_i y emplearlas para calcular así el ángulo θ_i mediante una función trigonométrica.

El centro de la trayectoria circular del eslabón $\overline{A_i B_i}$ corresponde al punto A_i . Para obtener las coordenadas se considera como referencia un nuevo sistema coordenado $O X_i Y_i Z_i$ rotado un ángulo ϕ_i sobre el eje Z del sistema coordenado $O X Y Z$, tal como se muestra en la figura 2.5. Eso implica que el punto P deba ser representado en el nuevo sistema coordenado y para ello se emplea la ec. 2.3.

$$P_i = R_1^0 P. \quad (2.3)$$

Donde:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

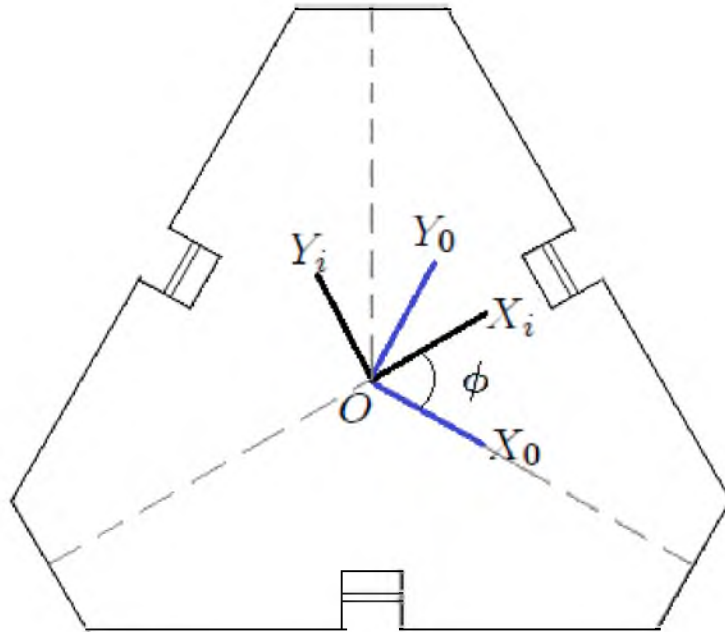


Figura 2.5: Sistemas coordenados

Por lo tanto el nuevo vector P_i queda representado en función del ángulo de rotación ϕ_i de la siguiente manera:

$$P_i = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i & 0 \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \cos \phi_i + P_y \sin \phi_i \\ -P_x \sin \phi_i + P_y \cos \phi_i \\ P_z \end{bmatrix}.$$

Las coordenadas del punto A_i representadas en el sistema $X_iY_iZ_i$ son $(a, 0, 0)$ como se muestra en la figura 2.4. Dado que B es el punto que traza las trayectorias de ambos eslabones y además se encuentra únicamente en el plano X_iZ_i , se puede deducir que $B_y = 0$. Entonces la ecuación del movimiento circular del eslabón L_1 es:

$$(B_{xi} - A_{xi})^2 + (B_{zi} - A_{zi})^2 = L_1^2. \quad (2.4)$$

Sustituyendo entonces las coordenadas de punto A sobre la ecuación (2.4) se obtiene:

$$(B_{xi} - a)^2 + B_{zi}^2 = L_1^2. \quad (2.5)$$

Las coordenadas del centro de la esfera son $(P_{xi} + r, P_{yi}, P_{zi})$. Por lo tanto la ecuación de la trayectoria esférica es:

$$\begin{aligned} (B_{xi} - C_x)^2 + (-C_y)^2 + (B_{zi} - C_z)^2 &= L_2^2 \\ (B_{xi} - P_{xi} - r)^2 + (P_{yi})^2 + (B_{zi} - P_{zi})^2 &= L_2^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se desarrollan los binomios de la ecuación (2.5) y la ecuación (2.6) para posteriormente resolver el sistema:

$$B_{xi}^2 - 2aB_{xi} + a^2 + B_{zi}^2 = L_1^2, \quad (2.7)$$

$$B_{xi}^2 - 2(P_{xi} + r)B_{xi} + (P_{xi} + r)^2 + P_{yi}^2 + B_{zi}^2 - 2B_{zi}P_{zi} + P_{zi}^2 = L_2^2. \quad (2.8)$$

Restando la ecuación (2.8) de la ecuación (2.7) se obtiene lo siguiente:

$$2B_{zi}P_{zi} = L_1^2 - L_2^2 + P_{yi}^2 - a^2 + P_{zi}^2 + (P_{xi} + r)^2 - 2B_{xi}(P_{xi} + r - a),$$

despejando B_z se obtiene:

$$B_{zi} = \frac{L_1^2 - L_2^2 + P_{yi}^2 - a^2 + P_{zi}^2 + (P_{xi} + r)^2}{2P_{zi}} - \frac{2B_{xi}(P_{xi} + r - a)}{2P_{zi}}. \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) se puede representar de la siguiente manera:

$$B_{zi} = K_1 - K_2 \cdot B_{xi}, \quad (2.10)$$

donde:

$$K_1 = \frac{L_1^2 - L_2^2 + P_{yi}^2 - a^2 + P_{zi}^2 + (P_{xi} + r)^2}{2P_{zi}},$$

$$K_2 = \frac{(P_{xi} + r - a)}{P_{zi}}.$$

Para obtener B_x , se sustituye la ecuación (2.10) en la ecuación (2.7):

$$B_{xi}^2 - 2aB_{xi} + a^2 + (K_1 + K_2 \cdot B_{xi})^2 = L_1^2.$$

Desarrollando y agrupando los términos de la ecuación anterior se obtiene:

$$(1 - K_2^2)B_{xi}^2 - 2(a + K_1K_2)B_{xi} + (a^2 + K_1^2 - L_1^2) = 0. \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) se puede representar de la siguiente manera:

$$C_1B_{xi}^2 + C_2B_{xi} + C_3 = 0,$$

donde:

$$C_1 = 1 - K_2^2,$$

$$C_2 = -2(a + K_1K_2),$$

$$C_3 = (a^2 + K_1^2 - L_1^2).$$

Debido a que se trata de una ecuación cuadrática, por medio de la fórmula general se obtiene la solución B_{xi} . En este caso, dado que la geometría del robot no permite que B_{xi} tome valores negativos, se toma como solución el valor más grande.

$$B_{xi} = \frac{-C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4C_1C_3}}{2C_1}.$$

Calculados B_{xi} y B_{zi} se obtiene la variable articular θ_i de la siguiente forma:

$$\theta_i = \tan^{-1} \left(\frac{B_{zi}}{B_{xi} - a} \right), \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

La expresión de la ecuación (2.12) se emplea para hallar los tres ángulos. La única variación en el cálculo de cada variable es el vector P , puesto que debe ser rotado según la cadena cinemática a estudiar. Para encontrar el ángulo θ_1 se deben calcular P usando $\phi_1 = 0^\circ$. Para θ_2 , $\phi_2 = 120^\circ$; y para θ_3 , $\phi_3 = 240^\circ$.

2.3. Cinemática Directa.

El problema de la cinemática directa consiste en encontrar las coordenadas de punto P dadas las tres variables articulares θ_1 , θ_2 y θ_3 . Para ello se debe considerar el movimiento esférico que poseen las barras del mecanismo paralelogramo de cada brazo para obtener un sistema de tres ecuaciones no lineales con tres incógnitas, tal como lo plantea Urrea en [2]. Dichas trayectorias esféricas se intersectan en un punto el cual corresponde al punto P .

La posición en el espacio del eslabón L_2 está dada por el vector $\overrightarrow{B_iC_i}$:

$$\overrightarrow{B_iC_i} = [P_x + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \cos \phi_i, P_y + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \sin \phi_i, P_z + L_1 \sin \theta].$$

Se calcula el vector $\overrightarrow{B_iC_i}$ de cada eslabón, dependiendo del ángulo de rotación respecto al sistema coordenado original, para obtener las ecuaciones de movimiento esférico de cada uno.

Para el brazo $\overrightarrow{B_1C_1}$, el ángulo de rotación es $\phi = 0^\circ$. Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} B_1C_{1x} \\ B_1C_{1y} \\ B_1C_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \\ P_y \\ P_z + L_1 \sin \theta \end{bmatrix};$$

Para el brazo $\overrightarrow{B_2C_2}$, el ángulo de rotación es $\phi = 120^\circ$, entonces:

$$\begin{bmatrix} B_{2x} \\ B_{2y} \\ B_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \left(-\frac{1}{2}\right) \\ P_y + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ P_z + L_1 \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Finalmente para el brazo $\overrightarrow{B_3C_3}$, $\phi = 240^\circ$, entonces las coordenadas son:

$$\begin{bmatrix} B_{3x} \\ B_{3y} \\ B_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \left(-\frac{1}{2}\right) \\ P_y + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ P_z + L_1 \sin \theta_3 \end{bmatrix}.$$

Dadas las coordenadas de cada eslabón se plantean las siguientes ecuaciones que describen las trayectorias esféricas:

$$[P_x + (r - a - L_1 \cos \theta_i)]^2 + P_y^2 + [P_z + L_1 \sin \theta_1]^2 = L_2^2, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \left[P_x - \frac{1}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_i)\right]^2 + \left[P_y + \frac{\sqrt{3}}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_i)\right]^2 + \dots \\ \dots + [P_z + L_1 \sin \theta_2]^2 = L_2^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \left[P_x - \frac{1}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_i)\right]^2 + \left[P_y - \frac{\sqrt{3}}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_i)\right]^2 + \dots \\ \dots + [P_z + L_1 \sin \theta_3]^2 = L_2^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.13, 2.14 y 2.15) se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - 2a_1P_x + 2a_2P_z - a_3 = 0, \quad (2.16)$$

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - b_1P_x + \sqrt{3}b_1P_y + 2b_2P_z - b_3 = 0, \quad (2.17)$$

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - c_1P_x - \sqrt{3}c_1P_y + 2c_2P_z - c_3 = 0, \quad (2.18)$$

donde:

$$a_1 = r - a - L_1 \cos \theta_1, \quad a_2 = L_1 \sin \theta_1, \quad a_3 = L_2^2 - a_1^2 - a_2^2,$$

$$b_1 = r - a - L_1 \cos \theta_2, \quad b_2 = L_1 \sin \theta_2, \quad b_3 = L_2^2 - b_1^2 - b_2^2,$$

$$c_1 = r - a - L_1 \cos \theta_3, \quad c_2 = L_1 \sin \theta_3, \quad c_3 = L_2^2 - c_1^2 - c_2^2.$$

Las ecuaciones (2.16) (2.17) (2.18) forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Este sistema puede resolverse mediante una resta algebraica. Si se resta de (2.17) la ecuación (2.16) se obtiene:

$$\begin{aligned} -2a_1P_x + 2a_2P_z - a_3 - \left(-b_1P_x + \sqrt{3}b_1P_y + 2b_2P_z - b_3\right) &= 0, \\ (b_3 - a_3) - (2a_1 - b_1)P_x + 2(a_2 - b_2)P_z - \sqrt{3}b_1P_y &= 0. \end{aligned}$$

Restando la ecuación (2.18) de la (2.16) se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} -2a_1P_x + 2a_2P_z - a_3 - \left(-c_1P_x - \sqrt{3}c_1P_y + 2c_2P_z - c_3\right) &= 0, \\ (c_3 - a_3) - (2a_1 - c_1)P_x + 2(a_2 - c_2)P_z + \sqrt{3}c_1P_y &= 0. \end{aligned}$$

De las dos ecuaciones resultantes, se despeja la coordenada P_x lo que da como resultado las siguientes expresiones:

$$P_x = \frac{2(a_2 - c_2)}{(2a_1 - c_1)}P_z + \frac{\sqrt{3}c_1}{(2a_1 - c_1)}P_y - \frac{(a_3 - c_3)}{(2a_1 - c_1)}, \quad (2.19)$$

$$P_x = \frac{2(a_2 - b_2)}{(2a_1 - b_1)}P_z - \frac{\sqrt{3}b_1}{(2a_1 - b_1)}P_y - \frac{(a_3 - b_3)}{(2a_1 - b_1)}. \quad (2.20)$$

A partir de las ecuaciones (2.19 y 2.20) se encuentra una expresión que permite calcular el valor de la coordenada P_y :

$$\left(\frac{2(a_2 - b_2)}{(2a_1 - b_1)} - \frac{2(a_2 - c_2)}{(2a_1 - c_1)}\right)P_z + \left(\frac{(a_3 - c_3)}{(2a_1 - c_1)} - \frac{(a_3 - b_3)}{(2a_1 - b_1)}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}b_1}{(2a_1 - b_1)} + \frac{\sqrt{3}c_1}{(2a_1 - c_1)}\right)P_y. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$P_y = \frac{A + B \cdot P_z}{C}, \quad (2.22)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a_3 - c_3)}{(2a_1 - c_1)} - \frac{(a_3 - b_3)}{(2a_1 - b_1)}, \\ B &= \frac{2(a_2 - b_2)}{(2a_1 - b_1)} - \frac{2(a_2 - c_2)}{(2a_1 - c_1)}, \\ C &= \frac{\sqrt{3}b_1}{(2a_1 + b_1)} + \frac{\sqrt{3}c_1}{(2a_1 + c_1)}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la ecuación (2.22), se sustituye en (2.20) y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{2(a_2 - b_2)}{(2a_1 - b_1)}P_z - \frac{\sqrt{3}b_1}{(2a_1 - b_1)} \frac{A + BP_z}{C} - \frac{(a_3 - b_3)}{(2a_1 - b_1)}, \\ P_x &= \left(\frac{2(a_2 - b_2)}{(2a_1 - b_1)} - \frac{\sqrt{3}b_1 B}{C(2a_1 - b_1)} \right) P_z - \left(\frac{\sqrt{3}b_1 A}{C(2a_1 - b_1)} + \frac{(a_3 - b_3)}{(2a_1 - b_1)} \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

La ecuación resultante corresponde a la coordenada P_x y se puede reescribir de la siguiente manera:

$$P_x = D - E \cdot P_z \quad (2.24)$$

donde:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sqrt{3}b_1 A}{C(2a_1 - b_1)} + \frac{(a_3 - b_3)}{(2a_1 - b_1)}, \\ E &= \frac{2(a_2 - b_2)}{(2a_1 - b_1)} - \frac{\sqrt{3}b_1 B}{C(2a_1 - b_1)}. \end{aligned}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones para P_x y P_y en función de la coordenada P_z , se sustituyen las ecuaciones (2.22 y 2.24) en la ecuación (2.16).

$$(D - E \cdot P_z)^2 + \left(\frac{A + BP_z}{C} \right)^2 + P_z^2 - 2a_1(D - E \cdot P_z) + 2a_2P_z - a_3 = 0.$$

Agrupando los términos de la ecuación anterior se obtiene:

$$\left(E^2 + \frac{B^2}{C^2} + 1 \right) P_z^2 + \left(2A\frac{B}{C^2} - 2DE + 2a_2 + 2Ea_1 \right) P_z + \left(D^2 + \frac{A^2}{C^2} - a_3 - 2Da_1 \right) = 0 \quad (2.25)$$

La ecuación (2.3) se puede resolver mediante la fórmula general, tomando como variable P_z . Se consideran solo las soluciones reales negativas, ya que la plataforma móvil se mueve en el cuadrante negativo del eje Z en el sistema coordenado propuesto.

$$P_z = \frac{-f_2 - \sqrt{(f_2)^2 - 4f_1f_3}}{2f_1},$$

donde:

$$\begin{aligned} f_1 &= E^2 + \frac{B^2}{C^2} + 1, \\ f_2 &= 2A\frac{B}{C^2} - 2DE + 2a_2 + 2Ea_1, \\ f_3 &= D^2 + \frac{A^2}{C^2} - a_3 - 2Da_1. \end{aligned}$$

De ésta forma se realiza el cálculo de la ubicación del centroide de la plataforma móvil empleando las mediciones de las variables articulares.

2.4. Jacobiano

La relación existente entre las velocidades lineales del efector final y las velocidades angulares de las variables articulares de un robot está dada por la matriz Jacobiana. En el caso de los robots paralelos tal matriz relaciona las velocidades de la plataforma móvil con las variables articulares activas.

Dado que el robot Delta posee cadenas cinemáticas cerradas, se hace obligado el uso de ecuaciones de restricción para obtener el Jacobiano. A partir del vector $\overrightarrow{B_iC_i}$ se obtiene la ecuación de restricción 2.26, considerando que su magnitud es igual a L_2 :

$$\Gamma(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}) &= (P_x + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \cos \phi_1)^2 + \dots \\ &\dots + (P_y + (r - a - L_1 \cos \theta_i) \sin \phi_i)^2 + (P_z + L_1 \sin \theta_i)^2 - L_2^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Al derivar la ecuación de restricción con respecto del tiempo se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial \Gamma(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = 0.$$

La expresión anterior se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{J}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{J}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} = 0.$$

A diferencia de los robots seriales, en los robots paralelos se pueden distinguir dos matrices, a \mathbf{J}_θ es llamada matriz Jacobiana directa, y \mathbf{J}_p es la denominada matriz Jacobiana inversa.

Para calcular las matrices se obtienen las ecuaciones de restricción particulares de cada brazo sustituyendo su ángulo de rotación ϕ_i en la ec. 2.26.

$$\Gamma_1 = (P_x + (r - a - L_1 \cos \theta_1))^2 + (P_y)^2 + (P_z + L_1 \sin \theta_1)^2 - L_2^2, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \left(P_x - \frac{1}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_2) \right)^2 + \left(P_y + \frac{\sqrt{3}}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_2) \right)^2 + \dots \\ &\dots + (P_z + L_1 \sin \theta_2)^2 - L_2^2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= \left(P_x - \frac{1}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_3) \right)^2 + \left(P_y - \frac{\sqrt{3}}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_3) \right)^2 + \dots \\ &\dots + (P_z + L_1 \sin \theta_3)^2 - L_2^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Derivando parcialmente con respecto a θ_1 , θ_2 , y θ_3 , la matriz \mathbf{J}_θ es determinada por las siguientes expresiones:

$$\mathbf{J}_\theta = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_1} = 2L_1 ((P_x + r - a) \sin \theta_1 + P_z \cos \theta_1), \\ a_{22} &= \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_2} = (r - a + \sqrt{3}P_y - P_x) L_1 \sin \theta_2 + 2P_z L_1 \cos \theta_2, \\ a_{33} &= \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_3} = (r - a - \sqrt{3}P_y - P_x) L_1 \sin \theta_3 + 2P_z L_1 \cos \theta_3. \end{aligned}$$

Derivando parcialmente con respecto a P_x , P_y y P_z , se obtiene la matriz \mathbf{J}_p :

$$\mathbf{J}_p = 2 \begin{bmatrix} r - a + P_x - L_1 \cos \theta_1 & P_y & P_z + L_1 \sin \theta_1 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}r + P_x + \frac{1}{2}L_1 \cos \theta_2 & P_y - \frac{1}{2}\sqrt{3}(a - r + L_1 \cos \theta_2) & P_z + L_1 \sin \theta_2 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}r + P_x + \frac{1}{2}L_1 \cos \theta_3 & P_y + \frac{1}{2}\sqrt{3}(a - r + L_1 \cos \theta_3) & P_z + L_1 \sin \theta_3 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Las matrices Jacobianas obtenidas tienen la misma dimensión (3×3), por lo tanto la matriz Jacobiana que relaciona las velocidades lineales con las velocidades angulares es expresada de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_R \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.32)$$

donde:

$$\mathbf{J}_R = -\mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_\theta$$

A partir de la matriz de la ec. 2.30, se pueden encontrar las singularidades de la cinemática inversa, las cuales suceden cuando la determinante de \mathbf{J}_θ se vuelve cero.

$$\det(\mathbf{J}_\theta) = 0$$

Esto implica que el efector final no pueda moverse sobre algunos puntos del espacio cartesiano, lo cual ocurre por lo general en los límites del espacio de trabajo del robot.

Por otra parte, cuando la determinante de la matriz \mathbf{J}_p tiende a cero, entonces se presenta una singularidad en la cinemática inversa, lo cual significa que la velocidad de la plataforma móvil es diferente de cero a pesar de que las velocidades de los actuadores son cero (Merlet J.P., [5]).

2.5. Estudio del espacio de trabajo

2.5.1. Restricciones físicas

Las dimensiones del Robot Delta determinan el espacio de trabajo del mismo, pues la cantidad de puntos en el espacio alcanzables por el robot dependen de la longitud de las cadenas cinemáticas y el rango de giro de los eslabones.

Se debe tomar en cuenta que existen restricciones físicas, es decir, existen configuraciones que debido a la estructura física del robot no son posibles de alcanzar aunque teóricamente lo sean. Las configuraciones singulares mostradas en la figura 2.6 ocurren cuando:

- $\theta_i = 90^\circ$ ó 270° (figura 2.6 A)
- $\alpha_i = 0^\circ$ ó 180° (figura 2.6 B)

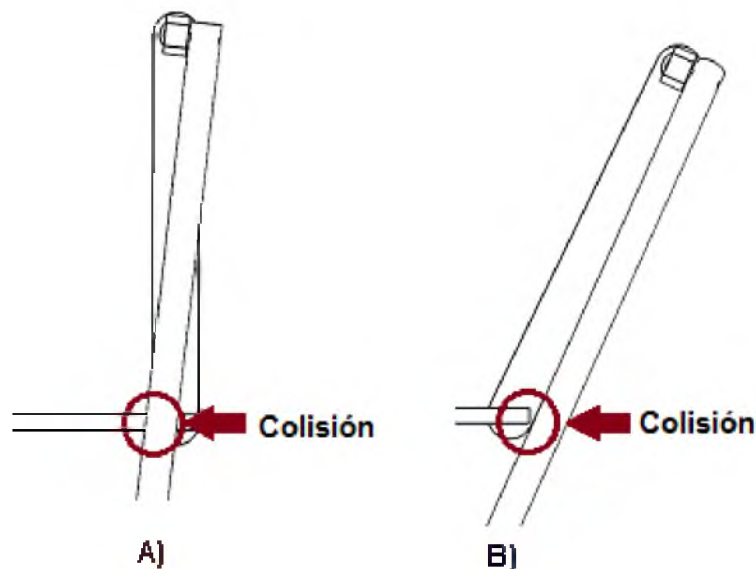


Figura 2.6: Configuraciones singulares.

Teóricamente, la variable θ_i debería ser capaz de alcanzar valores cercanos a 90° sin caer en una singularidad, sin embargo, físicamente no es posible aproximarse demasiado sin causar

una colisión. De igual manera sucede con el ángulo α_i puesto que valores cercanos a 180° provocarían una colisión de las barras paralelas con la plataforma móvil.

Para asegurar la inexistencia de colisiones asegurando así un espacio de trabajo completamente seguro, se propone la siguiente restricción de movimiento:

- $-45^\circ < \theta_i < 75^\circ$

Esto también implica que el robot no puede estirar por completo sus cadenas cinemáticas siendo así la longitud que alcance el efector final, menor que la longitud total de los eslabones. En la figura 2.7 se puede observar al robot completamente estirado, mostrando que no es posible generar un ángulo de 180° entre L_1 y L_2 .



Figura 2.7: Robot Delta completamente estirado.

Puesto que no existe una manera directa de controlar las variables articulares pasivas, no se impone una restricción sobre ellas. Se asume que la restricción impuesta sobre las variables articulares activas es suficiente para evitar las configuraciones singulares de los ángulos pasivos.

2.5.2. Espacio de trabajo del robot

Para estudiar el espacio de trabajo del robot se define un rango de longitudes para cada parámetro como se muestra en la Tabla 1. Este estudio será útil para definir las dimensiones del manipulador.

Parámetro	Longitud mínima (mm)	Longitud máxima (mm)
L_1	150	250
L_2	500	700
a	150	250
r	50	100

Se obtiene el espacio de trabajo para cada una de las combinaciones posibles empleando valores cada 50 mm para los parámetros L_1 , L_2 y a ; y cada 25 mm para el radio r .

El espacio de trabajo se obtiene mediante la programación del método Monte Carlo en MATLAB (ver apéndice A.4). Para ello se define un hemisferio de radio igual a la longitud de la cadena cinemática con el fin de resolver la cinemática inversa en cada punto de él. En este caso se toma como radio la longitud máxima de la cadena cinemática.

$$L_1 + L_2 + r + a = R_{hem},$$

$$R_{hem} = 1300 \text{ mm.}$$

Se realiza una primera simulación para obtener dos curvas del espacio de trabajo en función del parámetro a empleando para la primera $L_1 = 150$ mm, $L_2 = 500$ mm, $r = 50$ mm y para la segunda curva $L_1 = 200$ mm, $L_2 = 600$ mm, $r = 75$ mm. Se puede observar en la figura 2.8, que conforme a incrementa su valor, el volumen del espacio de trabajo alcanzable por el robot disminuye, sin importar cuales sean las dimensiones de los demás parámetros. Por tal motivo se usará el valor mínimo previamente establecido para el diseño del robot.

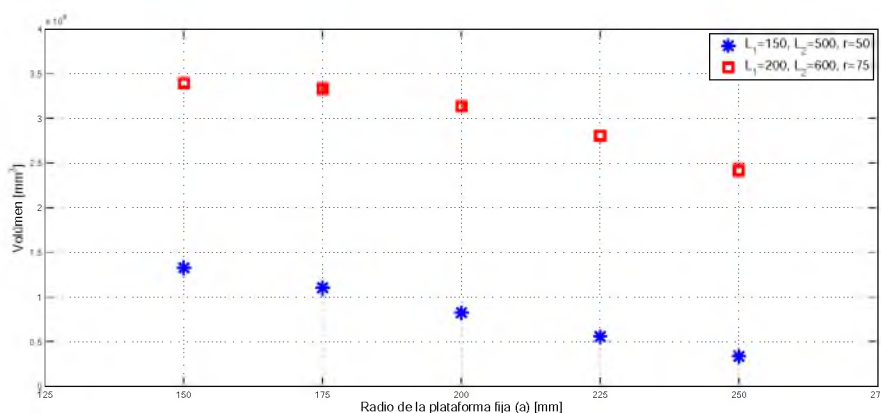


Figura 2.8: Volumen del espacio de trabajo en función del radio de la plataforma fija.

La segunda simulación se realiza variando la longitud del radio del efector final r empleando los mismos valores de L_1 y L_2 de la simulación anterior y el valor de $a = 150$ mm. La respuesta obtenida refleja que existe una relación directa entre el espacio de trabajo y el radio del efector final, puesto que al incrementar el valor de r se incrementa proporcionalmente el

volumen del espacio de trabajo (ver figura 2.9). Sin embargo, el incremento del volumen por cada 5 mm de radio es poco considerable. Para generar un diseño estético y proporcionado se define $r = 75$ mm.

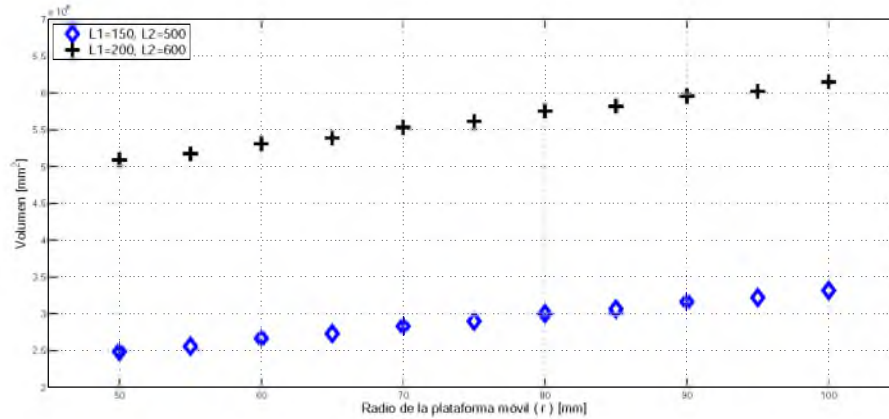


Figura 2.9: Volumen del espacio de trabajo en función del radio del efector final.

Determinados los valores de r y a se obtiene el espacio de trabajo en función de L_2 empleando intervalos de 50 mm para distintos valores de L_1 . En la gráfica de la figura 2.10 se puede observar el incremento del volumen conforme ambas longitudes incrementan. Sin embargo, se puede notar que se obtienen cambios más significativos al variar L_1 .

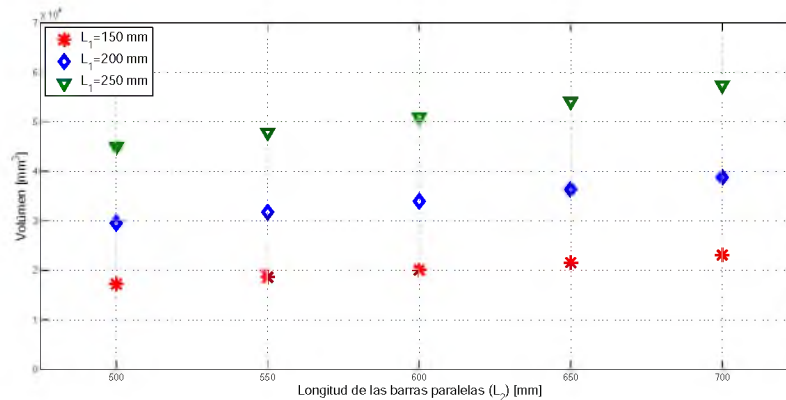


Figura 2.10: Espacio de trabajo en función de L_1 y L_2 .

Es de esperarse que entre mayor sea la longitud total de la cadena cinemática mayor será el espacio de trabajo, sin embargo no es así puesto que sí se observa la gráfica anterior, para $L_1 = 250$ mm y $L_2 = 500$ mm el espacio de trabajo es mucho mayor que para $L_1 = 200$ mm y $L_2 = 550$ mm siendo que ambas configuraciones poseen la misma longitud de cadena cinemática.

En la figura 2.11 se muestra el espacio de trabajo teórico alcanzable por la plataforma móvil del robot disponible, en una de las configuraciones estudiadas en párrafos anteriores y con las restricciones de movimiento impuesta en la configuración del sistema.

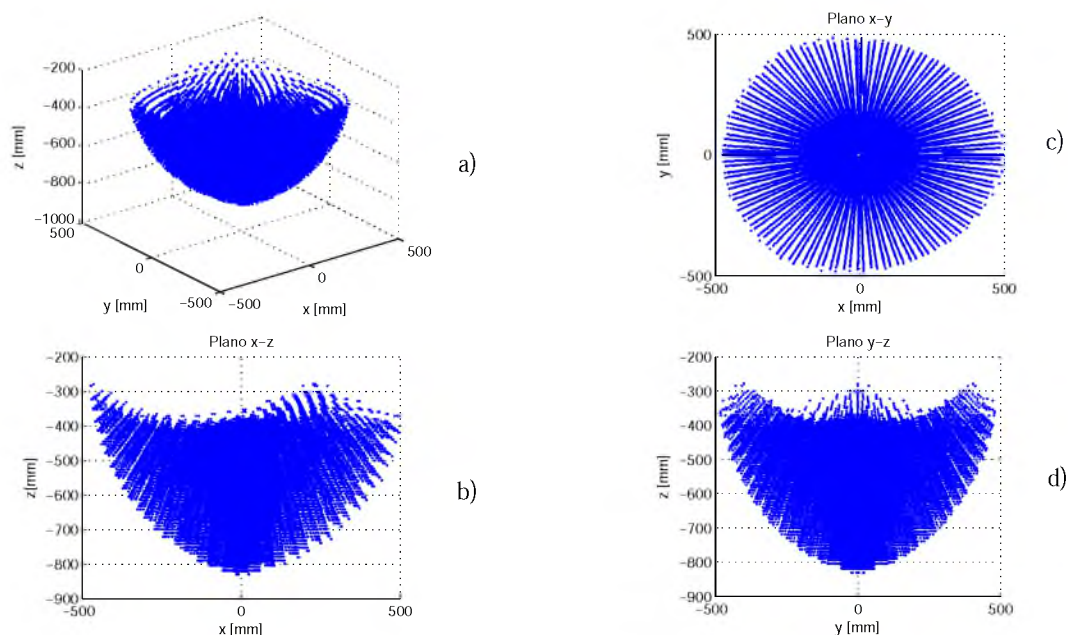


Figura 2.11: Volumen del espacio de trabajo alcanzable del robot con geometría: $a = 150$ mm, $r = 75$ mm, $L_1 = 250$ mm, $L_2 = 600$ mm.

El conjunto de dimensiones geométricas que aseguran un volumen de trabajo amplio (ver figuras 2.8, 2.9, y 2.10) con una longitud de cadena cinemática mínima dentro del conjunto de combinaciones de los parámetros, es mostrada en la Tabla 2.

L_1	L_2	a	r
250 mm	600 mm	150 mm	75 mm

La Tabla 3 contiene los rangos de movimiento de la plataforma móvil con más exactitud. A partir de las dimensiones seleccionadas para el robot y de las longitudes máximas que puede alcanzar en cada eje se diseñan cada cada eslabón del robot Delta.

Eje x			Eje y			Eje z		
-472	505	mm	-482	481	mm	-830	-279	mm

Capítulo 3

Propuesta de diseño integral del Robot Delta

3.1. Diseño mecánico

El robot Delta está constituido de múltiples eslabones y piezas que deben tener especial atención a la hora de diseñarlas. Para ello se toman en cuenta una variedad de factores. Las condiciones de trabajo a las cuales será sometido el robot son una pieza clave en el diseño, puesto que pueden definir la sencillez o la complejidad del mismo.

En este caso, se toman en cuenta lo siguiente:

- *El uso del robot es didáctico.* Esto quiere decir que el robot estará siempre en un laboratorio y su uso será relativamente poco frecuente comparado con el uso que se hace de los robots industriales.
- *No transportará cargas.* Al ser didáctico, no es necesario que el efector final posea un mecanismo para levantar cargas, es decir, que el robot solo tendrá que soportar su propio peso, por lo tanto no es necesario tomar en consideración cargas o fuerzas externas para el diseño de los eslabones y la selección de material de los mismos.
- *Espacio de trabajo.* Las dimensiones están establecidas en base al estudio del espacio de trabajo. Una estructura mecánica inadecuada puede generar colisiones. Es por ello que se debe tener en cuenta el movimiento completo de cada una de las piezas y reducir lo mejor posible el espacio que ocupa cada una de ellas.
- *Articulaciones esféricas.* El mecanismo paralelogramo está conectado al eslabón principal y a la plataforma móvil mediante articulaciones esféricas. Existen modelos comerciales de articulaciones esféricas, sin embargo, dichas articulaciones tienen un rango muy limitado de movimiento, es por ello que se puede obtener un movimiento esférico empleando dos articulaciones rotacionales y así eliminar dichas restricciones que reducirían considerablemente el espacio de trabajo.

Definidas las condiciones es posible dimensionar el robot y detallar cada uno de sus elementos haciendo uso del software de diseño SolidWorks.

3.1.1. Estructura base

El diseño consiste en una estructura hexagonal de seis patas cuyos componentes son los siguientes (ver figura 3.1):

1. Brida.
2. Tornillos.
3. Barra central.
4. Soporte principal.
5. Estructura poligonal.
6. Barra horizontal.

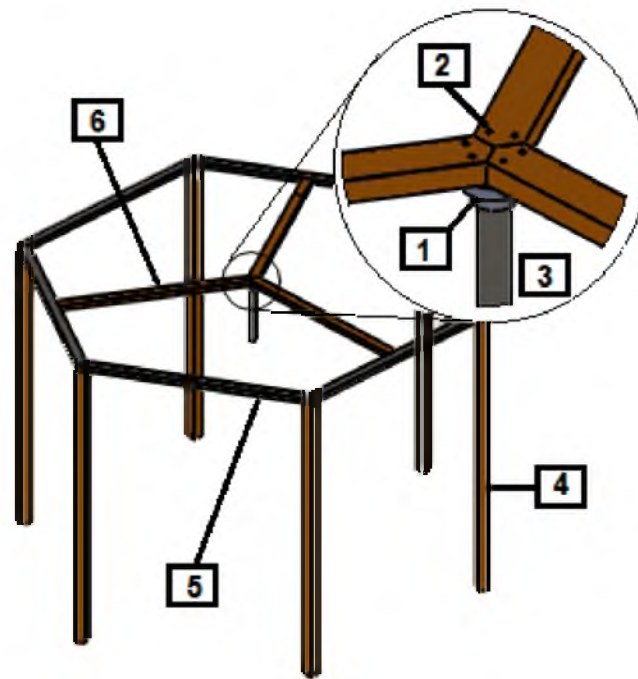


Figura 3.1: Vista 3D de la base estructural del robot.

La estructura hexagonal permite que el diseño tenga una mejor estabilidad. Este se compone por barras de un perfil tubular unidas en sus extremos mediante uniones soldadas. Los soportes principales se unen a esta estructura de la misma forma. Las barras horizontales, se unen a la estructura hexagonal por soldadura. En el centro se unen las tres sujetándose a una brida mediante tornillos. La brida cumple dos propósitos: unir las barras centrales y sostener el tubo de acero en el cual se une la plataforma fija del robot.

3.1.2. Plataforma fija

La plataforma fija mostrada en la figura 3.2 se compone de las siguientes partes:

1. Base central.
2. Brida de sujeción a la estructura.
3. Soporte para actuador (motor).
4. Tornillos.

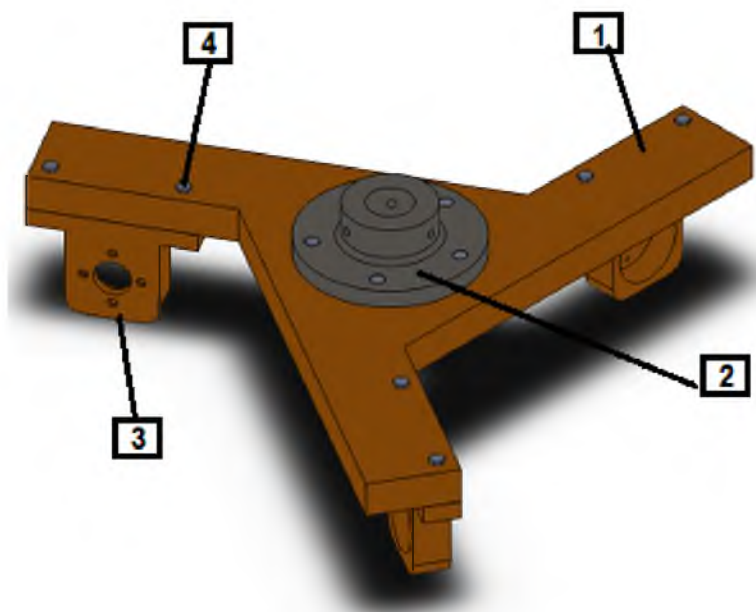


Figura 3.2: Plataforma fija

La base central está diseñada con el objetivo de evitar la colisión del eslabón principal con algún elemento en parte superior de la estructura teniendo así un movimiento restringido únicamente por las cadenas cinemáticas del robot. A esta se une la brida de sujeción que a su vez se une al tubo central de la estructura, también se unen a ella tres soportes que se colocan sobre los extremos de cada saliente. Estas uniones se llevan a cabo mediante tornillos.

3.1.3. Eslabón principal

El eslabón principal se muestra en la figura 3.3, se trata de una barra en cuyos extremos se forma una característica circular con el fin de reforzar las uniones con los ejes correspondientes. En un extremo el agujero es pequeño puesto que es cubierta ensamblante del eje del motor y se emplea un prisionero para unir ambas partes. En el otro extremo el agujero es



Figura 3.3: Eslabón principal.

de un diametro mayor pues en el ensamblan los rodamientos del mecanismo que simula la articulación esféricas.

El motor se ensambla sobre el soporte usando cuatro tornillos para sujetarlo. La flecha del motor va montada sobre un rodamiento para repartir las cargas producidas por el peso de los eslabones. Y por último se monta el eslabón principal sobre la flecha del motor.

3.1.4. Articulación esférica

Para simular un movimiento esférico se emplean dos movimientos rotacionales. La articulación consiste en un eje en cuyos extremos se ensambla un cople y se asegura con un perno. En cada cople se monta un rodamiento el cual sostiene un pequeño eje. Para que dicho eje no se mueva se emplea un anillo de seguridad colocado en la parte posterior de la unión del cople con el eje. La figura 3.5 se muestra el ensamble de los elementos del mecanismo esférico.

Se puede observar que el eje principal lleva consigo un par de rodamientos los cuales se sujetan en el eslabón principal. Sobre los pequeños ejes montados en los coples, se ensamblan los eslabones L_2 para formar el mecanismo paralelo. Esta configuración permite un mayor rango de giro comparado con una articulación esférica comercial. El ensamble es mostrado en la figura 3.6.

3.1.5. Plataforma móvil

La plataforma propuesta mostrada en la figura 3.7 consiste en un anillo con tres extremidades. Sobre estas se sujeta un soporte mediante una unión atornillada. La unión se muestra en la figura 3.8.

De esta forma las cadenas cinemáticas se cierran formando en su totalidad el robot paralelo.

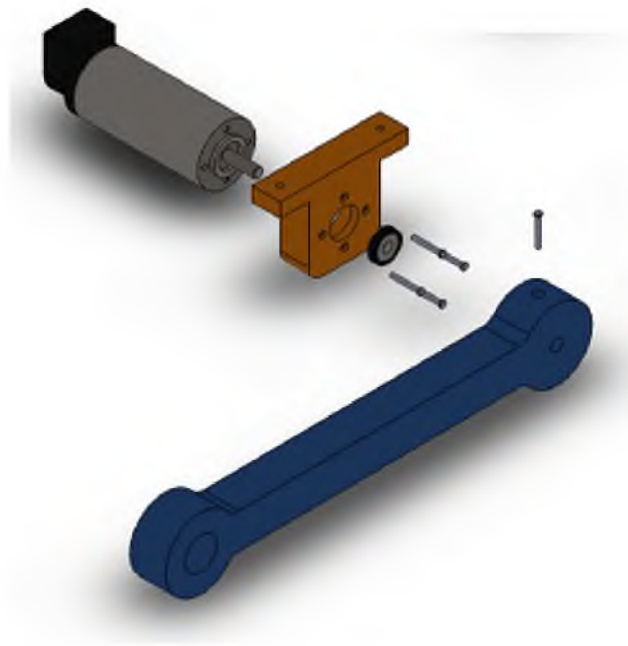


Figura 3.4: Ensamble del eslabon principal.

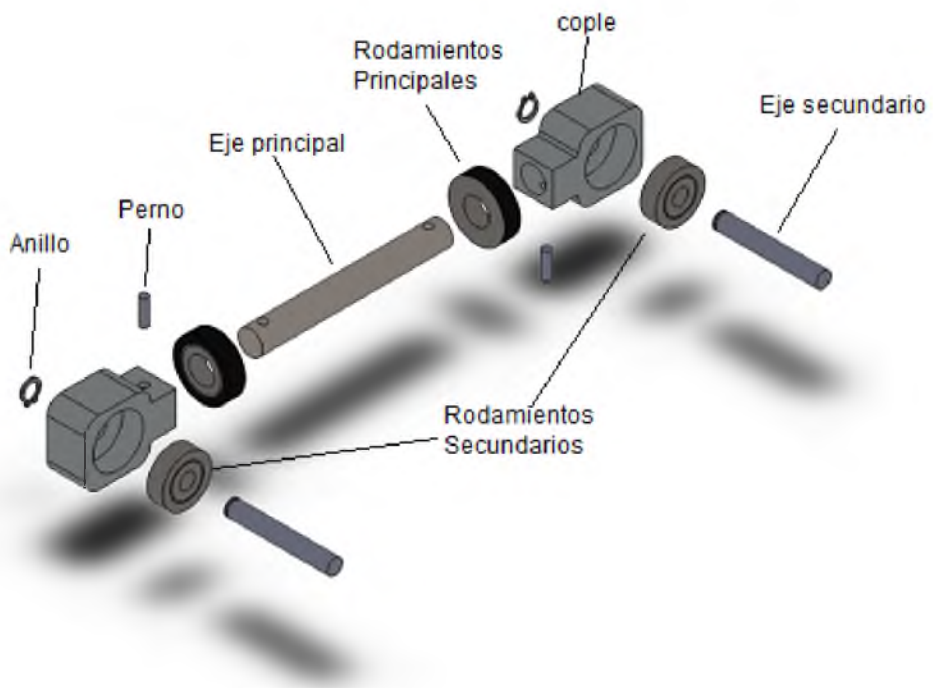


Figura 3.5: Articulación esférica.

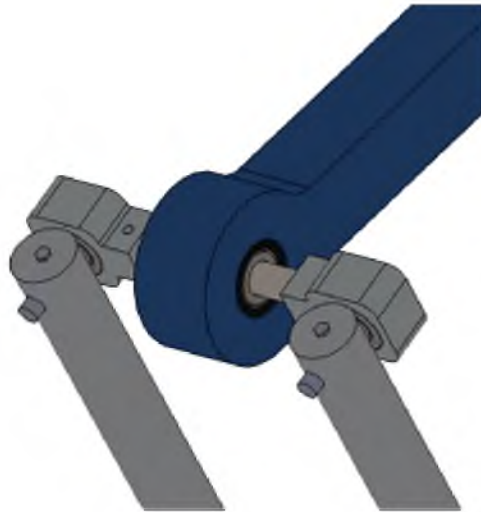


Figura 3.6: Unión del eslabón principal con la articulación esférica.



Figura 3.7: Plataforma móvil.

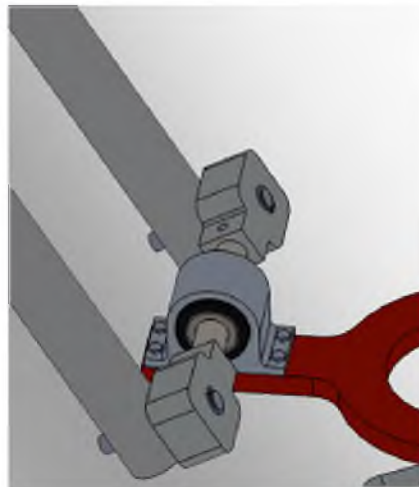


Figura 3.8: Plataforma móvil unida al mecanismo esférico.

3.1.6. Ensamble final

El ensamble final se muestra en la figura.3.9. Las partes mencionadas dan como resultado un robot con tres cadenas cinemáticas cerradas cuya estructura restringe movimientos rotacionales permitiendo únicamente movimientos de traslación en el espacio. Los dibujos del sólido se muestran en el apéndice C.

3.1.7. Selección de Materiales

Para la construcción del prototipo se propone emplear un perfil de acero al carbono ASTM A500 de 20×40 mm con espesor de 2 mm para toda la estructura base y con ello garantizar una mejor estabilidad de la estructura. Las propiedades de este material son las siguientes:

- Durabilidad
- Resistencia a la tracción
- Resistencia a la fluencia
- Buena conductiidad térmica.

Para la base central y el soporte del motor de la estructura plataforma fija, así como también para los otros elementos del robot se propone el uso de Aluminio 6026 puesto que es uno de los Aluminios más fuertes con excelentes propiedades mecánicas:

- Superior estabilidad, dureza y uniformidad,
- resistencia a la corrosión,

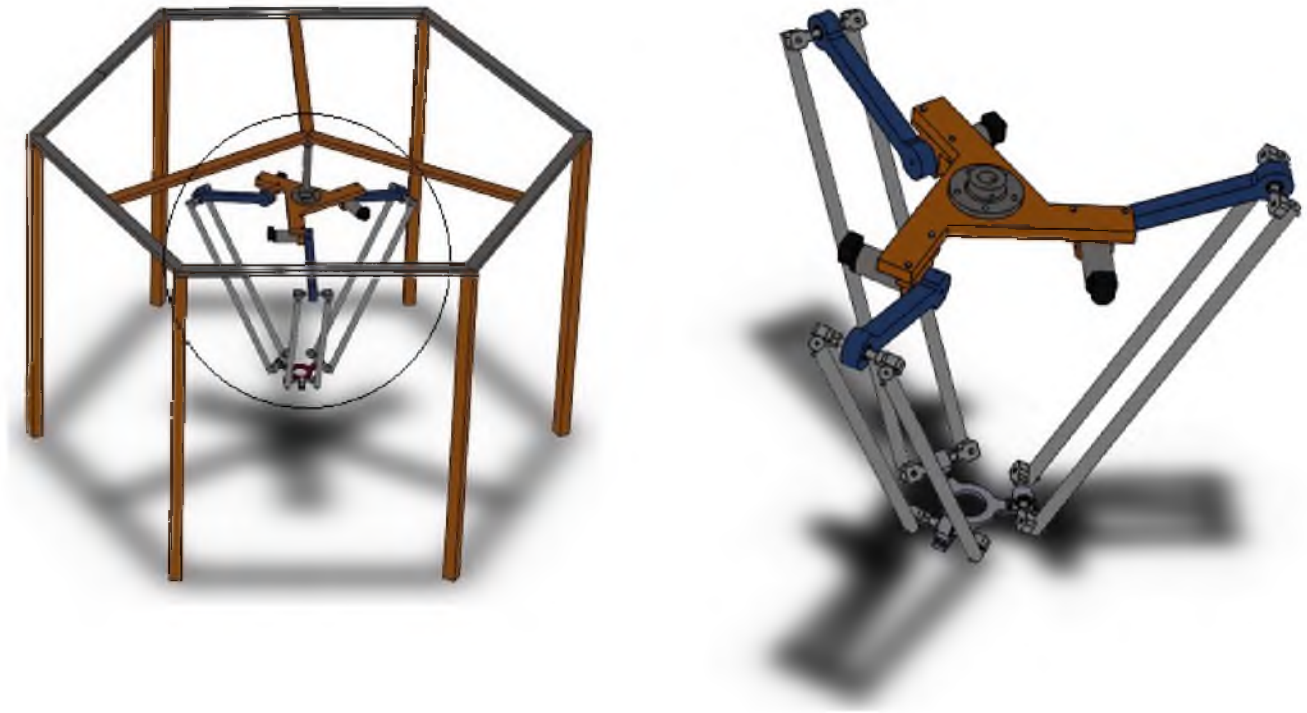


Figura 3.9: Modelo 3D del Robot paralelo tipo Delta

- resistencia al desgaste,
- 60 % más ligero en peso que el acero,
- buena soldabilidad por resistencia y
- reducción en tiempos de maquinado 70 % a 80 %.

3.1.8. Selección de actuadores

Se propone el uso de motores de CD brushless debido a las múltiples ventajas que tiene sobre los motores convencionales de CD: mayor relación velocidad - par, mayor respuesta dinámica, mayor eficiencia, larga vida de trabajo, bajo nivel de ruido y mayor rango de velocidad de operación.

Puesto que las dimensiones del diseño propuesto son grandes, se debe seleccionar un motor con reducción que pueda proporcionar un torque grande. Por ello se selecciona entonces un Maxon Motors **EC-max 40** (ver figura 3.10). El par nominal de este motor es de 0.211 N m, puede girar a una velocidad máxima de 2670rpm y es alimentado a 48 V.

Dado que el par nominal del motor seleccionado puede no ser suficiente, se selecciona el reductor planetario GP 42 B (ver figura 3.11) de la misma marca cuya reducción es de 12 : 1, con un diámetro de 42 mm. Soporta un torque máximo continuo de 4 N m.



Figura 3.10: Motor EC-max 40 de Maxon Motors



Figura 3.11: Reductor planetario GP 42 B

3.2. Diseño electrónico

3.2.1. Selección de sensores

Para obtener una medida de posición del motor, se propone el uso de un encoder absoluto HEDL 5540 CPT de 3 canales (ver figura 3.12) a 500 pulsos por vuelta con protocolo de comunicación RS 422.

Las dimensiones y especificaciones de cada uno de los elementos mencionados se encuentran en el apéndice B.



Figura 3.12: Encoder absoluto de 500 pulsos por vuelta.

3.2.2. Selección de Servoamplificador

Para el motor seleccionado, se recomienda usar un servoamplificador ESCON 50/5 4-Q de Maxon Motors (ver figura 3.13). Es un servoamplificador digital muy eficiente con conmutación de corriente sinusoidal para el control de motores EC (conmutación electrónica).

El controlador, la supervisión y los algoritmos de control completos se implementan en un procesador de señal digital. Al igual que con los controladores automáticos convencionales clásicos, es posible ajustar fácilmente el servoamplificador, con sólo unos pocos potenciómetros. Cuenta con tres entradas para control de sensores Hall, entradas para alimentación y lectura de encoders, entradas digitales y pines para la configuración de encoder. La configuración y el mando del dispositivo es posible también a través de la PC con el protocolo de comunicación RS222 o bien CAN.

Las especificaciones y dimensiones del servocontrolador se encuentran en el apéndice B.

3.2.3. Selección de tarjeta de adquisición de datos

Para adquirir los datos provenientes de los sensores e implementar esquemas de control desde una interfaz gráfica se propone emplear la tarjeta de adquisición de datos Sensoray modelo 626 mostrada en la figura 3.14 (ver especificaciones en el apéndice B). Esta tarjeta posee las siguientes características:



Figura 3.13: Servoamplificador DES 50/5 de Maxon Motors.

- seis contadores versátiles de 24 bits que soportan codificadores incrementales,
- 48 entradas/salidas digitales bidireccionales (40 con detección de borde),
- 16 entradas analógicas diferenciales,
- cuatro salidas analógicas y
- un temporizador de vigilancia.



Figura 3.14: Tarjeta de adquisición de datos Sensoray modelo 626.

Encoders y contadores

Se pueden configurar tres pares de contadores ascendentes/descendentes de 24 bits para seis codificadores incrementales, cada uno con 24 bits de resolución. Cada canal acepta dos señales TTL o RS-422 en fase más una señal de índice para seguir la dirección y el desplazamiento del codificador. Cada entrada está condicionada y sincronizada con el reloj interno del 626.

Cada contador puede funcionar como un temporizador utilizando el reloj interno de la tarjeta o un reloj externo. Cuando se emparejan, pueden utilizarse contadores de 48 bits para la medición de frecuencia.

Entradas y Salidas analógicas

Dieciséis canales de entrada diferencial se multiplexan a una muestra / espera y aproximación sucesiva A/D. Cada canal puede programarse para ± 5 V o ± 10 V. No se necesitan ajustes de ajuste.

Se pueden programar cuatro salidas de tensión para ± 10 V. Un circuito único evita salidas D/A impredecibles durante la inicialización de la CPU. Todas las salidas se restablecen a cero voltios cada vez que se produce un restablecimiento del bus.

Entradas y salidas Digitales

Las 48 líneas digitales de la placa tienen pinouts estándar para tarjetas de relés de estado sólido. Cada línea es software programable como entrada o salida. 40 de las entradas pueden programarse independientemente para la detección de los bordes. Todas las salidas se desactivan al restablecer el sistema.

Capítulo 4

Modelo dinámico del robot Delta

En esta sección se presenta el modelo dinámico del robot empleando la formulación lagrangiana. Para ello se toma como referencia el estudio de la dinámica del manipulador Maryland hecho por Lung Wen en [25] debido a la similitud que hay en las estructuras de ambos robots.

4.1. Formulación Lagrangiana

La formulación lagrangiana requiere de un conjunto de ecuaciones de restricción añadidos a las ecuaciones de movimiento para producir un número de ecuaciones igual al número de incógnitas. La resolución de dichas ecuaciones de movimiento se puede simplificar separando las ecuaciones en dos conjuntos. Uno contiene a los multiplicadores de Lagrange como únicas incógnitas, y el otro contiene las fuerzas generalizadas de los actuadores como incógnitas adicionales. Las primeras k ecuaciones son asociadas con las coordenadas redundantes del robot $\mathbf{q}_k = [P_x \ P_y \ P_z]$, y las restantes $n - k$ ecuaciones son asociadas con las variables articulares actuadas $\mathbf{q}_{n-k} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]$. Entonces el primer conjunto de ecuaciones se puede escribir de la forma:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_j} - \hat{Q}_j \quad (4.1)$$

donde \hat{Q}_j representa las fuerzas generalizadas producidas por la aplicación de una fuerza externa. El segundo conjunto de ecuaciones se puede escribir de la siguiente manera:

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} \quad \text{Para } j = k + 1 \text{ a } n \quad (4.2)$$

donde Q_j es la fuerza de los actuadores o el torque.

4.1.1. Funciones de restricción

Debido a que el manipulador es de tres grados de libertad, son necesarias tres ecuaciones de restricción Γ_i para $i = 1, 2, 3$. Estas ecuaciones fueron presentadas en la sección 2.4 y

corresponden a las ecuaciones (2.27) (2.28) (2.29) las cuales se obtuvieron considerando que la magnitud del vector $\overrightarrow{B_i C_i}$ es siempre igual a L_2 .

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= (P_x + (r - a - L_1 \cos \theta_1))^2 + (P_y)^2 + (P_z + L_1 \sin \theta_1)^2 - L_2^2, \\ \Gamma_2 &= \left(P_x - \frac{1}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_2) \right)^2 + \left(P_y + \frac{\sqrt{3}}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_2) \right)^2 + \dots \\ &\quad \dots + (P_z + L_1 \sin \theta_2)^2 - L_2^2, \\ \Gamma_3 &= \left(P_x - \frac{1}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_3) \right)^2 + \left(P_y - \frac{\sqrt{3}}{2}(r - a - L_1 \cos \theta_3) \right)^2 + \dots \\ &\quad \dots + (P_z + L_1 \sin \theta_3)^2 - L_2^2.\end{aligned}$$

4.2. Ecuaciones de movimiento

Para obtener las ecuaciones de movimiento es necesario obtener el balance de energías encontrando la ecuación lagrangiana. Primeramente se debe conocer los centros de masa de cada uno de los elementos del robot. En la figura 4.1 se muestra la ubicación de los centros de masa del Robot Delta.

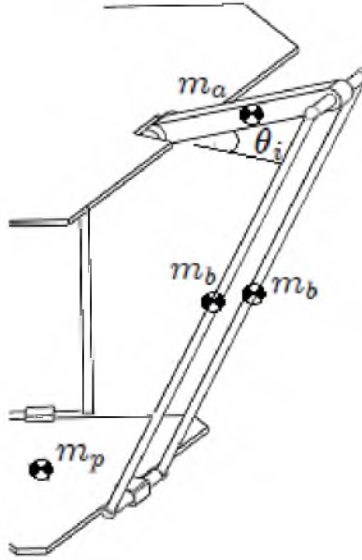
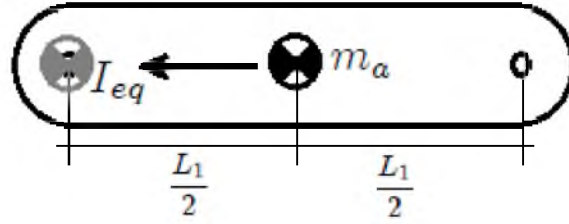


Figura 4.1: Centros de masas de los eslabones

La energía cinética total del robot se define mediante la ec. 4.3, donde k_{ai} es la energía cinética de los eslabones principales; k_{bi} es la energía de las barras paralelas y k_p corresponde

Figura 4.2: Traslado de la masa m_a al eje de rotación.

a la plataforma móvil.

$$K = \sum_{i=1}^3 (k_{ai} + k_{bi}) + k_p. \quad (4.3)$$

De acuerdo con el teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia con respecto a un eje paralelo al eje del centro de masa de un cuerpo, es igual a la inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa del cuerpo más la masa multiplicada por la distancia entre ejes al cuadrado (Spot, [48]). Considerando lo anterior, la masa m_a crea un momento de inercia con respecto al eje de rotación del actuador. Entonces, para simplificar el cálculo de la energía cinética del eslabón $\overrightarrow{A_i B_i}$, se traslada dicha masa hasta el eje de rotación del actuador (ver figura 4.2), el cual posee una inercia I_m . De esta forma se obtiene una sola inercia I_{eq} . Se asume que el centro de masas del eslabón se encuentra justo en el medio de la longitud total del eslabón.

Aplicando el teorema de los ejes paralelos se tiene:

$$\begin{aligned} I_{eq} &= I_{ma} + md^2, \\ I_{eq} &= \frac{1}{12}m_a L_1^2 + m_a \left(\frac{L_1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

La inercia total sobre el eje del motor resulta:

$$I_{eq} = \frac{1}{3}m_a L_1^2.$$

Por lo tanto la energía cinética para el eslabón $\overrightarrow{A_i B_i}$ es:

$$\begin{aligned} k_{ai} &= \frac{1}{2}(I_{motor} + I_{eq})\dot{\theta}_i^2, \\ k_{ai} &= \frac{1}{2}\left(I_{motor} + \frac{1}{3}m_a L_1^2\right)\dot{\theta}_i^2. \end{aligned}$$

En el caso de los eslabones $\overrightarrow{B_i C_i}$, cada uno posee una masa m_b , cuyo centro de gravedad está ubicado justo en el medio de cada eslabón. Para simplificar el análisis se considera que

el peso de éstas barras se distribuye en ambas articulaciones, por lo tanto existirá una masa m_b en el extremo del primer eslabón y otra masa m_b sobre la plataforma móvil tal como se muestra en la figura 4.3.

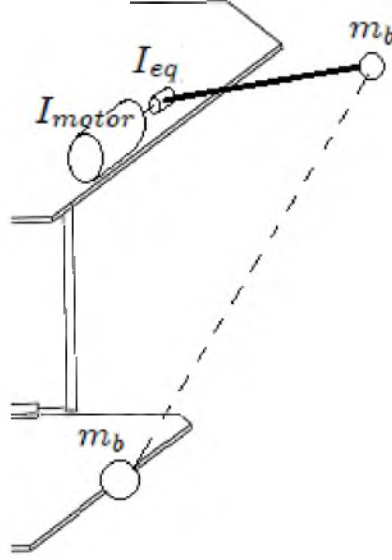


Figura 4.3: Distribución de las masas sobre la estructura.

La energía cinética de las barras paralelas se calcula entonces de la siguiente manera:

$$k_{bi} = \frac{1}{2}m_b \left(\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \right) + \frac{1}{2}m_b \dot{v}^2,$$

donde:

$$\dot{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad (4.4)$$

$$x = a + L_1 \cos \theta_i,$$

$$y = L_1 \sin \theta_i,$$

$$\dot{x} = -L_1 \dot{\theta}_i \sin \theta_i, \quad (4.5)$$

$$\dot{y} = L_1 \dot{\theta}_i \cos \theta_i. \quad (4.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.5 y 4.6) en la ecuación (4.4) se obtiene:

$$\dot{v}^2 = L_1^2 \dot{\theta}_i^2 (\sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i) = L_1^2 \dot{\theta}_i^2.$$

Por lo tanto, la energía cinética de las barras paralelas es:

$$k_{bi} = \frac{1}{2}m_b \left(\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \right) + \frac{1}{2}m_b L_1^2 \dot{\theta}_i^2.$$

Para la plataforma móvil cuya una masa m_p está situada justo en el punto P , la energía cinética depende completamente de las velocidades lineales de las coordenadas redundantes. Por lo tanto:

$$k_p = \frac{1}{2}m_p \left(\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \right),$$

sustituyendo las energías cinéticas obtenidas en la ecuación (4.3), se obtiene la energía cinética total K .

$$\begin{aligned} K = & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} \left(I_m + \frac{1}{3}m_a L_1^2 + m_b L_1^2 \right) \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}m_b \left(\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \right) \right) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2}m_p \left(\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

La energía potencial total del robot se describe mediante la ecuación 4.8, donde U_{ai} es la energía del eslabón principal, U_{bi} corresponde a las barras paralelas, y U_p corresponde a la energía de la plataforma móvil. Se considera que la gravedad apunta en el sentido de $-Z$.

$$U = \sum_{i=1}^3 (U_{ai} + U_{bi}) + U_p. \quad (4.8)$$

La energía potencial del eslabón $\overrightarrow{A_i B_i}$ es:

$$U_{ai} = -\frac{1}{2}m_a g_c L_1 \sin \theta_i,$$

y la energía potencial del los eslabones $\overrightarrow{B_i C_i}$ es:

$$U_{bi} = m_b g_c (P_z - L_1 \sin \theta_i).$$

Para la plataforma móvil, la energía potencial depende de P_z

$$U_p = m_p g_c P_z,$$

sustituyendo las energías potenciales en la ecuación (4.8), la energía potencial total es:

$$U = \sum_{i=1}^3 \left(m_b g_c (P_z - L_1 \sin \theta_i) - \frac{1}{2}m_a g_c L_1 \sin \theta_i \right) + m_p g_c P_z$$

Entonces la función lagrangiana puede representarse por:

$$L = K - U,$$

$$\begin{aligned} L = & \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left(I_{motor} + \frac{1}{3}m_a L_1^2 \right) \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}m_p \left(\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \right) + \frac{3}{2}m_b \left(\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \right) + \dots \\ & \dots + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2}m_b L_1^2 \dot{\theta}_i^2 - m_p g_c P_z + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2}m_a g_c L_1 \sin \theta_i - \sum_{i=1}^3 m_b g_c (P_z - L_1 \sin \theta_i). \end{aligned}$$

Al desarrollar las sumatorias y agrupar términos, se llega a la siguiente expresión:

$$L = \frac{1}{2} \left(I_{motor} + \left(\frac{1}{3} m_a + m_b \right) L_1^2 \right) \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 \right) + \frac{1}{2} (m_p + 3m_b) \left(\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \right) - \dots \\ \dots - (m_p + 3m_b) g_c P_z + g_c L_1 \left(\frac{1}{2} m_a + m_b \right) (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3)$$

Obtenida la ecuación Lagrangiana, se procede a realizar las derivadas parciales de las ecuaciones (4.1) (4.2), para formar los sistemas de ecuaciones que conforman al modelo dinámico. Las derivadas parciales con respecto a las variables generalizadas redundantes P_x , P_y y P_z son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{P}_x} \right) &= (m_p + 3m_b) \ddot{P}_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{P}_y} \right) &= (m_p + 3m_b) \ddot{P}_y \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{P}_z} \right) &= (m_p + 3m_b) \ddot{P}_z \\ \frac{\partial L}{\partial P_x} &= 0, \quad \frac{\partial L}{\partial P_y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial P_z} = -g_c(m_p + 3m_b) \end{aligned}$$

Las derivadas parciales con respecto a las variables generalizadas θ_i (Para $i = 1, 2, 3$) son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) &= \left(I_{motor} + \frac{1}{3} m_a L_1^2 + m_b L_1^2 \right) \ddot{\theta}_i \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_i} &= g_c L_1 \left(\frac{1}{2} m_a + m_b \right) \cos \theta_i \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación con derivadas parciales (4.1), se obtiene un sistema de ecuaciones donde los multiplicadores de Lagrange λ_i son las variables,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial P_x} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial P_x} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial P_x} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{P}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial P_x} - f_x, \\ \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial P_y} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial P_y} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial P_y} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{P}_y} \right) - \frac{\partial L}{\partial P_y} - f_y, \\ \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial P_z} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial P_z} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial P_z} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{P}_z} \right) - \frac{\partial L}{\partial P_z} - f_z. \end{aligned}$$

Se observa que la parte izquierda del sistema de ecuaciones corresponde a la transpuesta de la matriz Jacobiana \mathbf{J}_p . Por lo tanto lo anterior puede representarse de manera vectorial:

$$\mathbf{J}_p^T \boldsymbol{\lambda} = (m_p + 3m_b) \ddot{\mathbf{p}} + [0 \quad 0 \quad g_c(m_p + 3m_b)]^T - \mathbf{f}_p. \quad (4.9)$$

Sucede lo mismo en el sistema de ecuaciones generado a partir de la ecuación (4.2). Se puede distinguir en este caso, la matriz Jacobiana inversa \mathbf{J}_θ .

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_1} - \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_1} - \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_1}, \quad (4.10)$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_2} - \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_2} - \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_2}, \quad (4.11)$$

$$\tau_3 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} - \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_3} - \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_3} - \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_3}. \quad (4.12)$$

Sustituyendo las derivadas parciales en las ecuaciones (4.10) (4.11) (4.12) se obtiene los torques de los actuadores. Expresado en forma vectorial se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \left(I_m + \frac{1}{3} m_a L_1^2 + m_b L_1^2 \right) [\ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \ddot{\theta}_3]^T - \dots \\ & \dots - g_c L_1 \left(\frac{1}{2} m_a + m_b \right) [\cos \theta_1 \quad \cos \theta_2 \quad \cos \theta_3]^T - \mathbf{J}_\theta^T \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Las ecuaciones (4.9) y (4.13), se reescriben renombrando algunos de sus términos, siendo entonces:

$$\boldsymbol{\tau} = a \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_\theta^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{J}_p^T \boldsymbol{\lambda} = b \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{g}_b - \mathbf{f}_p, \quad (4.15)$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= I_m + \frac{1}{3} m_a L_1^2 + m_b L_1^2, \\ b &= m_p + 3m_b, \\ \mathbf{q} &= [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T, \quad \mathbf{p} = [P_x \quad P_y \quad P_z]^T \\ \mathbf{g}_b &= [0 \quad 0 \quad g_c(m_p + 3m_b)]^T, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= -g_c L_1 \left(\frac{1}{2} m_a + m_b \right) [\cos \theta_1 \quad \cos \theta_2 \quad \cos \theta_3]^T, \\ \boldsymbol{\lambda} &= [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^T, \\ \mathbf{f}_p &= [f_x \quad f_y \quad f_z]^T. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones corresponden al modelo dinámico del robot. Para expresarlo como una sola función, se despejan los multiplicadores de Lagrange de la ecuación (4.15) y se sustituyen en (4.14).

$$\begin{aligned}\lambda &= (\mathbf{J}_p^T)^{-1} (b\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{g}_b - \mathbf{f}_p), \\ \tau &= a\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_\theta^T (\mathbf{J}_p^T)^{-1} (b\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{g}_b - \mathbf{f}_p).\end{aligned}$$

Considerando que la transpuesta de la matriz Jacobiana del robot es:

$$\mathbf{J}_R^T = -\mathbf{J}_\theta^T (\mathbf{J}_p^T)^{-1},$$

entonces:

$$\tau = a\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_R^T (b\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{g}_b - \mathbf{f}_p). \quad (4.16)$$

Ahora bien, la expresión anterior está en función tanto de las articulaciones activas como de las coordenadas redundantes. Para expresar el modelo en términos de las articulaciones activas, se considera la derivada de la ecuación (2.32).

$$\ddot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{J}}_R \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_R \ddot{\mathbf{q}}.$$

Sustituyendo la expresión anterior en (4.16):

$$\begin{aligned}\tau &= a\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_R^T \left(b \left(\dot{\mathbf{J}}_R \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_R \ddot{\mathbf{q}} \right) + \mathbf{g}_b - \mathbf{f}_p \right) \\ \tau &= (a + b\mathbf{J}_R^T \mathbf{J}_R) \ddot{\mathbf{q}} + b\mathbf{J}_R^T \dot{\mathbf{J}}_R \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_R^T \mathbf{g}_b - \mathbf{J}_R^T \mathbf{f}_p\end{aligned} \quad (4.17)$$

El modelo dinámico de la ecuación 4.17 trata de un sistema conservativo, en la que no se considera amortiguamiento en los uniones articulares. Para un sistema asintóticamente estable se considera que existe amortiguamiento viscoso en las uniones de los eslabones. Por lo tanto un modelo que incluye la matriz de coeficientes de fricción viscosa \mathbf{C}_v en las uniones articulares y en las uniones tipo esféricas es añadida al modelo y reescrita de la siguiente forma:

$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}_x \quad (4.18)$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) &= (a + b\mathbf{J}_R^T \mathbf{J}_R), \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) &= b\mathbf{J}_R^T \dot{\mathbf{J}}_R + \mathbf{C}_v, \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_R^T \mathbf{g}_b, \\ \mathbf{Q}_x &= \mathbf{J}_R^T \mathbf{f}_p. \\ \mathbf{C}_v &= \begin{bmatrix} c & c & c \\ c & c & c \\ c & c & c \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La ecuación (4.18) es finalmente el modelo dinámico que describe el comportamiento del robot sin multiplicadores de Lagrange. Pese a que el modelo está en términos de los estados de las articulaciones activas, las matrices poseen términos que involucran a las coordenadas redundantes y la velocidad de las mismas. Sin embargo, estos estados pueden ser encontrados fácilmente empleando el Jacobiano y la cinemática directa para obtenerlos a partir de las mediciones angulares θ_i de cada articulación.

Capítulo 5

Control del robot

Muchos de los esquemas de control empleados el control de posición y seguimiento de trayectorias en robots manipuladores suelen ser basados en el modelo. Esto implica conocer con exactitud los parámetros físicos del robot (masa e inercia de cada uno de los eslabones); además se requiere que el modelo dinámico sea casi exacto, de tal forma que pueda compensar realmente la dinámica del robot. Sin embargo, esquemas de control del tipo PID pueden ser empleados para satisfacer el objetivo de control tanto de posición como de movimiento.

En este capítulo se presentan las leyes de control y el análisis de estabilidad de algunos controladores empleados para control de robots, específicamente el esquema PD compensado en gravedad presentado por Scilliano [36], y los esquemas de control PID y Par Calculado presentados en Kelly [4]. Todos se analizan empleando el modelo dinámico del manipulador considerando que el robot está provisto de actuadores ideales sin dinámica.

5.1. Control PD compensado

Generalmente los esquemas de control son aplicados a nivel articular siendo el desplazamiento angular la variable de control. Sin embargo, lo más común es que las trayectorias que se desean ejecutar estén descritas en términos del vector de posición del efector final, es decir, que se encuentran descritas en el espacio operacional.

El control PD compensado es empleado para robots manipuladores en cuyo modelo aparece el vector de fuerzas gravitatorias Sicilliano [36]. Para obtener la ley de control en el espacio operacional se hace uso del modelo dinámico del manipulador el cual se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

donde $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es la matriz de masas e inercias; $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas; \mathbf{F} es la matriz de fuerzas viscosas; y $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ es el vector de fuerzas gravitatorias.

Dada una posición constante x_d en el efector final, se desea encontrar un esquema de control tal que el error en el espacio operacional $\bar{\mathbf{x}}$ tienda asintóticamente a cero.

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_e \tag{5.1}$$

Se escoge la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{K}_p \bar{\mathbf{x}}, \quad (5.2)$$

donde K_P es una matriz simétrica definida positiva. Derivando la ecuación (4.14) con respecto del tiempo se obtiene:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \mathbf{K}_p \bar{\mathbf{x}}.$$

Para obtener la función en términos de las variables articulares activas, se deriva (5.1):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= -\dot{\bar{\mathbf{x}}}_e, \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= -\mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

entonces:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{K}_p \bar{\mathbf{x}}. \quad (5.3)$$

Apartir de esta ecuación se plantea la ley de control que permite garantizar la estabilidad:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{K}_p \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{K}_D \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Sustituyendo la ecuación de malla cerrada, con \mathbf{K}_D definida positiva, la expresión (5.3) resulta:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{F} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{K}_D \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

La ecuación anterior es una función cuadrática definida negativa, lo que asegura que el error decrece de manera asintótica a cero, garantizando estabilidad bajo la única condición de que \mathbf{K}_P y \mathbf{K}_D sean matrices diagonales definidas positivas. La figura 5.1 muestra el diagrama a bloques del controlador aplicado a robot manipulador.

5.2. Control PID

Cuando se tiene robots manipuladores planares, donde la gravedad no tiene efecto sobre los eslabones (es decir $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$), un simple control PD satisface el objetivo de control de posición, sin embargo, cuando se tiene robot con término gravitatorio, un control de este tipo no es suficiente, debido a que el error de posición tiende a ser un vector constante. Es por ello que existen otras variantes de este controlador, como el mencionado PD con compensación en gravedad.

El control PID permite controlar manipuladores con o sin término gravitatorio, pues la parte integral se encarga de reducir (incluso erradicar) el error en estado estable. En la figura 5.2 se muestra la implementación mediante un diagrama a bloques.

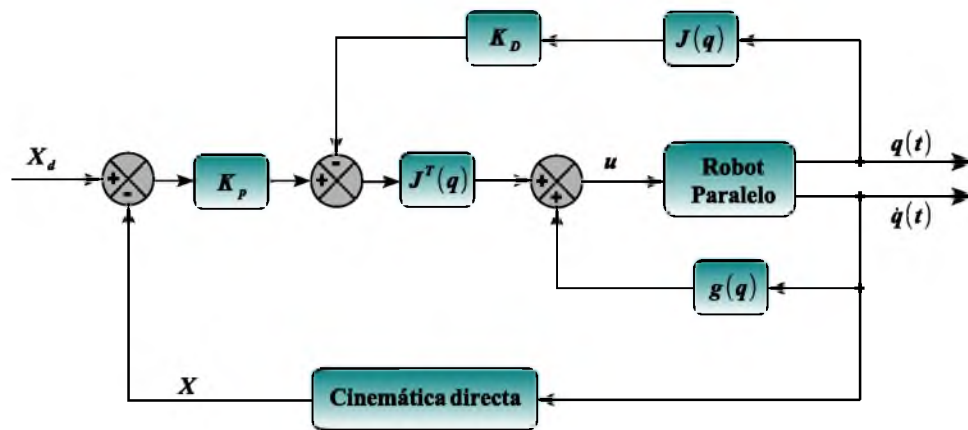


Figura 5.1: Diagrama a bloques del Control PD con compensación en gravedad.

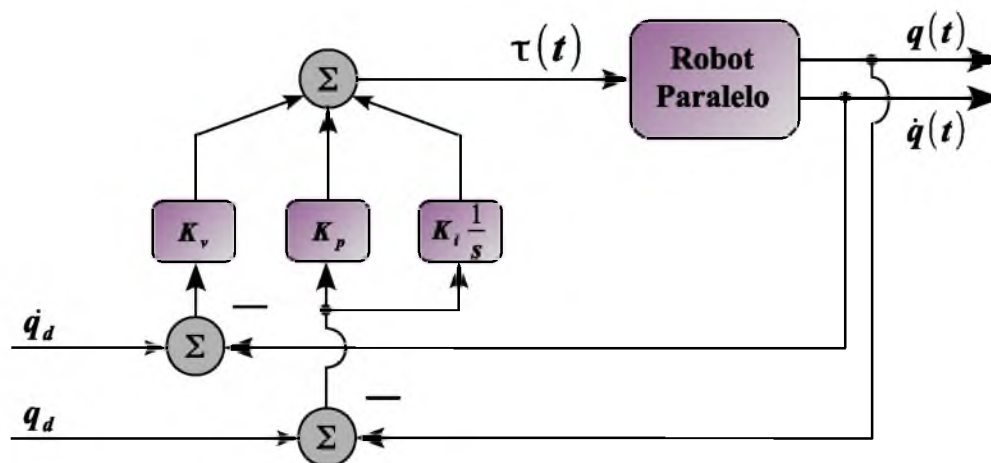


Figura 5.2: Diagrama a bloques de un control PID sobre un robot manipulador.

La ley de control PID puede expresarse mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\tau &= \mathbf{K}_p \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_v \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_i \xi, \\ \dot{\xi} &= \bar{\mathbf{q}},\end{aligned}$$

donde:

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q},$$

siendo \mathbf{q}_d el vector de variables articulares deseadas y \mathbf{q} las variables articulares del robot.

Sustituyendo la ley de control en el modelo del robot:

$$\begin{aligned}M(\mathbf{q})\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\bar{\mathbf{q}}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \mathbf{K}_p \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_v \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_i \xi, \\ \dot{\xi} &= \bar{\mathbf{q}},\end{aligned}$$

expresándola en términos del vector de estado $[\xi^T, \bar{\mathbf{q}}^T, \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T]^T$ se tiene que la ecuación de malla cerrada es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_d - M(\mathbf{q})^{-1}[\mathbf{K}_p \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_v \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_i \xi - C(\mathbf{q}, \dot{\bar{\mathbf{q}}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}$$

Considerando que la posición deseada q_d es constante, se puede garantizar la existencia de un único punto de equilibrio, siendo entonces el equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El equilibrio anterior se puede trasladar al origen mediante un cambio de variable:

$$z = \xi - \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}).$$

La ecuación de malla cerrada correspondiente se expresa como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_d - M(\mathbf{q})^{-1}[\mathbf{K}_p \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_v \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_i z + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - C(\mathbf{q}, \dot{\bar{\mathbf{q}}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}$$

5.2.1. Análisis de estabilidad del control PID

Para estudiar la estabilidad se adopta un cambio global de variables. Siendo entonces:

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha I & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \quad \text{con } \alpha > 0.$$

Por lo tanto la ecuación de malla cerrada se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega \\ \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \bar{\mathbf{q}} - \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}} - M(\mathbf{q})^{-1} [\mathbf{K}_p \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_v \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_i \mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Para estudiar la estabilidad del origen del espacio de estados, se emplea el método directo de Lyapunov mediante la propuesta de la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}, \dot{q}, \omega) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega \\ \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} K_i & 0 & 0 \\ 0 & \alpha K_v & -\alpha M(q) \\ 0 & -\alpha M(q) & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} \tilde{q}^T \left[K_p - \frac{1}{\alpha} K_i \right] \tilde{q} - U(q_d - \tilde{q}) - U(q_d) + \tilde{q}^T g(q_d). \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde $U(q)$ denota la energía potencial del robot, y α es la constante positiva empleada en la definición del cambio de variable (5.4). Para que la función candidata de Lyapunov (5.5) sea tal, es preciso comprobar que sea una función definida positiva al menos localmente.

En Kelly [4] se demuestra que la función de Lyapunov es definida positiva en forma global y radialmente sin cotada siempre y cuando se satisfaga la siguiente condición:

$$\frac{\lambda_{\min}\{M\} \lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{M\}} > \alpha > \frac{(\lambda_{\max}\{K_i\})}{(\lambda_{\min}\{K_p\} - K_g)}, \quad (5.6)$$

y además

$$\lambda_{\min}\{K_p\} - \frac{1}{\alpha} K_i > K_g. \quad (5.7)$$

La derivada de la función de Lyapunov es escrita como:

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, \omega) = -\dot{\bar{\mathbf{q}}}^T [K_v - \alpha M(q)] \dot{\bar{\mathbf{q}}} - \bar{\mathbf{q}}^T [\alpha K_p - K_i] \bar{\mathbf{q}} - \alpha \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \bar{\mathbf{q}} - \alpha \bar{\mathbf{q}}^T [g(q_d) - g(q)].$$

Bajo la condición (5.6) se puede determinar que la derivada temporal de la función de Lyapunov es semidefinida negativa para una región de radio η .

Empleando las condiciones (5.6) y (5.7) se obtiene el procedimiento de sintonía en términos de los valores propios de las matrices de ganancias en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\lambda_{m\acute{a}x}\{K_i\} &\geq \lambda_{m\acute{i}n}\{K_i\} > 0, \\ \lambda_{m\acute{a}x}\{K_p\} &\geq \lambda_{m\acute{i}n}\{K_p\} > K_g, \\ \lambda_{m\acute{a}x}\{K_v\} &\geq \lambda_{m\acute{i}n}\{K_v\} > \frac{\lambda_{M\acute{a}x}\{K_i\}}{\lambda_{m\acute{i}n}\{K_p\} - K_g} \cdot \frac{\lambda_{M\acute{a}x}^2\{M\}}{\lambda_{m\acute{i}n}\{M\}},\end{aligned}$$

El proceso de sintonía requiere conocer la matriz de inercias $M(q)$ y el vector de gravedad $g(q)$ para calcular los valores propios mínimos y mímicos y de esa manera determinar las ganancias del controlador. Sin embargo, no es del todo necesario conocer los parımetros físicos del robot, puesto que con solo conocer cotas mímicas y mímicas de éstos, se puede emplear el procedimiento.

5.3. Control por Par Calculado

El control por Par Calculado es un esquema no lineal pues no presenta explícitamente el término lineal PD como en los controladores previamente presentados. Sin embargo, su ley de control permite obtener una ecuación de malla cerrada lineal en términos de las variables de estado, siendo capaz de satisfacer el objetivo de control de movimiento seleccionando de forma trivial sus parımetros de diseño. La Ley de control es la siguiente:

$$\tau = M(\mathbf{q}) \left[\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_v \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_p \bar{\mathbf{q}} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (5.8)$$

donde \mathbf{K}_v y \mathbf{K}_p son matrices simétricas definidas positivas.

Esta estructura es basada en el modelo debido a que requiere conocer explícitamente la matriz de masas $M(\mathbf{q})$, la matriz de inercias $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y el vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. En el diagrama a bloques de la figura 5.3 se puede observar esta dependencia, además también requiere conocer la velocidad y la aceleración de la trayectoria deseada Kelly [4].

Sustituyendo la ley de control (5.8) sobre el modelo dinámico del robot, se obtiene la siguiente ecuación de malla cerrada:

$$\ddot{\bar{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K}_v \dot{\bar{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}_p \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Expresando la ecuación anterior en términos de las variables de estados se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_p & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

Debido a que \mathbf{K}_p es una matriz definida positiva y no singular, la ecuación de malla cerrada tiene un solo punto de equilibrio en $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$.

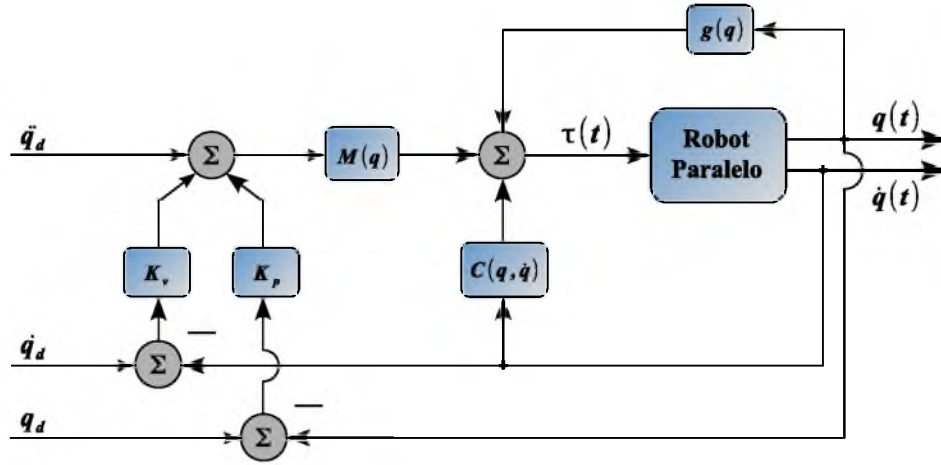


Figura 5.3: Diagrama a bloques del control por Par Calculado.

5.3.1. Análisis de estabilidad

Primero, definase la constante ε como:

$$\lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_v \} > \varepsilon > 0.$$

Multiplicando por $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_v \} \mathbf{x}^T \mathbf{x} > \varepsilon \mathbf{x}^T \mathbf{x}$. Siendo \mathbf{K}_v una matriz simétrica, entonces $\mathbf{x}^T \mathbf{K}_v \mathbf{x} \geq \lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_v \} \mathbf{x}^T \mathbf{x}$, y por lo tanto:

$$\mathbf{x}^T [\mathbf{K}_v - \varepsilon \mathbf{I}] \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n,$$

lo cual significa que la matriz $\mathbf{K}_v - \varepsilon \mathbf{I}$ es definida positiva, i.e.,

$$\mathbf{K}_v - \varepsilon \mathbf{I} > \mathbf{0}.$$

Considerando lo anterior, y que la matriz \mathbf{K}_p es definida positiva, se concluye que:

$$\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_v - \varepsilon \mathbf{I} > \mathbf{0}.$$

Considerese la siguiente función candidata de Lyapunov para el análisis de estabilidad de la ecuación de malla cerrada (5.9):

$$\begin{aligned} V(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p + \varepsilon \mathbf{K}_v & \varepsilon \mathbf{I} \\ \varepsilon \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \varepsilon \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \varepsilon \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T [\mathbf{K}_p + \varepsilon \mathbf{K}_v - \varepsilon^2 \mathbf{I}] \bar{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Se muestra que la función es definida positiva en forma global y radialmente desacetada. La derivada de la función con respecto del tiempo es:

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{q}}^T [\mathbf{K}_p + \varepsilon \mathbf{K}_v] \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \varepsilon \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \varepsilon \bar{\mathbf{q}}^T \ddot{\bar{\mathbf{q}}}.$$

Sustituyendo $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}$ ec. (5.9) en la expresión anterior se tiene:

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_v - \varepsilon \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}.$$

Dado que \mathbf{K}_p es definida positiva, y que $\mathbf{K}_v - \varepsilon \mathbf{I} > 0$, la función $\dot{V}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}})$ es entonces definida negativa de forma global, es decir, se satisface que $\dot{V}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) < 0$. También puede observarse que si $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} & \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T = 0$, entonces $\dot{V}(\mathbf{t}, 0) = 0$, por lo tanto se puede decir que el origen de la ecuación de malla cerrada es asintóticamente estable de forma global y entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}}(t) &= 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto, el objetivo de control de movimiento se verifica.

La ecuación de malla cerrada representa un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de segundo orden desacoplado, es decir, que las ecuaciones describen la dinámica de las variables articulares siendo cada una independiente de las demás. Las matrices de diseño \mathbf{K}_p y \mathbf{K}_v se escogen bajo la única condición de ser matrices diagonales positivas.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

En capítulos anteriores se analizó la geometría del robot y se estudió su dinámica, cinemática y control. Las ecuaciones resultantes del estudio del robot fueron programadas en la plataforma MATLAB para obtener resultados numéricos que puedan ser visualizados a fin de verificar la validez de los modelos.

En este capítulo se muestra el resultado de simulación numérica en lazo abierto empleando únicamente el modelo del robot. También se proponen trayectorias cartesianas para evaluar el desempeño de los controladores ante el seguimiento de las mismas.

6.1. Resultados en lazo abierto

Los parámetros físicos del robot, obtenidos a partir de modelo sólido 3D se muestran en la Tabla 4. Las longitudes de los eslabones se determinaron en la sección 2.5 y se muestran en la Tabla 2.

I_m	m_a	m_b	m_p	c
$1.01 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$	0.213 kg	0.209 kg	0.07 kg	$0.12 \frac{\text{N m s}}{\text{rad}}$

Para llevar a cabo una prueba en lazo abierto, se emplearon las ecuaciones dinámicas del robot, considerando que este no recibe esfuerzo de control ($\tau = 0$) y que las fuerzas externas consideradas son nulas. La posición inicial del robot en el espacio articular es $\theta = [0 \ 0 \ 0] \text{ rad}$, y en el espacio operacional es $P = [0 \ 0 \ -504.35] \text{ mm}$. En la figura 6.1 se muestran las gráficas del resultado obtenido en lazo abierto.

Se puede observar que debido al efecto de la gravedad el robot se desplaza desde su posición inicial hasta una longitud máxima de $P = [0 \ 0 \ -842.6] \text{ mm}$. Esta longitud es menor que la longitud total de ambos eslabones, debido a que los brazos no pueden estar completamente extendidos, siendo esa posición singular.

Los resultados demuestran que el robot posee un único punto de equilibrio en lazo abierto el cual se encuentra en $\theta_{1,2,3} = 1.627 \text{ rad}$, lo que demuestra que las ecuaciones dinámicas obtenidas corresponden al modelo del robot.

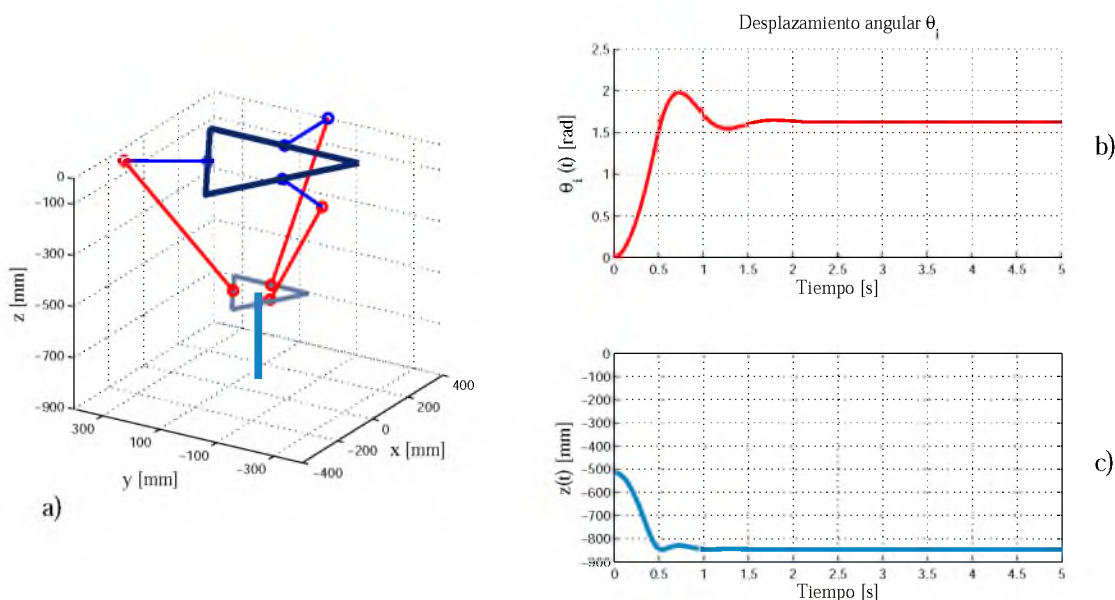


Figura 6.1: Graficas de prueba en lazo abierto

6.2. Planificación de trayectorias

La planificación de trayectorias es un aspecto importante en la robótica, específicamente en el control de movimiento, debido a que se generan las señales de referencia necesarias en los esquemas de control. Una trayectoria se puede definir como una sucesión de puntos que marcan el desplazamiento de un punto a otro de un efector final. Esta involucra el conocimiento de la ubicación de los elementos del robot sobre su espacio de trabajo, así como las dimensiones del mismo y sus restricciones cinemáticas.

A continuación se presenta una definición de los tipos de trayectorias existentes enfocándose en el uso de las curvas de Bézier tal como lo plantea Jaramillo [49]

6.2.1. Tipos de trayectorias

Existen varias formas de interpolar trayectorias, siendo más común el uso de interpolaciones sencillas. La planificación de estas se puede realizar tanto en el espacio articular como en el espacio cartesiano. Hacerlo directamente sobre las variables articulares es más sencillo y reduce el tiempo de cálculo, sin embargo esto no garantiza un recorrido libre de colisiones. Por otro lado, realizarlo sobre el espacio cartesiano suele ser más complejo en cuanto a sus cálculos, no obstante este es más preciso.

Las **trayectorias cartesianas** son aquellas cuyas restricciones y características están completamente descritas en este sistema de coordenadas y su generación obedece a procedimientos matemáticos que producen secuencias de puntos que forman curvas en el espacio y cuya evolución en el tiempo se llama trayectoria. Por su forma de construcción y caracterís-

ticas se clasifican en analíticas e interpoladas, donde las *analíticas* son las generadas a partir de una función que define el camino a seguir por el efector final, mientras que las *interpoladas* emplean métodos de interpolación basados en polinomios, como los splines, que describen la evolución de cada una de las coordenadas cartesianas en función del tiempo con el objetivo de que el manipulador pase por puntos específicos a una cierta velocidad y orientación. Esto tiene como ventaja la generación de trayectorias suaves y continuas adecuadas a la dinámica del robot.

Por otro lado, las **trayectorias en el espacio articular** controlan directamente la posición, velocidad e incluso el par de cada una de las articulaciones. En estas se pueden encontrar las *trayectorias Punto a punto* en las cuales se definen movimientos independientes para cada articulación del manipulador, lo que produce un movimiento que no sigue un camino específico, es decir, cada articulación se mueve sin considerar el estado o evolución de las demás articulaciones; y las *trayectorias Isócronas* las cuales, para evitar los movimientos forzados por parte de algunas de las articulaciones, reducen las velocidades de aquellas que normalmente terminan antes, de tal forma que terminen su movimiento en el mismo momento.

6.2.2. Curvas de bezier

Las curvas de Bezier fueron desarrolladas por diseñadores automotrices de los años 60. Estas se basan en los polinomios de Bernstein y se pueden generar a partir de polinomios de grado n , sin embargo, es más común el uso de polinomios de grado 3 puesto que con ellos se garantiza la continuidad en la velocidad y la aceleración. La forma general de encontrar los polinomios para un conjunto de puntos $\{P_0, P_1, P_2 \dots P_n\}$ se describe en la siguiente ecuación:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t),$$

donde

$$B = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad \text{para } a \leq t \leq b.$$

Si se introduce un cambio de variable de t en u se puede genera polinomios en un intervalo de tiempo $[a, b]$, haciendo $u = (b-a)t + a$, así la forma general de el polinomio queda:

$$P(t) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t),$$

donde

$$B = \binom{n}{i} (t-a)^i (b-t)^{n-i}, \quad \text{para } a \leq t \leq b.$$

En el caso a usar cuando $n = 3$, el polinomio es de la forma:

$$P(t) = \frac{1}{(b-a)^3} [(b-t)^3 P_0 + 2(t-a)(b-t)^2 P_1 + 3(t-a)^2(b-t) P_2 + (t-a)^3 P_3] \quad (6.1)$$

A partir de la ecuación (6.1) se pueden generar curvas en un intervalo de tiempo cualquiera. Si se deriva la ecuación y se evalúa en los extremos del intervalo de tiempo $[a, b]$ se puede encontrar una relación entre la velocidad inicial y la final, y la posición de los puntos de control del polinomio.

$$\dot{P}(a) = V_i = \frac{1}{(b-a)} (2P_1 - 3P_0), \quad (6.2)$$

$$\dot{P}(b) = V_f = \frac{3}{(b-a)} (P_3 - P_2). \quad (6.3)$$

De esta manera se pueden obtener curvas que garanticen movimientos suaves y continuos.

6.2.3. Trayectoria cartesiana para el Robot Delta

El control de movimiento del manipulador requiere de señales de referencia. Para ello se hace uso de una trayectoria cartesiana como señal de referencia. La trayectoria propuesta es una espiral con radio decreciente.

La espiral se construye imponiendo una trayectoria circular en el plano xy cuyo radio va decreciendo linealmente; y una trayectoria lineal sobre el eje z . En base al espacio de trabajo descrito en la sección 2.5, se establece el radio inicial de $r_o = 400$ mm y el radio final de la espiral de $r_f = 75$ mm, considerando un recorrido en el eje z desde -350 mm a -800 mm. Se desea que el manipulador recorra la trayectoria en 20 segundos, comenzando en $t = 3$ s, entonces la pendiente de la recta para el radio se calcula de la siguiente manera:

$$m = \frac{r_f - r_i}{T} = -16.25 \text{ mm/s},$$

entonces la ecuación lineal para el radio es la siguiente:

$$r = 400 - 16.25(t - 3).$$

Ahora en el caso del movimiento lineal en el eje z , se tiene que:

$$m = \frac{-800 + 350}{20} = -22.5 \text{ mm/s}$$

siendo entonces:

$$z = -350 - 22.5(t - 3) \quad (6.4)$$

En la trayectoria circular se desea que cada ciclo tenga un periodo de 6 segundos, por lo tanto

$$\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

entonces las ecuaciones para x y y son:

$$x = (400 - 16.25(t - 3)) \cos\left(\frac{\pi(t - 3)}{3}\right) \quad (6.5)$$

$$y = (400 - 16.25(t - 3)) \sin\left(\frac{\pi(t - 3)}{3}\right) \quad (6.6)$$

Esta curva permite evaluar el desempeño del manipulador de la misma manera en que se evalúa empleando una trayectoria circular y una lineal puesto que ésta reúne la complejidad de las dos. En la figura 6.2 se muestra la trayectoria.

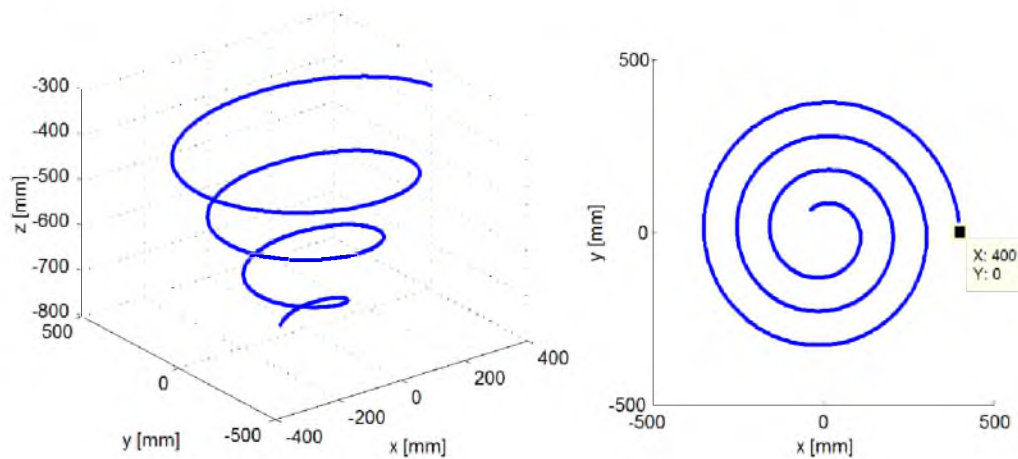


Figura 6.2: Planificación de trayectoria espiral con radio decreciente.

6.2.4. Curva de bezier para el robot Delta

El punto inicial de la trayectoria se encuentra lejos de la condición inicial del robot, lo que provoca que al imponerse la trayectoria los esfuerzos de control se eleven y el seguimiento sea muy difícil. Para evitar esto se hace uso de una curva de Bezier que lleva al robot desde su posición de origen hasta el inicio de la trayectoria. El punto inicial es cuando las articulaciones activas del robot se encuentran en cero. Empleando la cinemática directa tenemos que:

$$P_i = [0 \quad 0 \quad -504.356] \text{ mm}$$

el punto final de la curva corresponde al punto inicial de la trayectoria espiral, por lo tanto:

$$P_f = [400 \quad 0 \quad -350] \text{ mm}$$

Para obtener los puntos de control de la curva se derivan las ecuaciones (6.4), (6.5), (6.6) y se evalúan en $t = 3s$, siendo entonces:

$$\begin{aligned} V_i &= [0 \ 0 \ 0] \text{ mm/s} \\ V_f &= [0 \ 400 \ 0] \text{ mm/s} \end{aligned}$$

Despejando P_1 y P_2 de las ecuaciones (6.2) y (6.3):

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{3P_i}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -756.5 \end{bmatrix} \text{ mm} \\ P_2 &= P_f - \frac{V_f}{3}(b-a) = \begin{bmatrix} 400 \\ -400 \\ -350 \end{bmatrix} \text{ mm} \end{aligned}$$

Sustituyendo los puntos en la ecuación de Bezier para cada eje se tiene que las componentes de la curva son:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{27} [1200t^2(3-t) + 400t^3] \\ P_y &= \frac{1}{27} [-1200t^2(3-t)] \\ P_z &= \frac{1}{27} [-504,356(3-t)^3 - 1513.1t(3-t)^2 - 1050t^2(3-t) - 350t^3] \end{aligned}$$

Graficando en MATLAB se obtiene la curva de la figura 6.3. Ahora, combinando ambas trayectorias, se obtiene la trayectoria final (figura 6.4) que llevará al robot desde una posición inicial a la trayectoria en espiral.

El diseño de la trayectoria final asegura una continuidad tanto en posición como en velocidad lo que elimina sobreimpulsos y cambios bruscos en los estados dinámicos del robot contribuyendo a un mejor seguimiento de trayectorias.

6.3. Resultados del seguimiento de trayectorias

Los resultados del seguimiento de trayectorias empleando tanto la trayectoria espiral como la curva de Bezier se obtienen aplicando los tres esquemas de control previamente estudiados empleando los valores de ganancias indicados en la Tabla 5.

Tabla 5. Ganancias de los controladores.			
Controlador	K_p	K_v	K_i
PD compensado	150	15	—
PID	150	15	50
Par Calculado	150	15	—

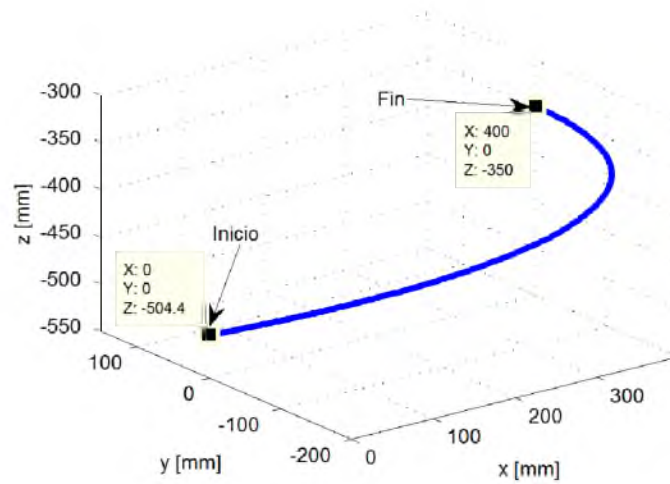


Figura 6.3: Curva de Bezier.

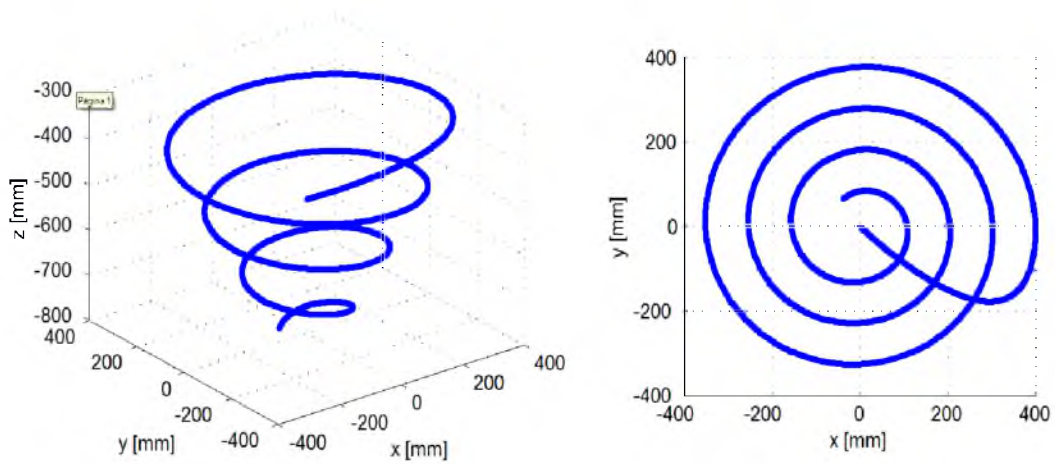


Figura 6.4: Planificación de trayectoria.

Aplicando la trayectoria espiral al robot usando un controlador PD compensado se obtienen los resultados de la figura 6.5. Como se puede observar el robot alcanza la trayectoria con un pequeño sobre impulso que implica que el esfuerzo de control sea elevado inicialmente. Se puede observar también que el error de posición es de aproximadamente ± 50 mm. Esto se debe a que el controlador no posee un término integral lo que da como resultado un desfase en tiempo entre la trayectoria de referencia y el desplazamiento del efector final.

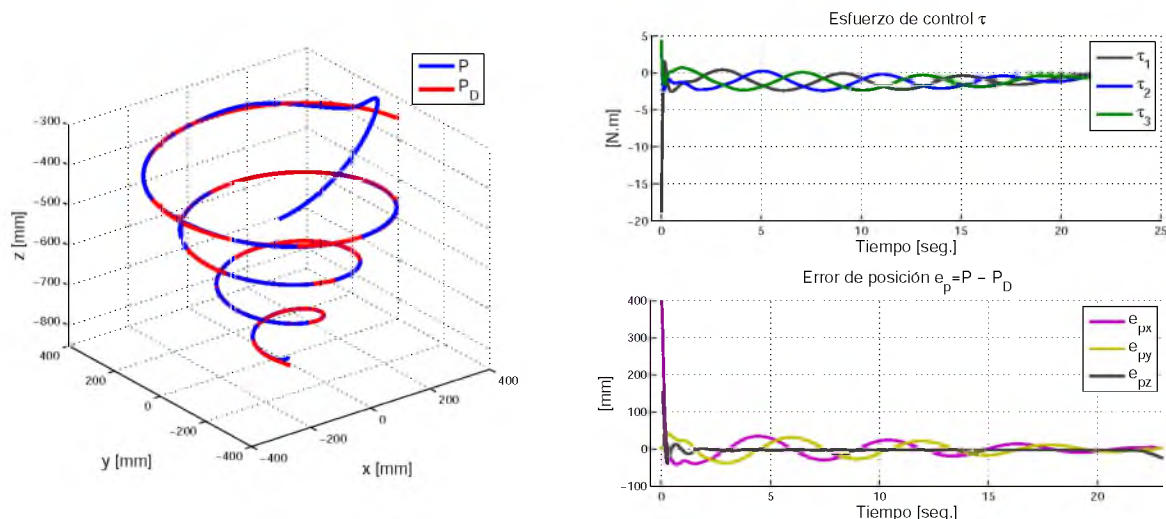


Figura 6.5: Seguimiento de trayectoria espiral con control PD compensado

Ahora aplicando un esquema de control PID en la dinámica del robot, su respuesta numérica para la trayectoria propuesta es dada en la figura 6.6. En ellos es posible notar que el robot converge a la trayectoria con un sobreimpulso más pequeño que en el esquema anterior. En la figura 6.6 (b) se observa que el par máximo τ sobrepasa los 100 N m, esto no es posible aplicar con los servomotores seleccionado anteriormente. El error de posición $e_p(t)$ (ver figura 6.6 (c)) es pequeño a comparación del error que se presenta usando solo un PD.

Empleando ahora un controlador por Par calculado se obtienen los resultados de la figura 6.7. La trayectoria muestra un sobreimpulso y converge a la trayectoria de referencia. El sobreimpulso en el esfuerzo de control se ve reducido en gran manera comparado al obtenido con el esquema de control PID. El error de posición se mantiene en un rango aceptable y tiende a decrecer al igual que con el controlador PID.

Los picos en el esfuerzo de control existen empleando cualquiera de los tres controladores, siendo más pequeño al usar un control por par calculado. Este control presenta ventajas significativas si se compara con los controladores del tipo PID, puesto que permite reducir el esfuerzo de control y el error de posición. Sin embargo tales sobreimpulsos siguen siendo no aceptables. El problema se puede corregir empleando la curva de bezier previamente calculada con el objetivo de llevar al manipulador desde su condición inicial hasta el punto de inicio de la trayectoria en espiral.

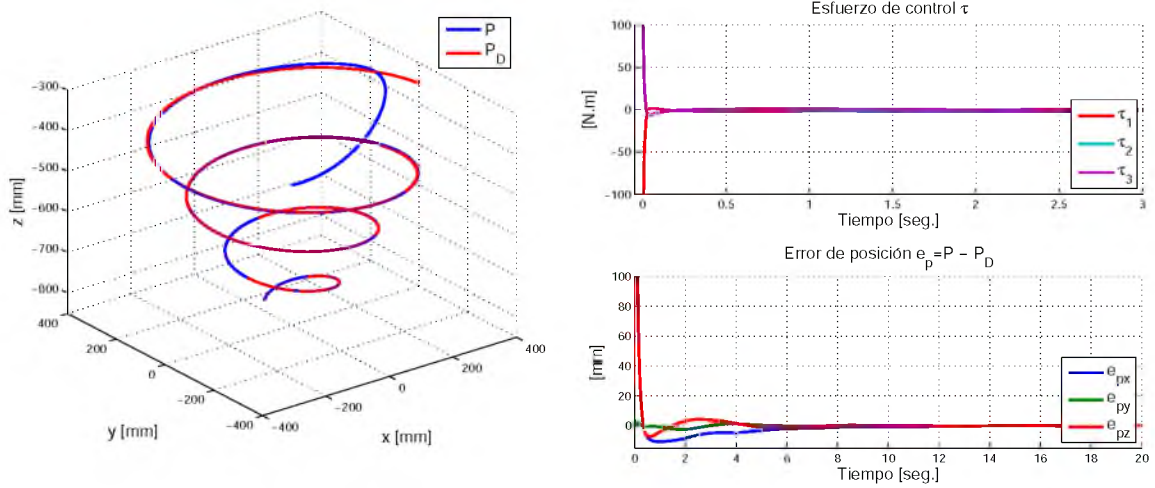


Figura 6.6: Seguimiento de trayectoria espiral con control PID.

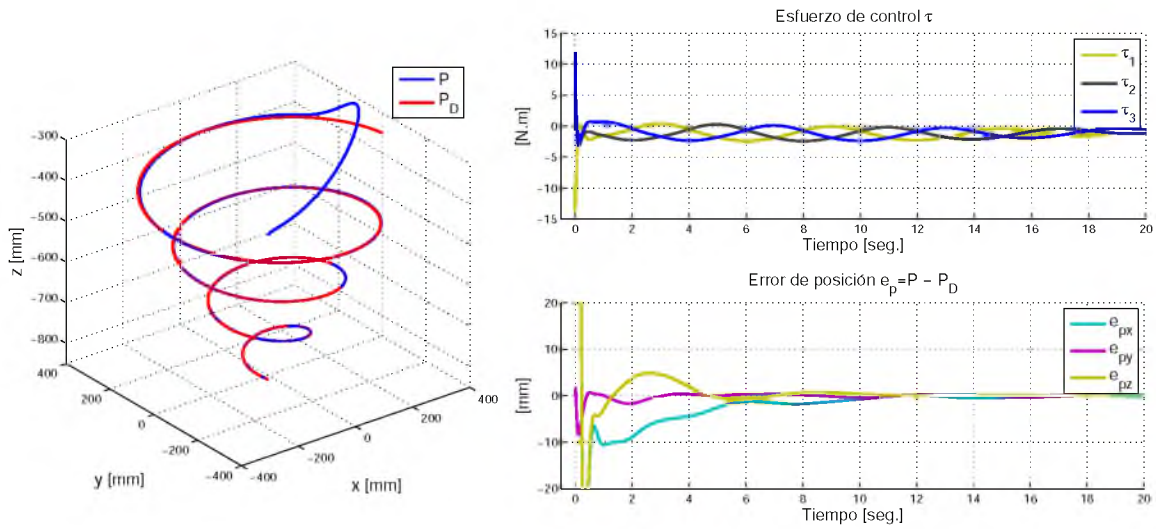


Figura 6.7: Seguimiento de trayectoria espiral con control por Par calculado.

La figura 6.8 muestra el resultado de emplear ambas trayectorias usando con control PD compensado. En esta figura se puede observar que el robot es capaz de ejecutar la trayectoria correctamente en el espacio, sin embargo la ejecuta con un desfase lo que provoca un error de posición considerablemente grande. Por otro lado, en el esfuerzo de control ya no se presentan sobreimpulsos al inicio.

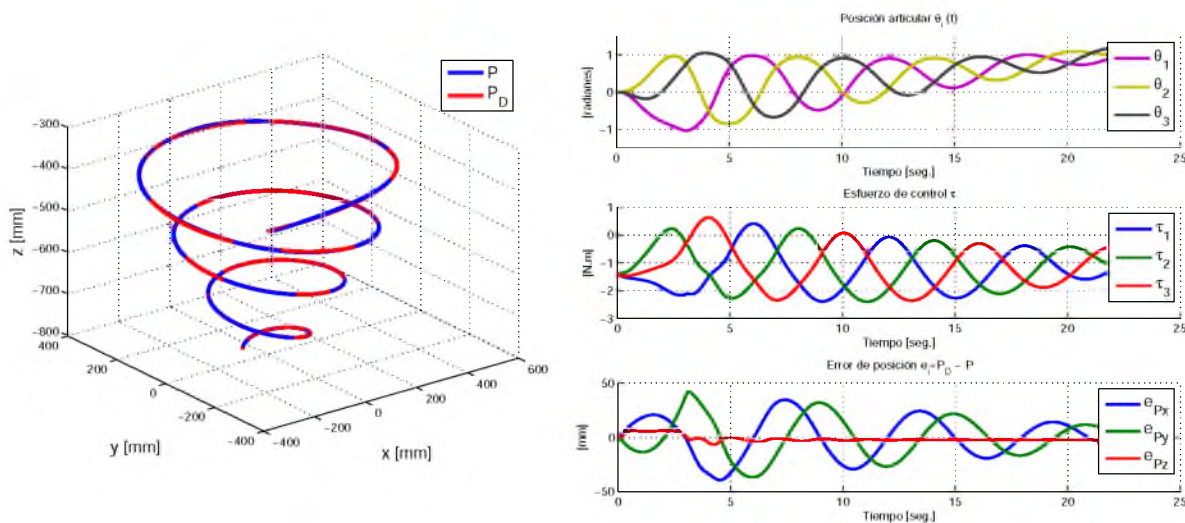


Figura 6.8: Resultados del control PD compensado empleando la curva de bezier.

Empleando un esquema de control PID se obtienen los resultados de la figura 6.9 en las gráficas se puede observar que el robot ejecuta la trayectoria satisfactoriamente con un error de posición relativamente pequeño. El esfuerzo de control no cambia significativamente si se compara con el esquema de control anterior.

Las graficas de la figura muestran los resultados obtenidos del seguimiento de trayectoria empleando un control por Par Calculado. El sistema de control ejecuta satisfactoriamente el seguimiento de las curvas propuestas. El error de posición es aceptable y el esfuerzo de control no cambia con respecto a los controladores anteriores.

El esquema Par Calculado es diseñado y aplicado bajo el conocimiento del modelo dinámico del sistema. La información dinámica ofrece un esquema con mejor desempeño, tal como se muestra en la figura 6.10. Cuando se trata de seguimiento de trayectoria del efector final, los esfuerzos de control se reducen en un 16 % respecto al esquema PID. Sin embargo, tratándose del seguimiento de trayectorias cuyo punto inicial está sobre la condición inicial del manipulador, el control PID es más eficiente puesto que no requiere información del modelo y permite que el error de posición sea más pequeño.

En las tres imagenes se puede observar que el desplazamiento angular θ_i correspondiente a las variables articulares, va en aumento cuando el robot se mueve hacia abajo. Esto se debe a que durante el análisis cinemático los ángulos de las articulaciones activas fueron considerados positivos ante un movimiento horario. En cuanto al esfuerzo de control, puede observarse que es en parte negativo, esto se debe a que los motores deben compensar las

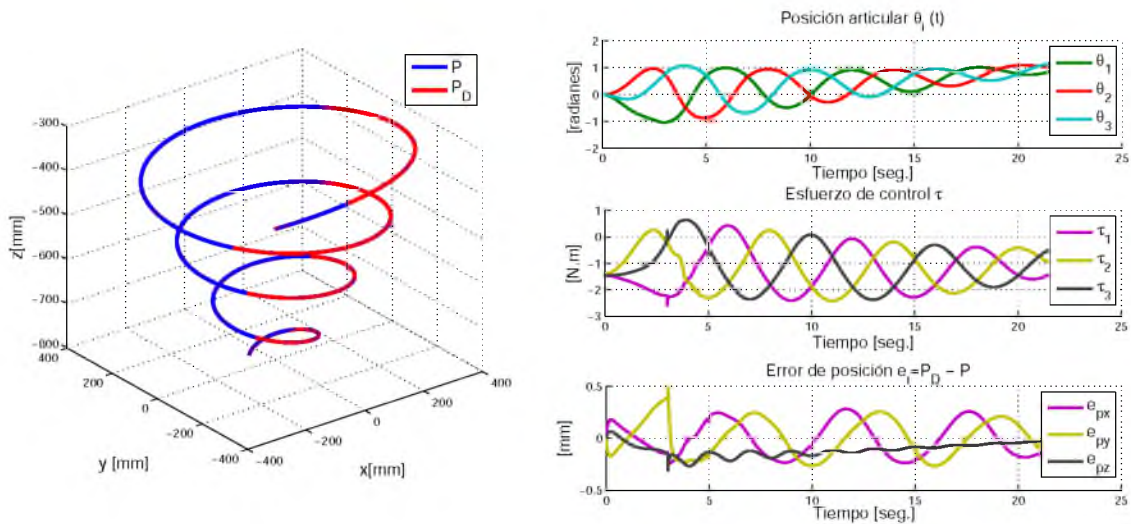


Figura 6.9: Resultados del control PID empleando la curva de bezier.

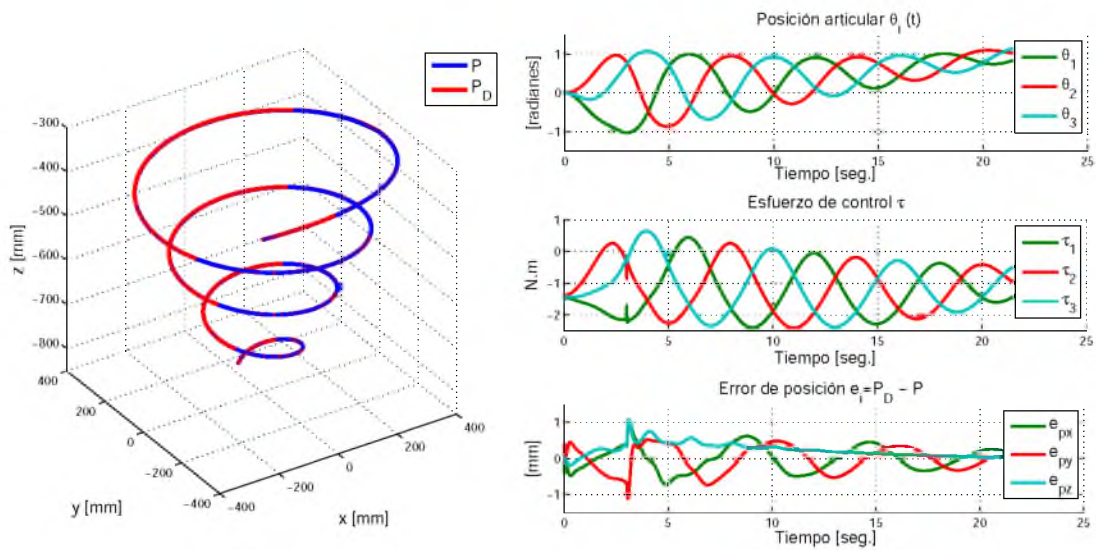


Figura 6.10: Resultados del control por Par Calculado empleando la curva de bezier.

fuerzas gravitatorias que actúan sobre el robot, las cuales, dado el sistema de referencia, son negativas.

En general los tres controladores cumplen con el objetivo de control correspondiente al seguimiento de trayectorias, siendo más factible emplear un control PID puesto que para aplicar los otros dos esquemas de control es necesario conocer con exactitud el modelo dinámico.

Capítulo 7

Conclusión

La intención principal de este proyecto fue realizar un estudio de las características dinámicas y cinemáticas del robot paralelo y generar una propuesta de diseño que pueda ser empleada para la construcción de un prototipo didáctico para los alumnos de la universidad. El estudio de la geometría y la cinemática del robot se abordó por métodos geométricos sin considerar el espacio que existe entre las barras del mecanismo paralelo y simplificar el análisis. Sin embargo, esta longitud influye de cierta manera en el movimiento del robot limitando aún más el espacio de trabajo debido a las colisiones que se pueden presentar en ciertas configuraciones. Esto infiere que el espacio de trabajo obtenido en este proyecto, es aproximadamente mayor al espacio de trabajo que se obtendría considerando por completo al mecanismo paralelo.

El robot Delta originalmente emplea articulaciones esféricas, sin embargo estas articulaciones limitan el movimiento del robot. Por ese motivo, en este proyecto se reemplazaron las articulaciones esféricas y se proponen dos articulaciones rotacionales que producen el movimiento esférico requerido para la planificación de distintas trayectorias. La configuración de diseño realizada en las articulaciones genera un rango de movimiento mucho más amplio a una articulación esférica tradicional.

En el proyecto se realiza el análisis dinámico del sistema y se obtiene el modelo matemático que describe el movimiento dinámico en las articulaciones y los eslabones. Las ecuaciones son obtenidas basándose en la formulación lagrangiana debido a que otras formulaciones como Newton-Euler y el principio de trabajos virtuales son más complicados de aplicar, además que el resultado de estas es muy similar al resultado obtenido con la formulación Lagrangiana.

Con el diseño mecánico propuesto se pretende abarcar un análisis más amplio, es decir, realizar análisis de esfuerzos en los eslabones para determinar los elementos de máquina y los materiales a emplear. Sin embargo, para tener mayor flexibilidad en trabajos posteriores, se realizó únicamente una propuesta de diseño que incluye un modelo sólido del robot, especificando los elementos a emplear en cada una de las uniones y partes del mismo. También se proponen algunos de los dispositivos que se emplearían en la etapa de manufactura e integración de elementos como el tipo de actuador, el tipo de sensor, servoamplificadores y del sistema de adquisición de datos analógico/digital, tomando en cuenta los dispositivos

disponibles en la universidad para el desarrollo de la plataforma experimental.

La información presentada en este trabajo de tesis son las bases analíticas de modelado, control, instrumentación y la propuesta de un diseño integral para la manufactura de una plataforma experimental de un robot paralelo tipo Delta, que cumpla con la función de ser un material de estudio y equipo de prácticas de laboratorio para apoyar al proceso enseñanza-aprendizaje de nuevas estructuras robóticas para los alumnos de la carrera en ingeniería Mecatrónica de la Universidad del Papaloapan.

Bibliografía

- [1] Ollero B. A. 2001. Robótica: manipuladores y robots móviles. Marcombo, S.A., Barcelona, España.
- [2] Urrea M.L.M y Medina P.S.A. 2012. Diseño e implementación de una plataforma robótica tipo Delta. Tesis de Ingeniería Mecatrónica. Universidad Militar Nueva Granada. Bogotá. Colombia.
- [3] Página de internet: <http://www.robotnik.es/robots-moviles/summit-x/>.
- [4] Kelly R. y Santibañez V. 2003. Control de movimiento de robots manipuladores. Baja California, México.
- [5] Merlet, J.P. 2006. Parallel Robots. Publicado por Springer. ISBN-10 1-4020-4133-0, Holanda.
- [6] Laribi M.A., Romdhane L. and Zegloul S. 2008. Advanced Synthesis of the Delta Parallel Robot for a Specified Workspace. En: Parallel Manipulators, towards New Applications. Huapeng Wu (Ed.). Página de internet: http://www.intechopen.com/books/parallel_manipulators_towards_new_applications/advanced_synthesis_of_the_delta_parallel_robot_for_a_specified_workspace. (Consulta: 15/nov/2014).
- [7] Dr. Hamid D. Taghirad. Parallel Robotics. Página de internet: <http://saba.kntu.ac.ir/eecd/ecourses/ParallelRobotics.htm>. (consulta: 21 Agosto 2016).
- [8] Bulej V., Poppeová V., Rejda R. y Uriček J. 2012. The design and simulation of training Delta robot. Artículo científico. University of Zilina, Eslovaquia.
- [9] Yañez R. 2007. Resolución de mecanismo paralelo planar 3RRR impulsado por actuadores electricos. Tesis de Maestría. Instituto Politécnico Nacional. Querétaro, México.
- [10] Mojtaba Yazdani. Design of 3-RRR Planar PM for Object Tracking. Human & Robot Interaction Laboratory. Página de internet: http://taarlab.com/en/research/parallel_mechanisms.
- [11] Stewart, D. 1965. A platform with six Degrees of Freedom. Proc. Instituto de Ingeniería Mecánica.

- [12] Xin-Jun L., Jinsong W., Kun-Ku O., Jongwon K. 2003. A New Approach to the Design of a DELTA Robot with a Desired Workspace. Holanda.
- [13] Pierrot F., Marquet F., Company O., Gil T. 2003. H4 Parallel Robot: Modelling, Design and Preliminary Experiments. Artículo científico. Francia.
- [14] Rueda, J. D. 2008. Metodología para el diseño de un robot paralelo industrial tipo Delta. Tesis de ingeniería. Universidad Pontificia Bolivariana.
- [15] Bulej V., Poppeová V., Sindler P. y Uriček J. 2011. Delta robots – Robots for high speed manipulation. Artículo científico. University of Zilina, Eslovaquia.
- [16] Cortés B.E., Méndez C.M.C. y Meneses J.X.A. 2007. Diseño y Control de un Robot Paralelo. En: 6to. Congreso Nacional de Mecatrónica. Universidad Anáhuac México Sur. México, D.F.
- [17] Balmaceda A. 2011. Rediseño de un robot paralelo tipo Delta de tres grados de libertad en función de un espacio de trabajo prescrito. Tesis de Maestría. IPN. México.
- [18] Sanfilippo F. 2010. Study of a parallel robot controled via iPhone accelerometer. Facultad de Ingeniería en computación. Siena.
- [19] Mäntylä J., Vauhkonen N., Orhanen S. 2014. Delta Robot. Universidad Aalto.
- [20] Cardona, M. Algoritmo para la Solución de la Cinemática Directa de Robots Paralelo Planares 3RRR Destinados a Aplicaciones en Tiempo Real. Universidad de Sonsonate. El Salvador.
- [21] Ángel, L., Raguene N., Saltaren R., Sebastián J.M., Aracil R. 2003. Diseño, Simulación, Análisis Cinemático y Dinámico de un robot paralelo para Control Visual de altas prestaciones. Universidad Politécnica de Madrid. España.
- [22] Martínez E., Peña C., Yime E. 2010. Diseño óptimo de un robot paralelo con configuración Delta para aplicaciones educativas. Revista Eduaciación en Ingeniería. ISSN 1900-8260. Colombia.
- [23] Gosselin, C. and Angeles, J. (1988). “The Optimum Kinematic Design of a Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator,” *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*.
- [24] López M, Castillo E., García G y Bashir A. 2006. Delta robot: inverse, direct, and intermediate Jacobians. Artículo Científico. Centro de Ingeniería y Desarrollo Industrial. Querétaro. México.
- [25] Lung Wen Tsai. 1999. Robot Analysis: The mechanics of Serial and Parallel Manipulators.

- [26] Clavel R. 1991. Conception d'un Robot Parallele Rapide a 4 Degres de Liberte. Ecole Polytechnique Federale de Lausanne. Tesis Doctoral. Suiza.
- [27] Velázquez, María del Rosario. 2003. Estudio y Análisis del Espacio de un Manipulador Paralelo de 3 Grados de Libertad. Tesis de licenciatura. Universidad Autónoma de Querétaro.
- [28] Stamper, R.E. 1997. A Three Degree of Freedom Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of Freedom. Tesis doctoral.
- [29] Briones, J.A. 2009. Diseño, Análisis y Construcción de un robot paralelo traslacional. Tesis de Maestría. IPN. México.
- [30] Peña, C. A., Martínez, E., Cárdenas P. F. 2011. Optimización Dimensional de un Robot Paralelo tipo Delta Basado en el menor Consumo de Energía. Colombia. ISSN 0124 - 8160.
- [31] Craig J.J. 2006. Robótica. Editorial Prentice Hall.
- [32] Guglielmetti, P. 1994. Model-Based Control of Fast Parallel Robots: a Global Approach in Operational Space. Tesis Doctoral. Laussane EPFL.
- [33] Y. Nakamura and M. Godoussi. 1989. Dynamics computation of closed-link robot mechanisms with nonredundant and redundant actuators. IEEE Transactions on Robotics and Automation.
- [34] J. Murray and G. Lovell. 1989. Dynamic modeling of closed-chain robotic manipulators and implications for trajectory control. IEEE Transactions on Robotics and Automation.
- [35] Zubizarreta A., Cabanes I., Portillo E., Oribe D., Marcos M. 2014. Modelado dinámico de robots paralelos considerando sensorica redundante. Universidad del País Vasco.
- [36] Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G. 2009. Modelling, Planning and Control.
- [37] Cheng Hui. 2001. Dynamics and Control of Parallel Manipulators with Actuation Redundancy. Tesis de Maestría. Universidad de ciencia y tecnología de Hong Kong. China.
- [38] Vivas, A. Robotica paralela: Aplicaciones Industriales, Modelado y Control. Universidad de Cauca, Colombia. Página de internet: www.unicauca.edu.co/publicaciones/ISAShow_vivas.pdf.
- [39] Silva L. A. 2005. Control Visual de robots paralelos. Análisis, Desarrollo y Aplicación a la plataforma Robotenis. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid. España
- [40] K.L. Cappel, Motion simulator, patente No. US 3295224, 1967.

- [41] K.H. Hunt, Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms, *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 105, N°4, pp. 705-712, Asme, 1983
- [42] Zabalza, I. Ros, J. 2007. Aplicaciones actuales de los robots paralelos. 8.º congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. Universidad Pública de Navarra. España.
- [43] Tsai Lung-Wen, Stamper Richard. 1997. A Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of Freedom. University of Maryland, College Park, Md. 20742.
- [44] Ángel, L., Sebastián, J. M., Saltaren, R., Aracil, R. 2004. ROBOTENIS: Diseño y Construcción del robot paralelo. Universidad Politécnica de Madrid.
- [45] Wong T.P.E. 1998. Use of a Delta robot as a walking machine. Tesis de Maestría en Ingeniería. Universidad de Canterbury. Nueva Zelanda.
- [46] Castillo, C.E, Vázquez, R.A.O, González, H. A (2012). Desarrollo del robot paralelo Parallax LKF-2040. *Ingenio Magno*. Vol.3, pp. 48-57. Universidad Santo Tomás Tunja - CIIAM.
- [47] Rico, José M. Las diferentes formas del criterio de Kutzbach-Grübler. Guanajuato México.
- [48] M.F. Spott. 1998. Elementos de máquinas. Prentice Hall.
- [49] Jaramillo, A., Correa, J., Osorio, I. 1998. Planeación de trayectorias. Caltech.

Apéndice

A. Programas y bloques de simulación en Matlab.

A.1. Cinemática Directa

```
function [ P ] = cinematica_directa( Theta )
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PARÁMETROS %%%%%%%%%
L1=250; a=150; L2=600; r=75;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% VARIABLES AUXILIARES %%%%%%%%%
a1=a+L1*cos(Theta(1))-r;
a2=L1*sin(Theta(1));
a3=L2^2-a1^2-a2^2;

b1=a+L1*cos(Theta(2))-r;
b2=L1*sin(Theta(2));
b3=L2^2-b1^2-b2^2;

c1=a+L1*cos(Theta(3))-r;
c2=L1*sin(Theta(3));
c3=L2^2-c1^2-c2^2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A=(a3-b3)/(2*a1+b1) - (a3-c3)/(2*a1+c1);
B=2*(a2-c2)/(2*a1+c1) - 2*(a2-b2)/(2*a1+b1);
C=sqrt(3)*(c1/(2*a1+c1) + b1/(2*a1+b1));
D=(sqrt(3)*b1*A/(C*(2*a1+b1)))-((a3-b3)/(2*a1+b1));
E=(2*(a2-b2)/(2*a1+b1))+(sqrt(3)*b1*B/(C*(2*a1+b1)));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f1=E^2+(B/C)^2+1;
f2=2*((A*B/C^2)+D*E+a2-a1*E);
f3=D^2 + (A/C)^2 - 2*D*a1 -a3;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Pz=(-f2-sqrt(f2^2-4*f1*f3))/(2*f1);
Py=(A+B*Pz)/C;
Px=D+Pz*E;

P=[Px Py Pz];

End
```

A.2. Cinemática Inversa

```
function [ Thetas_deseadas ] = cinematica_inversa( P )
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PARAMETROS %%%%%%%%%
L1=250; a=150; L2=600; r=75; phi=0;
Thetas_deseadas=[0 0 0];
```

```

for i=1:1:3;
    %%%%%%%%% PUNTO P ROTADO %%%%%%%%%
    Px=P(1)*cos(phi)+P(2)*sin(phi);
    Py=-P(1)*sin(phi)+P(2)*cos(phi);
    Pz=P(3);

    %%%%%%%%% VARIABLES AUXILIARES %%%%%%%%%
    K1=-(L1^2-L2^2+Py^2-a^2+Pz^2+(Px+r)^2)/(2*Pz);
    K2=(Px+r-a)/Pz;
    C1=1+K2^2;
    C2=2*(K1*K2-a);
    C3=a^2+K1^2-L1^2;

    %%%%%%%%% VARIABLE ARTICULAR %%%%%%%%%
    Bx=(-C2+sqrt(C2^2-4*C1*C3))/(2*C1);
    Bz=K1+K2*Bx;

    if (isreal(Bz/(Bx-a)))
        Theta_i=atan2(Bz,Bx-a);
    else
        Theta_i=inf;
    end

    phi=phi+(2/3)*pi;
    Thetas_deseadas(i)=Theta_i;

end
end

```

A.3. Jacobiano

```

function [ out ] = Jacobiano( y )
    %%%%%%%%% Parametros %%%%%%%%%
    L1=250; a=150; L2=650; r=75;
    %-----%

    Theta=[y(1);y(2);y(3)];
    Dtheta=[y(4);y(5);y(6)];
    Px=y(7); Py=y(8); Pz=y(9);
    DDtheta=[y(10); y(11); y(12)];

    %%%%%%%%% MATRIZ JACOBIANA INVERSA Jq %%%%%%%%%
    j11=L1*sin(Theta(1))*(Px+r-a)+L1*Pz*cos(Theta(1));
    j22=L1*((r-a-0.5*Px+0.5*sqrt(3)*Py)*sin(Theta(2))+Pz*cos(Theta(2)));
    j33=L1*((r-a-0.5*Px-0.5*sqrt(3)*Py)*sin(Theta(3))+Pz*cos(Theta(3)));

    Jq=2*[ j11 0 0;0 j22 0;0 0 j33];

    %%%%%%%%% MATRIZ JACOBIANA DIRECTA Jp %%%%%%%%%

    a11=Px+r-a-L1*cos(Theta(1));      a12=Py;
    a13=Pz+L1*sin(Theta(1));

```

```

a21=Px-0.5*(r-a-L1*cos(Theta(2))); a22=Py+(sqrt(3)/2)*(r-a-
L1*cos(Theta(2))); a23=Pz+L1*sin(Theta(2));
a31=Px-0.5*(r-a-L1*cos(Theta(3))); a32=Py-(sqrt(3)/2)*(r-a-
L1*cos(Theta(3))); a33=Pz+L1*sin(Theta(3));

```

```

Jp=2*[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33];

```

```

Jr=-inv(Jp)*Jq;
DP=Jr*Dtheta;
DPx=DP(1); DPy=DP(2); DPz=DP(3);

```

```

***** DERIVADA DE LA MATRIZ Jq *****

```

```

dj11=L1*sin(Theta(1))*DPx + L1*cos(Theta(1))*Dtheta(1)*(Px+r-a) +
L1*DPz*cos(Theta(1))- L1*Pz*sin(Theta(1))*Dtheta(1);
dj22=L1*((-0.5*DPx+sqrt(3)*0.5*DPy)*sin(Theta(2)) + (r-a-
0.5*Px+sqrt(3)*0.5*Py)*cos(Theta(2))*Dtheta(2) + DPz*cos(Theta(2)) -
Pz*sin(Theta(2))*Dtheta(2));
dj33=L1*((-0.5*DPx-sqrt(3)*0.5*DPy)*sin(Theta(3)) + (r-a-0.5*Px-
sqrt(3)*0.5*Py)*cos(Theta(3))*Dtheta(3) + DPz*cos(Theta(3)) -
Pz*sin(Theta(3))*Dtheta(3));

```

```

DJq=[dj11 0 0;0 dj22 0;0 0 dj33];

```

```

***** DERIVADA DE LA MATRIZ Jp-Inversa *****

```

```

D=a11*a22*a33-a11*a23*a32-a12*a21*a33+a12*a31*a23+a21*a13*a32-
a13*a22*a31;

```

```

c11=a22*a33-a23*a32; c12=a13*a32-a12*a33; c13=a12*a23-a13*a22;
c21=a31*a23-a21*a33; c22=a11*a33-a13*a31; c23=a21*a13-a11*a23;
c31=a21*a32-a22*a31; c32=a12*a31-a11*a32; c33=a11*a22-a12*a21;

```

```

-----

```

```

da11=DPx+L1*Dtheta(1)*sin(Theta(1)); da12=DPy;
da13=DPz+L1*Dtheta(1)*cos(Theta(1));
da21=DPx-0.5*L1*Dtheta(2)*sin(Theta(2));
da22=DPy+(sqrt(3)/2)*L1*Dtheta(2)*sin(Theta(2));
da23=DPz+L1*Dtheta(2)*cos(Theta(2));
da31=DPx-0.5*L1*Dtheta(3)*sin(Theta(3)); da32=DPy-
(sqrt(3)/2)*L1*Dtheta(3)*sin(Theta(3));
da33=DPz+L1*Dtheta(3)*cos(Theta(3));

```

```

-----

```

```

dc11=a22*da33+da22*a33-a23*da32-da23*a32; dc12=a13*da32+da13*a32-
a12*da33-da12*a33; dc13=a12*da23+da12*a23-a13*da22-da13*a22;
dc21=a31*da23+da31*a23-a21*da33-da21*a33; dc22=a11*da33+da11*a33-
a13*da31-da13*a31; dc23=a21*da13+da21*a13-a11*da23-da11*a23;
dc31=a21*da32+da21*a32-a22*da31-da22*a31; dc32=a12*da31+da12*a31-
a11*da32-da11*a32; dc33=a11*da22+da11*a22-a12*da21-da12*a21;

```

```

-----

```

```

D1= a11*(da22*a33+a22*da33)+da11*a22*a33;
D2=-a11*(da23*a32+a23*da32)-da11*a23*a32;
D3=-a12*(da21*a33+a21*da33)-da12*a21*a33;
D4=a12*(da31*a23+a31*da23)+da12*a31*a23;
D5= a21*(da13*a32+a13*da32)+da21*a13*a32;
D6=-a13*(da22*a31+a22*da31)-da13*a22*a31;

```

```

%-----%
DD=D1+D2+D3+D4+D5+D6;
B11=(D*dc11-c11*DD)/D^2;          B23=(D*dc23-c23*DD)/D^2;
B12=(D*dc12-c12*DD)/D^2;          B31=(D*dc31-c31*DD)/D^2;
B13=(D*dc13-c13*DD)/D^2;          B32=(D*dc32-c32*DD)/D^2;
B21=(D*dc21-c21*DD)/D^2;          B33=(D*dc33-c33*DD)/D^2;
B22=(D*dc22-c22*DD)/D^2;
%-----%

DJp_inv=[B11 B12 B13;B21 B22 B23;B31 B32 B33];

%%%%%%%%%%%%% DERIVADA DEL JACOBIANO DE RESTRICCIÓN JR
%%%%%%%%%%%%%

DJr=-inv(Jp)*DJq - DJp_inv*Jq;
DDP=Jr*DDtheta+DJr*Dtheta;
out=[DP;DDP];
end

```

A.4. Espacio de trabajo (método Monte Carlo)

```

function [volumen] = espacio_trabajo()

%%%%%%%%%%%%% DATOS %%%%%%%%%%%%%%
i=0; t=0;
L1=250; a=150; L2=600; r=75;
R=L1+L2+a+r;

for alpha=0:0.1:2*pi;
    for phi=0:0.1:pi;
        for radio=1:10:R;
            x=radio*cos(alpha)*cos(phi);
            y=radio*cos(phi)*sin(alpha);
            z=-radio*sin(phi);
            P=[x y z];
            Thetas=cinematica_inversa(P);
            if(isfinite(Thetas))
                if(Thetas >= -pi/4)
                    if (Thetas <= 4*pi/9)
                        i=i+1;
                        w1(i)=x;
                        w2(i)=y;
                        w3(i)=z;
                    end
                end
            end
            t=t+1;
        end
    end
end
volumen=((2/3)*pi*R^3)*(i/t);

```

```
plot3(w1,w2,w3);
end
```

A.5. Modelo dinámico

```
function [ Salida ] = Robot( y )
***** PARAMETROS *****
L1=0.250; a=0.150; L2=0.650; r=0.075;
Im=1.01e-5; ma=0.213; mb=0.209; mp=0.07; gc=9.810;

%-----%
Theta=[y(1);y(2);y(3)];
Dtheta=[y(4);y(5);y(6)];
Px=y(7)/1000; Py=y(8)/1000; Pz=y(9)/1000;
T=[y(10);y(11);y(12)];
F_ext=0*[y(13);y(14);y(15)];
%-----%
***** MATRICES *****

A=Im+(ma/3 + mb)*L1^2;
b=mp+3*mb;
Gq=-gc*L1*(0.5*ma+mb)*[cos(Theta(1)); cos(Theta(2)); cos(Theta(3))];
gb=[0;0;b*gc];

%-----%
***** MATRIZ JACOBIANA INVERSA Jq *****
j11=L1*sin(Theta(1))*(Px+r-a)+L1*Pz*cos(Theta(1));
j22=L1*((r-a-0.5*Px+0.5*sqrt(3)*Py)*sin(Theta(2))+Pz*cos(Theta(2)));
j33=L1*((r-a-0.5*Px-0.5*sqrt(3)*Py)*sin(Theta(3))+Pz*cos(Theta(3)));

Jq=2*[ j11 0 0;0 j22 0;0 0 j33];

***** MATRIZ JACOBIANA DIRECTA Jp *****

a11=Px+r-a-L1*cos(Theta(1));
a12=Py;
a13=Pz+L1*sin(Theta(1));
a21=Px-0.5*(r-a-L1*cos(Theta(2)));
a22=Py+(sqrt(3)/2)*(r-a-L1*cos(Theta(2)));
a23=Pz+L1*sin(Theta(2));
a31=Px-0.5*(r-a-L1*cos(Theta(3)));
a32=Py-(sqrt(3)/2)*(r-a-L1*cos(Theta(3)));
a33=Pz+L1*sin(Theta(3));

Jp=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33];

Jr=-inv(Jp)*Jq;
DP=Jr*Dtheta;
DPx=DP(1); DPy=DP(2); DPz=DP(3);

***** DERIVADA DE LA MATRIZ Jq *****
```

```

dj11=L1*sin(Theta(1))*DPx + L1*cos(Theta(1))*Dtheta(1)*(Px+r-a) +
L1*DPz*cos(Theta(1))- L1*Pz*sin(Theta(1))*Dtheta(1);

```

```

dj22=L1*((-0.5*DPx+sqrt(3)*0.5*DPy)*sin(Theta(2)) + (r-a-
0.5*Px+sqrt(3)*0.5*Py)*cos(Theta(2))*Dtheta(2) + DPz*cos(Theta(2)) -
Pz*sin(Theta(2))*Dtheta(2));

```

```

dj33=L1*((-0.5*DPx-sqrt(3)*0.5*DPy)*sin(Theta(3)) + (r-a-0.5*Px-
sqrt(3)*0.5*Py)*cos(Theta(3))*Dtheta(3) + DPz*cos(Theta(3)) -
Pz*sin(Theta(3))*Dtheta(3));

```

```

DJq=[dj11 0 0;0 dj22 0;0 0 dj33];

```

***** DERIVADA DE LA MATRIZ Jp-Inversa *****

```

D=a11*a22*a33-a11*a23*a32-a12*a21*a33+a12*a31*a23+a21*a13*a32-
a13*a22*a31;

```

```

c11=a22*a33-a23*a32; c12=a13*a32-a12*a33; c13=a12*a23-a13*a22;
c21=a31*a23-a21*a33; c22=a11*a33-a13*a31; c23=a21*a13-a11*a23;
c31=a21*a32-a22*a31; c32=a12*a31-a11*a32; c33=a11*a22-a12*a21;

```

```

-----
da11=DPx+L1*Dtheta(1)*sin(Theta(1));
da12=DPy;
da13=DPz+L1*Dtheta(1)*cos(Theta(1));
da21=DPx-0.5*L1*Dtheta(2)*sin(Theta(2));
da22=DPy+(sqrt(3)/2)*L1*Dtheta(2)*sin(Theta(2));
da23=DPz+L1*Dtheta(2)*cos(Theta(2));
da31=DPx-0.5*L1*Dtheta(3)*sin(Theta(3));
da32=DPy-(sqrt(3)/2)*L1*Dtheta(3)*sin(Theta(3));
da33=DPz+L1*Dtheta(3)*cos(Theta(3));

```

```

-----
dc11=a22*da33+da22*a33-a23*da32-da23*a32;
dc12=a13*da32+da13*a32-a12*da33-da12*a33;
dc13=a12*da23+da12*a23-a13*da22-da13*a22;
dc21=a31*da23+da31*a23-a21*da33-da21*a33;
dc22=a11*da33+da11*a33-a13*da31-da13*a31;
dc23=a21*da13+da21*a13-a11*da23-da11*a23;
dc31=a21*da32+da21*a32-a22*da31-da22*a31;
dc32=a12*da31+da12*a31-a11*da32-da11*a32;
dc33=a11*da22+da11*a22-a12*da21-da12*a21;

```

```

-----
D1= a11*(da22*a33+a22*da33)+da11*a22*a33;
D4= a12*(da31*a23+a31*da23)+da12*a31*a23;
D2=-a11*(da23*a32+a23*da32)-da11*a23*a32;
D5= a21*(da13*a32+a13*da32)+da21*a13*a32;
D3=-a12*(da21*a33+a21*da33)-da12*a21*a33;
D6=-a13*(da22*a31+a22*da31)-da13*a22*a31;

```

```

DD=D1+D2+D3+D4+D5+D6;

```

```

B11=(D*dc11-c11*DD)/D^2; B12=(D*dc12-c12*DD)/D^2; B13=(D*dc13-
c13*DD)/D^2;
B21=(D*dc21-c21*DD)/D^2; B22=(D*dc22-c22*DD)/D^2; B23=(D*dc23-
c23*DD)/D^2;

```

```

B31=(D*dc31-c31*DD)/D^2;    B32=(D*dc32-c32*DD)/D^2;    B33=(D*dc33-
c33*DD)/D^2;
-----
DJp_inv=[B11 B12 B13;B21 B22 B23;B31 B32 B33];

%%%%%%%%%%%%% DERIVADA DEL JACOBIANO DE RESTRICCIÓN JR
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

DJr=-inv(Jp)*DJq - DJp_inv*Jq;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
MATRICES PROYECTADAS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

M=A+b*(transpose(Jr))*Jr;
C=b*(transpose(Jr))*DJr + 12*[0.01 0.01 0.01;0.01 0.01 0.01;0.01 0.01
0.01];
G=Gq+(transpose(Jr))*gb;
Qx=(transpose(Jr))*F_ext

%%%%%%%%%%%%% MODELO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DDtheta=(inv(M))*(T-C*Dtheta-G);
Salida=[DDtheta;G];
end

```

A.6. Diagramas a bloques de controladores.

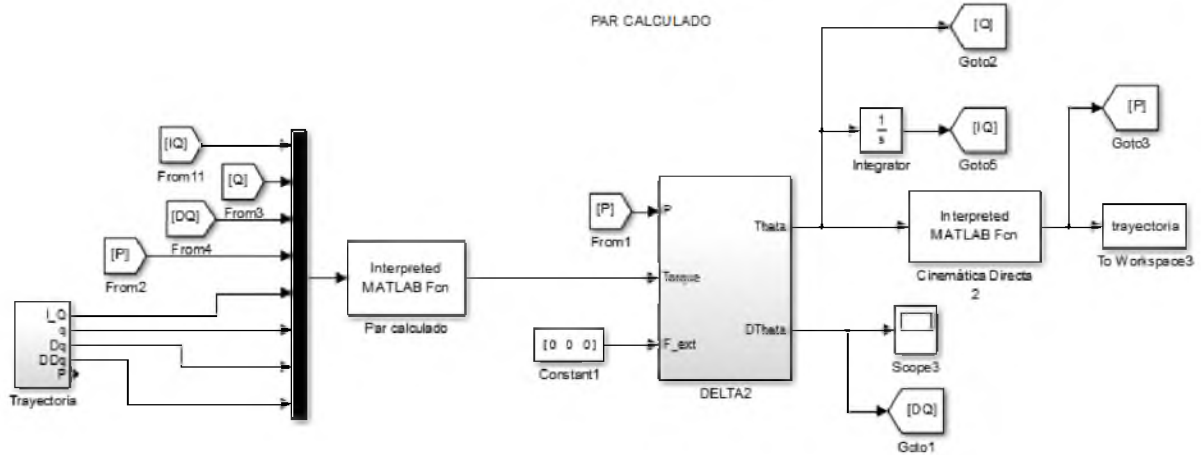


Figura A.6.1. Diagrama a bloques del control por Par Calculado en simulink.

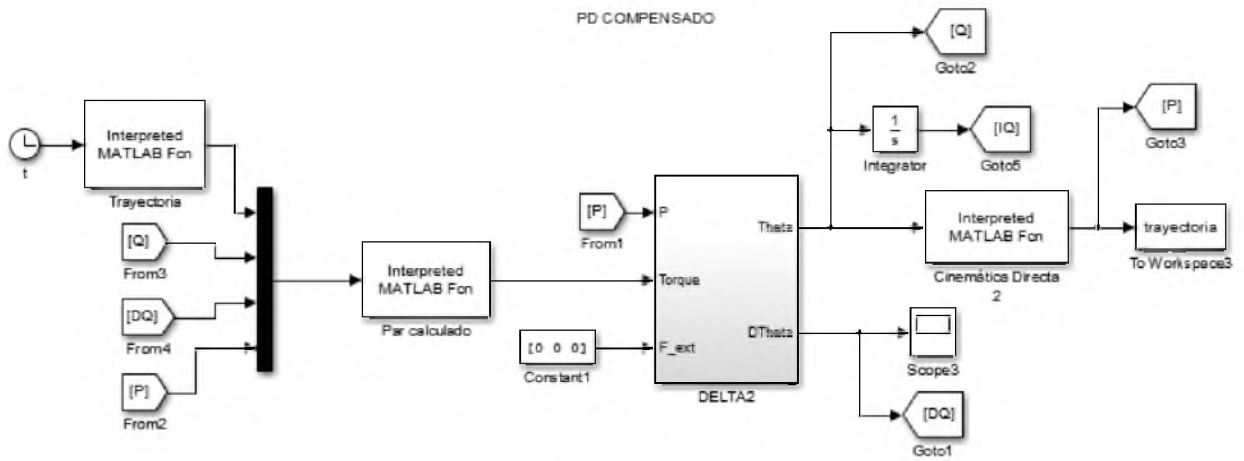


Figura A.6.2. Diagrama a bloques del control PD compensado en simulink.

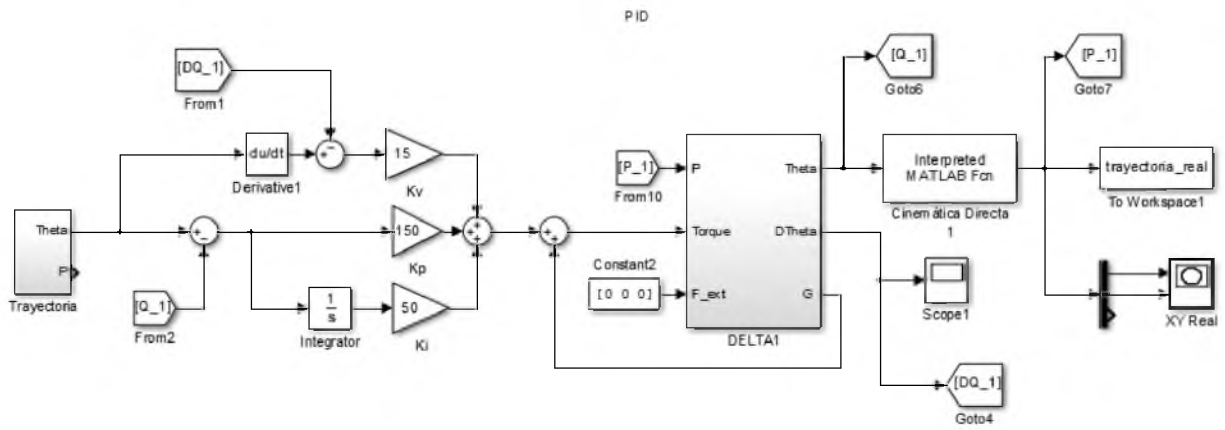
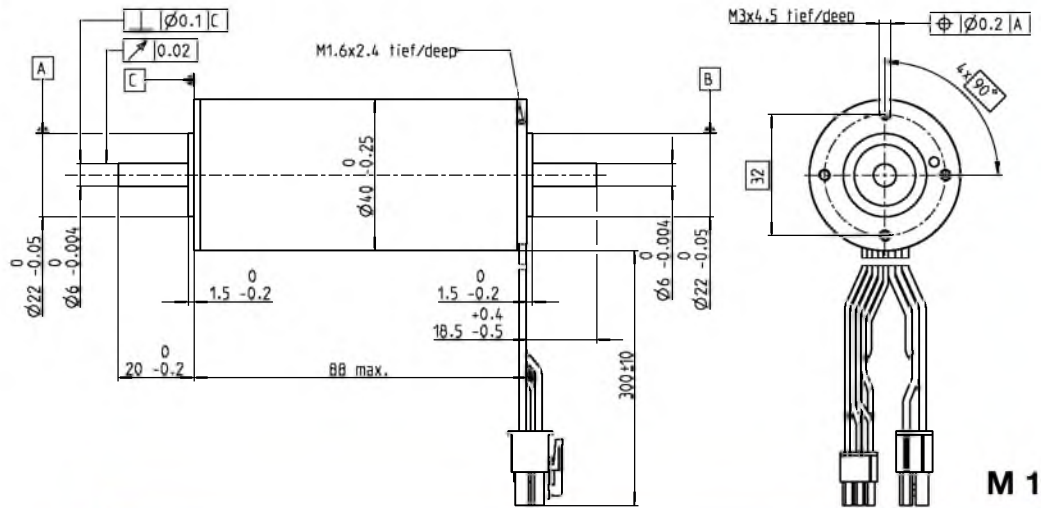
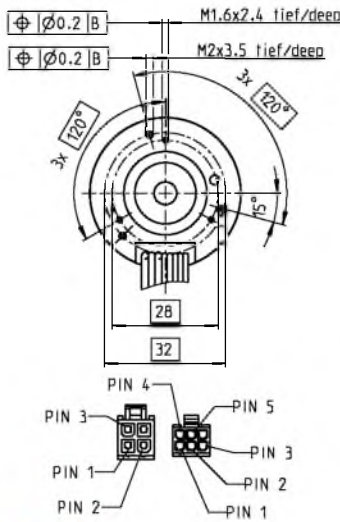


Figura A.6.3. Diagrama a bloques del control PID en simulink.

Apéndice B.

Hojas de datos de dispositivos.

EC-max 40 Ø40 mm, brushless, 120 Watt

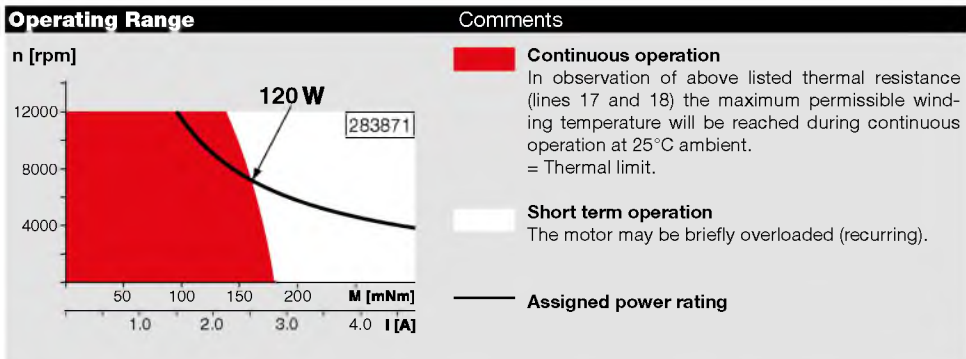


- Stock program
- Standard program
- Special program (on request)

Part Numbers				
283870	283871	283872	283873	

Motor Data					
Values at nominal voltage					
1 Nominal voltage	V	48	48	48	48
2 No load speed	rpm	10100	7240	4720	3610
3 No load current	mA	310	188	104	72.8
4 Nominal speed	rpm	9250	6280	3770	2670
5 Nominal torque (max. continuous torque)	mNm	170	185	203	211
6 Nominal current (max. continuous current)	A	4.06	3.1	2.19	1.74
7 Stall torque	mNm	2090	1490	1050	838
8 Stall current	A	46.7	23.7	10.9	6.68
9 Max. efficiency	%	85	83	82	80
Characteristics					
10 Terminal resistance phase to phase	Ω	1.03	2.02	4.4	7.19
11 Terminal inductance phase to phase	mH	0.204	0.4	0.937	1.6
12 Torque constant	mNm/A	44.8	62.8	96.1	126
13 Speed constant	rpm/V	213	152	99.4	76.1
14 Speed/torque gradient	rpm/mNm	4.89	4.9	4.55	4.35
15 Mechanical time constant	ms	5.17	5.19	4.81	4.61
16 Rotor inertia	gcm ²	101	101	101	101

Specifications		
Thermal data		
17 Thermal resistance housing-ambient	3.45 K/W	
18 Thermal resistance winding-housing	0.29 K/W	
19 Thermal time constant winding	3.96 s	
20 Thermal time constant motor	1240 s	
21 Ambient temperature	-40...+100°C	
22 Max. winding temperature	+155°C	
Mechanical data (preloaded ball bearings)		
23 Max. speed	12000 rpm	
24 Axial play at axial load < 10 N	0 mm	
> 10 N	0.14 mm	
25 Radial play	preloaded	
26 Max. axial load (dynamic)	8 N	
27 Max. force for press fits (static) (static, shaft supported)	211 N	
28 Max. radial load, 5 mm from flange	4000 N	
	80 N	

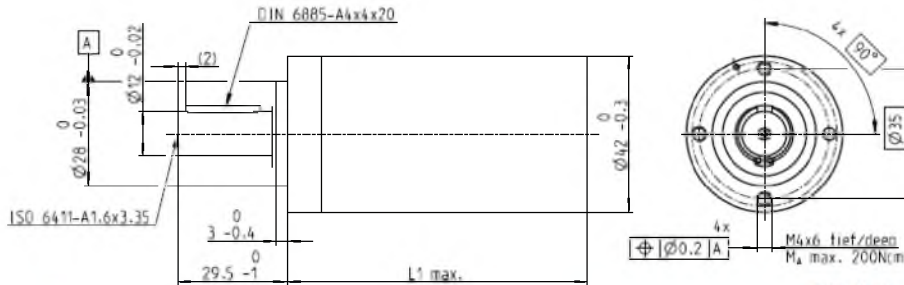


Other specifications		
29 Number of pole pairs	1	
30 Number of phases	3	
31 Weight of motor	720 g	
Values listed in the table are nominal.		
Connection motor (Cable AWG 20)		
red	Motor winding 1	Pin 1
black	Motor winding 2	Pin 2
white	Motor winding 3	Pin 3
	N.C.	Pin 4
Connector		
Molex	39-01-2040	
Connection sensors (Cable AWG 26)		
yellow	Hall sensor 1	Pin 1
brown	Hall sensor 2	Pin 2
grey	Hall sensor 3	Pin 3
blue	GND	Pin 4
green	V _{Hall} 3...24 VDC	Pin 5
	N.C.	Pin 6
Connector		
Molex	430-25-0600	
Wiring diagram for Hall sensors see p. 41		

maxon Modular System	Overview on page 28–36
<p>Planetary Gearhead Ø52 mm 4 - 30 Nm Page 351</p>	<p>Encoder MR 256 - 1024 CPT, 3 channels Page 405</p> <p>Encoder HEDL 5540 500 CPT, 3 channels Page 417</p> <p>Brake AB 28 24 VDC 0.4 Nm Page 457</p>
<p>Recommended Electronics:</p> <p>Notes Page 32</p> <p>ESCON Mod. 50/5 427</p> <p>ESCON Mod. 50/4 EC-S 427</p> <p>ESCON 50/5 428</p> <p>ESCON 70/10 428</p> <p>DEC Module 50/5 430</p> <p>EPOS2 24/5, 50/5, 70/10 435</p> <p>EPOS2 P 24/5 438</p> <p>EPOS4 Module/CB 50/5 442</p> <p>EPOS4 Module 50/8 443</p> <p>EPOS4 Comp. 50/8 CAN 443</p> <p>MAXPOS 50/5 447</p>	

Planetary Gearhead GP 42 C $\varnothing 42$ mm, 3–15 Nm

Ceramic Version



M 1:2

Technical Data

Planetary Gearhead	straight teeth
Output shaft	stainless steel
Bearing at output	preloaded ball bearings
Radial play, 12 mm from flange	max. 0.06 mm
Axial play at axial load	< 5 N 0 mm > 5 N max. 0.3 mm
Max. axial load (dynamic)	150 N
Max. force for press fits	300 N
Direction of rotation, drive to output	=
Max. continuous input speed	8000 rpm
Recommended temperature range	-40...+100°C
Number of stages	1 2 3 4
Max. radial load, 12 mm from flange	120 N 240 N 360 N 360 N

maxon gear

- Stock program
- Standard program
- Special program (on request)

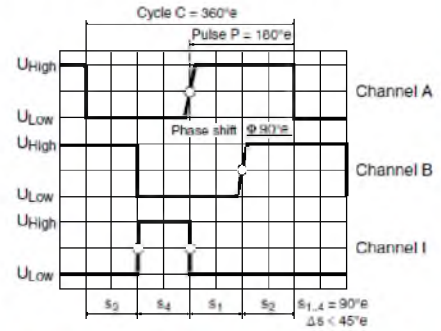
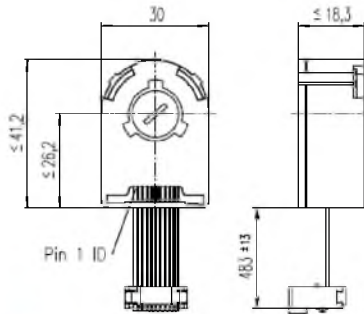
Part Numbers

Gearhead Data	Part Numbers									
	203113	203115	203119	203120	203124	203129	203128	203133	203137	203141
1 Reduction	3.5:1	12:1	26:1	43:1	81:1	156:1	150:1	285:1	441:1	756:1
2 Absolute reduction	7/2	49/4	26	349/8	2187/27	156	2401/18	15379/54	441	756
10 Mass inertia	14	15	9.1	15	9.4	9.1	15	15	14	14
3 Max. motor shaft diameter	10	10	8	10	8	8	10	10	10	10
Part Numbers	203114	203116	260552*	203121	203125	260553*	203130	203134	203138	203142
1 Reduction	4.3:1	15:1	36:1	53:1	91:1	216:1	186:1	319:1	488:1	936:1
2 Absolute reduction	19/3	91/6	36/1	637/12	91	216/1	4459/24	837/3	4394/3	936
10 Mass inertia	9.1	15	5.0	15	15	5.0	15	15	9.4	9.1
3 Max. motor shaft diameter	8	10	4	10	10	4	10	10	8	8
Part Numbers	260551*	203117		203122	203126		203131	203135	203139	260554*
1 Reduction	6:1	19:1		66:1	113:1		230:1	353:1	546:1	1296:1
2 Absolute reduction	9/1	189/8		1183/18	338/3		8281/36	28581/51	546	1296/1
10 Mass inertia	4.9	9.4		15	9.4		15	9.4	14	5.0
3 Max. motor shaft diameter	4	8		10	8		10	8	10	4
Part Numbers		203118		203123	203127		203132	203136	203140	
1 Reduction		21:1		74:1	126:1		257:1	394:1	676:1	
2 Absolute reduction		21		147/2	126		1029/4	1183/3	676	
10 Mass inertia		14		15	14		15	15	9.1	
3 Max. motor shaft diameter		10		10	10		10	10	8	
4 Number of stages	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4
5 Max. continuous torque	Nm	3.0	7.5	7.5	15.0	15.0	15.0	15.0	15.0	15.0
6 Max. intermittent torque at gear output	Nm	4.5	11.3	11.3	22.5	22.5	22.5	22.5	22.5	22.5
7 Max. efficiency	%	90	81	81	72	72	72	64	64	64
8 Weight	g	260	360	360	460	460	460	560	560	560
9 Average backlash no load	°	0.6	0.8	0.8	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
11 Gearhead length L1**	mm	41.0	55.5	55.5	70.0	70.0	70.0	84.5	84.5	84.5

*no combination with EG 45 (150/250 W) and EG 4 40
**for EG 45 flat L1 is -3.6 mm

Encoder HEDL 5540 500 CPT, 3 Channels, with Line Driver RS 422

maxon sensor



Direction of rotation cw (definition cw p. 60)

- Stock program
- Standard program
- Special program (on request)

Part Numbers

110512	110514	110516
--------	--------	--------

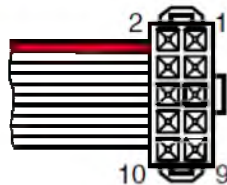
Type

Counts per turn	500	500	500
Number of channels	3	3	3
Max. operating frequency (kHz)	100	100	100
Max. speed (rpm)	12000	12000	12000
Shaft diameter (mm)	3	4	6

Technical Data

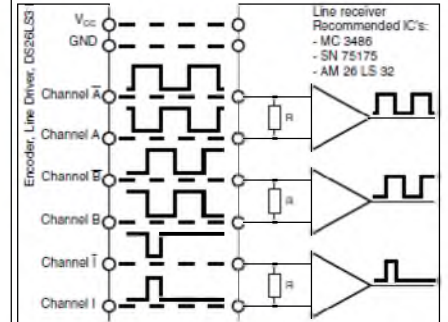
Supply voltage V_{CC}	$5V \pm 10\%$
Typical current draw	55 mA
Output signal	EIA Standard RS 422
driver used:	DS26LS31
Phase shift Φ	$90^\circ \pm 45^\circ$
Signal rise time	
(typically, at $C_L = 25\text{ pF}$, $R_L = 2.7\text{ k}\Omega$, 25°C)	180 ns
Signal fall time	
(typically, at $C_L = 25\text{ pF}$, $R_L = 2.7\text{ k}\Omega$, 25°C)	40 ns
Index pulse width	90°
Operating temperature range	$-40 \dots +100^\circ\text{C}$
Moment of inertia of code wheel	$\leq 0.6\text{ gcm}^2$
Max. angular acceleration	250000 rad s^{-2}
Output current per channel	$\pm 20\text{ mA}$

Pin Allocation



- 1 N.C.
 - 2 V_{CC}
 - 3 GND
 - 4 N.C.
 - 5 Channel \bar{A}
 - 6 Channel A
 - 7 Channel \bar{B}
 - 8 Channel B
 - 9 Channel \bar{I} (Index)
 - 10 Channel I (Index)
- Pin type DIN 41651/
EN 60603-13
flat band cable AWG 28

Connection example



Terminal resistance R = typical 120 Ω

The index signal I is synchronized with channel A or B.

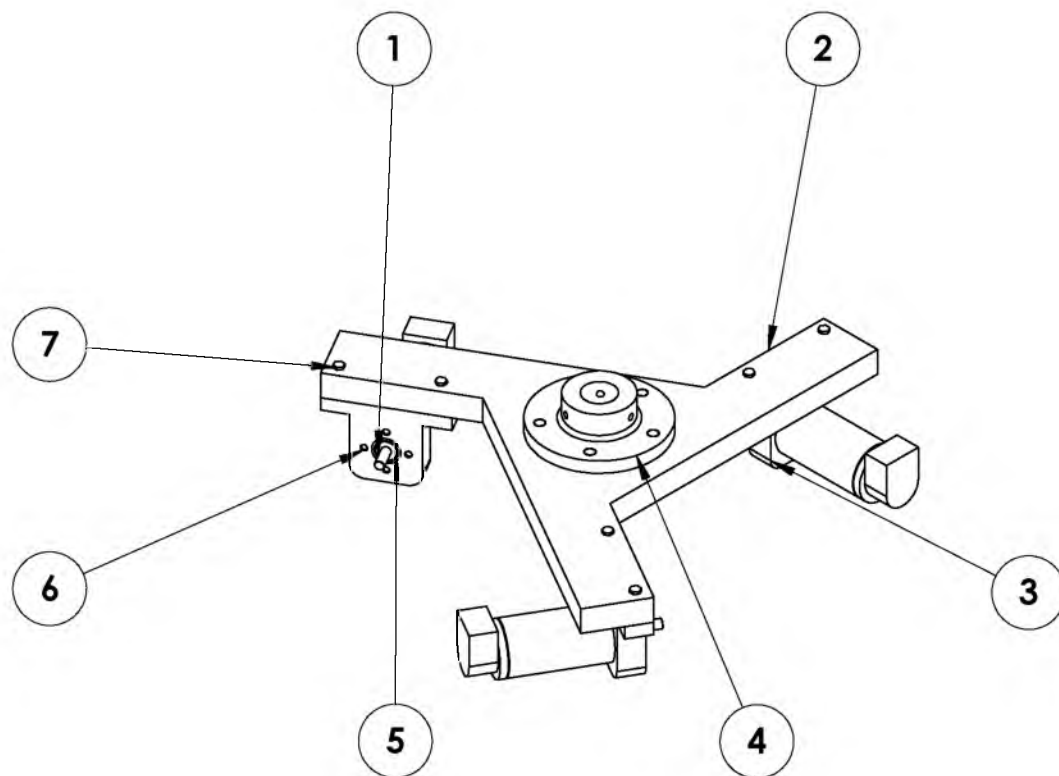
ESCON Feature Comparison Chart



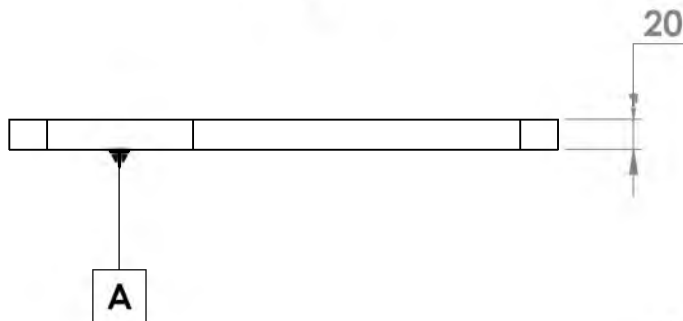
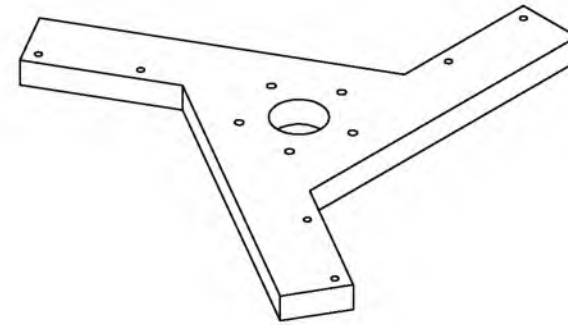
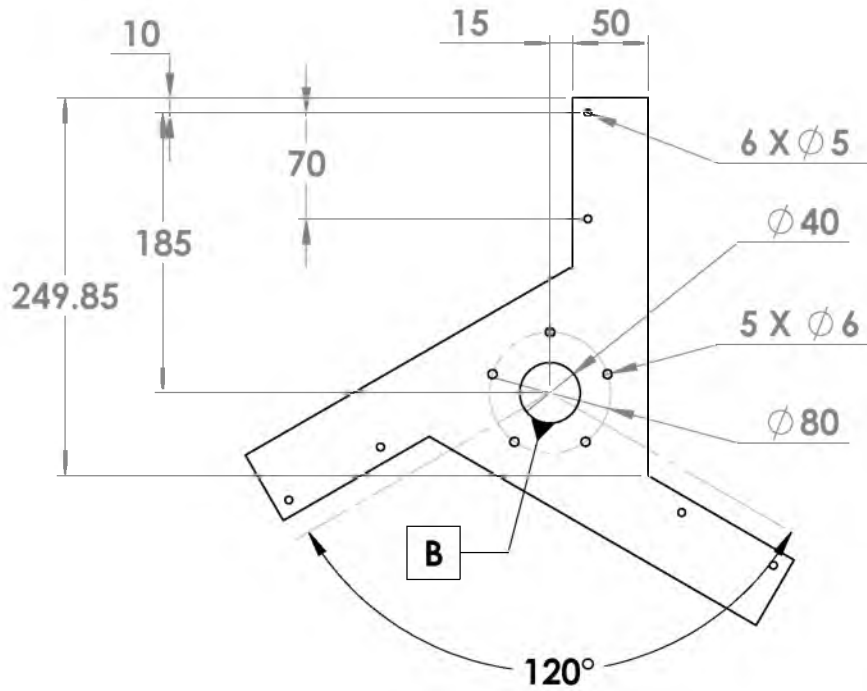
	ESCON 50/5	ESCON 70/10
DC motors up to (continuous / maximum)	250 W / 750 W	700 W / 2100 W
EC motors up to (continuous / maximum)	250 W / 750 W	700 W / 2100 W
Sensors		
	Digital Incremental Encoder (2 channel with or without Line Driver)	Digital Incremental Encoder (2 channel with or without Line Driver)
	DC Tacho	DC Tacho
	Without sensor (DC motors)	Without sensor (DC motors)
	Digital Hall Sensors (EC motors)	Digital Hall Sensors (EC motors)
Operating mode		
	Current controller (torque control), Speed controller (closed and open loop)	Current controller (torque control), Speed controller (closed and open loop)
Electrical data		
Nominal operating voltage V_{CC}	10 - 50 VDC	10 - 70 VDC
Max. output voltage	$0.98 \times V_{CC}$	$0.95 \times V_{CC}$
Max. output current	15 A (<20 s)	30 A (<20 s)
Continuous output current	5 A	10 A
Pulse width modulation frequency	53.6 kHz	53.6 kHz
Sampling rate PI current controller	53.6 kHz	53.6 kHz
Sampling rate PI speed controller	5.36 kHz	5.36 kHz
Max. efficiency	95%	98%
Max. speed (DC)	limited by max. speed (motor) and max. output voltage (controller)	limited by max. speed (motor) and max. output voltage (controller)
Max. speed (EC; 1 pole pair)	150000 rpm	150000 rpm
Built-in motor choke	3 x 30 μ H / 5 A	3 x 15 μ H / 10 A
Inputs/Outputs		
Hall sensor signals	H1, H2, H3	H1, H2, H3
Encoder signals	A, A\, B, B\	A, A\, B, B\
Max. encoder input frequency differential (single-ended)	1 MHz (100 kHz)	1 MHz (100 kHz)
Potentiometers	2	2
Digital inputs	2	2
Digital inputs/outputs	2	2
Analog inputs	2	2
Resolution, Range, Circuit	12-bit, -10...+10 V, differential	12-bit, -10...+10 V, differential
Analog outputs	2	2
Resolution, Range	12-bit, -4...+4 V	12-bit, -4...+4 V
Auxiliary voltage output	+5 VDC (IL \leq 10 mA)	+5 VDC (IL \leq 10 mA)
Hall sensor supply voltage	+5 VDC (IL \leq 30 mA)	+5 VDC (IL \leq 30 mA)
Encoder supply voltage	+5 VDC (IL \leq 70 mA)	+5 VDC (IL \leq 70 mA)
Status Indicators	Operation: green LED / Error: red LED	Operation: green LED / Error: red LED
Environmental conditions		
Temperature – Operation	-30...+45°C	-30...+45°C
Temperature – Extended range	+45...+85°C; Derating: -0.111 A/°C	+45...+82°C; Derating: -0.270 A/°C
Temperature – Storage	-40...+85°C	-40...+85°C
Humidity (condensation not permitted)	5...90%	5...90%
Mechanical data		
Weight	Approx. 204 g	Approx. 259 g
Dimensions (L x W x H)	115 x 75.5 x 24 mm	125 x 78.5 x 27 mm
Mounting holes	for screws M4	for screws M4
Part numbers		
	409510 ESCON 50/5	422969 ESCON 70/10
	Order accessories separately, from page 449	Order accessories separately, from page 449

Apéndice C.

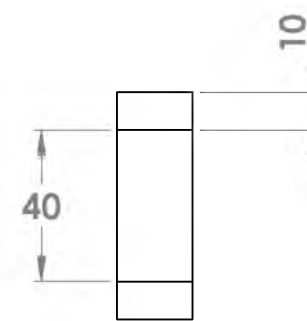
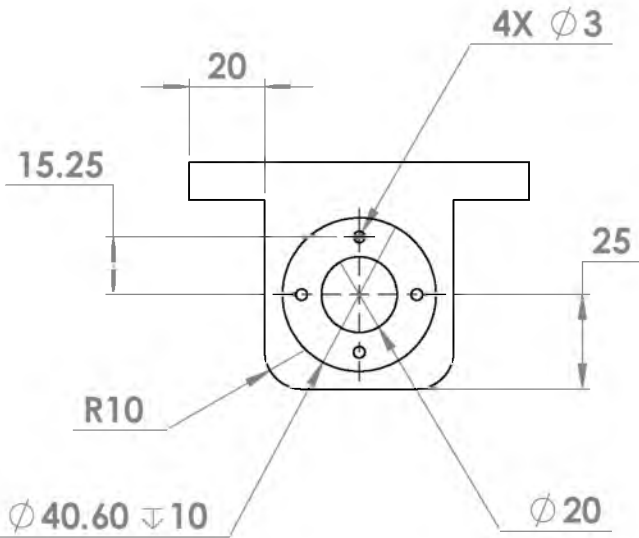
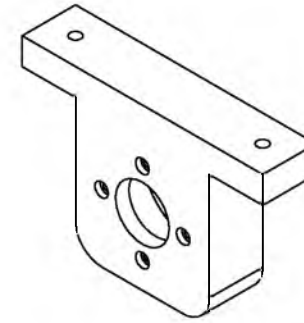
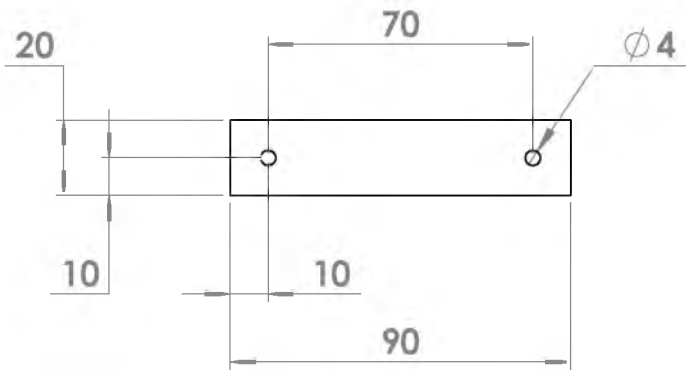
Dibujos técnicos.



7	11	TORNILLO 5mm		1.02.07	
6	12	TORNILLO 3mm		1.02.06	
5	3	RODAMIENTO		1.02.05	
4	1	BRIDA		1.02.04	ALUMINIO
3	3	SOPORTE MOTOR		1.02.03	ALUMINIO
2	1	BASE CENTRAL		1.02.02	ALUMINIO
1	3	MOTOR		1.02.01	
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES		REFERENCIA	MATERIAL
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS	
DIBUJADO	15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA		ESCALA:	
COMPROBADO	15/03/17	NOMBRE		1:10	
COJUNTO:				UNPA	
TITULO:				PLANO N°:	
PLATAFORMA FIJA				1.02	
PLANO DE CONJUNTO					

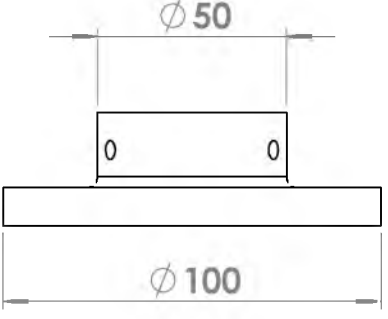
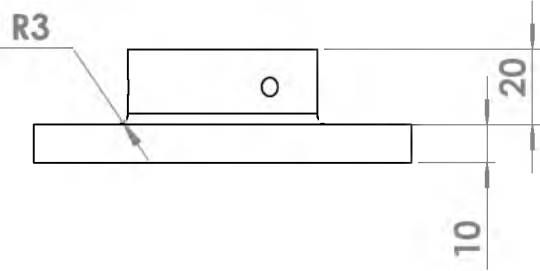
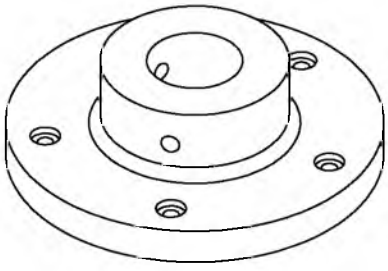
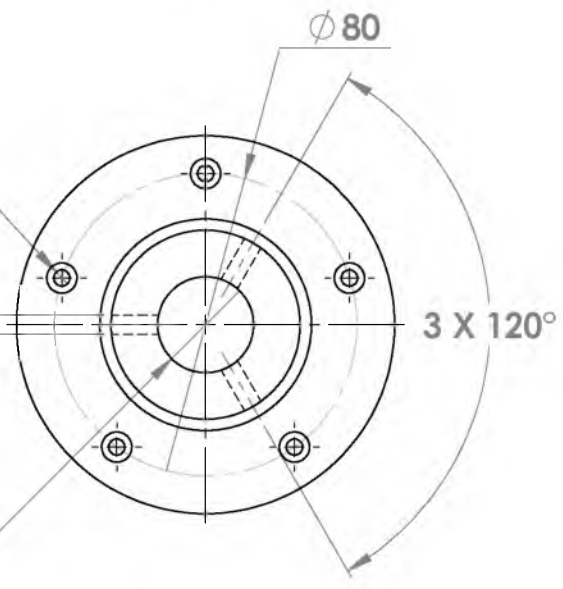


1		BASE CENTRAL			ALUMINIO 7075
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES			NORMA
		FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS
		15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA		ESCALA:
		15/03/17	NOMBRE		1:5
COJUNTO:					UNPA
TITULO:					PLANO N°:
ESTRUCTURA BASE					
BASE CENTRAL					1.02.02

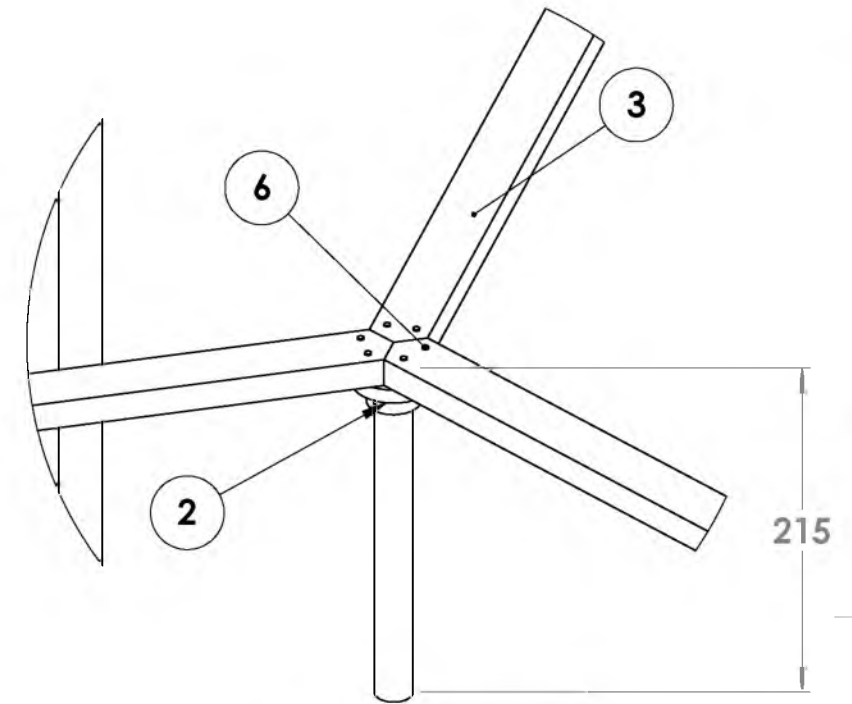
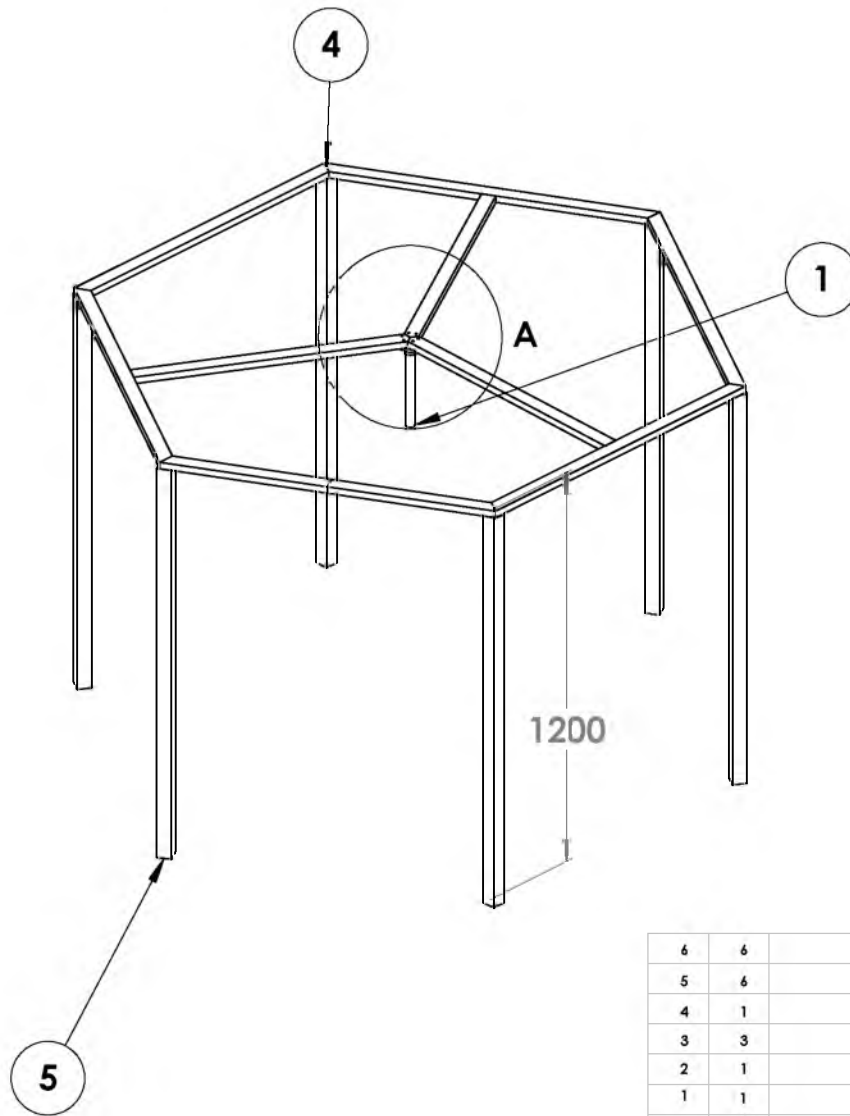


3	3	SOPORTE MOTOR			ALUMINIO 7075
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES			NORMA
		FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS
DIBUJADO	15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA			ESCALA: 1:2
COMPROBADO	15/03/17	NOMBRE			
COJUNTO:					UNPA
TITULO:					PLANO N°:
SOPORTE MOTOR					1.02.03

5 X $\phi 5$
 $\sqcup \phi 8$
 $\downarrow 3$

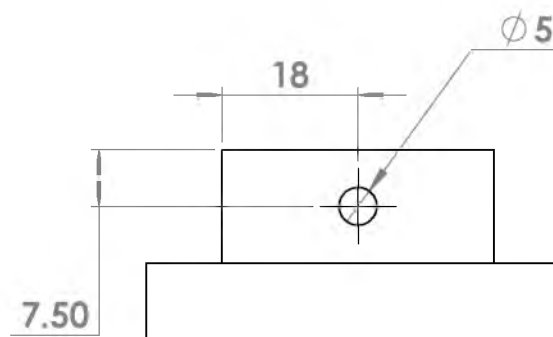
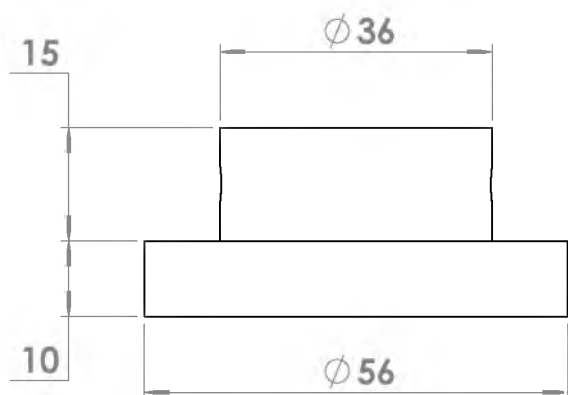
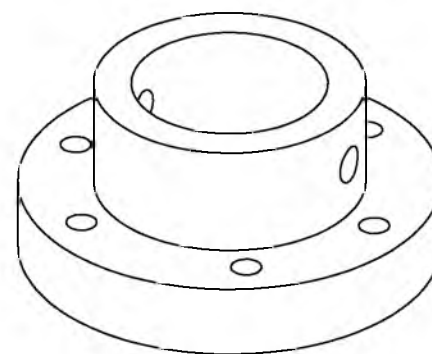
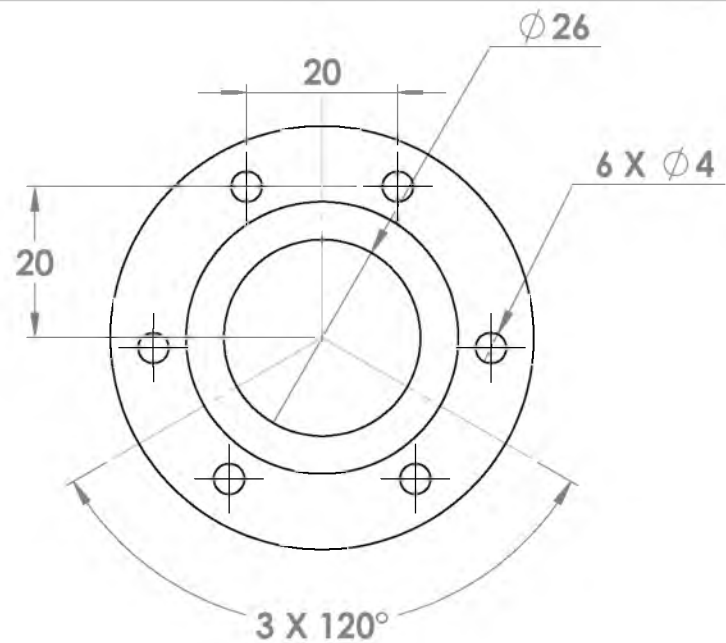


9	3	BRIDA 1			SAE	ACERO 1110
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES			NORMA	MATERIAL
DIBUJADO	FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS		
COMPROBADO	15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA		ESCALA:		
COJUNTO:	15/03/17	NOMBRE		1:2		
TITULO:	PLATAFORMA FIJA				UNPA	
	BRIDA 1				PLANO N°:	
					1.02.04	

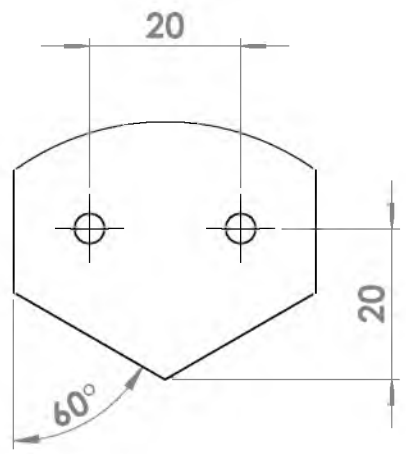
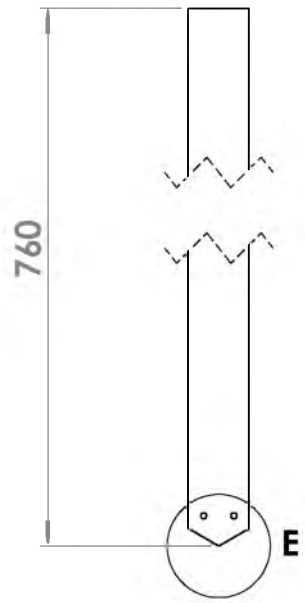


**DETALLE A
ESCALA 1 : 5**

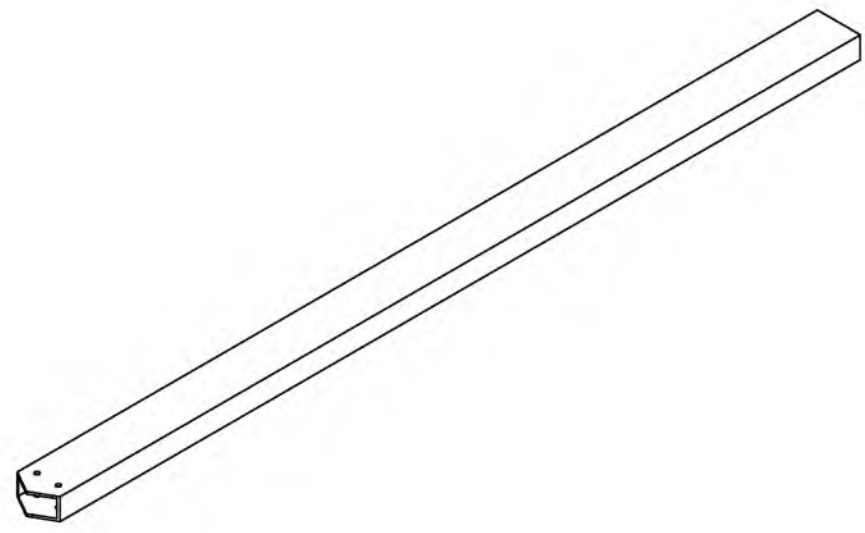
6	6	TORNILLO		1.01.06	ACERO
5	6	SOPORTE PRINCIPAL		1.01.05	ACERO
4	1	ESTRUCTURA POLIGONAL		1.01.04	ACERO
3	3	BARRA HORIZONTAL		1.01.03	ACERO
2	1	BRIDA 1		1.01.02	ALUMINIO
1	1	BARRA CENTRAL		1.01.01	ACERO
MARCA	Nº PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES		REFERENCIA	MATERIAL
DIBUJADO	FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS	
COMPROBADO	15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA		ESCALA:	
	15/03/17	NOMBRE		1:20	
COJUNTO:				UNPA	
TITULO:				PLANO Nº:	
ESTRUCTURA BASE				1.01	
PLANO DE CONJUNTO					



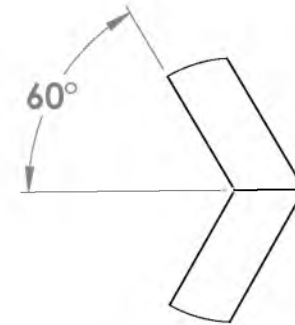
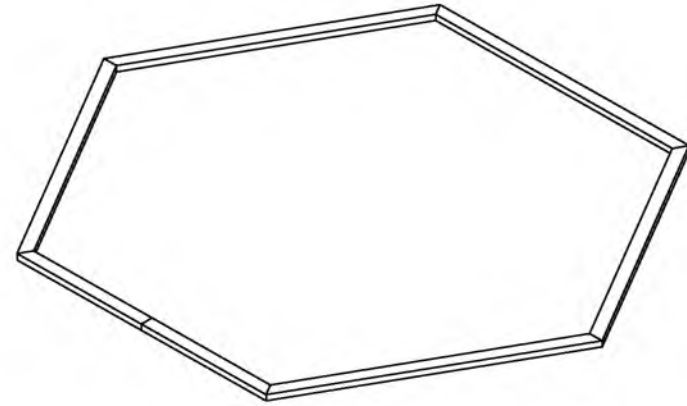
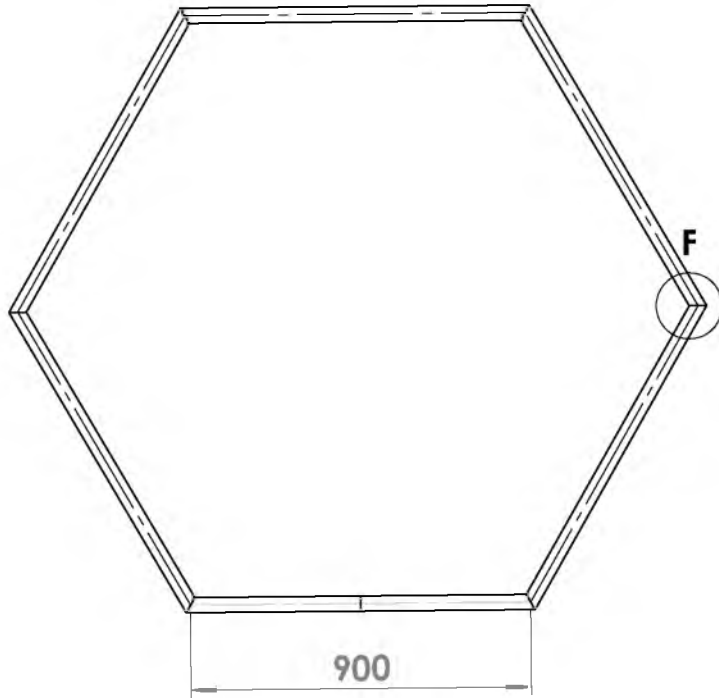
1	1	BRIDA 2			ALUMINIO 7075
MARCA	Nº PIEZA	DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES			NORMA
		FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS
DIBUJADO		15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA		ESCALA:
COMPROBADO		15/03/17	NOMBRE		1:1
COJUNTO:					UNPA
ESTRUCTURA BASE					PLANO Nº:
BRIDA 2					1.01.02



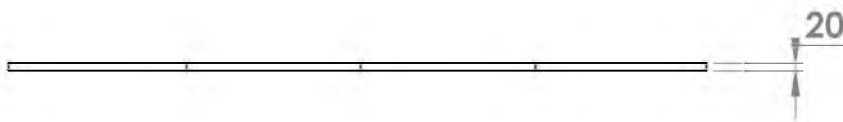
**DETALLE E
ESCALA 1 : 1**



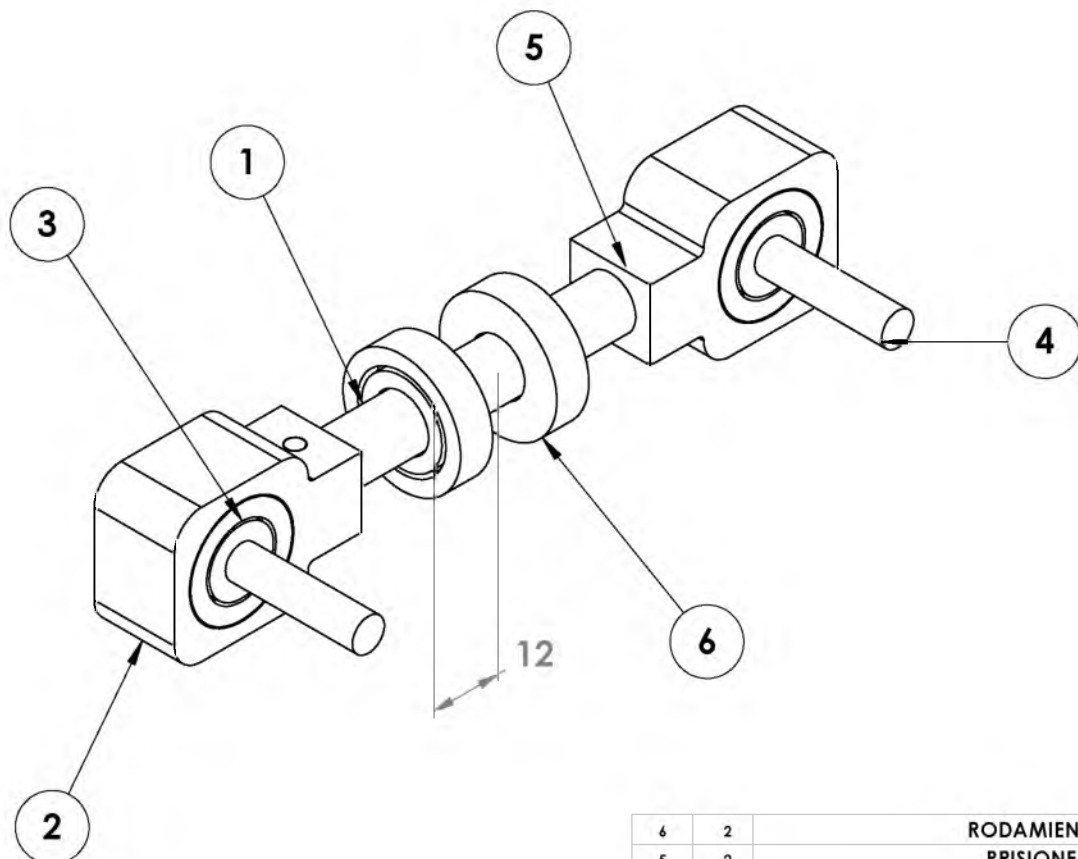
2	6	BARRA HORIZONTAL			ALUMINIO EN AW 6063 T5
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES			NORMA
		FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS
DIBUJADO		15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA		ESCALA: 1:5
COMPROBADO		15/03/17	NOMBRE		
COJUNTO:		ESTRUCTURA BASE			UNPA
TITULO:		BARRA HORIZONTAL			PLANO N°: 1.01.03



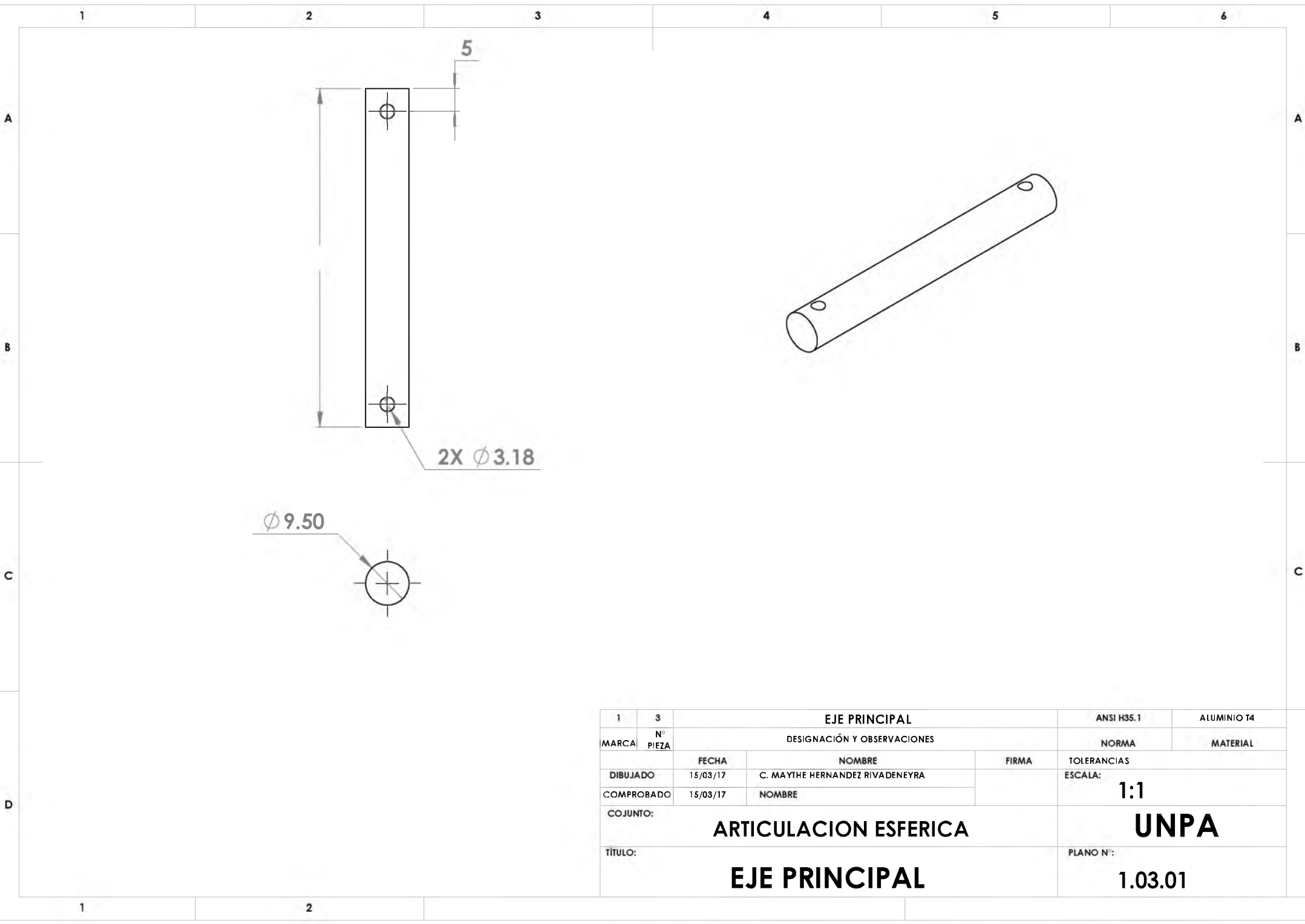
**DETALLE F
ESCALA 1 : 5**



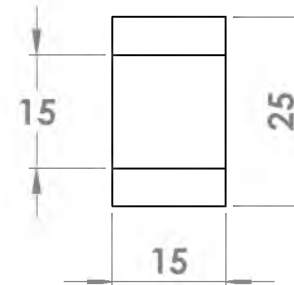
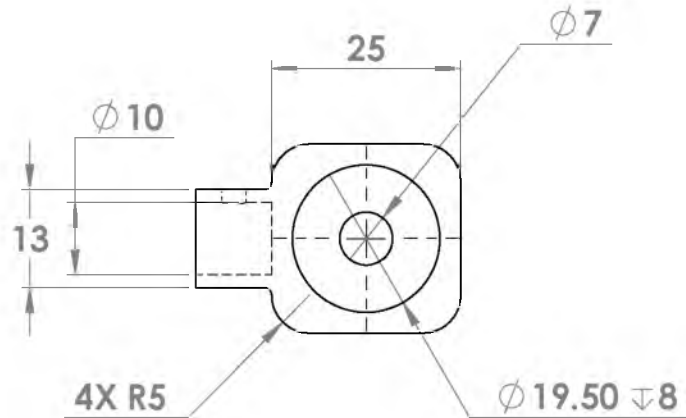
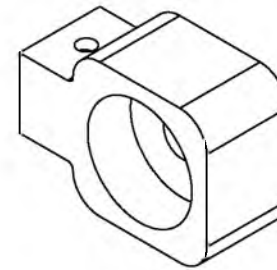
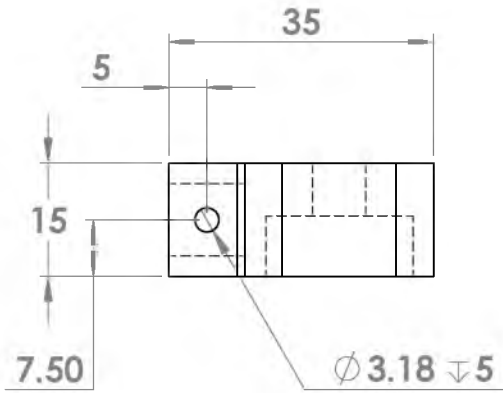
3	3	ESTRUCTURA POLIGONAL			ALUMINIO EN AW 6063 T5
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES			NORMA
		FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS
DIBUJADO		15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA		ESCALA: 1:20
COMPROBADO		15/03/17	NOMBRE		UNPA
COJUNTO: ESTRUCTURA BASE					
TITULO: ESTRUCTURA POLIGONAL					PLANO N°: 1.01.04



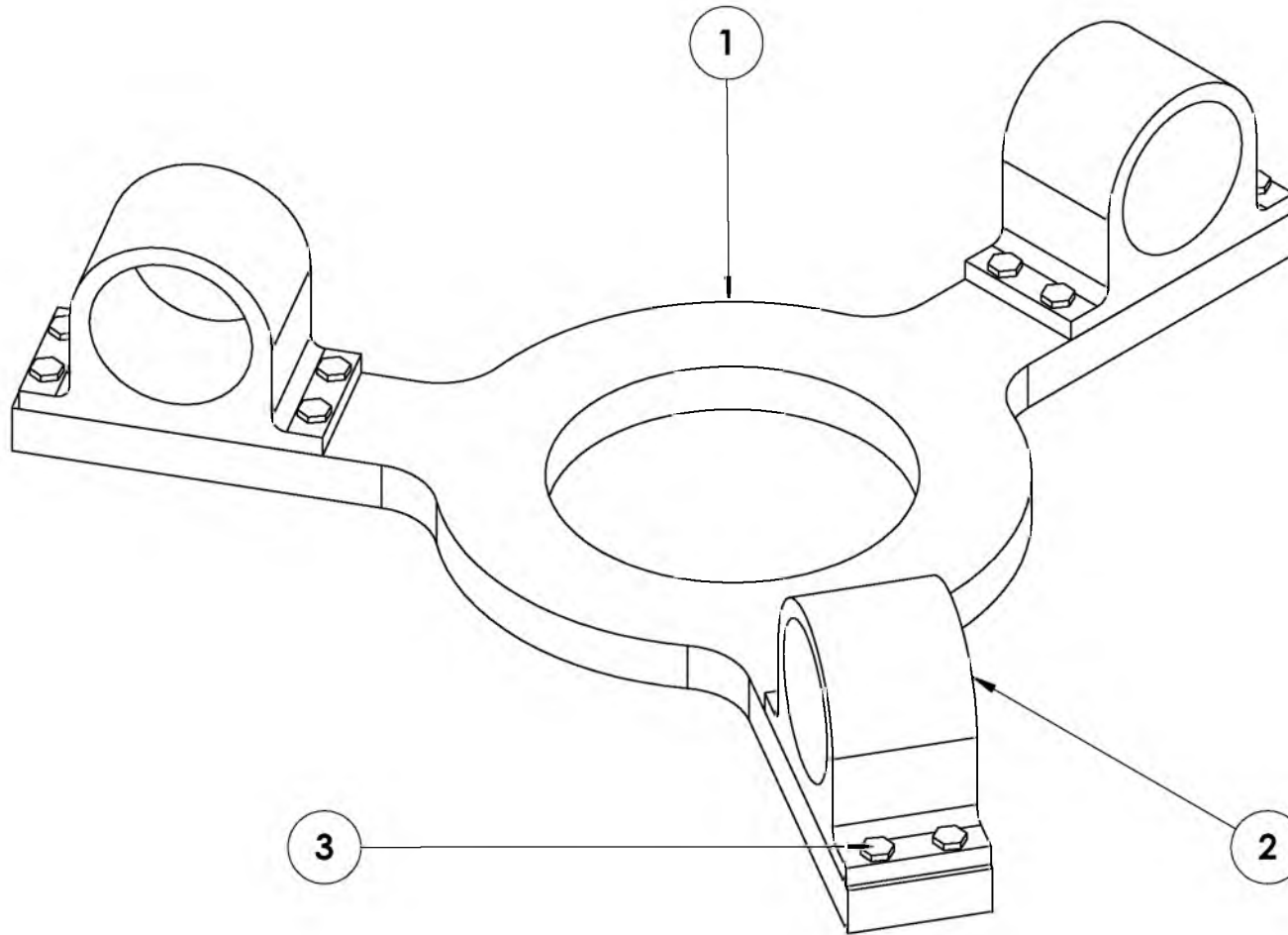
6	2	RODAMIENTO 2			1.03.06	
5	2	PRISIONERO			1.03.05	ALUMINIO T4
4	2	EJE SECUNDARIO			1.03.04	
3	2	RODAMIENTO 1			1.03.03	ALUMINIO 7075
2	2	COPLE			1.03.02	ALUMINIO 7075
1	1	EJE PRINCIPAL			1.03.01	ALUMINIO T4
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES			REFERENCIA	MATERIAL
	FECHA	NOMBRE		FIRMA	TOLERANCIAS	
DIBUJADO	15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA			ESCALA:	
COMPROBADO	15/03/17	NOMBRE			1:1	
COJUNTO:					UNPA	
TITULO:					PLANO N°:	
ARTICULACION ESFERICA					1.03	
PLANO DE CONJUNTO						



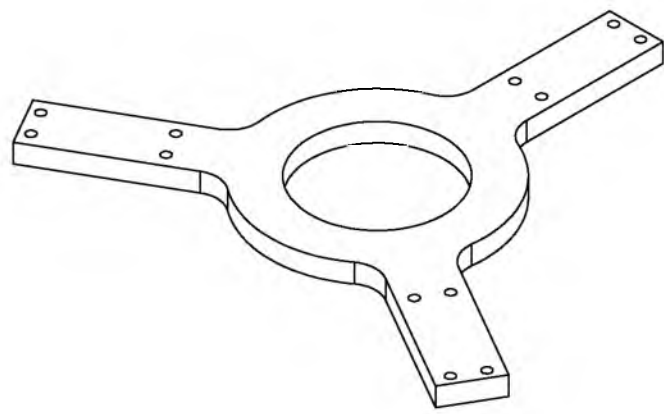
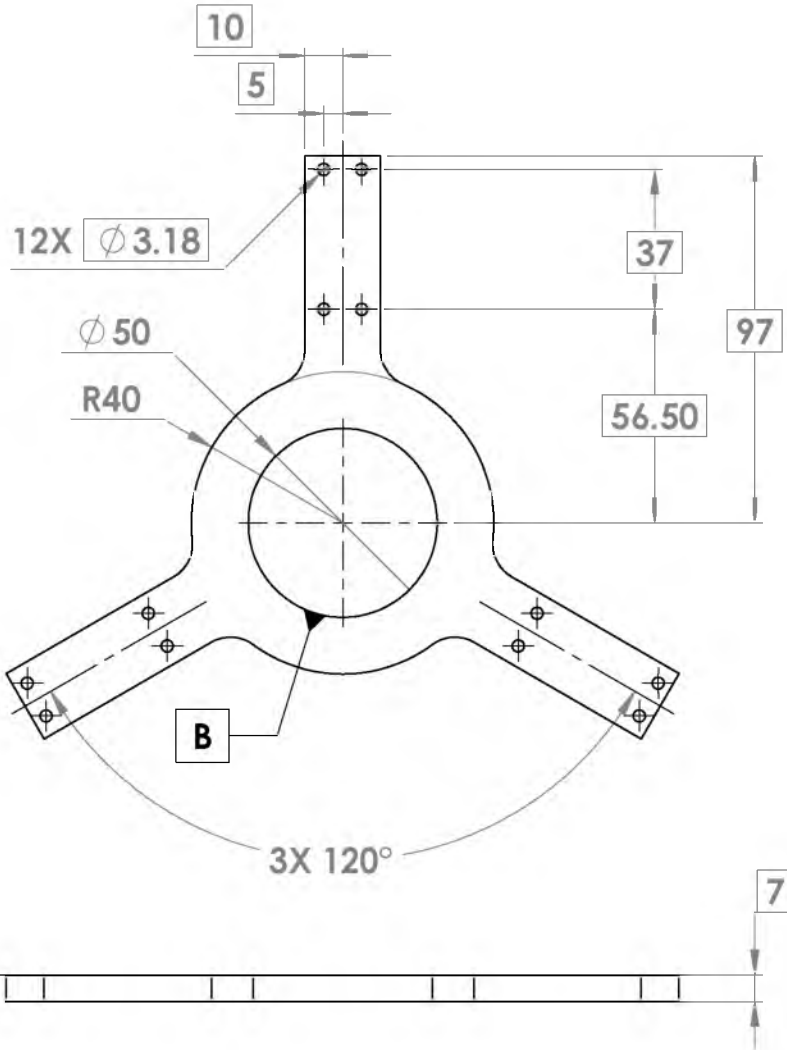
1	3	EJE PRINCIPAL			ANSI H35.1	ALUMINIO T4
MARCA	Nº PIEZA	DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES			NORMA	MATERIAL
		FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS	
DIBUJADO		15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA		ESCALA: 1:1	
COMPROBADO		15/03/17	NOMBRE			
COJUNTO:		ARTICULACION ESFERICA			UNPA	
TITULO:		EJE PRINCIPAL			PLANO Nº: 1.03.01	



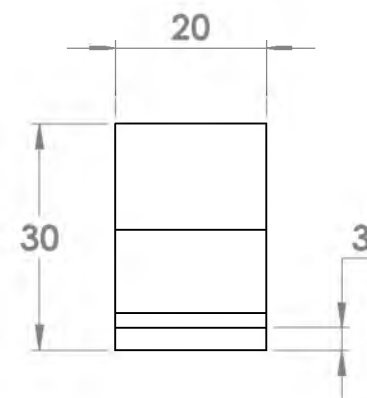
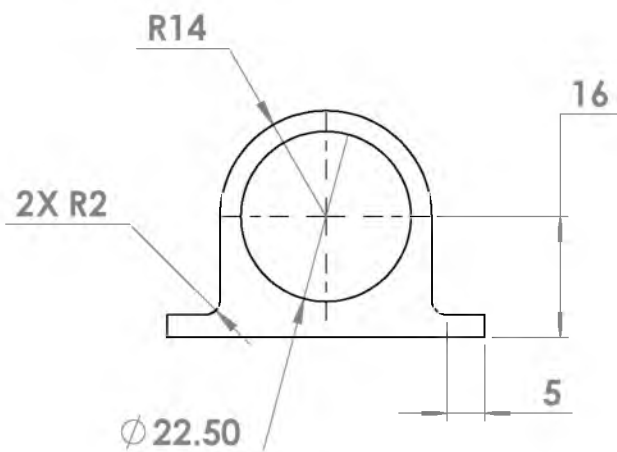
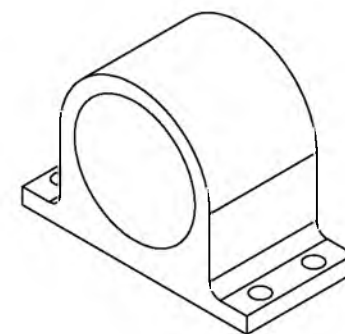
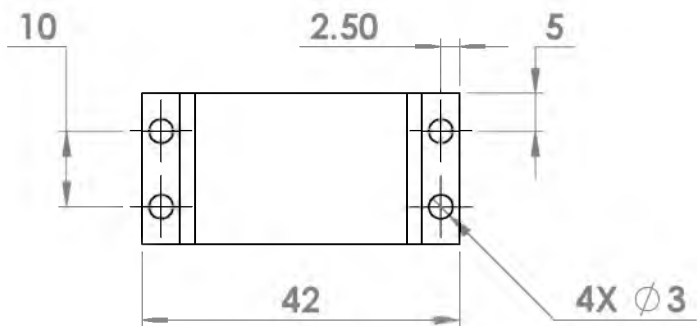
3		6		COPLE		ALUMINIO 7075	
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES				NORMA	MATERIAL
		FECHA	NOMBRE		FIRMA	TOLERANCIAS	
DIBUJADO	15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA			ESCALA: 1:1		
COMPROBADO	15/03/17	NOMBRE			UNPA		
COJUNTO:						PLANO N°:	
ARTICULACION ESFERICA						1.03.02	
TITULO:							
COPLE							



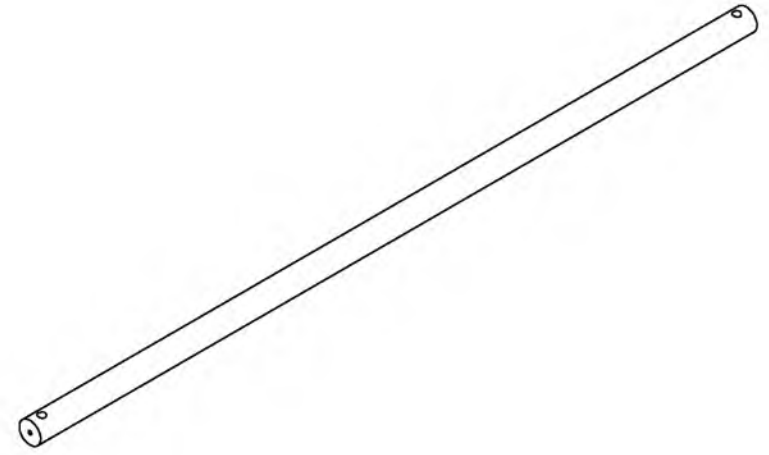
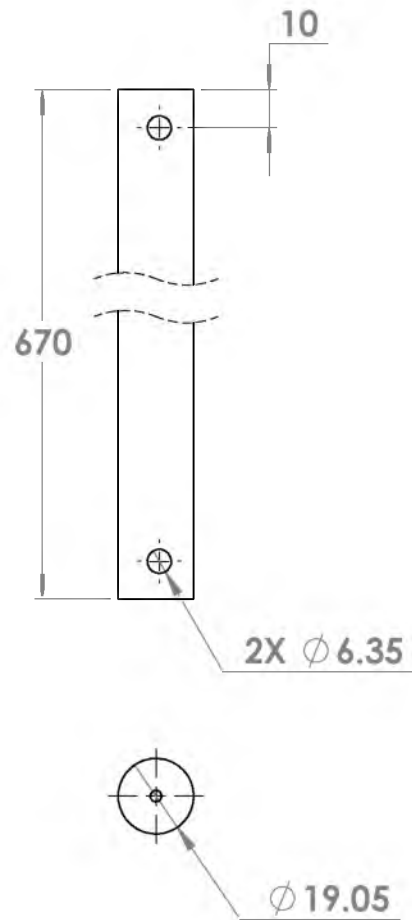
3	12	TORNILLO		1.04.03	A - 307
2	3	SOPORTE		1.04.02	ALUMINIO 7075
1	1	PLATAFORMA MOVIL		1.04.01	ALUMINIO 7075
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES		REFERENCIA	MATERIAL
DIBUJADO	FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS	
COMPROBADO	15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA		ESCALA:	
	15/03/17	NOMBRE		1:1	
COJUNTO:				EFFECTOR FINAL	
TITULO:				UNPA	
				PLANO N°:	
				1.04	



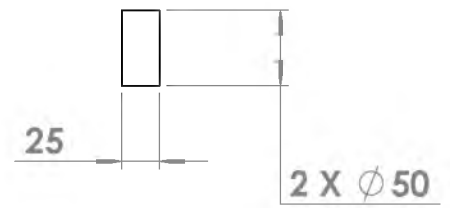
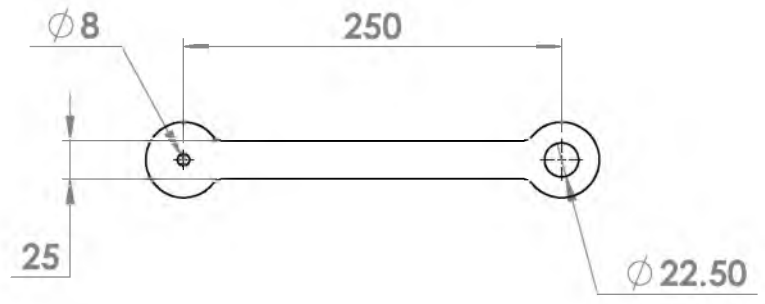
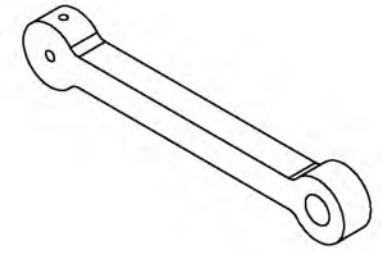
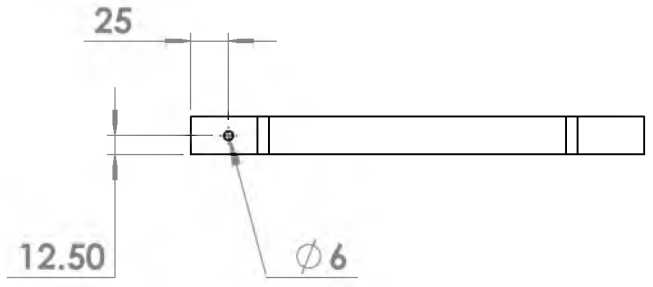
1	1	PLATAFORMA MOVIL			ALUMINIO 7075
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES			NORMA
		FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS
DIBUJADO	15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA			ESCALA:
COMPROBADO	15/03/17	NOMBRE			1:2
COJUNTO:					UNPA
TITULO:					PLANO N°:
PLATAFORMA MOVIL					1.04.01



2	3	SOPORTE			ALUMINIO 7075
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES			NORMA
		FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS
		15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA		ESCALA: 1:1
		15/03/17	NOMBRE		
COJUNTO:		BASE MOVIL			UNPA
TITULO:		SOPORTE			PLANO N°: 1.04.02



4	6	ESLABON 2			ANSI H35.1	ALUMINIO T4
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES			NORMA	MATERIAL
		FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS	
DIBUJADO	15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA			ESCALA:	
COMPROBADO	15/03/17	NOMBRE			1:2	
COJUNTO:					UNPA	
TITULO:					PLANO N°:	
ESLABON 2					1.05	



4	3	ESLABON PRINCIPAL			ALUMINIO 7075
MARCA	N° PIEZA	DESIGNACION Y OBSERVACIONES			NORMA
		FECHA	NOMBRE	FIRMA	TOLERANCIAS
DIBUJADO	15/03/17	C. MAYTHE HERNANDEZ RIVADENEYRA			ESCALA:
COMPROBADO	15/03/17	NOMBRE			1:2
COJUNTO:					UNPA
TITULO:					PLANO N°:
ESLABON PRINCIPAL					1.06