





**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN**

---

Campus Loma Bonita

**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

**OVILLOS RACIONALES: CLASIFICACIÓN  
Y APLICACIONES**

**T E S I S**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADA EN MATEMÁTICAS  
APLICADAS**

**PRESENTA:**

**ARIANNA ARMAS REYES**

**DIRECTORA DE TESIS:**

**DRA. AURA LUCINA KANTÚN MONTIEL**

LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO 2024



# UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

## LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

LA PRESENTE TESIS TITULADA "OVILLOS RACIONALES: CLASIFICACIÓN Y APLICACIONES" PRESENTADA POR LA SUSTENTANTE DE LA LICENCIATURA C. ARIANNA ARMAS REYES BAJO LA DIRECCIÓN DE LA DRA. AURA LUCINA KANTÚN MONTIEL, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITÉ EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS.

---

DRA. AURA LUCINA KANTÚN  
MONTIEL  
DIRECTORA

---

DR. VÍCTOR MANUEL  
MÉNDEZ SALINAS  
PRESIDENTE

---

DRA. ANAHÍ ROJAS  
CARRASCO  
SECRETARIA

---

DRA. AURA LUCINA KANTÚN  
MONTIEL  
VOCAL



# Universidad del Papaloapan

FECHA:	28 de Agosto del 2024
ÁREA:	Vice-Rectoría Académica
OFICIO NÚMERO:	UNPA/VRA/264/2024
ASUNTO:	Autorización de Impresión de Tesis.

**C. ARIANNA ARMAS REYES.**  
**P R E S E N T E:**

Con base en el artículo 120 del reglamento de alumnos, por medio de la presente se aprueba la impresión de la tesis titulada *“Ovillos racionales: Clasificación y aplicaciones”* así como la programación del examen profesional bajo la dirección de la Dra. Aura Lucina Kantún Montiel.

Sin más por el momento aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente.  
terra ubérrima, mens aperta  
Bou Lo-tama, chi jí jú



VICE-RECTORIA  
ACADEMICA

  
M.C HÉCTOR LOPEZ ARJONA  
Vicerrector Académico.

C.c.p. Dr. José Nobel Méndez Alcever.- Jefa de Carrera de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas  
C.c.p. I.P. Yesenia Barrientos Arenal - Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
C.c.p. Dra. Aura Lucina Kantún Montiel - Directora de Tesis.  
C.c.p. Archivo.

OAXACA



# UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

Oficio No. LMA035/2024

Asunto: Asignación de sinodales de tesis  
Loma Bonita Oaxaca a 23 de agosto del 2024

**M.E. Yesenia Barrientos Arenal**  
Jefa del departamento de servicios escolares

## PRESENTE

Por este medio le informo que la Vicerrectoría Académica, ha designado a los siguientes profesores como sinodales del examen profesional de la alumna **Arianna Armas Reyes**, quien defenderá su trabajo de tesis titulado *Ovillos Racionales: Clasificación y aplicaciones*", para obtener el título de Licenciada en Matemáticas Aplicadas.

### Titulares:

Presidente: Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas

Secretaria: Anahí Rojas Carrascos

Vocal: Aura Lucina Kantún Montiel

### Suplentes:

Dr. Héctor Hugo Sánchez Hernandez

Dr. José Nobel Méndez Alcocer

Sin otro particular me despido quedando a sus ordenes para cualquier aclaración.

Atentamente

Dr. José Nobel Méndez Alcocer

Jefe de carrera de la Lic. en Matemáticas Aplicadas



Vo.Bo.

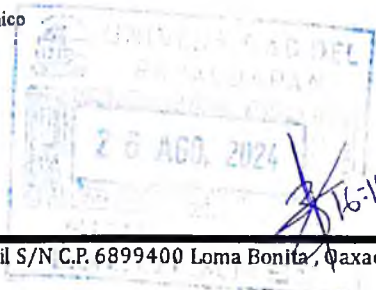
M.C. Héctor López Arjona

Vicerrector Académico



c.c.p. M.C. Héctor López Arjona. Vicerrector académico

c.c.p. Archivo



---

*Dedicado a Dios y a mi familia.*

# Agradecimientos

Agradezco a Dios, por ser mi luz y guía constante. A mis padres, por su amor infinito, su sacrificio constante y su apoyo en cada etapa de mi vida. Por ser la fuente de mi fuerza, enseñándome con su ejemplo el verdadero significado de la perseverancia, el esfuerzo y la dedicación. A mi amado esposo, por ser mi compañero incansable, mi roca y mi mayor motivador. A mi pequeña familia por su amor y compañía. A Mía, Brownie, Chuleta y Kranky, cuyas travesuras y cariño incondicional han llenado mis días de alegría y ternura.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas y entidades que han sido fundamentales en la realización de este trabajo. Deseo agradecer a mi directora de tesis, la Dra. Aura Lucina Kantún Montiel, por su invaluable orientación, apoyo y paciencia a lo largo de este proyecto. Su conocimiento y dedicación fueron esenciales para el desarrollo de esta investigación.

Agradezco también al Dr. José Nobel Méndez Alcocer, jefe de carrera, por su continuo respaldo y apoyo durante mis años de estudiante.

Mi más sincero reconocimiento a los revisores de mi tesis, al Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas y a la Dra. Anahí Rojas Carrasco, por sus valiosas observaciones y aportes que enriquecieron este trabajo.

Extiendo mi gratitud al Vicerrector Académico, M.C. Héctor López Arjona, por su apoyo institucional y su compromiso con la excelencia académica.

Finalmente, agradezco a la Universidad del Papaloapan por brindarme las herramientas y el entorno necesario para mi desarrollo académico y profesional. Sin el respaldo de esta casa de estudios, este logro no habría sido posible.

A todos ustedes, muchas gracias.

# Resumen

Podemos imaginar a los ovillos racionales como dos cuerdas que se enredan dentro de una esfera con los extremos pegados a la superficie de esta misma, con la condición de que se pueden desenredar simplemente girando y torciendo los extremos. En 1970, J. H. Conway introdujo la noción de ovillos racionales asociando una fracción continua a cada uno de ellos y formuló el teorema en el que se establece que dos ovillos racionales son equivalentes si y sólo si sus fracciones asociadas son iguales.

La presente tesis tiene como objetivo principal la demostración del Teorema de Conway siguiendo las ideas del artículo *On the classification of rational tangles* de Louis H. Kauffman y Sofia Lambropoulou. Para esto, se muestran detalladamente los conceptos básicos sobre la teoría de ovillos. Asimismo se analizan ejemplos de la asignación de un número racional a un ovillo dado y viceversa, de un ovillo a un número racional. También se presenta una aplicación de la teoría de ovillos racionales a la biología estudiando el comportamiento de las enzimas y el ADN vistos como operaciones en un ovillo racional.

# Abstract

We can imagine rational tangles as two strings that get tangled inside a sphere with their ends attached to its surface, with the condition that they can be untangled simply by twisting and turning the ends. In 1970, J. H. Conway introduced the notion of rational tangles by associating a continued fraction with each of them and formulated the theorem that states two rational tangles are equivalent if and only if their associated fractions are equal.

The main objective of this thesis is to demonstrate Conway's Theorem by following the ideas from the article *On the Classification of Rational Tangles* by Louis H. Kauffman and Sofia Lambropoulou. To achieve this, the basic concepts of tangle theory are detailed. Additionally, examples of assigning a rational number to a given tangle and vice versa, from a tangle to a rational number, are analyzed. An application of rational tangle theory to biology is also presented by studying the behavior of enzymes and DNA seen as operations on a rational tangle.

# Índice general

Resumen	VI
Abstract	VII
Introducción	1
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Funciones Continuas . . . . .	3
1.2. Fracciones continuas . . . . .	6
1.3. Nudos y ovillos . . . . .	19
1.4. Movimientos de Reidemeister . . . . .	22
<b>2. Ovillos racionales</b>	<b>24</b>
2.1. Ovillos enteros . . . . .	24
2.1.1. Torceduras . . . . .	24
2.1.2. Ovillos enteros . . . . .	27
2.2. Operaciones en los ovillos . . . . .	30
2.3. Ovillos racionales . . . . .	48
2.3.1. Construcción de ovillos racionales . . . . .	48
2.3.2. Isotopías de ovillos racionales . . . . .	55
2.3.3. Ovillos racionales en forma estándar . . . . .	65
<b>3. Prueba del Teorema de Conway</b>	<b>69</b>
3.1. Fracción continua de un ovillo racional . . . . .	69
3.2. Forma canónica de los ovillos racionales . . . . .	85
3.3. Demostración del teorema de Conway . . . . .	93

3.3.1. Ejemplos . . . . .	95
3.4. Ovillos en biología . . . . .	99
<b>Conclusiones</b>	<b>105</b>

# Introducción

Desde los inicios de la humanidad, el ser humano ha utilizado de manera ingeniosa nudos, trenzas y enlaces presentes en la naturaleza. Desde la construcción de herramientas primitivas hasta sistemas avanzados de registro y contabilidad como los quipus incas. Estos artefactos además de demostrar las habilidades del ser humano, también demuestran la capacidad de comprensión intuitiva de las estructuras complejas que pueden surgir de simples actos como torcer y enlazar.

A finales del siglo XVII surgió la importancia del estudio de la teoría de nudos para entender fenómenos naturales, tales como las órbitas de los planetas, una contribución de Gauss [5], la descripción de los átomos vistos como nudos, teoría de Lord Kelvin [24], aplicaciones en la biología molecular [3], la criptografía [12], física cuántica [25], química [4], etc.

En el contexto matemático y científico, la teoría de los ovillos racionales surgió como un campo de estudio fascinante que vincula la topología con diversas disciplinas, desde la biología molecular hasta la física cuántica. O. Simony en 1882 [13] fue el pionero en relacionar nudos con fracciones continuas [21]. En 1929 Reidemeister [19], calculó el grupo de nudos de una clase especial de nudos racionales. No fue hasta 1956 que Schubert [20] clasificó los nudos racionales al encontrar formas canónicas representándolos como nudos de dos cuerdas. El teorema de Schubert fue reformulado por J. H. Conway [7] en términos de Ovillos racionales y en 1970, introdujo la noción de ovillos racionales asociando una fracción continua a cada uno de ellos.

En el presente trabajo, analizaremos los conceptos de ovillos, sus propiedades fundamentales y sus demostraciones. Realizaremos ilustraciones detalladas que facilitarán al lector la comprensión del teorema de Conway, el cual establece que dos ovillos racionales son equivalentes si y sólo si sus fracciones asociadas son iguales.

Para alcanzar este objetivo, hemos dividido el trabajo en tres capítulos. En el capítulo 1, exploraremos diversos conceptos esenciales en el ámbito de la topología para el estudio de los

ovillos racionales. Comenzaremos con el concepto de funciones continuas y cómo se preserva la estructura topológica entre dos espacios. Analizaremos las fracciones continuas, lo cual será crucial para entender la estructura de un ovillo racional visto como un número racional. Posteriormente, examinaremos las características de los  $n$ -ovillos, centrándonos particularmente en los 2-ovillos y su representación gráfica en un diagrama de ovillo. Culminaremos el primer capítulo con las isotopías llamadas movimientos de Reidemeister, que nos permitirán demostrar equivalencias entre ovillos.

En el capítulo 2, detallaremos la construcción y características de los ovillos enteros. Definiremos los ovillos más básicos: el ovillo cero, el ovillo infinito, así como los ovillos horizontales y verticales. Luego, presentaremos las definiciones de los ovillos  $[1]$  y  $[-1]$ , que resultan de realizar torceduras horizontales y verticales, positivas y negativas. Además, exploraremos las operaciones básicas en los ovillos, como la suma y la multiplicación, para así poder definir la construcción de un ovillo racional. Abordaremos un conjunto de isotopías, como la rotación, la reflexión y el flype. Estas isotopías serán esenciales para que, una vez construido un ovillo racional utilizando la definición de ovillos racionales, podamos obtener su forma estándar.

Posteriormente, en el capítulo 3, examinaremos la forma canónica de los ovillos racionales y estudiaremos una manera algebraica de describir un ovillo racional, esta es, la fracción continua de un ovillo racional. La motivación de esta propuesta de investigación es la demostración del teorema de Conway. Para ello, siguiendo las ideas del artículo *On the classification of rational tangles* de Louis H. Kauffman y Sofia Lambropoulou [16], se presentarán dos teoremas que nos permitirán demostrar la biyección: el Teorema 3.3.1 y el Teorema 3.3.2. Juntos prueban que dos ovillos racionales son isotópicos si y sólo si tienen la misma fracción. Además, ejemplificaremos gráficamente estos teoremas. Finalmente, ilustramos una aplicación de los ovillos racionales en biología, específicamente en el ADN y las enzimas vistas como ovillos y su comportamiento.

# Capítulo 1

## Preliminares

El objetivo de este capítulo es recordar las definiciones básicas de espacios topológicos y funciones continuas. Estos conceptos proporcionan la base teórica para la construcción y comprensión de nuestro objeto de estudio: los ovillos. Además, estudiaremos fracciones continuas junto con diversas proposiciones y lemas que nos facilitarán, en etapas posteriores, la obtención de la fracción continua de un ovillo, como se explica en la Definición 3.1.1. Discutiremos sobre las isotopías de ovillos racionales conocidas como movimientos de Reidemeister, explorando cómo estas transformaciones permiten entender y manipular las estructuras topológicas de los ovillos.

Las definiciones básicas sobre topología se pueden consultar en [1], [9], [15] y [17]. Para el estudio de la teoría de ovillos referimos al lector a [7], [11], [16] y [19].

### 1.1. Funciones Continuas

**Definición 1.1.1** Una **topología** sobre un conjunto  $X$  es una colección  $\mathcal{T}$  de subconjuntos  $X$  con las siguientes propiedades:

1.  $\emptyset$  y  $X$  pertenecen a  $\mathcal{T}$ .
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de  $\mathcal{T}$  pertenece a  $\mathcal{T}$ .
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de  $\mathcal{T}$  pertenece a  $\mathcal{T}$ .

Un conjunto  $X$  para el cual se ha definido una topología  $\mathcal{T}$  se llama **espacio topológico**.

A menudo omitiremos hacer mención específica de  $\mathcal{T}$  si no existe confusión.

Un espacio topológico importante es  $\mathbb{R}^n$ . La topología usual para  $\mathbb{R}^n$  está formada por uniones de bolas abiertas que describiremos en la Definición 1.1.3.

**Definición 1.1.2** Un **espacio métrico** es un par  $(X, d)$ , donde  $X$  es un conjunto no vacío y  $d$  es una función real definida en  $X \times X$ , llamada **distancia** o **métrica**, que satisface los siguientes axiomas:

- i)  $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ , y  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- ii)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ ,
- iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ .

**Definición 1.1.3** La **bola abierta**, con centro en  $x$  y radio  $\varepsilon$ , en  $\mathbb{R}^n$ , denotada como  $B_\varepsilon(x)$ , se define como

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Donde  $d$  es la distancia euclidiana en  $\mathbb{R}^n$  dada por

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Todo subconjunto de un espacio topológico puede verse como espacio topológico con la topología inducida. Esto es, si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico y  $Y \subset X$ , los abiertos en  $Y$  son las intersecciones de los subconjuntos abiertos de  $X$  con  $Y$ .

Un subespacio importante de  $\mathbb{R}^n$ , es la bola unitaria rellena. Este será el espacio topológico con el que trabajaremos a lo largo de este proyecto.

**Definición 1.1.4** La **bola unitaria rellena** en  $\mathbb{R}^n$ , denotada como  $\mathbb{B}^n$ , se define como

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

La **frontera** de  $\mathbb{B}^n$ , denotada como  $\partial\mathbb{B}^n$ , se define como

$$\partial\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Esto es,  $\partial\mathbb{B}^n$  es el conjunto de todos los puntos en  $\mathbb{R}^n$  que tienen una distancia de 1 desde el origen. A la frontera de  $\mathbb{B}^n$  se le denota como  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Ahora introduciremos la noción de función continua que es de gran importancia porque nos permite definir homeomorfismos, a través de los cuales encontramos invariantes topológicos.

**Definición 1.1.5** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Se dice que una función  $f : X \rightarrow Y$  es **continua** si para cada subconjunto abierto  $V$  de  $Y$ , el conjunto  $f^{-1}(V)$  es un subconjunto abierto de  $X$ .

La idea central detrás de una función continua es que asocie puntos cercanos del dominio de la función a puntos cercanos en el rango.

**Definición 1.1.6** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, sean  $A \subset X$  y  $B \subset Y$ . Se dice que una función  $f : X \rightarrow Y$  es una **función de pares**, denotada por  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , si  $f(A) = B$ .

**Definición 1.1.7** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos; sea  $f : X \rightarrow Y$  una biyección. Si la función  $f$  y la función inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  son ambas continuas, entonces se dice que  $f$  es un **homeomorfismo**.

Un homeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  establece una correspondencia biyectiva no solo entre  $X$  y  $Y$ , sino también entre las colecciones de conjuntos abiertos de  $X$  y  $Y$ .

Por lo tanto, cualquier propiedad de  $X$  que se exprese completamente en términos de la topología de  $X$ , nos proporciona, a través de la correspondencia  $f$ , la propiedad correspondiente para el espacio  $Y$ . A esta propiedad de  $X$  se le denomina **propiedad topológica de  $X$** .

**Definición 1.1.8** Una **trayectoria** o **arco** en el espacio topológico  $X$  es una función continua  $\alpha : I \rightarrow X$  donde  $I = [0, 1]$ . Los **extremos** de la trayectoria  $\alpha$  son los puntos  $\alpha_0 = \alpha(0)$  y  $\alpha_1 = \alpha(1)$ . En este caso se dice que  $\alpha$  es una trayectoria de  $\alpha_0$  a  $\alpha_1$ .

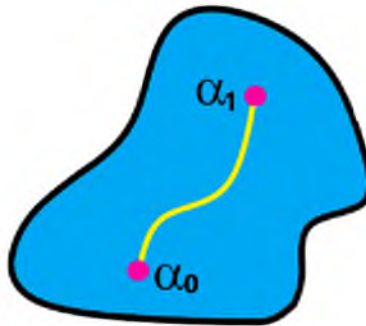


Figura 1.1: Trayectoria de  $\alpha_0$  hasta  $\alpha_1$

**Definición 1.1.9** Sea  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  un conjunto de  $n$  arcos en un espacio  $X$ . Definimos la **frontera** de  $A$  como  $\partial A = \{\alpha_1(0), \alpha_1(1), \dots, \alpha_n(0), \alpha_n(1)\}$ .

En otras palabras, la frontera del conjunto de  $n$  arcos  $A$  son los extremos de todos los arcos contenidos en  $A$ .

Ahora supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua inyectiva, donde  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos. Sea  $Z = f(X)$ , considerado como un subespacio de  $Y$ ; entonces, la función  $f' : X \rightarrow Z$  obtenida al restringir el rango de  $f$ , es biyectiva. Si ocurre que  $f'$  es un homeomorfismo de  $X$  con  $Z$ , decimos que la aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es un encaje de  $X$  en  $Y$ .

En otras palabras,

**Definición 1.1.10** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos. Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  se denomina **encaje** si cumple con las siguientes propiedades:

1. **Inyectividad:** La función  $f$  es inyectiva, lo que significa que si  $x_1$  y  $x_2$  son puntos diferentes en  $X$ , entonces  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$  son puntos diferentes en  $Y$ .
2. **Homeomorfismo con su imagen:** La restricción de  $f$  a  $f(X)$  es un homeomorfismo entre  $X$  y  $f(X)$ , lo que significa que  $f$  y su inversa  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  son funciones continuas.

## 1.2. Fracciones continuas

El **Algoritmo de Euclides** es un método clásico y eficaz utilizado para encontrar el máximo común divisor (MCD) de dos números. Fue desarrollado por Euclides en su obra *Elementos* [14]. La versión generalizada de este algoritmo permite calcular el MCD de dos entidades cualesquiera, siempre y cuando sea posible realizar una división euclidiana entre ellas.

La división euclidiana se define de la siguiente manera:

Sean  $N$  y  $d$  dos números naturales dados y supongamos que  $N > d$ .

- Si  $N$  es divisible por  $d$ , entonces los divisores comunes de  $N$  y  $d$  constan simplemente de todos los divisores de  $d$ , y no hay más que decir.
- Si  $N$  no es divisible por  $d$ , podemos expresar a  $N$  como múltiplo de  $d$  junto con un resto

menor que  $d$ , es decir

$$N = d \cdot c + r \quad \text{con } 0 < r < |d|$$

donde  $N$  es el dividendo,  $d$  es el divisor,  $c$  es el cociente y  $r$  es el residuo.

Existe otra forma de expresar el algoritmo de Euclides mediante la representación del cociente de los números  $N$  y  $d$  como una **fracción continua**, cuya información básica se puede consultar en [8].

Las fracciones continuas se construyen de la siguiente manera:

Sean  $N \in \mathbb{Z}$  y  $d \in \mathbb{Z}^+$ , entonces por el algoritmo de Euclides existen  $p_0 \in \mathbb{Z}$  y  $r_0 \in \mathbb{Z}^+$  tales que  $0 \leq r_0 < d$  y

$$N = p_0(d) + r_0.$$

De igual forma, existen  $p_1 \in \mathbb{Z}^+$  y  $r_1 \in \mathbb{Z}^+$  con  $r_1 < r_0$  y

$$d = p_1(r_0) + r_1.$$

Así sucesivamente, por lo que el algoritmo está dado de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} N &= p_0(d) + r_0 \\ d &= p_1(r_0) + r_1 \\ r_0 &= p_2(r_1) + r_2 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ r_{n-1} &= p_n(r_{n-2}) + r_n \end{aligned}$$

Hasta obtener  $r_n = 0$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . De esta forma, el racional  $\frac{N}{d}$  se puede escribir en forma de fracción continua de la siguiente manera

$$\frac{N}{d} = p_0 + \frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}}}$$

A esta fracción continua se le denotará como un arreglo de la forma

$$[p_0, p_1, p_2, \dots, p_n].$$

De esta manera hemos probado la siguiente Proposición.

**Proposición 1.2.1** *Para cualquier número racional  $\frac{N}{d}$ , existe una secuencia  $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{Z}$ ,  $p_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  tal que*

$$\frac{N}{d} = [p_0, p_1, \dots, p_n].$$

En otras palabras, todo número racional puede expresarse como una fracción continua con todos los numeradores iguales a 1, es decir, como una expresión aritmética del tipo:

$$\frac{N}{d} = p_0 + \frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}}}$$

**Ejemplo 1.2.2** Sean  $N = 4741$  y  $d = 999$ , entonces

$$4741 = (4)(999) + 745$$

$$999 = (1)(745) + 254$$

$$745 = (2)(254) + 237$$

$$254 = (1)(237) + 17$$

$$237 = (13)(17) + 16$$

$$17 = (1)(16) + 1$$

$$16 = (16)(1)$$

por lo que la fracción continua correspondiente es

$$\frac{4741}{999} = [4, 1, 2, 1, 13, 1, 16] = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{13 + \frac{1}{1 + \frac{1}{16}}}}}}$$

En el Ejemplo 1.2.2, se observa que  $|N| > d$ , esto es  $\left|\frac{N}{d}\right| > 1$  por lo que  $p_0 \neq 0$ . Es claro que si  $|N| < d$  entonces  $p_0 = 0$ .

**Ejemplo 1.2.3** Sean  $N = 125$  y  $798$ , entonces

$$\frac{125}{798} = [0, 6, 2, 1, 1, 1, 1, 9] = 0 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9}}}}}}}}$$

**Definición 1.2.4** Sea  $[p_1, p_2, \dots, p_n]$  una fracción continua con  $n$  elementos, entonces diremos que la **longitud** de la fracción continua es igual a  $n$ .

En otras palabras, la longitud de una fracción continua se refiere al número total de términos que contiene.

**Ejemplo 1.2.5** Las fracciones  $\frac{4741}{999} = [4, 1, 2, 1, 13, 1, 16]$  y  $\frac{125}{798} = [0, 6, 2, 1, 1, 1, 1, 9]$  son de longitud 7 y 8, respectivamente.

Las fracciones continuas tienen propiedades que serán útiles para operar con los ovillos, específicamente con los ovillos racionales que enunciaremos en la Definición 2.3.1. Por esta razón, procederemos a demostrar la siguiente Proposición.

**Proposición 1.2.6** Sea  $\frac{N}{d} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$  cualquier número racional. Entonces:

1.  $\frac{N}{d} \pm 1 = [p_1 \pm 1, p_2, \dots, p_n]$ .
2. Si  $N > d$ , entonces  $\frac{d}{N} = [0, p_1, p_2, \dots, p_n]$ .
3.  $\frac{-N}{d} = [-p_1, -p_2, \dots, -p_n]$ .
4. Si  $p_i = a_i + b_i$  y  $s/u = [b_i, p_{i+1}, \dots, p_n]$ , entonces  $\frac{N}{d} = [p_1, \dots, p_{i-1}, a_i + s/u]$  y  $\frac{N}{d} = [p_1, \dots, p_{i-1}, a_i + b_i, p_{i+1}, \dots, p_n] = [p_1, \dots, p_{i-1}, a_i, 0, b_i, p_{i+1}, \dots, p_n]$ .

**Demostración:**

Sea  $\frac{N}{d} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$  un número racional, entonces

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{N}{d} + 1 &= \left( p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}}} \right) + 1 \\
 &= (p_1 + 1) + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}}} \quad (\text{por conmutatividad de la suma en } \mathbb{R}) \\
 &= [p_1 + 1, p_2, p_3, \dots, p_n].
 \end{aligned}$$

2. Si  $N > d$ , entonces  $p_1 \neq 0$ , y tenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{N} &= \frac{1}{\frac{N}{d}} \\ &= \frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}}} \\ &= [0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n]. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} -\frac{N}{d} &= - \left( p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}}} \right) \\ &= -p_1 - \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -p_1 + \frac{1}{\left( p_2 + \frac{1}{p_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}} \right)} \\
 &= -p_1 + \frac{1}{-p_2 - \frac{1}{p_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}}} \\
 &= -p_1 + \frac{1}{-p_2 + \left( p_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}} \right)} \\
 &= -p_1 + \frac{1}{-p_2 + \frac{1}{-p_3 - \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}}} \\
 &= \dots \\
 &= [-p_1, -p_2, \dots, -p_n].
 \end{aligned}$$

4. Sea  $\frac{N}{d} = [p_1, \dots, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n]$  una fracción continua, tal que  $p_i = a_i + b_i$ .

Sea  $\frac{s}{u} = \left[ a_i + b_i, \frac{s'}{u'} \right]$ , donde  $\frac{s'}{u'} = [p_{i+1}, \dots, p_n]$ , entonces  $\frac{N}{d} = \left[ p_1, \dots, p_{i-1}, \frac{s}{u} \right]$ .

Entonces

$$\frac{s}{u} = (a_i + b_i) + \frac{1}{\frac{s'}{u'}}.$$

Como para toda  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0 + \frac{1}{x}}$ , entonces,

$$\begin{aligned} \frac{s}{u} &= a_i + b_i + \frac{1}{\frac{s'}{u'}} \\ &= a_i + \frac{1}{\frac{1}{b_i + \frac{1}{\frac{s'}{u'}}}} \\ &= a_i + \frac{1}{0 + \frac{1}{b_i + \frac{1}{\frac{s'}{u'}}}} \\ &= a_i + \frac{1}{0 + \frac{1}{b_i + \frac{1}{p_{i+1} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{p_n}}}}} \\ &= [a_i, 0, b_i, p_{i+1}, \dots, p_n] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{N}{d} &= \left[ p_1, \dots, p_{i-1}, \frac{s}{u} \right] \\ &= [p_1, \dots, p_{i-1}, a_i, 0, b_i, p_{i+1}, \dots, p_n] \end{aligned}$$

■

**Observación 1.2.7** Si una fracción continua  $[p_1, p_2, \dots, p_n]$  tiene longitud par, entonces podemos ajustarla para que tenga longitud impar mediante la siguiente transformación en el último término:

$$\begin{aligned} [p_1, p_2, \dots, p_n] &= [p_1, p_2, \dots, p_n + 1 - 1] \\ &= [p_1, p_2, \dots, p_n - 1, +1] \quad \text{para } p_n > 0 \text{ y } p_n \neq \pm 1. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [p_1, p_2, \dots, p_n] &= [p_1, p_2, \dots, p_n + 1 - 1] \\ &= [p_1, p_2, \dots, p_n + 1, -1] \quad \text{para } p_n < 0 \text{ y } p_n \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Cuando  $p_n$  es igual a  $\pm 1$ , se suma al término  $p_{n-1}$ . Esto se expresa como:

$$[p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, \pm 1] = [p_1, p_2, \dots, p_{n-1} \pm 1].$$

**Ejemplo 1.2.8** Para la siguiente fracción continua de longitud  $n = 8$  tenemos que

$$\begin{aligned} [0, 6, 2, 1, 1, 1, 1, 9] &= 0 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9}}}}}}} \\ &= 0 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + 1 - 1}}}}} \end{aligned}$$

$$= 0 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 - 1 + \frac{1}{1}}}}}}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1}}}}}}}}$$

$$= [0, 6, 2, 1, 1, 1, 1, 8, 1]$$

De esta manera obtenemos una fracción continua de longitud  $n = 9$ .

Ahora, para la siguiente fracción continua de longitud  $n = 6$  tenemos que

$$[-4, -1, -2, -1, -13, -5] = -4 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-13 + \frac{1}{-5}}}}}}$$

$$\begin{aligned}
&= -4 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-13 + \frac{1}{-5 + 1 - 1}}}}} \\
&= -4 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-13 + \frac{1}{-5 + 1 + \frac{1}{-1}}}}} \\
&= -4 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-13 + \frac{1}{-4 + \frac{1}{-1}}}}} \\
&= [-4, -1, -2, -1, -13, -4, -1].
\end{aligned}$$

De esta manera obtenemos una fracción continua de longitud  $n = 7$ .

**Definición 1.2.9** Diremos que una fracción continua es **positiva** si todos sus términos numéricos son positivos, y que es **negativa** si todos sus términos numéricos son negativos.

De esta manera, consideremos la Definición 1.2.9 para definir la forma canónica de una fracción continua.

**Definición 1.2.10** Se dice que una fracción continua  $[p_1, p_2, \dots, p_n]$  está en **forma canónica** si la fracción continua es positiva o negativa y su longitud es impar.

**Observación 1.2.11** Como

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + \frac{1}{-1 + \frac{r}{l}}} &= \frac{1}{1 + \frac{-l + r}{l}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{l}{r-l}} \\
 &= \frac{1}{\frac{r-l}{r-l} + \frac{l}{r-l}} \\
 &= \frac{1}{\frac{r-l+l}{r-l}} \\
 &= \frac{1}{\frac{r}{r-l}} \\
 &= 1 - \frac{l}{r} \\
 &= 1 + \frac{1}{-\frac{r}{l}}
 \end{aligned}$$

entonces

$$\left[0, 1, -1 + \frac{r}{l}\right] = \left[1, -\frac{r}{l}\right]$$

**Proposición 1.2.12** Toda fracción continua  $[p_1, p_2, \dots, p_n]$  puede ser transformada a su forma canónica de manera única, donde el signo coincide con el del primer término  $p_i \neq 0$ .

**Demostración:**

Sea  $\frac{N}{d} = [p_1, \dots, p_n]$  y supongamos que los términos  $p_i$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$  no son todos del mismo signo.

Supongamos que el signo del primer término es positivo. Sean  $p_{i-1}$  y  $p_i$  el primer par de términos adyacentes de signos opuestos, con  $p_{i-1} > 0$ .

Veamos que  $\frac{N}{d} = [p_1, \dots, p_n]$  es una fracción continua positiva.

$$\begin{aligned}\frac{N}{d} &= [p_1, \dots, p_n] \\ &= [p_1, \dots, p_{i-2}, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n] \\ &= [p_1, \dots, p_{i-2}, (p_{i-1} - 1) + 1, -1 + (p_i + 1), p_{i+1}, \dots, p_n]\end{aligned}$$

Como  $p_{i-1} - 1 + 1 = (p_{i-1} - 1) + 1$ , por la Proposición 1.2.6(4), tenemos que

$$\frac{N}{d} = [p_1, \dots, p_{i-2}, (p_{i-1} - 1), 0, +1, -1 + (p_i + 1), p_{i+1}, \dots, p_n].$$

Sea  $\frac{S}{U} = [p_i + 1, p_{i+1}, \dots, p_n]$  entonces

$$\begin{aligned}\frac{N}{d} &= \left[ p_1, \dots, p_{i-2}, (p_{i-1} - 1), 0, +1, -1 + \frac{S}{U} \right] \quad \text{por la Proposición 1.2.6(1)} \\ &= \left[ p_1, \dots, p_{i-2}, (p_{i-1} - 1), +1, -\frac{S}{U} \right] \quad \text{por la Observación 1.2.11} \\ &= [p_1, \dots, p_{i-2}, (p_{i-1} - 1), +1, -p_i + 1, -p_{i+1}, \dots, -p_n]\end{aligned}$$

Observemos que ahora el  $i$ -ésimo término de la fracción continua es positivo. Para el siguiente par de términos  $p_{k-1}$  y  $p_k$  adyacentes con signos opuestos, con  $k > i$ , repetimos el algoritmo. Continuamos de esta forma hasta obtener todos los términos positivos, de esta forma hemos obtenido una fracción continua positiva.

Si los primeros términos de la fracción continua son negativos, y  $p_{i-1}$  y  $p_i$  son el primer par de términos adyacentes de signos opuestos, procederemos de forma análoga, sustituyendo  $p_{i-1}$  por  $(p_{i-1} + 1) - 1$  y  $p_i$  por  $1 + (p_i - 1)$ , para después repetir los pasos anteriores.

Ahora bien, si la longitud de  $\frac{N}{d}$  es par, por la Observación 1.2.7, transformamos su longitud a impar.

Por lo tanto hemos transformado  $\frac{N}{d}$  a su forma canónica.

Es fácil verificar la unicidad. ■

**Ejemplo 1.2.13** Sea  $\frac{N}{d} = [-1, 8, 3, -2]$  una fracción continua, entonces utilizando el algoritmo para transformar una fracción continua a su forma canónica tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{N}{d} &= [-1, 8, 3, -2] \\ &= [(-1 + 1) - 1, 1 + (8 - 1), 3, -2] \\ &= [(-1 + 1), 0, -1, 1 + (8 - 1), 3, -2]\end{aligned}$$

Sea  $\frac{S}{U} = [8 - 1, 3, -2]$ , entonces

$$\begin{aligned}\frac{N}{d} &= \left[0, 0, -1, 1 - \frac{S}{U}\right] \\ &= \left[0, -1, \frac{S}{U}\right] \\ &= [0, -1, -7, -3, 2]\end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el algoritmo

$$\begin{aligned}\frac{N}{d} &= [0, -1, -7, (-3 + 1) - 1, 1 + (2 - 1)] \\ &= [0, -1, -7, (-3 + 1), 0, -1, 1 + (2 - 1)]\end{aligned}$$

Sea  $\frac{S}{U} = [2 - 1] = [1]$ , entonces

$$\begin{aligned}\frac{N}{d} &= \left[0, -1, -7, -2, -1, 1 - \frac{S}{U}\right] \\ &= [0, -1, -7, -2, -1, -1].\end{aligned}$$

### 1.3. Nudos y ovillos

Los ovillos desempeñan un papel fundamental como cimientos en la construcción de estructuras topológicas de mayor complejidad, como nudos y enlaces. Para profundizar en nuestra comprensión y apreciación de las propiedades y características de los ovillos, ya sea en su forma general como

$n$ -ovillos, debemos familiarizarnos con conceptos esenciales como el de bola, arco y frontera de arco, ya que son las piezas básicas con las que construiremos un ovillo.

Un  $n$ -ovillo consiste en  $n$  arcos que se encuentran completamente contenidos en  $\mathbb{B}^3$  y con sus extremos ubicados en la superficie de esta bola, de tal manera que los extremos de los arcos están fijos en la superficie de  $\mathbb{B}^3$ , esto es,

Caso particular  $\partial\mathbb{B}^3 = \mathbb{S}^2$ .

**Definición 1.3.1** Un  $n$ -**ovillo** es una pareja  $(\mathbb{B}^3, A)$ , en donde  $\mathbb{B}^3$  es la bola unitaria rellena en  $\mathbb{R}^3$  y  $A$  es un conjunto de  $n$  arcos encajados en  $\mathbb{B}^3$  tales que  $A \cap \partial\mathbb{B}^3 = \partial A$ .

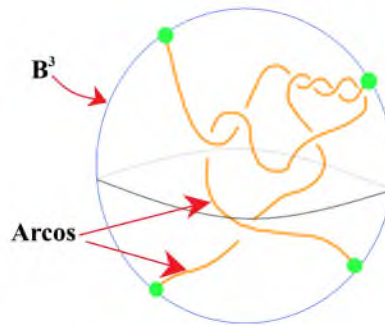


Figura 1.2: 2-ovillo

De ahora en adelante, si no hay lugar a confusión, nos referiremos al ovillo  $(\mathbb{B}^3, A)$  simplemente como  $A$ . Trabajaremos con los  $n$ -ovillos con  $n = 2$ , es decir, 2-ovillos. Así en adelante cada vez que digamos ovillos nos referiremos al 2-ovillo. En este trabajo nos centraremos en los ovillos racionales.

**Definición 1.3.2** Un **ovillo racional** es un ovillo tal que existe el homeomorfismo de pares  $h : (\mathbb{B}^3, A) \rightarrow (\mathbb{B}^2 \times I, \{x, y\} \times I)$ .

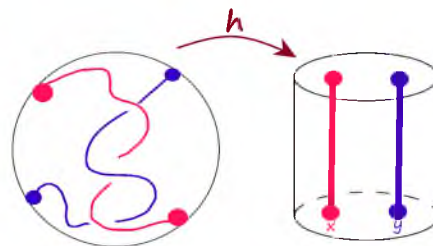


Figura 1.3: Homeomorfismo  $h$  de un ovillo  $A$  a  $(\mathbb{B}^2 \times I, \{x, y\} \times I)$

**Definición 1.3.3** Decimos que dos ovillos  $T$  y  $G$  son **isotópicos**, y lo denotamos como  $T \sim G$ , si existe un homeomorfismo  $h : (\mathbb{B}^3, T) \rightarrow (\mathbb{B}^3, G)$  tal que  $h|_{\partial T} = id_{\mathbb{B}^3}$ . En este caso decimos que  $h$  es una **isotopía**.

De esta forma diremos que, que dos ovillos  $G$  y  $T$  son equivalentes si existe una isotopía de  $\mathbb{B}^3$  en sí misma que deja la frontera fija y lleva  $G$  en  $T$ , esto es,  $G$  y  $T$  son equivalentes si podemos, sin romper, deformar los arcos de  $G$  y sobreponerlos en los de  $T$ .

Los nudos se distinguen de los ovillos porque sus extremos están unidos, mientras que los extremos del ovillo están encajados en la superficie de  $\mathbb{B}^3$ . Formalmente, un nudo es un subconjunto del espacio tridimensional que es homeomorfo al círculo.

**Definición 1.3.4** El subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^3$  es un **nudo** si existe un homeomorfismo del círculo unitario  $S^1$  en  $\mathbb{R}^3$  cuya imagen es  $K$ . Donde  $S^1$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  que satisfacen la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Definición 1.3.5** Un **punte** es el segmento del arco en un cruce que pasa por encima de otro arco. El número mínimo de puentes en un diagrama dado se conoce como el **número de puentes**.

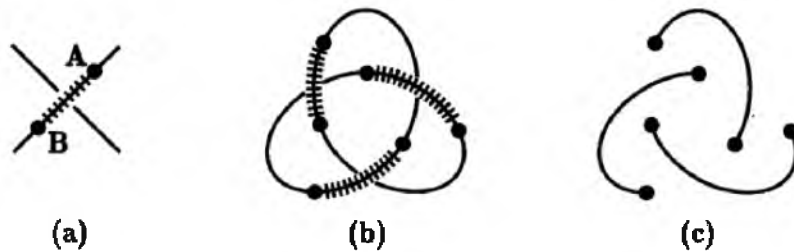


Figura 1.4: Imagen tomada de [18].

En la Figura 1.4, se observa en el inciso (a) que el segmento de arco que cruza por encima de otro arco, desde el punto A hasta el punto B, es un puente. En el inciso (b), se muestra que el nudo trébol tiene tres puentes, mientras que en el inciso (c), se destacan los segmentos que se encuentran por debajo de estos puentes en el nudo trébol.

**Definición 1.3.6** A los nudos de dos puentes les llamaremos **nudos racionales**.

## 1.4. Movimientos de Reidemeister

Los Movimientos de Reidemeister, propuestos por el matemático alemán Kurt Reidemeister en la década de 1920, son un conjunto de tres transformaciones topológicas fundamentales utilizadas en la teoría de nudos. Cada uno de estos movimientos es una isotopía de ovillos. Reidemeister demostró que dos ovillos son equivalentes sí y sólo sí, podemos pasar de un ovillo  $G$  a un ovillo  $T$  usando una sucesión finita de movidas de Reidemeister [19].

**Movimiento de Reidemeister I.** Agregar o remover un rizo, este movimiento permite el deslizamiento de un segmento del arco en un punto de cruce.

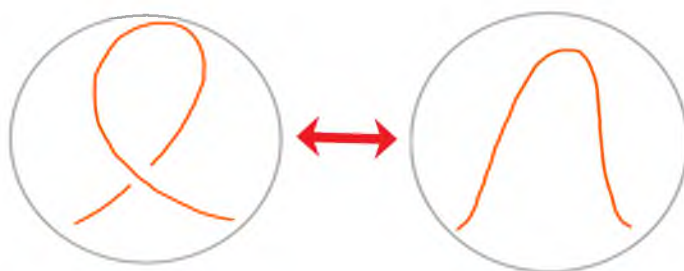


Figura 1.5: Movimiento de Reidemeister I.

**Movimiento de Reidemeister II.** Agregar o remover dos cruces por arriba o por debajo consecutivos, este movimiento implica el cruce y desenredo de dos segmentos de arco.

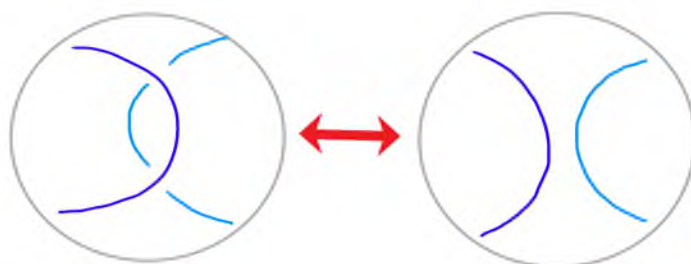


Figura 1.6: Movimiento de Reidemeister II.

**Movimiento de Reidemeister III.** Movimiento triangular, en esta transformación, tenemos tres segmentos de arco en los cuales se intercambian las posiciones de los dos segmentos superiores, de

modo que el que originalmente estaba más arriba pase a estar más abajo, y viceversa. El tercer segmento, que pasa por debajo, permanece en su lugar



Figura 1.7: Movimiento de Reidemeister III.

# Capítulo 2

## Ovillos racionales

El objetivo de este capítulo es explorar los ovillos racionales, comenzando por los conceptos fundamentales de los ovillos enteros y sus características distintivas, como las torceduras y las representaciones gráficas básicas. Luego, nos adentraremos en las operaciones esenciales en los ovillos y cómo estas operaciones influyen en la construcción de ovillos racionales. Finalmente, analizaremos las isotopías específicas que permiten definir la forma estándar de un ovillo racional, estableciendo así una base sólida para comprender su estructura y propiedades.

### 2.1. Ovillos enteros

#### 2.1.1. Torceduras

Una torcedura es un homeomorfismo de un ovillo en sí mismo,  $h : (\mathbb{B}^3, A) \rightarrow (\mathbb{B}^3, A)$ , la cual consiste en entrelazar los arcos encajados en la bola. Cada tipo de torcedura implica movimientos precisos de los hemisferios de  $\mathbb{B}^3$  dando lugar a diferentes ovillos.

Sean  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , y  $c_4$  los puntos fijos sobre la frontera de  $\mathbb{B}^3$  que se muestran en la Figura 2.1. Consideremos el arco  $\alpha_1$  que tiene sus extremos en los puntos  $c_1$  y  $c_3$ ; y el arco  $\alpha_2$ , con extremos  $c_2$  y  $c_4$ , además de cuatro arcos nombrados como  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$ .

**Torcedura horizontal positiva**

Ubiquemos el arco  $\alpha_1$  en el hemisferio frontal de la esfera y el arco  $\alpha_2$  en el hemisferio posterior de la esfera. Para realizar la torcedura horizontal positiva fijamos el hemisferio izquierdo de  $\mathbb{B}^3$  y giramos el hemisferio derecho  $180^\circ$  en sentido antihorario y de manera continua como se muestra en la Figura 2.1.

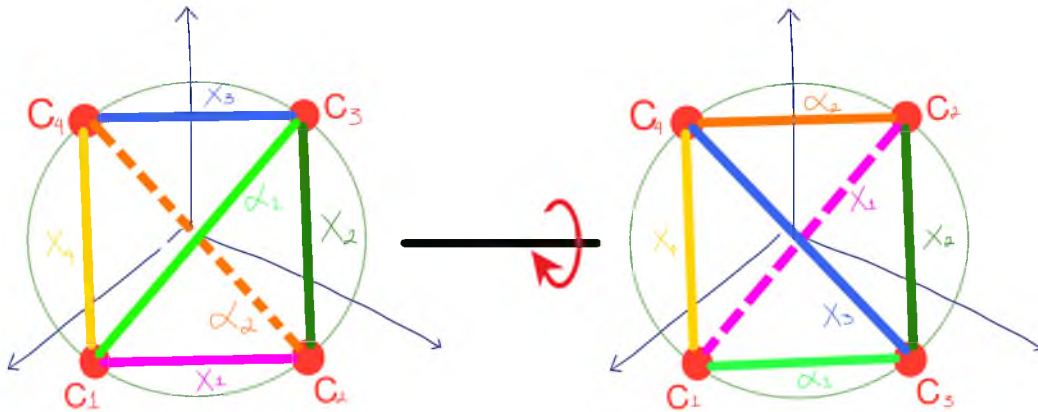


Figura 2.1: Torcedura horizontal positiva

**Torcedura horizontal negativa**

Ubiquemos el arco  $\alpha_2$  en el hemisferio frontal de la esfera y el arco  $\alpha_1$  en el hemisferio posterior de la esfera. Para realizar la torcedura horizontal negativa fijamos el hemisferio izquierdo de  $\mathbb{B}^3$  y giramos el hemisferio derecho  $180^\circ$  en sentido horario y de manera continua como se muestra en la Figura 2.2.

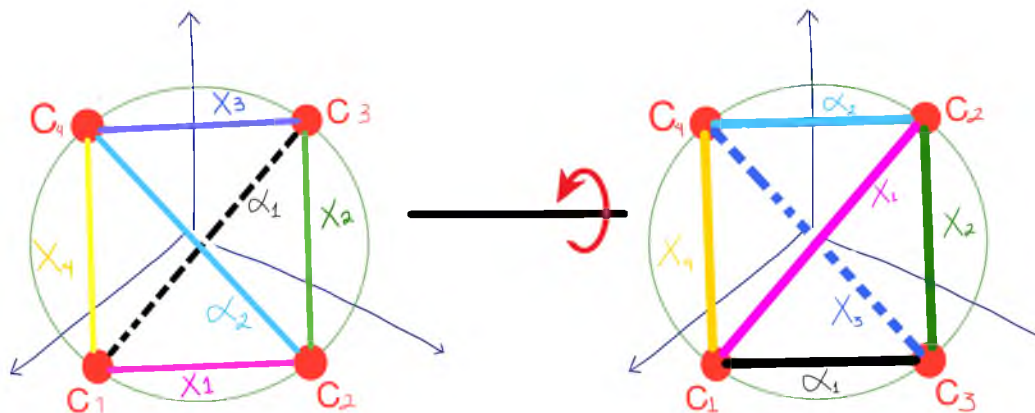


Figura 2.2: Torcedura horizontal negativa

**Torcedura vertical positiva**

Ubiquemos el arco  $\alpha_1$  en el hemisferio frontal de la esfera y el arco  $\alpha_2$  en el hemisferio posterior de la esfera. Para realizar la torcedura vertical positiva fijamos el hemisferio norte de  $\mathbb{B}^3$  y giramos el hemisferio sur  $180^\circ$  de izquierda a derecha y de manera continua como se muestra en la Figura 2.3.

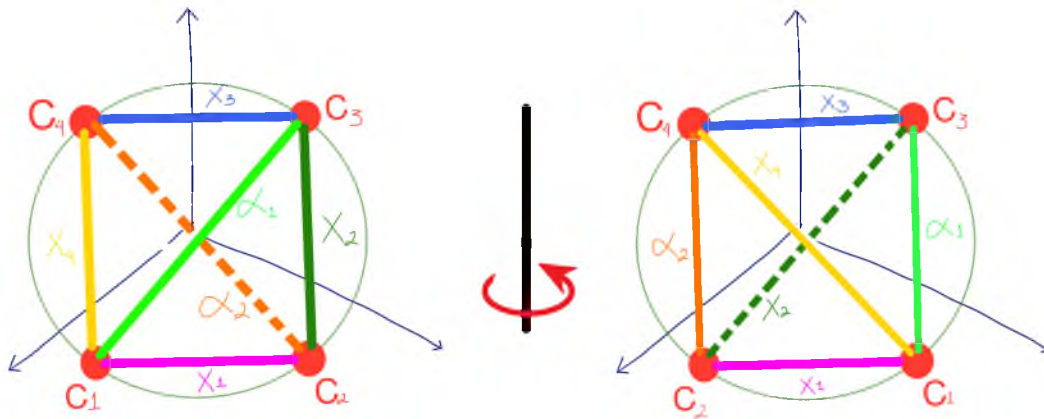


Figura 2.3: Torcedura horizontal negativa

**Torcedura vertical negativa**

Ubiquemos el arco  $\alpha_1$  en el hemisferio posterior de la esfera y el arco  $\alpha_2$  en el hemisferio frontal de la esfera. Para realizar la torcedura vertical negativa fijamos el hemisferio norte de  $\mathbb{B}^3$  y giramos el hemisferio sur  $180^\circ$  de derecha a izquierda y de manera continua como se muestra en la Figura 2.4.

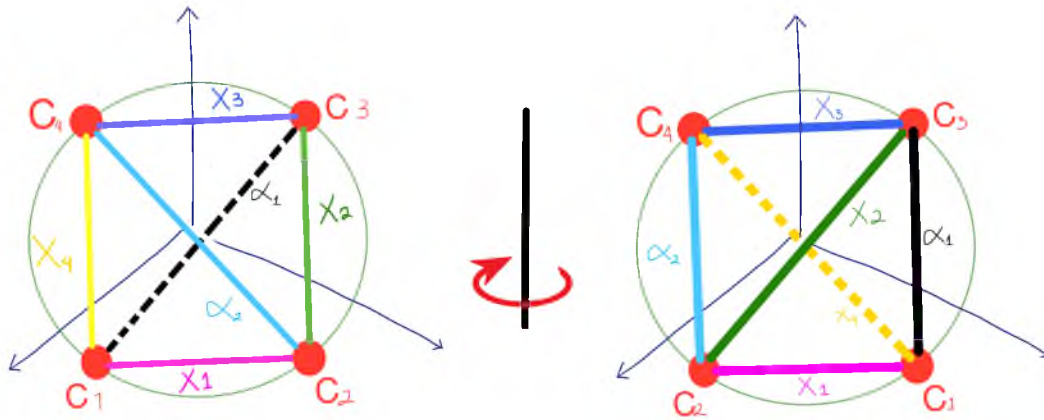


Figura 2.4: Torcedura horizontal negativa

Ahora, examinaremos los ovillos enteros, los cuales son configuraciones más completas de los arcos dentro de la bola unitaria tridimensional. Veamos primero los ovillos más básicos y luego cómo se construyen a partir de torceduras.

### 2.1.2. Ovillos enteros

El **ovillo cero** es el ovillo que consta de dos arcos horizontales encajados en la bola unitaria tridimensional ( $\mathbb{B}^3$ ) de manera que no se superponen. Se representa con la notación  $[0]$ , ya que no implica ninguna torcedura en la configuración de los arcos.



Figura 2.5: Ovillo cero

El **ovillo infinito** es el ovillo que consta de dos arcos verticales encajados en la bola unitaria tridimensional ( $\mathbb{B}^3$ ) de manera que no se superponen. Se representa con la notación  $[\infty]$ .

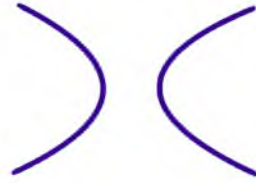


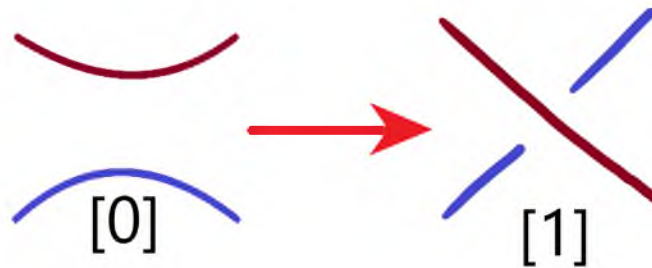
Figura 2.6: Ovrillo infinito

### Ovillos horizontales y verticales

Los ovillos son estructuras que se pueden manipular mediante torceduras como vimos en la Sección 2.1.1. En este contexto, los ovillos más simples son  $[0]$ ,  $[\infty]$ ,  $[+1]$  y  $[-1]$ , además de los ovillos enteros.

Los ovillos más complejos se construyen a partir de los ovillos básicos  $[0]$  y  $[\infty]$  mediante la aplicación de torceduras.

Definimos el **ovillo**  $[1]$  como el ovrillo resultante tras realizar una torcedura horizontal positiva a partir del ovrillo cero,

Figura 2.7: Torcedura horizontal positiva en el ovrillo  $[0]$ .

o tras realizar una torcedura vertical positiva a partir del ovrillo infinito.

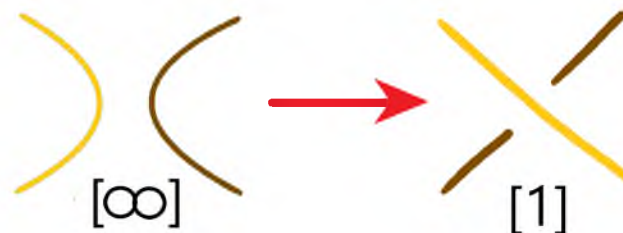
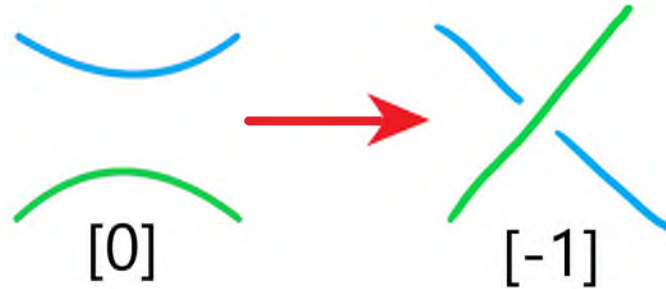
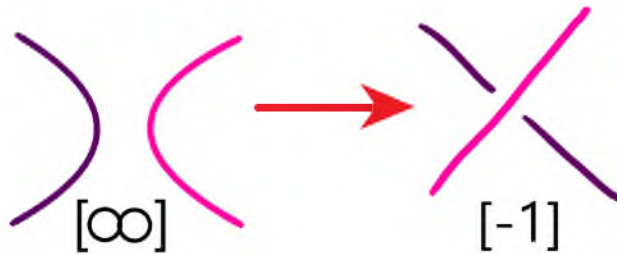


Figura 2.8: Torcedura vertical positiva en el ovillo  $[\infty]$ .

Definimos el **ovillo**  $[-1]$  como el ovillo resultante tras realizar una torcedura horizontal negativa a partir del ovillo cero,

Figura 2.9: Torcedura horizontal negativa en el ovillo  $[0]$ 

o tras realizar una torcedura vertical negativa a partir del ovillo infinito.

Figura 2.10: Torcedura vertical negativa en el ovillo  $[\infty]$ .

De manera análoga a cómo definimos los ovillos  $[1]$  y  $[-1]$  mediante una sola torcedura positiva o negativa, podemos generar ovillos con múltiples torceduras. A continuación, se muestra cómo estos ovillos horizontales y verticales se forman al aplicar  $n$  torceduras.

- A partir del ovillo cero construiremos el **ovillo horizontal**  $[n]$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , ( $n \neq 0$ ), realizando  $n$  torceduras horizontales positivas si  $n > 0$  y  $n$  torceduras horizontales negativas si  $n < 0$ .



Figura 2.11: Ovillos horizontales

- A partir del ovillo infinito construiremos el **ovillo vertical**  $\frac{1}{[n]}$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , ( $n \neq 0$ ), realizando  $n$  torceduras verticales positivas si  $n > 0$  y  $n$  torceduras verticales negativas si  $n < 0$ . Para  $n = 0$  el ovillo  $\frac{1}{[0]}$  se representa como el ovillo  $[\infty]$ .

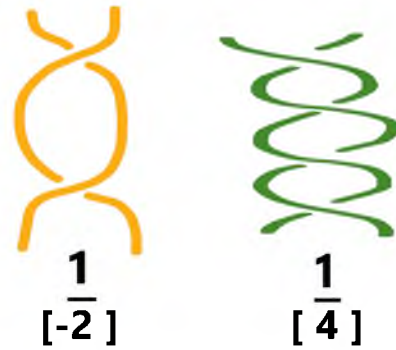


Figura 2.12: Ovillos verticales

Notemos que  $[1] = \frac{1}{[1]}$  y  $[-1] = \frac{1}{[-1]}$ .

## 2.2. Operaciones en los ovillos

Ahora que hemos definido y construido los ovillos enteros mediante torceduras, es importante explorar cómo estos ovillos pueden interactuar entre sí mediante diversas operaciones. Existen diversas operaciones a las que podemos someter a los ovillos, como la suma, la multiplicación, la reflexión y la inversión. A continuación definiremos la suma y la multiplicación.

Sea  $G$  un ovillo con extremos  $a, b, c$  y  $d$ . Sea  $T$  otro ovillo con extremos  $f, g, h$  e  $i$  como se observa en la Figura 2.13:

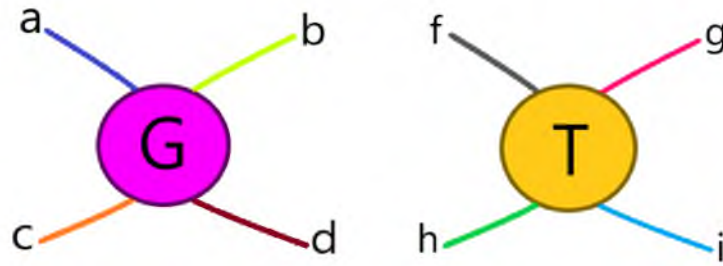


Figura 2.13: Ovillos  $G$  y  $T$

La **suma** de estos ovillos se representa como  $G + T$ . Esta operación se realiza uniendo los extremos  $b$  y  $f$  así como los extremos  $d$  y  $h$  como se muestra en la Figura 2.14.

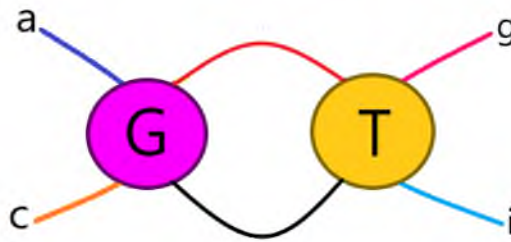


Figura 2.14: Representación de  $G + T$ .

**Ejemplo 2.2.1** Por ejemplo, sea  $G = \frac{1}{[3]}$  y  $T = \frac{1}{[-4]}$ . La suma  $G + T$  está dada como se muestra en la Figura 2.15.

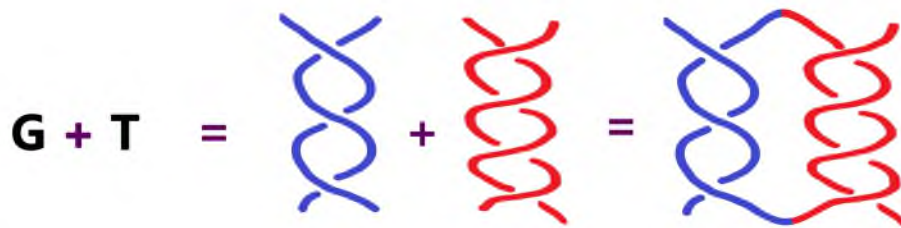


Figura 2.15: Representación de  $G + T$ .

Mientras que la suma  $T + G$  está dada por la Figura 2.16.

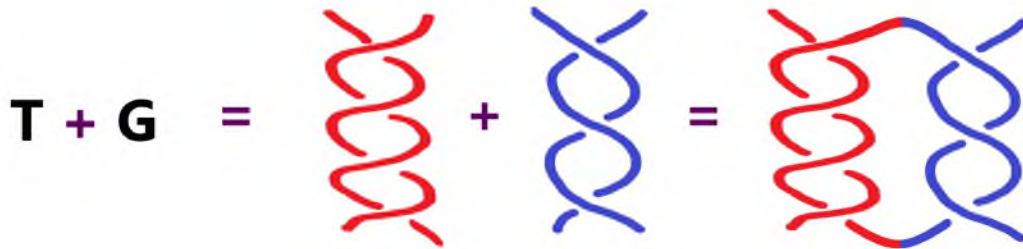


Figura 2.16: Representación de  $T + G$ .

Observemos que en el Ejemplo 2.2.1  $G + T$  y  $T + G$  no son isotópicos, por lo tanto, la suma de ovillos no es conmutativa.

La **multiplicación** de los ovillos  $G$  y  $T$  se representa como  $G * T$ . En esta operación, uniremos los extremos  $c$  y  $f$  así como los extremos  $d$  y  $g$  como se muestra en la Figura 2.17.

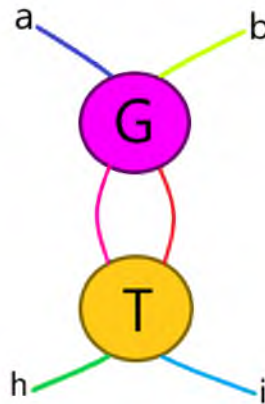


Figura 2.17: Representación de  $G * T$ .

**Ejemplo 2.2.2** Por ejemplo, sea  $G = [ 2 ]$  y  $T = [-4]$ . La multiplicación  $G * T$  está dada como se muestra en la Figura 2.18.



Figura 2.18: Representación de  $G * T$ .

Mientras que la multiplicación  $T * G$  está dada por la Figura 2.19.



Figura 2.19: Representación de  $T * G$ .

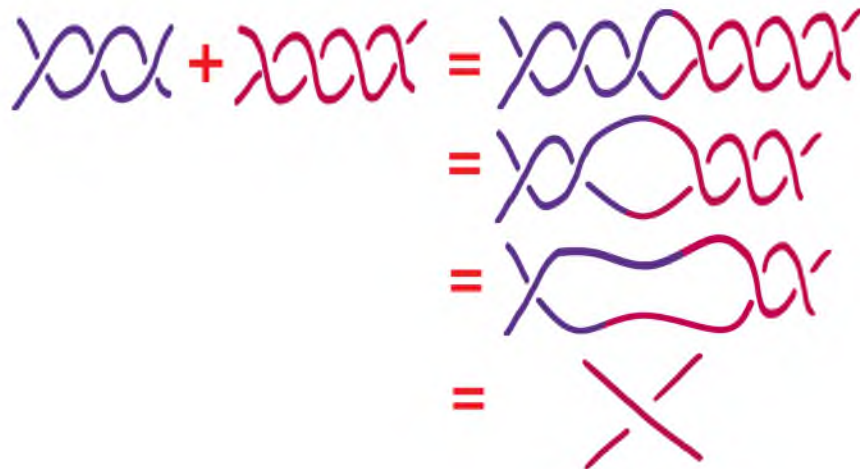
Observemos que  $G * T$  y  $T * G$  no son isotópicos, por lo tanto la multiplicación de ovillos no es conmutativa.

Se observa claramente que las operaciones de suma y multiplicación siguen los principios simples que se ven a continuación,

- $[a] + [b] = [a + b]$
- $\frac{1}{[a]} * \frac{1}{[b]} = \frac{1}{[a + b]}$

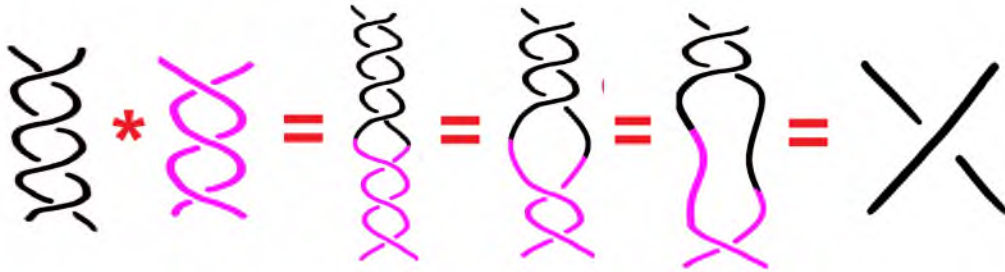
Estas isotopías se realizan gracias al movimiento de Redemaister II (ver Sección 1.4).

**Ejemplo 2.2.3** Realicemos la suma de los ovillos enteros  $[-3]$  y  $[4]$



Así  $[-3] + [4] = [-3 + 4] = [1]$ .

Ahora, realicemos la multiplicación de los ovillos enteros  $\frac{1}{[-4]}$  y  $\frac{1}{[3]}$ .



$$\text{Así, } \frac{1}{[-4]} * \frac{1}{[3]} = \frac{1}{[-4 + 3]} = \frac{1}{[-1]} = [-1].$$

Además de estas operaciones, existe otra transformación importante conocida como la **imagen espejo**. Esta operación implica intercambiar todos los cruces de un ovillo, proporcionando una perspectiva adicional sobre su estructura.

La **imagen espejo** de  $T$ , denotada por  $-T$ , se obtiene intercambiando todos los cruces.

- $-[n] = [-n]$



Figura 2.20:  $[-2]$  es la imagen espejo de  $[2]$

- $-\frac{1}{[n]} = \frac{1}{[-n]}$

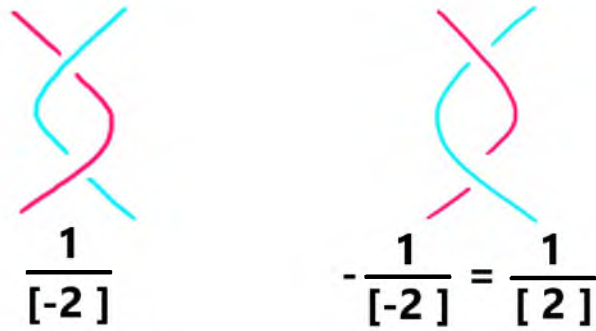


Figura 2.21:  $\frac{1}{[2]}$  es la imagen espejo de  $\frac{1}{[-2]}$

**Observación 2.2.4** En general tenemos que:

- $-(T + S) = (-T) + (-S)$
- $-(T * S) = (-T) * (-S)$

**Ejemplo 2.2.5** Sea  $T = [2]$  y sea  $S = \frac{1}{[-2]}$ .

Entonces la suma  $T + S$  es



Figura 2.22: Resultado del ovillo  $T + S$

Por otro lado la imagen espejo de  $T + S$  es



Figura 2.23:  $-(T + S)$  es la imagen espejo de  $T + S$ .

Este coincide con la suma de  $-T$  y  $-S$ ,

$$(-T) + (-S) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} = \text{diagram 3}$$

Figura 2.24:  $-(T + S)$  es el resultado de  $(-T) + (-S)$ .

Ahora bien, la multiplicación  $T * S$  es

$$T * S = \text{diagram 1} * \text{diagram 2} = \text{diagram 3}$$

Figura 2.25: Resultado del ovillo  $T * S$ .

Su imagen espejo es

$$-(T * S) = \text{diagram 1}$$

Figura 2.26:  $-(T * S)$  es la imagen espejo de  $T * S$ .

Este coincide con la multiplicación de  $-T$  y  $-S$ ,

$$(-T) * (-S) = \text{diagram 1} * \text{diagram 2} = \text{diagram 3}$$

Figura 2.27: Multiplicación de  $-T$  y  $-S$

La operación reflexión horizontal y vertical implican girar el ovillo sobre su propio eje, más adelante veremos que de estas acciones derivan importantes isotopías.

La **reflexión horizontal**, denotada por  $G^\Delta$  implica girar el ovillo  $180^\circ$ , sobre su eje horizontal como se muestra en la Figura 2.28.

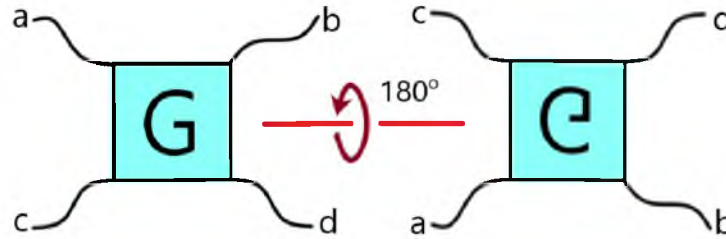


Figura 2.28: Reflexión horizontal.

La **reflexión vertical**, denotada por  $G^\nabla$ , implica girar el ovillo  $180^\circ$ , sobre su eje vertical como se muestra en la Figura 2.29.

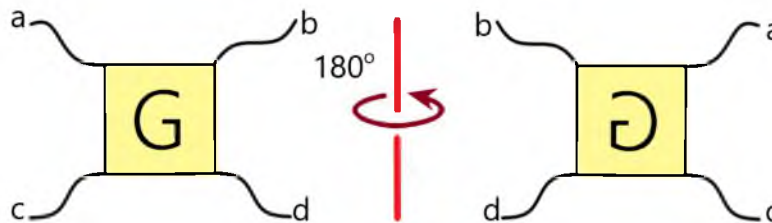


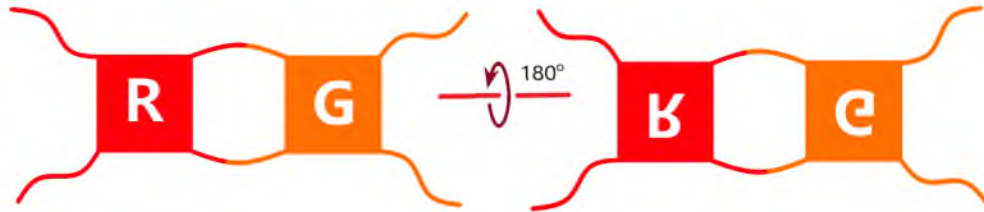
Figura 2.29: Reflexión vertical.

Al girar los ovillos sobre sus ejes respectivos, obtenemos transformaciones de ovillos. A continuación, presentaremos algunos lemas que ilustran estas propiedades.

**Lema 2.2.6** *Sea  $G$  un ovillo entero, entonces  $G = G^\Delta$  y  $G = G^\nabla$ .*

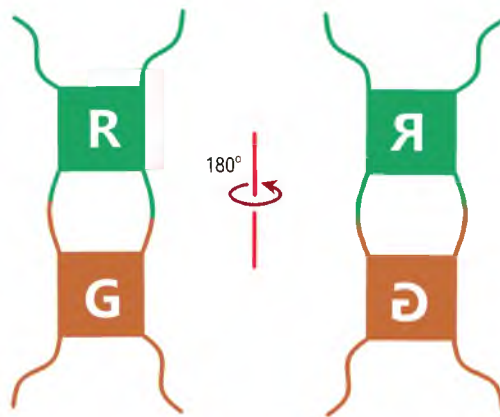
**Lema 2.2.7** (a) *La reflexión horizontal de la suma de dos ovillos  $R$  y  $G$ , es la suma de las reflexiones horizontales de dichos ovillos, esto es*

$$(R + G)^\Delta = R^\Delta + G^\Delta$$



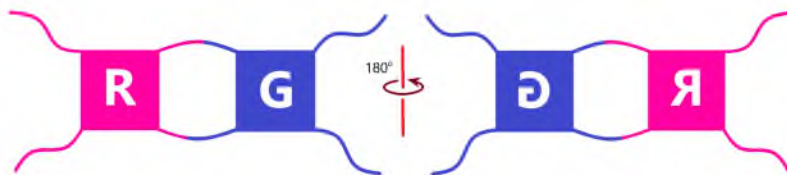
(b) La reflexión vertical del producto de dos ovillos  $R$  y  $G$ , es el producto de las reflexiones verticales de dichos ovillos, esto es

$$(R * G)^\sphericalangle = R^\sphericalangle * G^\sphericalangle$$

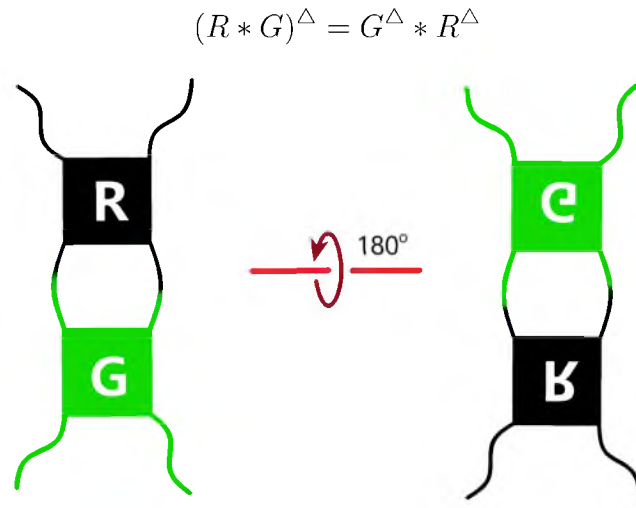


(c) La reflexión vertical de la suma de dos ovillos  $R$  y  $G$ , es la suma de la reflexión vertical de  $G$  y la reflexión vertical de  $R$ , esto es

$$(R + G)^\sphericalangle = G^\sphericalangle + R^\sphericalangle$$



(d) La reflexión horizontal del producto de dos ovillos  $R$  y  $G$ , es el producto de la reflexión horizontal de  $G$  y la reflexión horizontal de  $R$ , esto es



Al introducir la operación rotación, ampliaremos nuestro conjunto de transformaciones. La rotación, en particular, nos permitirá observar cómo los ovillos se comportan bajo giros de  $90^\circ$ .

La **rotación**  $T^r$  implica hacer un giro de  $90^\circ$  en sentido contrario de las manecillas del reloj como se muestra en la Figura 2.30.

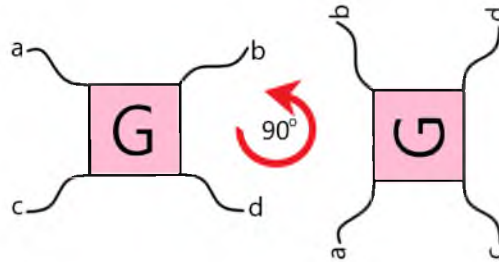


Figura 2.30: Rotación.

La **inversa de  $T$**  denotada como  $T^i$  se define como  $-T^r$ .

**Proposición 2.2.8** Sea  $n \in \mathbb{Z}$

- $[n]^i = \frac{1}{n}$
- $\left(\frac{1}{[n]}\right)^i = [n]$

**Ejemplo 2.2.9** Por ejemplo, sea  $T = [-3]$  como se muestra en la Figura 2.31.



Figura 2.31:  $T = [-3]$

Entonces  $T^r = \frac{1}{[3]}$

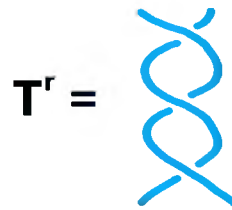


Figura 2.32:  $T^r = \frac{1}{[3]}$

Además  $T^i = -T^r = -\frac{1}{[3]} = \frac{1}{[-3]}$

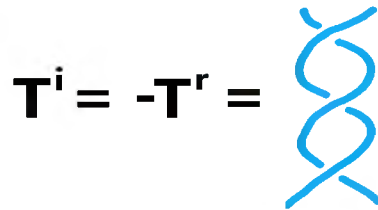


Figura 2.33:  $T^i = \frac{1}{[-3]}$

Veamos otro ejemplo, sea  $G = \frac{1}{[-4]}$  como se muestra en la Figura 2.31.



Figura 2.34:  $G = \frac{1}{[-4]}$

Entonces  $G^r = [4]$



Figura 2.35:  $G^r = [4]$

Además  $G^i = -G^r = -[4] = [-4]$



Figura 2.36:  $G^i = [-4]$

La **operación**  $T^{-r}$  implica hacer un giro de  $90^\circ$  en sentido de las manecillas del reloj como se muestra en la Figura 2.37.

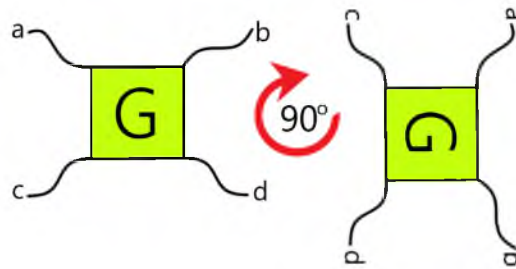
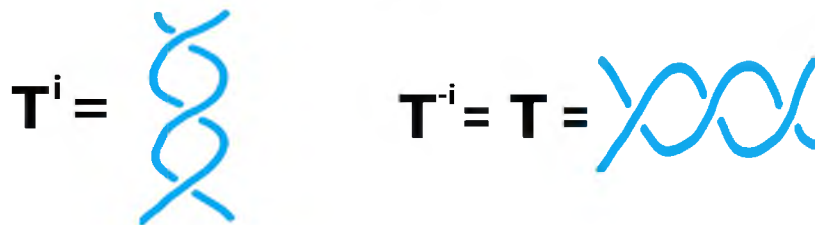


Figura 2.37: operación  $T^{-r}$ .

**Definición 2.2.10** Sea  $T$  un ovillo, la operación  $T^{-i}$  consiste en la aplicación de la imagen espejo a  $T^i$  y luego rotar en sentido de las manecillas del reloj. Esto es

$$T^{-i} = -T^{-r}$$



**Observación 2.2.11** Sea  $T$  un ovillo, entonces,

- $-(-T) = T$ .

- $(-T)^r = -(T^r)$ .
- $(T^r)^{-r} = T = (T^{-r})^r$ .

A continuación introducimos un movimiento de isotopía de ovillos racionales que desempeña un papel fundamental en toda la teoría que se desarrolla a continuación, el flype.

**Definición 2.2.12** Sea  $T$  un oவில்lo de la forma  $[\pm 1] + G$  ó  $[\pm 1] * G$ . Definimos el **flype** de  $T$  como la isotopía  $h : T \rightarrow T$ , que se realiza aplicando a  $T$  un giro de  $180^\circ$  dejando fija la  $\partial T$  como se describe a continuación:

- Si  $T = [1] + G$  realizamos un giro de abajo hacia arriba como se muestra en la Figura 2.38.

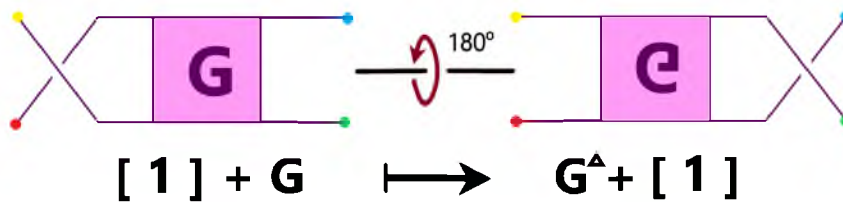


Figura 2.38: Flype de  $T = [1] + G$

- Si  $T = [-1] + G$  realizamos un giro de arriba hacia abajo como se muestra en la Figura 2.39.

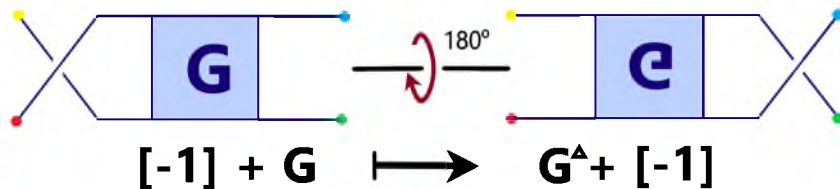


Figura 2.39:  $T = [-1] + G$

- Si  $T = [1] * G$  realizamos un giro de derecha a izquierda como se muestra en la Figura 2.40.

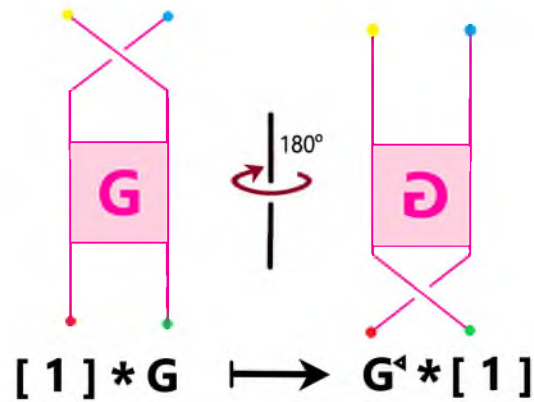


Figura 2.40:  $T = [1] * G$

- Si  $T = [-1] * G$  realizamos un giro de izquierda a derecha como se muestra en la Figura 2.41.

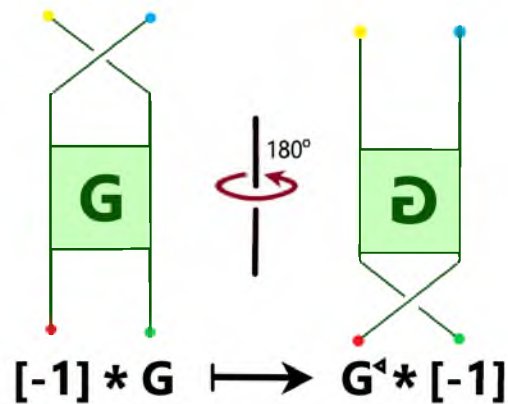


Figura 2.41:  $T = [-1] * G$

**Proposición 2.2.13** Sea  $B$  un ovillo

(a) si  $B \sim B^\Delta$  entonces

$$[n] + B \sim B + [n]$$

(b) si  $B \sim B^\triangleleft$  entonces

$$\frac{1}{[n]} * B \sim B * \frac{1}{[n]}$$

**Demostración:**

Sea  $B$  un ovillo tal que  $B \sim B^\Delta$  y sea  $[n] + B$  el ovillo construido por la suma del ovillo  $[n]$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y  $B$ ,

- Si  $n$  es impar, al aplicar  $n$  flypes a  $[n] + B$ , obtenemos el ovillo  $B^\Delta + [n]$ , que por hipótesis, es isotópico a  $B + [n]$ .
- Si  $n$  es par, al aplicar  $n$  flypes a  $[n] + B$ , obtenemos  $B + [n]$ .

Por otro lado, sea  $B_L$  un ovillo tal que  $B_L \sim B_L^\triangleleft$ , y sea  $\frac{1}{[n]} * B_L$  otro ovillo construido por la multiplicación del ovillo  $\frac{1}{[n]}$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y  $B_L$ ,

- Si  $n$  es impar, al aplicar  $n$  flypes a  $\frac{1}{[n]} * B_L$ , obtenemos el ovillo  $B_L^\triangleleft * \frac{1}{[n]}$  que por hipótesis es isotópico a  $B_L * \frac{1}{[n]}$ .
- Si  $n$  es par, al aplicar  $n$  flypes a  $\frac{1}{[n]} * B_L$ , obtenemos  $B_L * \frac{1}{[n]}$ .

■

Por ejemplo, sea  $T$  un ovillo tal que  $T \sim T^\Delta$ , consideremos el ovillo  $[-3] + T$  que se observa en la Figura 2.42.



Figura 2.42: Ovillo  $[-3] + T$

Aplicando el flype a  $[-3] + T$  tres veces obtenemos el ovillo  $T^\Delta + [-3]$  que se muestra en la Figura 2.43.



Figura 2.43: Ovillo  $T^\Delta + [-3]$

que es isotópico a  $T + [-3]$ .

Ahora, sea  $G$  un ovillo tal que  $G \sim G^\triangleleft$ , consideremos el ovillo  $\frac{1}{[-4]} * G$  que se observa en la Figura

2.44.



Figura 2.44: Ovillo  $\frac{1}{[-4]} * G$

Aplicando el flype a  $\frac{1}{[-4]} * G$  cuatro veces obtenemos el ovillo  $G * \frac{1}{[-4]}$  que se muestra en la Figura 2.45.



Figura 2.45: Ovillo  $G * \frac{1}{[-4]}$

A continuación, dado un ovillo  $G$  se presentan algunos conceptos, el numerador  $N(G)$ , el denominador  $D(G)$  y el cierre de vértice  $V(G)$ . Estas construcciones generan una clase específica de nudos y enlaces conocidos como nudos racionales (ver Teorema 2.2.14).

Dado el ovillo  $G$  que se muestra en la Figura 2.46,

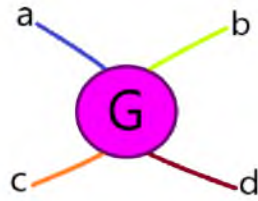


Figura 2.46: Ovillo  $G$ .

El **numerador** del oillo  $G$  se representa como  $N(G)$ , y es la unión de los extremos  $a$  y  $b$  así como la unión de los extremos  $c$  y  $d$ , como se muestra en la Figura 2.47.

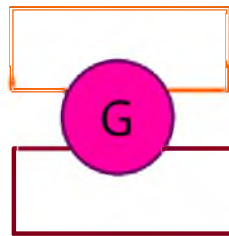


Figura 2.47: Representación del numerador del oillo  $G$ .

El **denominador** del oillo  $G$  se representa como  $D(G)$ , y es la unión de los extremos  $a$  y  $c$  así como la unión de los extremos  $b$  y  $d$ , como se muestra en la Figura 2.48.

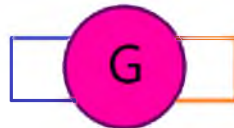


Figura 2.48: Representación del denominador del oillo  $G$ .

El **cierre de vértice** del oillo  $G$  se representa con  $V(G)$  y es la unión de todos los extremos de  $G$  en un punto como se muestra en la Figura 2.49.

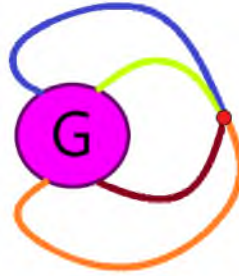


Figura 2.49: Representación del cierre de vértice de  $G$ .

En este trabajo de investigación nos centramos en la teoría de los ovillos racionales. A través de las operaciones de numerador y denominador, estos ovillos pueden cerrarse para formar nudos y enlaces específicos conocidos como nudos racionales.

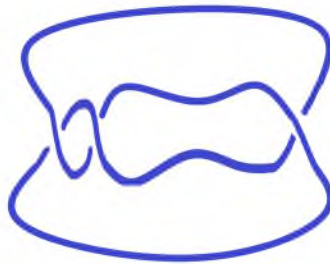
Para una comprensión más profunda de los conceptos sobre teoría de nudos, se recomienda consultar [7], [13], [18], [19] y [23].

**Teorema 2.2.14** [18, Proposition 9.3.4] *El numerador de un oவில்lo racional es un nudo racional.*

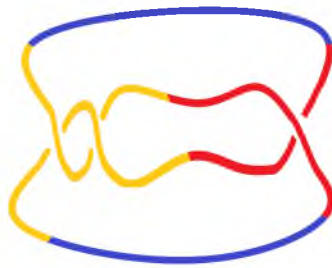
**Teorema 2.2.15** [18, Theorem 9.3.1.] *Un nudo racional es el denominador de algún oவில்lo racional. De manera recíproca, el denominador de un oவில்lo racional es un nudo racional.*

**Proposición 2.2.16** [18, Theorem 9.3.5.] *Sean  $G$  y  $T$  ovillos racionales, el numerador de la suma  $N(G + T)$  es un nudo racional.*

**Ejemplo 2.2.17** *El nudo racional*



es  $N([2] + [1])$ .



Sea  $T = [[a_{n_1}], \dots, [a_{n_k}]]$  un ovillo racional (ver la Definición 1.3.2), el numerador de  $T$ ,  $N(T)$ , es un nudo racional y se representa por  $\langle a_{n_1}, \dots, a_{n_k} \rangle$ .

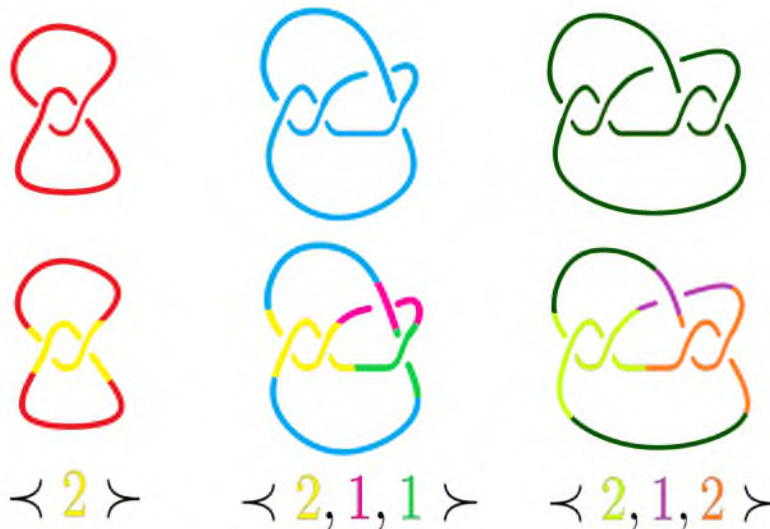


Figura 2.50: Nudos racionales.

## 2.3. Ovillos racionales

### 2.3.1. Construcción de ovillos racionales

A continuación, abordaremos la construcción de los ovillos racionales. Aunque en el Capítulo 1 ya presentamos la Definición 1.3.2, veremos más adelante que esta definición es equivalente a la que

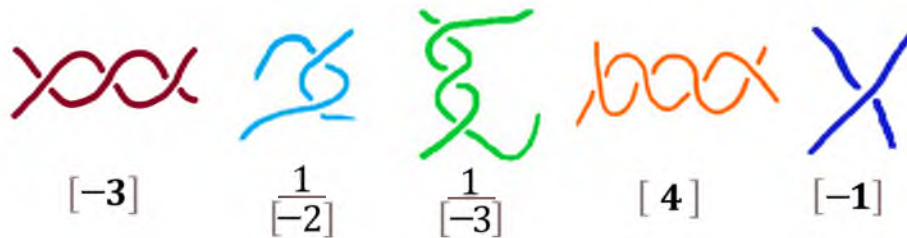
se introduce en esta sección. Un ovillo racional se construye a partir de una secuencia de ovillos enteros, donde cada ovillo entero puede ser un ovillo horizontal o vertical. Estas secuencias de ovillos enteros se suman y multiplican de acuerdo a la regla que se presenta a continuación.

**Definición 2.3.1** Sean  $n_1, \dots, n_k$ , una secuencia de números enteros. Consideremos la secuencia de ovillos enteros  $T_{n_1}, \dots, T_{n_k}$ , donde  $T_{n_i} = [n_i]$  o  $\frac{1}{[n_i]}$ .

- Sea  $G_1 = T_{n_1}$ ,
- para  $j < k$ 
  - (i) si  $T_{n_{j+1}} = [n_{j+1}]$ , sea  $G_{j+1} = [n_{j+1}] + G_j$  o  $G_{j+1} = G_j + [n_{j+1}]$ ,
  - (ii) si  $T_{n_{j+1}} = \frac{1}{[n_{j+1}]}$ , sea  $G_{j+1} = \frac{1}{[n_{j+1}]} * G_j$  o  $G_{j+1} = G_j * \frac{1}{[n_{j+1}]}$ .

Al ovillo  $G_k$  construido de esta manera se le conoce como **ovillo racional** con  $k$  ovillos enteros.

**Ejemplo 2.3.2** Por ejemplo, escojamos los ovillos enteros  $[-3]$ ,  $\frac{1}{[-2]}$ ,  $\frac{1}{[-3]}$ ,  $[4]$  y  $[-1]$ .



Iniciamos la construcción haciendo  $G_1 = [-3]$



Ahora tomaremos el ovillo  $\frac{1}{[-2]}$ , como es vertical, lo podemos multiplicar por arriba o por abajo, en este caso escogemos multiplicarlo por arriba, esto es

$$G_2 = \frac{1}{[-2]} * G_1$$



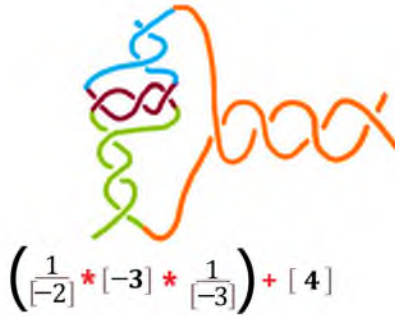
Ahora tomaremos el ovrillo  $\frac{1}{[-3]}$ , como es vertical, lo podemos multiplicar por arriba o por abajo, en este caso escogemos multiplicarlo por abajo, esto es

$$G_3 = G_2 * \frac{1}{[-3]}$$



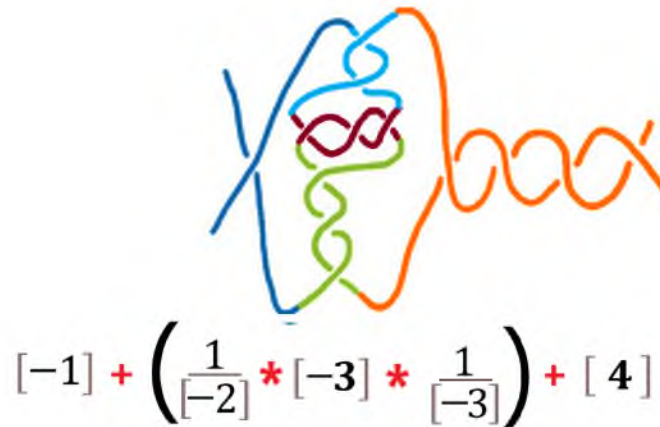
Ahora tomaremos el ovrillo  $[4]$ , como es horizontal, lo podemos sumar por la derecha o por la izquierda, en este caso escogemos sumarlo por la derecha, esto es

$$G_4 = G_3 + [4]$$



Ahora tomaremos el ovillo  $[-1]$ , como es horizontal, lo podemos sumar por la derecha o por la izquierda, en este caso escogemos sumarlo por la izquierda, esto es

$$G_5 = [-1] + G_4$$



De esta forma, hemos construido el ovillo racional

$$G_5 = [-1] + \left( \frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]} \right) + [4]$$

Cualquier ovillo construido de esta forma está en su **forma torsión** y tendrá cualquiera de las dos formas siguientes.

Para una secuencia de enteros  $n_1, n_2, \dots, n_k$ ,

$$G = \frac{1}{[n_k]} * \left( \dots * \left( [n_3] + \left( \frac{1}{[n_3]} * \left( [n_2] + \frac{1}{[n_0]} + [n_1] \right) * \frac{1}{[n_3]} \right) + [n_3] \right) * \dots \right) * \frac{1}{[n_k + 1]}$$

o

$$G = [n_k] + \left( \dots + \left( \frac{1}{[n_3]} * \left( [n_3] + \left( \frac{1}{[n_2]} * [n_0] * \frac{1}{[n_1]} \right) + [n_4] \right) * \frac{1}{[n_3]} \right) + \dots \right) + [n_k + 1]$$

**Definición 2.3.3** Sea  $n_1, n_2, \dots, n_k$  una secuencia de números enteros. Dada la construcción principal de un ovillo  $G$  como

$$G = \frac{1}{[n_k]} * \left( \dots * \left( [n_3] + \left( \frac{1}{[n_3]} * \left( [n_2] + \frac{1}{[n_0]} + [n_1] \right) * \frac{1}{[n_4]} \right) + [n_6] \right) * \dots \right) * \frac{1}{[n_k + 1]}$$

Definimos un **sub-ovillo** como cualquier subexpresión de esta construcción. Por ejemplo,

$$\frac{1}{[n_3]} * \left( [n_2] + \frac{1}{[n_0]} + [n_1] \right),$$

y

$$\left( \frac{1}{[n_3]} * \left( [n_2] + \frac{1}{[n_0]} + [n_1] \right) * \frac{1}{[n_3]} \right) + [n_6]$$

son sub-ovillos de  $G$ , en particular cada ovillo entero  $[n_i]$  o  $\frac{1}{[n_i]}$  es un sub-ovillo.

La construcción de ovillos racionales utiliza secuencias de ovillos enteros que se suman y multiplican según reglas específicas. La destorcedura, por otro lado, es el proceso inverso a las torceduras de un ovillo. Consiste en aplicar un homeomorfismo que deshace la torsión de un ovillo, llevándolo a formas específicas como el ovillo  $[0]$  o el ovillo  $[\infty]$ .

**Definición 2.3.4** Sea  $G$  un ovillo entero, definimos una **destorcedura** como el homeomorfismo  $h : (\mathbb{B}^3, A) \rightarrow (\mathbb{B}^3, A)$ , dado a continuación

- si  $G = [n]$  con  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces sumamos  $G$  con su imagen espejo,

$$G + (-G) = [n] + [-n] = [n - n] = [0]$$

- si  $G = \frac{1}{[n]}$ , entonces multiplicamos  $G$  por su imagen espejo,

$$G * (-G) = \frac{1}{[n]} * \frac{1}{[-n]} = \frac{1}{[n-n]} = \frac{1}{[0]} = [\infty].$$

De esta manera, dado un ovillo en su forma torsión podemos obtener el ovillo  $[0]$  o el ovillo  $[\infty]$  por medio de homeomorfismos. Esto nos muestra la equivalencia de las definiciones 1.3.2 y 2.3.1.

Lo ilustraremos de la siguiente manera,

**Ejemplo 2.3.5** Del Ejemplo 2.3.2 tenemos que,

$$G_5 = [-1] + \left( \frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]} \right) + [4]$$



Si sumamos el ovillo  $[-4]$  por la derecha del ovillo  $G_5$  como se observa en la Figura 2.51, destorceremos el ovillo  $[4]$ , aplicando cuatro veces el movimiento de Reidemeister II.



Figura 2.51:  $G_5 + [-4]$

y se obtiene un nuevo ovillo  $G_4 = [-1] + \left( \frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]} \right)$ .

Al ovillo  $G_4$  le sumamos el ovillo  $[1]$  por la izquierda como se muestra en la Figura 2.52 y destorcemos el ovillo  $[-1]$ .

Figura 2.52:  $[1] + G_4$ 

Con esto se obtiene el ovrillo  $G_3 = \left(\frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]}\right)$ . Ahora se multiplica el ovrillo  $\frac{1}{[3]}$  debajo de  $G_3$  como se muestra en la Figura 2.53 y destorcemos el ovrillo  $\frac{1}{[-3]}$ .

Figura 2.53:  $G_3 * \frac{1}{[3]}$ 

El resultado es el ovrillo  $G_2 = \left(\frac{1}{[-2]} * [-3]\right)$ . Al ovrillo  $G_2$  le multiplicamos por arriba el ovrillo  $\frac{1}{[2]}$  como se muestra en la Figura 2.54, destorcemos el ovrillo  $\frac{1}{[-2]}$ ,

Figura 2.54:  $\frac{1}{[2]} * G_2$

y se obtiene el ovillo  $G_1 = [-3]$ . Ahora, sumamos al ovillo  $G_1$  el ovillo  $[3]$  por izquierda o por la derecha, en este caso lo sumamos por la izquierda como se muestra en la Figura 2.55 y destorcemos el ovillo  $[-3]$ .

Figura 2.55:  $[3] + G_1$ 

Así obtuvimos el ovillo  $[0]$  (Figura 2.56) al destorcer paso a paso el ovillo  $G_5$ .

Figura 2.56: Ovillo  $[0]$ 

### 2.3.2. Isotopías de ovillos racionales

Para introducir el tema de las isotopías de ovillos racionales, es esencial entender cómo ciertas transformaciones preservan la estructura de los ovillos. Una propiedad importante es la isotopía bajo reflexiones horizontales y verticales, lo cual implica que un ovillo racional es topológicamente equivalente a su reflexión horizontal y vertical, como veremos a continuación.

**Teorema 2.3.6** *Sea  $G$  un ovillo racional*

- *La reflexión horizontal  $G^\Delta$  es isotópica a  $G$ .*
- *La reflexión vertical  $G^\nabla$  es isotópica a  $G$ .*

**Demostración:**

En esta demostración usaremos la construcción de ovillo racional de la Definición 2.3.1, aplicando el método de inducción sobre el número  $k$  de ovillos enteros en  $G$  con  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Si  $k = 1$ , entonces  $G = [n]$  ó  $\frac{1}{|n|}$  para alguna  $n \in \mathbb{Z}$ . En cualquier caso, por el Lema 2.2.6, la reflexión horizontal  $G^\Delta = G$  y la reflexión vertical  $G^\nabla = G$ .

Supongamos que para cualquier entero  $j = 1, \dots, k$ ,  $G_j$  es isotópico tanto a su reflexión horizontal  $G_j^\Delta$  como a su reflexión vertical  $G_j^\triangleleft$ .

Sea  $G_{k+1}$  un ovillo con  $k + 1$  ovillos enteros. Por la construcción de ovillos racionales  $G_{k+1} = [n_{k+1}] + G_k$ ,  $G_{k+1} = G_k + [n_{k+1}]$ ,  $G_{k+1} = \frac{1}{[n_{k+1}]} * G_k$ , o  $G_{k+1} = G_k * \frac{1}{[n_{k+1}]}$  para algún  $n_{k+1} \in \mathbb{Z}$ , donde  $G_k$  es un ovillo racional con  $k$  ovillos enteros.

- Supongamos que  $G_{k+1} = [n_{k+1}] + G_k$ , entonces la reflexión horizontal de  $[n_{k+1}]$  es igual a  $[n_{k+1}]$  (por el Lema 2.2.6) y, por hipótesis,  $G_k^\Delta$  es isotópico a  $G_k$ , esto es

$$\begin{aligned} G_{k+1}^\Delta &= ([n_{k+1}] + G_k)^\Delta \\ &= [n_{k+1}]^\Delta + G_k^\Delta \quad (\text{Lema 2,2,7 (a)}) \\ &\sim [n_{k+1}] + G_k \\ &= G_{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $G_{k+1}^\Delta \sim G_{k+1}$ .

Análogamente, supongamos que  $G_{k+1} = G_k + [n_{k+1}]$ , entonces la reflexión horizontal de  $[n_{k+1}]$  es igual a  $[n_{k+1}]$  y, por hipótesis,  $G_k^\Delta$  es isotópico a  $G_k$ , esto es

$$\begin{aligned} G_{k+1}^\Delta &= (G_k + [n_{k+1}])^\Delta \\ &= G_k^\Delta + [n_{k+1}]^\Delta \quad (\text{Lema 2,2,7 (a)}) \\ &\sim G_k + [n_{k+1}] \\ &= G_{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $G_{k+1}^\Delta \sim G_{k+1}$ .

- Ahora si  $G_{k+1} = [n_{k+1}] + G_k$ , entonces la reflexión vertical de  $[n_{k+1}]$  es igual a  $[n_{k+1}]$  (por el Lema 2.2.6) y, por hipótesis,  $G_k^\triangleleft$  es isotópico a  $G_k$ , esto es

$$\begin{aligned}
 G_{k+1}^{\triangleleft} &= ([n_{k+1}] + G_k)^{\triangleleft} \\
 &= G_k^{\triangleleft} + [n_{k+1}]^{\triangleleft} \quad (\text{Lema 2,2,7 (c)}) \\
 &\sim G_k + [n_{k+1}] \\
 &\sim [n_{k+1}] + G_k \quad (\text{Proposición 2,2,13 (a)}) \\
 &= G_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $G_{k+1}^{\triangleleft} \sim G_{k+1}$ .

Análogamente, supongamos que  $G_{k+1} = G_k + [n_{k+1}]$ , entonces la reflexión vertical de  $[n_{k+1}]$  es igual a  $[n_{k+1}]$  y, por hipótesis,  $G_k^{\triangleleft}$  es isotópico a  $G_k$ , esto es

$$\begin{aligned}
 G_{k+1}^{\triangleleft} &= (G_k + [n_{k+1}])^{\triangleleft} \\
 &= [n_{k+1}]^{\triangleleft} + G_k^{\triangleleft} \quad (\text{Lema 2,2,7 (c)}) \\
 &\sim [n_{k+1}] + G_k \\
 &\sim G_k + [n_{k+1}] \quad (\text{Proposición 2,2,13 (a)}) \\
 &= G_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $G_{k+1}^{\triangleleft} \sim G_{k+1}$ .

- Supongamos que  $G_{k+1} = \frac{1}{[n_{k+1}]} * G_k$ , entonces la reflexión vertical de  $\frac{1}{[n_{k+1}]}$  es igual a  $\frac{1}{[n_{k+1}]}$  (por el Lema 2.2.6) y, por hipótesis,  $G_k^{\triangleleft}$  es isotópico a  $G_k$ , esto es

$$\begin{aligned}
 G_{k+1}^{\triangleleft} &= \left( \frac{1}{[n_{k+1}]} * G_k \right)^{\triangleleft} \\
 &= \left( \frac{1}{[n_{k+1}]} \right)^{\triangleleft} * G_k^{\triangleleft} \quad (\text{Lema 2,2,7 (b)}) \\
 &\sim \frac{1}{[n_{k+1}]} * G_k \\
 &= G_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Análogamente, supongamos que  $G_{k+1} = G_k * \frac{1}{[n_{k+1}]}$ , entonces la reflexión vertical de  $\frac{1}{[n_{k+1}]}$  es

igual a  $\frac{1}{[n_{k+1}]}$  y por hipótesis  $G_k^\triangleleft$  es isotópico a  $G_k$ , esto es

$$\begin{aligned} G_{k+1}^\triangleleft &= \left( G_k * \frac{1}{[n_{k+1}]} \right)^\triangleleft \\ &= G_k^\triangleleft * \left( \frac{1}{[n_{k+1}]} \right)^\triangleleft \quad (\text{Lema 2,2,7 (b)}) \\ &\sim G_k * \frac{1}{[n_{k+1}]} \\ &= G_{k+1}. \end{aligned}$$

- Ahora si  $G_{k+1} = \frac{1}{[n_{k+1}]} * G_k$ , entonces la reflexión horizontal de  $\frac{1}{[n_{k+1}]}$  es igual a  $\frac{1}{[n_{k+1}]}$  (por el Lema 2.2.6) y, por hipótesis,  $G_k^\triangleleft$  es isotópico a  $G_k$ , esto es

$$\begin{aligned} G_{k+1}^\triangleleft &= \left( \frac{1}{[n_{k+1}]} * G_k \right)^\triangleleft \\ &= G_k^\triangleleft * \left( \frac{1}{[n_{k+1}]} \right)^\triangleleft \quad (\text{Lema 2,2,7 (d)}) \\ &\sim G_k * \frac{1}{[n_{k+1}]} \\ &\sim \frac{1}{[n_{k+1}]} * G_k \quad (\text{Proposición 2,2,13 (b)}) \\ &= G_{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $G_{k+1}^\triangleleft \sim G_{k+1}$ .

Análogamente, supongamos que  $G_{k+1} = G_k * \frac{1}{[n_{k+1}]}$ , entonces la reflexión horizontal de  $\frac{1}{[n_{k+1}]}$  es igual a  $\frac{1}{[n_{k+1}]}$  y, por hipótesis,  $G_k^\triangleleft$  es isotópico a  $G_k$ , esto es

$$\begin{aligned} G_{k+1}^\triangleleft &= \left( G_k * \frac{1}{[n_{k+1}]} \right)^\triangleleft \\ &= \left( \frac{1}{[n_{k+1}]} \right)^\triangleleft * G_k^\triangleleft \quad (\text{Lema 2,2,7 (d)}) \\ &\sim \frac{1}{[n_{k+1}]} * G_k \\ &\sim G_k * \frac{1}{[n_{k+1}]} \quad (\text{Proposición 2,2,13 (b)}) \\ &= G_{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $G_{k+1}^\Delta \sim G_{k+1}$ .

■

Como consecuencia de la Proposición 2.2.13 y el Teorema 2.3.6 enunciaremos el siguiente corolario.

**Corolario 2.3.7** *Si  $B$  es un ovillo racional entonces*

- $[n] + B \sim B + [n]$
- $\frac{1}{[n]} * B \sim B * \frac{1}{[n]}$

Las demostraciones anteriores han establecido que las reflexiones horizontales y verticales conservan la isotopía entre ovillos. Ahora veamos la preservación de isotopías para las operaciones fundamentales como la suma y la multiplicación.

**Corolario 2.3.8** *Sea  $T$  un ovillo racional, para  $m, n \in \mathbb{Z}$  tenemos que*

$$(a) \quad [m] + T + [n] \sim T + [m + n]$$

$$(b) \quad \frac{1}{[m]} * T * \frac{1}{[n]} \sim T * \frac{1}{[m+n]}$$

**Demostración:**

Sea  $T' = T + [n]$ , entonces,

$$\begin{aligned} [m] + T + [n] &= [m] + T' \\ &\sim T' + [m] \\ &= T + [n] + [m] \\ &= T + [n + m] \end{aligned}$$

Por lo tanto  $[m] + T + [n] \sim T + [m + n]$

Ahora, sea  $T' = T * \frac{1}{[n]}$ , entonces,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{[m]} * T * \frac{1}{[n]} &= \frac{1}{[m]} * T' \\
 &\sim T' * \frac{1}{[m]} \\
 &= T * \frac{1}{[n]} * \frac{1}{[m]} \\
 &= T * \frac{1}{[n+m]}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\frac{1}{[m]} * T * \frac{1}{[n]} \sim T * \frac{1}{[m+n]}$ . ■

**Lema 2.3.9** *Sea  $G$  un ovillo, entonces*

$$(G^r)^r = (G^\triangleleft)^\triangle$$

La demostración se desprende de los siguientes diagramas.

Sea  $G$  un ovillo como el que se muestra en la Figura 2.57.



Figura 2.57

Al aplicar las operaciones  $(G^r)^r$  a  $G$  obtenemos

Figura 2.58

Por otro lado, al aplicar las operaciones  $(G^\triangleleft)^\triangle$  a  $G$  obtenemos

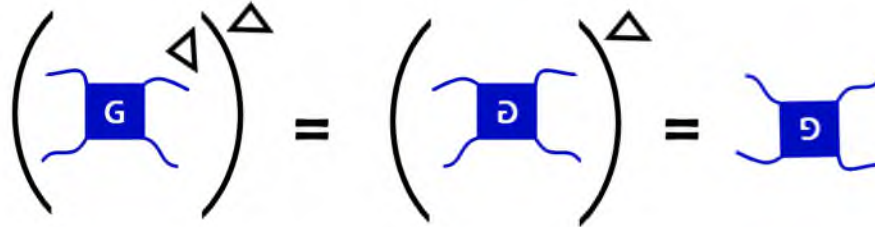


Figura 2.59

por lo que concluimos que  $(G^r)^r = (G^\triangleleft)^\triangle$ .

**Proposición 2.3.10** *Sea  $G$  un ovillo racional entonces,*

$$(G^r)^r \sim G.$$

**Demostración:**

Sea  $G$  un ovillo racional, por el Lema 2.3.9 tenemos que

$$(G^r)^r = (G^\triangleleft)^\triangle,$$

y por el Teorema 2.3.6 tenemos que

$$(G^\triangleleft)^\triangle \sim G$$

por lo tanto,  $(G^r)^r \sim G$ . ■

**Lema 2.3.11** *Sea  $T$  un ovillo racional, entonces*

$$T^r \sim T^{-r}$$

**Demostración:**

Sea  $T$  un ovillo racional entonces,

$$\begin{aligned} T^r &= ((T^{-r})^r)^r \\ &= ((T^{-r})^\triangleleft)^\triangle \quad (\text{por el Lema 2.3.9}) \\ &\sim T^{-r} \quad (\text{por el Teorema 2.3.6}) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $T^r \sim T$ . ■

**Proposición 2.3.12** *Sea  $T$  un ovillo racional, entonces*

$$T^i \sim T^{-i}$$

**Demostración:**

Sea  $T$  un ovillo racional, por definición tenemos que

$$\begin{aligned} T^i &= -T^r \\ &\sim -T^{-r} \quad (\text{por el Lema 2.3.11}) \\ &= T^{-i} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $T^i \sim T^{-i}$ . ■

**Lema 2.3.13** *Sea  $T$  un ovillo racional entonces,*

$$(T^i)^i = (T^r)^r.$$

**Demostración:**

Sea  $T$  un ovillo racional, por definición tenemos que

$$\begin{aligned} T^i &= -T^r \quad \text{entonces,} \\ (T^i)^i &= (T^r)^i \\ &= -(T^r)^r \\ &= ((-T)^r)^r \quad (\text{por la Observación 2.2.11}) \\ &= (-T^r)^r \\ &\sim (T^r)^r \quad (\text{por el Lema 2.3.11}) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $(T^i)^i = (T^r)^r$ . ■

**Proposición 2.3.14** *Sea  $T$  un ovillo racional, entonces*

$$(T^i)^{-i}$$

**Demostración:**

Sea  $T$  un ovillo racional entonces,

$$\begin{aligned} (T^i)^{-i} &= (-T^r)^{-i} \\ &\sim (-T^r)^i \quad (\text{por la Proposición 2.3.12}) \\ &= -(-T^r)^r \\ &= (T^r)^r \\ &\sim T \quad (\text{por la Proposición 2.3.10}). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $(T^i)^{-i} \sim T$ . ■

**Proposición 2.3.15** *Sea  $T$  un ovillo racional, entonces*

$$(T^i)^i \sim T$$

**Demostración:**

Sea  $T$  un ovillo racional, entonces

$$\begin{aligned} T &= (T^i)^{-i} \quad (\text{por la Proposición 2.3.14}) \\ &\sim (T^i)^i \quad (\text{por la Proposición 2.3.12}) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(T^i)^i \sim T. \quad \text{■}$$

Así para un ovillo racional su inversa se denota como  $T^i = \frac{1}{T}$ .

**Observación 2.3.16**

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{T}}\right) = \left(\frac{1}{T}\right)^i = (T^i)^i \sim T$$

y

$$T^r = \frac{1}{-T} = -\frac{1}{T}$$

**Lema 2.3.17** *Sean  $G$  y  $T$  ovillos, entonces*

$$\blacksquare (G + T)^r = T^r * G^r$$

▪  $(G + T)^{-r} = G^{-r} * T^{-r}$

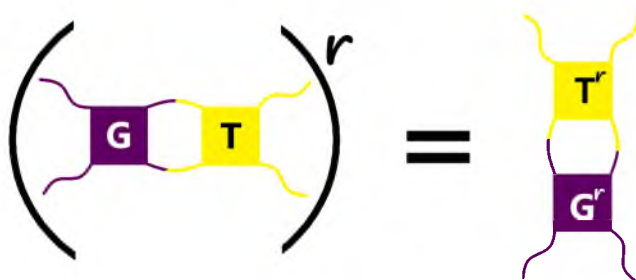


Figura 2.60:  $(G + T)^r = T^r * G^r$

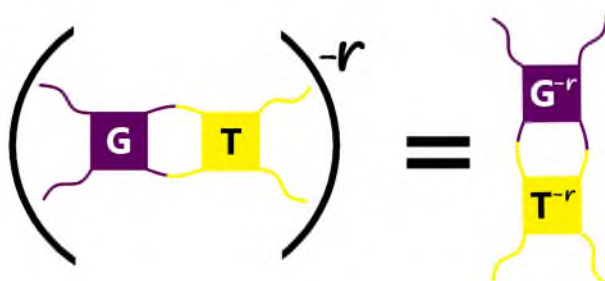


Figura 2.61:  $(G + T)^{-r} = G^{-r} * T^{-r}$

**Proposición 2.3.18** *Todo ovrillo racional  $T$  satisface las siguientes isotopías,*

▪  $T * \frac{1}{[n]} \sim \frac{1}{[n] + \frac{1}{T}}$

▪  $\frac{1}{[n]} * T \sim \frac{1}{\frac{1}{T} + [n]}$

**Demostración:**

Sean  $T$  un ovrillo racional y  $[n]$  un ovrillo entero, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{[n] + \frac{1}{T}} &= \left( [n] + \frac{1}{T} \right)^i \quad (\text{por la Proposición 2.2.8}) \\ &= ([n] + T^i)^i \quad (\text{por la Proposición 2.2.8}) \\ &= -([n] + (-T))^r \\ &= -([n] + (-T)^r)^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-([n] + (-T)^r))^r \\
 &= ([-n] + (-(-T^r)))^r \quad (\text{por la Observación 2.2.4}) \\
 &= ([-n] + T^r)^r \quad (\text{por la Observación 2.2.11}) \\
 &= ((T^r)^r * [-n]^r) \quad (\text{por el Lema 2.3.17}) \\
 &= (T^r)^r * \frac{1}{[n]} \quad (\text{por la Observación 2.3.16}) \\
 &\sim T * \frac{1}{[n]} \quad (\text{por la Proposición 2.3.10}).
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\frac{1}{T} + [n]} &= \left( \frac{1}{T} + [n] \right)^i \quad (\text{por la Proposición 2.2.8}) \\
 &= (T^i + [n])^i \quad (\text{por la Proposición 2.2.8}) \\
 &= -((-T)^r + [n])^r \\
 &= -((-T)^r + [n])^r \\
 &= (-((-T)^r + [n]))^r \quad (\text{por la Observación 2.2.4}) \\
 &= ((-(-T^r)) + [-n])^r \quad (\text{por la Observación 2.2.11}) \\
 &= (T^r + [-n])^r \\
 &= ([-n]^r * (T^r)^r) \quad (\text{por el Lema 2.3.17}) \\
 &= \frac{1}{[n]} * (T^r)^r \quad (\text{por la Observación 2.3.16}) \\
 &\sim \frac{1}{[n]} * T \quad (\text{por la Proposición 2.3.10}).
 \end{aligned}$$

■

### 2.3.3. Ovillos racionales en forma estándar

**Definición 2.3.19** *Se dice que un ovillo racional está en su **forma estándar** si es creado mediante sumas consecutivas de ovillos enteros horizontales  $[n]$  sólo por la derecha y multiplicaciones de los ovillos enteros verticales  $\frac{1}{[n]}$  sólo por la parte inferior, para  $n \in \mathbb{Z}$ , a partir de los ovillos  $[0]$  o  $[\infty]$ .*

De este modo, un ovillo racional en su forma estándar se puede obtener inductivamente a partir de un ovillo racional previamente creado en su forma torsión.

**Lema 2.3.20** *Todo ovillo racional en su forma torsión puede ser llevado a su forma estándar por medio de isotopías.*

**Demostración:**

Sea  $G$  un ovillo racional en su forma torsión

$$G = \frac{1}{[n_k]} * \left( \dots * \left( [n_5] + \left( \frac{1}{[n_3]} * \left( [n_2] + \frac{1}{[n_0]} + [n_1] \right) * \frac{1}{[n_4]} \right) + [n_5] \right) * \dots \right) * \frac{1}{[n_k + 1]},$$

podemos reescribir a  $G$  como la multiplicación de los sub-ovillos  $\frac{1}{[n_k]}$  y

$$T = \left( \dots * \left( [n_5] + \left( \frac{1}{[n_3]} * \left( [n_2] + \frac{1}{[n_0]} + [n_1] \right) * \frac{1}{[n_4]} \right) + [n_5] \right) * \dots \right) * \frac{1}{[n_k + 1]},$$

esto es

$$G = \frac{1}{[n_k]} * T,$$

por el Corolario 2.3.7 tenemos que

$$\begin{aligned} G &= T * \frac{1}{[n_k]} \\ &= \left( \dots * \left( [n_5] + \left( \frac{1}{[n_3]} * \left( [n_2] + \frac{1}{[n_0]} + [n_1] \right) * \frac{1}{[n_4]} \right) + [n_6] \right) * \dots \right) * \frac{1}{[n_{k+1}]} * \frac{1}{[n_k]} \\ &= \left( \dots * \left( [n_5] + \left( \frac{1}{[n_3]} * \left( [n_2] + \frac{1}{[n_0]} + [n_1] \right) * \frac{1}{[n_4]} \right) + [n_6] \right) * \dots \right) * \frac{1}{[n_{k+1} + n_k]} \end{aligned}$$

Inductivamente tomamos el siguiente ovillo exterior ubicado a la izquierda y procedemos a utilizar el Corolario 2.3.7

$$G = \left( \dots * \left( \left( \left( \frac{1}{[n_0]} + [n_1 + n_2] \right) * \frac{1}{[n_4 + n_3]} \right) + [n_6 + n_5] \right) * \dots \right) * \frac{1}{[n_{k+1} + n_k]}$$

■

**Ejemplo 2.3.21** Dado el ovillo  $G_5 = [-1] + \left(\frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]}\right) + [4]$  que se muestra en la Figura 2.62, también podemos escribir a  $G_5$  como la suma de los sub-ovillos  $[-1]$  y  $G_4 = \left(\frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]}\right) + [4]$ , esto es,  $G_5 = [-1] + G_4$ .

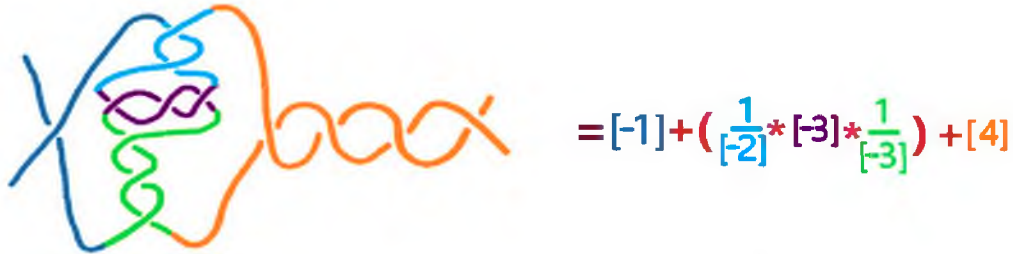


Figura 2.62:  $G_5 = [-1] + \left(\frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]}\right) + [4]$

Por el Corolario 2.3.7 tenemos que  $G_5 = G_4 + [-1]$  como se muestra en la Figura 2.63, esto es

$$G_5 = \left(\frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]}\right) + [4] + [-1]$$

$$\sim \left(\frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]}\right) + [3] \quad (\text{ver Figura 2.64})$$

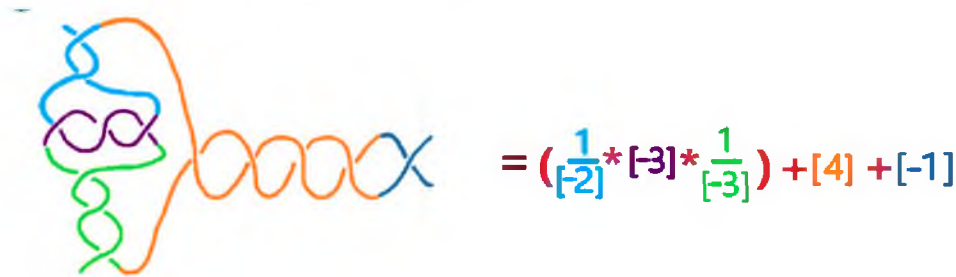


Figura 2.63:  $G_5 = G_4 + [-1]$

Ahora tomaremos el sub-ovillo  $G_3 = \frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]}$ , y lo reescribiremos como  $G_3 = \frac{1}{[-3]} * G_2$ .



Figura 2.64:  $G_3 = \frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]}$

Por el Corolario 2.3.7 tenemos que  $G_3 \sim G_2 * \frac{1}{[-2]}$  como se muestra en la Figura 2.65, esto es

$$\begin{aligned} G_3 &= [-3] * \frac{1}{[-3]} * \frac{1}{[-2]} \\ &= [-3] * \frac{1}{[-3 + (-2)]} \\ &= [-3] * \frac{1}{[-5]} \quad (\text{ver Figura 2.66}) \end{aligned}$$

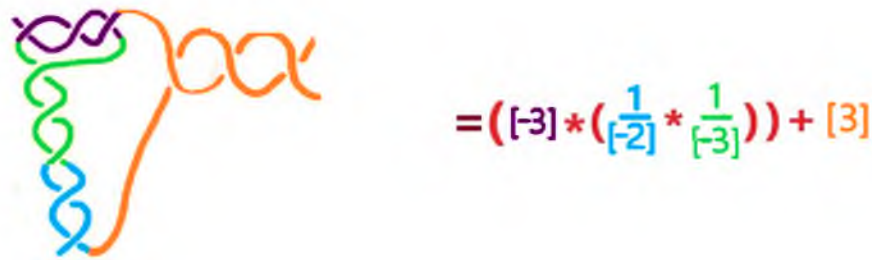


Figura 2.65:  $G_3 = \frac{1}{[-2]} * G_2$

Observemos que el ovrillo de la Figura 2.66 ya se encuentra en su forma estándar ya que todas las sumas se encuentran a la derecha y las multiplicaciones por debajo, por lo que la forma estándar del ovrillo  $G_5$  es  $G_5 = ([-3] * \frac{1}{[-5]}) + [3]$ .



Figura 2.66:  $G_5 = ([-3] * \frac{1}{[-5]}) + [3]$

# Capítulo 3

## Prueba del Teorema de Conway

En este capítulo, se aborda el objetivo principal del trabajo de tesis. Se inicia con el estudio de la representación algebraica de los ovillos racionales como una fracción continua, seguido por el análisis de su forma canónica para establecer isotopías de ovillos racionales que darán pie a la demostración de resultados importantes para el Teorema de Conway. La prueba del Teorema de Conway es el núcleo central, donde se demuestra que dos ovillos racionales son equivalentes si y sólo si poseen la misma fracción asociada. Se presentan ejemplos ilustrativos para clarificar este resultado teórico. Además, se examina la aplicación de los ovillos racionales en biología, específicamente en el contexto del ADN y las enzimas, donde se les considera modelos útiles para entender su estructura y comportamiento.

### 3.1. Fracción continua de un ovillo racional

**Definición 3.1.1** *Una **fracción continua de un ovillo racional**  $T$  es una descripción algebraica a través de una fracción continua construida a partir de los ovillos enteros  $[a_1], [a_2], \dots, [a_n]$  con todos los numeradores iguales a 1, es decir, una expresión del tipo:*

$$T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]] = [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_{n-1}] + \frac{1}{[a_n]}}}}}$$

**Proposición 3.1.2** *Todo ovrillo racional se puede escribir como una fracción continua.*

**Demostación:**

Sea

$$T = \left( \left( \left( \left( [a_n] * \frac{1}{[a_{n-1}]} \right) + [a_{n-2}] \right) * \frac{1}{[a_{n-3}]} * \dots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1] \right)$$

un ovrillo racional en su forma estándar, utilizando la Proposición 2.3.18 tenemos que:

$$\begin{aligned} T &= \left( \left( \left( \left( [a_n] * \frac{1}{[a_{n-1}]} \right) + [a_{n-2}] \right) * \frac{1}{[a_{n-3}]} * \dots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1] \right) \\ &\sim \left( \left( \left( \left( \frac{1}{[a_{n-1}] + \frac{1}{[a_n]}} \right) + [a_{n-2}] \right) * \frac{1}{[a_{n-3}]} * \dots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1] \right) \\ &= \left( \left( \left( [a_{n-2}] + \left( \frac{1}{[a_{n-1}] + \frac{1}{[a_n]}} \right) \right) * \frac{1}{[a_{n-3}]} * \dots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1] \right) \\ &\sim \left( \frac{1}{[a_{n-3}] + \frac{1}{[a_{n-2}] + \frac{1}{[a_{n-1}] + \frac{1}{[a_n]}}} * \dots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1] \\ &\vdots \\ &\sim [a_1] + \frac{1}{[a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_{n-1}] + \frac{1}{[a_n]}}}}} \end{aligned}$$

Lo cuál prueba el resultado. ■

**Definición 3.1.3** *Un ovrillo racional  $[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  es **alternante** si todos los  $a_i$  son positivos o todos son negativos.*

**Definición 3.1.4** *Definamos la operación binaria  $*$  :  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  como*

$$a * b = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

**Observación 3.1.5** *Observemos que  $*$  es conmutativa. Sean  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .*

$$\begin{aligned} (a * b) &= \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} \\ &= (b * a). \end{aligned}$$

*Además,  $*$  es asociativa, ya que*

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \\ &= a * \frac{1}{\frac{c+b}{bc}} \\ &= a * \frac{bc}{c+b} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{bc}{c+b}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{c+b}{bc}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{c+b}{bc}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{bc + a(c + b)} \\
 &= \frac{1}{\frac{abc}{bc + ac + ab}} \\
 &= \frac{1}{\frac{abc}{ab + c(a + b)}} \\
 &= \frac{1}{\frac{a + b}{ab} + \frac{1}{c}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{a + b}{ab}} + \frac{1}{c}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{a * b} + \frac{1}{c}} \\
 &= (a * b) * c.
 \end{aligned}$$

**Definición 3.1.6** Sea  $T$  un ovrillo racional en forma de fracción continua

$$T = [a_0] + \frac{1}{[a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_{n+1}] + \frac{1}{[a_{n+2}]}}}}}$$

Sea  $\mathcal{O}$  el conjunto de los ovrillos racionales. Definiremos  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{Q}$  de la siguiente manera,

$$F(T) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}}}}}.$$

Al número racional  $F(T)$  lo llamaremos **fracción de  $T$** .

**Lema 3.1.7** Sea  $T$  un ovrillo racional y  $[m]$  un ovrillo entero, entonces

$$F(T + [m]) = F([m] + T)$$

y

$$F\left(\frac{1}{[n]} * T\right) = F\left(T * \frac{1}{[n]}\right).$$

**Demostración:**

Sea  $T = [n_k] + \left(\dots + \left(\frac{1}{[n_5]} * \left([n_3] + \left(\frac{1}{[n_2]} * [n_0] * \frac{1}{[n_1]}\right) + [n_4]\right) * \frac{1}{[n_6]}\right) + \dots\right) + [n_{k+1}]$  un ovrillo racional, entonces para toda  $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} F([m] + T) &= F\left([m] + [n_k] + \left(\dots + \left(\frac{1}{[n_5]} * \left([n_3] + \left(\frac{1}{[n_2]} * [n_0] * \frac{1}{[n_1]}\right) + [n_4]\right) * \frac{1}{[n_6]}\right) + \dots\right) + [n_{k+1}]\right) \\ &= F\left([m + n_k] + \left(\dots + \left(\frac{1}{[n_5]} * \left([n_3] + \left(\frac{1}{[n_2]} * [n_0] * \frac{1}{[n_1]}\right) + [n_4]\right) * \frac{1}{[n_6]}\right) + \dots\right) + [n_{k+1}]\right) \\ &= m + n_k + \left(\dots + \left(\frac{1}{n_5} * \left(n_3 + \left(\frac{1}{n_2} * n_0 * \frac{1}{n_1}\right) + n_4\right) * \frac{1}{n_6}\right) + \dots\right) + n_{k+1} \\ &= n_k + \left(\dots + \left(\frac{1}{n_5} * \left(n_3 + \left(\frac{1}{n_2} * n_0 * \frac{1}{n_1}\right) + n_4\right) * \frac{1}{n_6}\right) + \dots\right) + n_{k+1} + m \\ &= F\left([n_k] + \left(\dots + \left(\frac{1}{[n_5]} * \left([n_3] + \left(\frac{1}{[n_2]} * [n_0] * \frac{1}{[n_1]}\right) + [n_4]\right) * \frac{1}{[n_6]}\right) + \dots\right) + [n_{k+1}] + [m]\right) \\ &= F(T + [m]) \end{aligned}$$

y análogamente,

$$F\left(\frac{1}{[n]} * T\right) = F\left(T * \frac{1}{[n]}\right).$$

■

**Proposición 3.1.8** Sea  $T$  un ovrillo racional en su forma torsión y sea  $C$  su forma en fracción continua, entonces

$$F(T) = F(C).$$

**Demostración:**

Sea  $T = [n_k] + \left(\dots + \left(\frac{1}{[n_5]} * \left([n_3] + \left(\frac{1}{[n_2]} * [n_0] * \frac{1}{[n_1]}\right) + [n_4]\right) * \frac{1}{[n_6]}\right) + \dots\right) + [n_{k+1}]$  un ovrillo racional

en su forma torsión entonces

$$\begin{aligned}
 F(T) &= n_k + \left( \dots + \left( \frac{1}{n_5} * \left( n_3 + \left( \frac{1}{n_2} * n_0 * \frac{1}{n_1} \right) + n_4 \right) * \frac{1}{n_6} \right) + \dots \right) + n_{k+1} \\
 &= n_k + \left( \dots + \frac{1}{n_5 + \frac{1}{\left( n_3 + \left( \frac{1}{n_2} * n_0 * \frac{1}{n_1} \right) + n_4 \right)} + n_6} + \dots \right) + n_{k+1} \\
 &= n_k + \left( \dots + \frac{1}{n_5 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_0} + n_1} + n_4} + n_6} + \dots \right) + n_{k+1} \\
 &= (n_k + n_{k+1}) + \left( \dots + \frac{1}{(n_5 + n_6) + \frac{1}{(n_3 + n_4) + \frac{1}{(n_2 + n_1) + \frac{1}{n_0}}}} \right)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, sea  $C = [n_k + n_{k+1}] + \left( \dots + \frac{1}{[n_5 + n_6] \frac{1}{[n_3 + n_4] + \frac{1}{[n_2 + n_1] + \frac{1}{n_0}}}} \right)$  un ovrillo racional

en forma fracción, por el Lema 3.1.7 tenemos que,

$$C = \left( \left( \left( [n_0] * \frac{1}{[n_1 + n_2]} \right) + [n_3 + n_4] \right) * \frac{1}{[n_5 + n_6]} * \dots \right) + [n_k + n_{k+1}]$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
 F(C) &= (n_k + n_{k+1}) + \left( \dots + \frac{1}{(n_5 + n_6) + \frac{1}{(n_3 + n_4) + \frac{1}{(n_2 + n_1) + \frac{1}{n_0}}}} \right) \\
 &= F(T)
 \end{aligned}$$

■

**Observación 3.1.9** Sea  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$ . Si  $R = [[a_{i+1}], \dots, [a_n]]$ , entonces  $T = [[a_1], \dots, [a_i], R]$ .

**Proposición 3.1.10** Sea  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  un ovrillo racional en forma de fracción continua, entonces,

1.  $T + [\pm 1] = [[a_1 \pm 1], [a_2], \dots, [a_n]]$ .
2.  $-T = [[-a_1], [-a_2], \dots, [-a_n]]$ .
3.  $1/T = [[0], [a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$ .
4. Si  $a_i = b_i + c_i$  y  $S = [[c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$ , entonces

$$T = [[a_1], \dots, [a_{i-1}], [b_i] + S] = [[a_1], \dots, [a_{i-1}], [b_i], [0], [c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]].$$

**Demostación:**

- 1.

$$T + [\pm 1] = [\pm 1] + T$$

$$\begin{aligned}
 &= [\pm 1] + \left( [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_n]}}}]} \right) \\
 &= [\pm 1] + [a_1] + \left( \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_n]}}}]} \right) \\
 &= [a_1] + [\pm 1] + \left( \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_n]}}}]} \right) \\
 &= [a_1 \pm 1] + \left( \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_n]}}}]} \right) \\
 &= [[a_1 \pm 1], [a_2], \dots, [a_n]].
 \end{aligned}$$

■ 2.

$$\begin{aligned}
 -T &= - \left( [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{[a_4] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_n]}}}}} \right) \\
 &= [-a_1] - \left( \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{[a_4] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_n]}}}}} \right) \\
 &= [-a_1] + \frac{1}{[-a_2] + \frac{1}{\left( - \left( [a_3] + \frac{1}{[a_4] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_n]}} \right) \right)}} \\
 &\vdots \\
 &= [-a_1] + \frac{1}{[-a_2] + \frac{1}{[-a_3] + \frac{1}{[-a_4] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[-a_n]}}}}}
 \end{aligned}$$

$$= [[-a_1], [-a_2], [-a_3], \dots, [-a_n]].$$

■ 3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{1}{[a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_n]}}}}} \\ &= [0] + \frac{1}{[a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_n]}}}}} \\ &= [[0], [a_1], [a_2], \dots, [a_n]]. \end{aligned}$$

■ 4.

Sea  $T = [[a_1], \dots, [a_{i-1}], [a_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$  un ovrillo racional tal que  $[a_i] = [b_i + c_i]$ . Sea  $S_k = [[b_i + c_i], S_j]$ , donde  $S_j = [[a_{i+1}], \dots, [a_n]]$ . Entonces  $T = [[a_1], \dots, [a_{i-1}], S_k]$ , luego,

$$\begin{aligned} S_k &= [b_i + c_i] + \frac{1}{S_j} \\ &= [b_i] + [c_i] + \frac{1}{S_j} \\ &= [b_i] + \frac{1}{[0] + \frac{1}{[c_i] + \frac{1}{S_j}}} \end{aligned}$$

$$= [b_i] + \frac{1}{[0] + \frac{1}{[c_i] + \frac{1}{[a_{i+1}] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_n]}}]}}$$

Por lo tanto

$$T = [[a_1], \dots, [a_{i-1}], [b_i], [0], [c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$$

■

**Proposición 3.1.11** Sea  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  un ovrillo racional en forma de fracción continua. Entonces,

1.  $F(T + [\pm 1]) = F(T) \pm 1$ , y  $F(T \pm [k]) = F(T) \pm k$ .
2.  $F\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{F(T)}$ .
3.  $F(-T) = -F(T)$ .
4.  $F(T * [\pm 1]) = F(T) * (\pm 1)$ , y  $F\left(T * \frac{1}{[\pm k]}\right) = \frac{1}{\pm k + \frac{1}{F(T)}}$ .
5. Sea  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_i], R]$ , si  $R = [[a_{i+1}], \dots, [a_n]]$ , entonces  $F(T) = [a_1, \dots, a_i, F(R)]$ .
6. Si  $a_i = b_i + c_i$  y  $S = [[c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$ , entonces

$$F(T) = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + F(S)] = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, F(S)].$$

**Demostración:**

Sea  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$

- 1.

$$F(T + [\pm 1]) = F([a_1 \pm 1], [a_2], \dots, [a_n])$$

$$\begin{aligned}
 &= (a_1 \pm 1) + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \\
 &= \left( a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \right) \pm 1 \\
 &= F(T) \pm 1
 \end{aligned}$$

análogamente,

$$\begin{aligned}
 F(T \pm [k]) &= F([1 \pm k], [a_2], \dots, [a_n]) \\
 &= (a_1 \pm 1) + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \\
 &= \left( a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \right) \pm k \\
 &= F(T) \pm k.
 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{1}{T}\right) &= F([0], [a_1], \dots, [a_n]) \\
 &= 0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}} \\
 &= \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}} \\
 &= \frac{1}{F(T)}.
 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 F(-T) &= F([-a_1], [-a_2], \dots, [-a_n]) \\
 &= -a_1 + \frac{1}{-a_2 + \frac{1}{-a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{-a_n}}}} \\
 &= - \left( a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} \right) \\
 &= -F(T).
 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 T * [\pm 1] &= T * \frac{1}{[\pm 1]} \\
 &= \frac{1}{[\pm 1] + \frac{1}{T}} \quad \text{Por la Proposición 2.3.18} \\
 &= \frac{1}{[\pm 1] + \frac{1}{[a_1] + \frac{1}{\dots + \frac{1}{[a_n]}}}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$F(T * [\pm 1]) = \frac{1}{\pm 1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}$$

Por otro lado tenemos que,

$$F(T) = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
 F(T) * (\pm 1) &= \left( a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}} \right) * (\pm 1) \\
 &= \frac{1}{\pm 1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}} \quad (\text{por la Definición 3.1.4})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $F(T * [\pm 1]) = F(T) * (\pm 1)$ .

- Sea  $R = [[a_{i+1}], \dots, [a_n]]$  y sea  $T = [[a_1], \dots, [a_i], R] = [[a_1], \dots, [a_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$ , entonces

$$F(T) = a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_i + \frac{1}{a_{i+1} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Por otro lado

$$F(R) = a_{i+1} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}$$

Por lo que

$$F(T) = a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_i + \frac{1}{F(R)}}}$$

- Sea  $T = [[a_1], \dots, [a_{i-1}], [b_i] + S]$  y  $S = [[c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$ , entonces por la Proposición 3.1.10,

$$\begin{aligned} F(T) &= F([a_1], \dots, [a_{i-1}], [b_i] + F(S)) \\ &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{i-1} + \frac{1}{b_i + F(S)}}}} \\ &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{i-1} + \frac{1}{b_i + \frac{1}{0 + \frac{1}{F(S)}}}}}} \\ &= [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, F(S)] \end{aligned}$$



**Lema 3.1.12** *Sea  $T$  un ovrillo racional entonces,*

1.  $F(T^\Delta) = F(T)$
2.  $F(T^\triangleleft) = F(T)$

**Demostación:**

Veamos por inducción que la igualdad  $F(T^\Delta) = F(T)$  se cumple.

- I. Para los ovrillos  $[0]$ ,  $[\infty]$  y  $[\pm 1]$  la igualdad siempre se cumple.
- II. Supongamos que la igualdad se cumple para cualquier ovrillo  $R$  con  $n$  torceduras, esto es

$$F(R) = F(R^\Delta)$$

entonces veamos que se cumple para el ovrillo  $H = R + [\pm 1]$  con  $n \pm 1$  torceduras.

III. Esto es,

$$\begin{aligned} F(H^\Delta) &= F((R + [\pm 1])^\Delta) \\ &= F(R^\Delta + [\pm 1]) \quad \text{por el Lema 2.2.7} \\ &= F(R^\Delta) + [\pm 1] \quad \text{por el Teorema 2.3.6} \\ &= F(R + [\pm 1]) \quad \text{por la Proposición 3.1.11} \\ &= F(H). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} F(H^\Delta) &= F((R * [\pm 1])^\Delta) \\ &= F([\pm 1] * R^\Delta) \quad \text{por el Lema 2.2.7} \\ &= [\pm 1] * F(R^\Delta) \quad \text{por el Teorema 2.3.6} \\ &= F(R^\Delta) * [\pm 1] \quad \text{por la Proposición 2.2.13} \\ &= F(R * [\pm 1]) \quad \text{por la Proposición 3.1.11} \\ &= F(H). \end{aligned}$$

Para el caso de la igualdad  $F(T^{\triangleleft}) = F(T)$  la demostración es análoga siguiendo las proposiciones, lemas y teoremas referenciados en la demostración de la anterior igualdad. ■

## 3.2. Forma canónica de los ovillos racionales

**Definición 3.2.1** *Un ovillo racional  $T = [[\beta_1], [\beta_2], \dots, [\beta_m]]$  está en su **forma canónica** si  $T$  es alterno y  $m$  es impar, es decir los terminos de  $T$  son todos de signo positivo o negativo.*

Notemos que si el signo de todos los términos de  $T$  es igual y  $m$  es un número entero par entonces podemos llevar  $T$  a la forma canónica descomponiendo  $[\beta_m]$  en  $[\text{sign}(\beta_m) \cdot (|\beta_m| - 1)] + [\text{sign}(\beta_m) \cdot 1]$ , según la Observación 2, y así,  $[[\beta_1], [\beta_2], \dots, [\beta_m]]$  en  $[[\beta_1], [\beta_2], \dots, [\text{sign}(\beta_m) \cdot (|\beta_m| - 1)], [\text{sign}(\beta_m) \cdot 1]]$ , donde  $\text{sign}(\beta_i)$  denota el signo del término  $\beta_i$ .

**Ejemplo 3.2.2**

$$\begin{aligned} [[4], [3], [6], [8], [5]] &= 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{8 + \frac{1}{4 + 1}}}} \\ &= 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{8 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1}}}}} \\ &= [[4], [3], [6], [8], [4], [1]]. \end{aligned}$$

**Proposición 3.2.3** *Todo ovillo racional es isotópico a su forma canónica.*

**Demostración:**

Sea  $T$  un ovillo racional, por la Proposición 3.1.2 podemos suponer que  $T$  está en su forma de fracción continua. Ahora sea  $T = [[a_1], \dots, [a_n]]$ , veamos que  $T \sim [[\beta_1], \dots, [\beta_n]]$ , donde todos los términos  $\beta_i$  son positivos o todos negativos.

Supongamos que los términos de  $T$  son de diferente signo. Sean  $a_{i-1} \neq 0$  y  $a_i \neq 0$  el primer par de enteros correspondiente a los dos primeros ovillos enteros adyacentes de signo opuesto de  $T$ .

Si  $a_{i-1} > 0$  entonces  $a_i < 0$ , como se ejemplifica en la Figura 3.1,

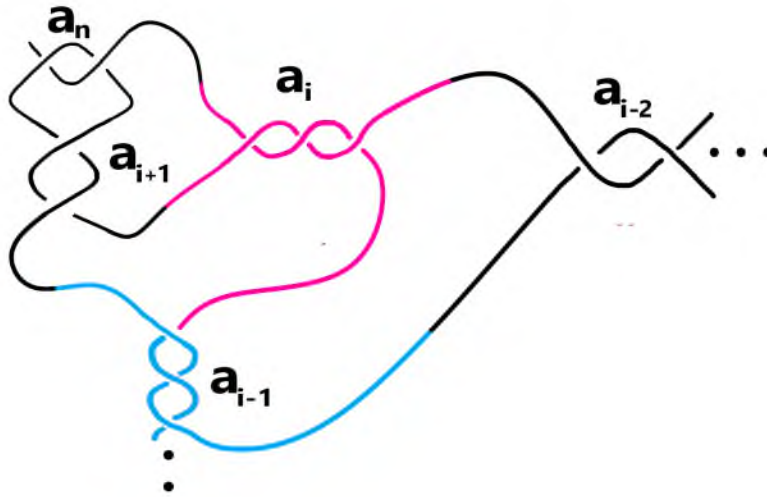


Figura 3.1: Ovillo racional con sub-ovillos  $a_{i-1} > 0$  y  $a_i < 0$ .

Si  $a_{i-1} < 0$  y  $a_i > 0$ , su configuración es similar a la Figura 3.1. Los signos de  $a_{i+1}, \dots, a_n$  son irrelevantes.

Ahora, sean  $P$  y  $Q$  ovillos racionales en forma de fracción continua como se muestra en la Figura 3.2,

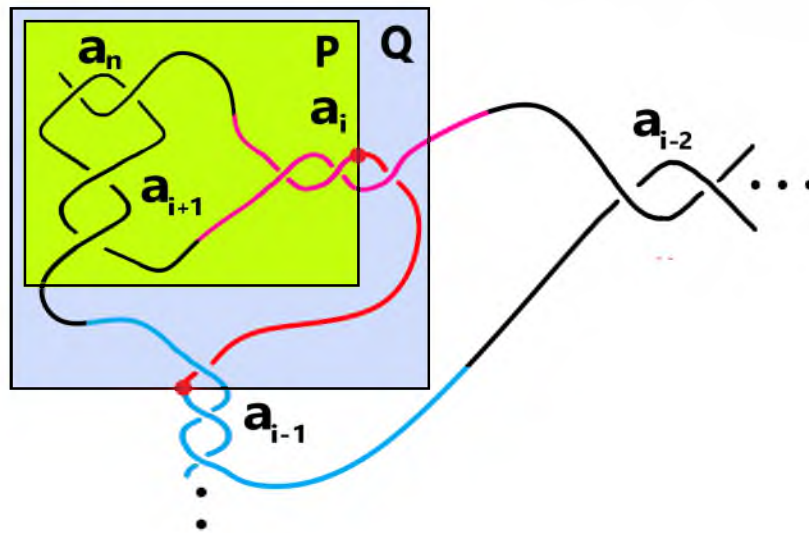


Figura 3.2: Sub-ovillos  $P$  y  $Q$ .

Ahora, sea  $\alpha$  el arco dentro de  $Q$  que conecta dos cruces de signos opuestos. Haciendo un flype y una reflexión horizontal en  $Q$  obtenemos un oவில் más simple  $Q'$  isotópico a  $Q$ , como se observa en la Figura 3.3, para  $i$  impar y para  $i$  par, sucesivamente. A tal movimiento de isotopía lo llamaremos **movimiento de transferencia**.

Dado que  $Q$  es un sub-ovillo racional en forma de fracción continua, el arco superior izquierdo se une directamente al sub-ovillo  $a_n$  y por lo tanto, no cruza ni intersecta a otros arcos en el diagrama. Por lo tanto después del movimiento de transferencia el sub-ovillo  $Q'$  tiene un cruce menos que  $Q$ , por lo que aplicaremos inducción.

En este caso,  $P$  está unido a dos ovillos de diferente signo para  $i$  impar.

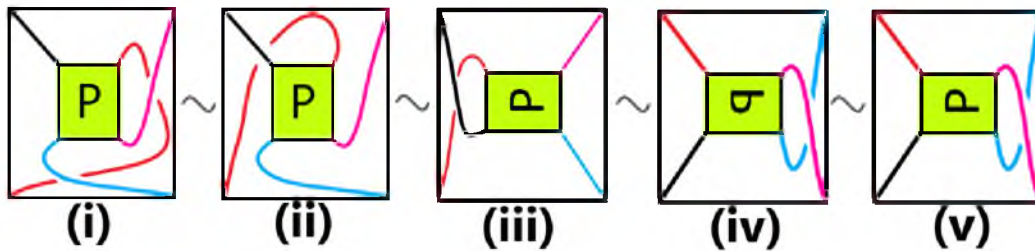


Figura 3.3: Transformación del sub-ovillo  $P$  con  $i$  impar.

En la Figura 3.3, se observa en el inciso (i) que el sub-ovillo  $P$  al aplicarle una movida de Reidemeister, es isotópico al sub-ovillo del inciso (ii). Luego, si se le aplica una rotación, se obtiene el sub-ovillo del inciso (iii). A continuación, al aplicar un flype, obtenemos el oவில் del inciso (iv), el cual, según el Lema 2.2.6, es igual al sub-ovillo del inciso (v). Esto es,

$$\begin{aligned}
 Q &= (P + [-1]) * \frac{1}{[+1]} \\
 &= \frac{1}{[+1] + \frac{1}{P + [-1]}} \quad \text{por la Proposición 2.3.18} \\
 &= \frac{1}{[+1] + \frac{1}{[-1] + P}} \\
 &= -\frac{1}{P} + [+1] \quad \text{haciendo un flype (ver Definición 2.2.12), y una reflexión horizontal} \\
 &= Q'.
 \end{aligned}$$

Para este caso,  $i$  es par.

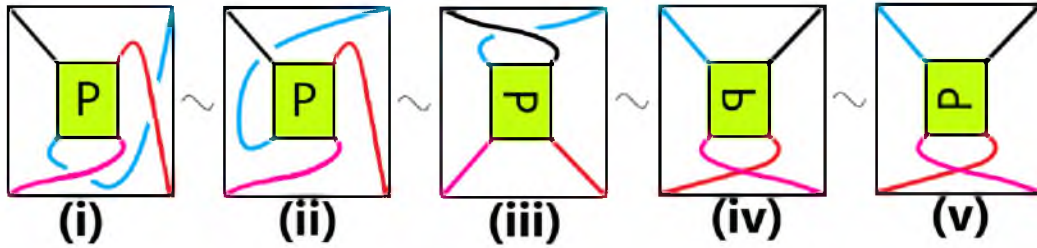


Figura 3.4: Transformación del sub-ovillo  $P$  con  $i$  par.

Como la transformación del sub-ovillo  $P$  con  $i$  par es análoga a la transformación de sub-ovillo  $P$  con  $i$  impar, entonces,

$$\begin{aligned}
 Q &= (P * [-1]) + [+1] \\
 &= [+1] + \frac{1}{[-1] + \frac{1}{P}} \quad \text{por la Proposición 2.3.18} \\
 &\sim -\frac{1}{P} + [+1] \quad \text{haciendo un flype, ver Definición, 2.2.12 y una reflexión horizontal} \\
 &= Q'.
 \end{aligned}$$

Expresando  $P$  y  $Q$  en términos de fracción continua tenemos que si  $i$  es impar,

$$P = [[a_i + 1], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$$

$$\begin{aligned}
 Q &= [[0], [+1], [-1] + P] \\
 &= [[0], [+1], [a_i], \dots, [a_n]]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q' &= [[+1], -P] \\
 &= [[+1], -[a_i + 1], -[a_{i+1}], \dots, -[a_n]]
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 T &= [[a_1], \dots, [(a_{i-1}) + 1], \dots, [a_n]] \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1] + \frac{1}{Q}] \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [(a_{i-1} - 1) + (+1)], [-1] + P] \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1], [0], [+1], [-1] + P] \text{ por la Proposición 3.1.10(4)} \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1], [0], [+1], [a_i], \dots, [a_n]] \tag{1}
 \end{aligned}$$

Ahora como  $Q \sim Q'$ , sea  $T' \sim T$  tal que

$$\begin{aligned}
 T' &= \left[ [a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1] + \frac{1}{Q'} \right] \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1], Q'] \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1], [+1], -P] \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1], [+1], -[a_i + 1], -[a_{i+1}], \dots, -[a_n]] \tag{2}
 \end{aligned}$$

Ahora, si  $i$  es par tenemos que,

$$P = [[0], [a_i + 1], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$$

$$\begin{aligned}
 Q &= [[+1], [-1] * P] \\
 &= [[+1], [-1], P] \text{ Por la Proposición 2.3.18} \\
 &= [[+1], [a_i], \dots, [a_n]]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q' &= [[0], [+1] + (-P)] \\
 &= [[0], [+1], -[a_i + 1], -[a_{i+1}], \dots, -[a_n]]
 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 T &= [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]] \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1] + Q] \\
 &= \left[ [a_1], \dots, [a_{i-2}], [(a_{i-1} - 1) + (+1)], [-1] + \frac{1}{P} \right] \\
 &= \left[ [a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1], [0], [+1], [-1] + \frac{1}{P} \right] \text{ por la Proposición 3.1.10(4)} \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1], [0], [+1], [a_i], \dots, [a_n]] \tag{3}
 \end{aligned}$$

Ahora como  $Q \sim Q'$ , sea  $T' \sim T$  tal que

$$\begin{aligned}
 T' &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1] + Q'] \\
 &= \left[ [a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1], \frac{1}{Q'} \right] \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1], [+1] + (-P)] \\
 &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} - 1], [+1], -[a_i + 1], -[a_{i+1}], \dots, -[a_n]] \tag{4}
 \end{aligned}$$

Notemos que, para los casos impar y par, las ecuaciones (1) y (3) son iguales, y las ecuaciones (2) y (4) también son iguales. Cuando tomamos inicialmente los primeros dos términos  $a_{i-1}$  y  $a_i$  de diferente signo, al aplicar el algoritmo resulta que el término  $a_i$  tiene el mismo signo que  $a_{i-1}$ . Luego, verificamos que el signo del término  $a_{i+1}$  sea igual al signo de  $a_i$ ; de lo contrario, aplicamos nuevamente el algoritmo. Repetimos este proceso sucesivamente hasta lograr que todos los términos siguientes tengan el mismo signo. ■

**Lema 3.2.4** *Sea  $T$  un ovillo racional en forma de fracción continua y sea  $T'$  su forma canónica, entonces  $F(T) = F(T')$ .*

**Demostración:**

Sea  $T = [[a_1], \dots, [a_n]]$  un ovillo en forma de fracción continua y sea  $T' = [[p_1], \dots, [p_n]]$  su forma canónica, entonces,

$$\begin{aligned}
 F(T) &= F([a_1], \dots, [a_n]) \\
 &= F([p_1], \dots, [p_n]) \quad \text{por el Lema 1.2.12} \\
 &= F(T').
 \end{aligned}$$

Lo cual prueba el resultado. ■

**Definición 3.2.5** *Un flype aplicado a un ovillo racional lo llamaremos **flype racional**.*

A continuación introduciremos la conjetura del matemático y físico escocés Peter Guthrie Tait. En 1877, Tait introdujo tres principios básicos que se conocen en la actualidad como Las Conjeturas de Tait [23], estas conjeturas permanecieron sin demostrarse durante casi 100 años, hasta 1984 gracias al Polinomio de Jones [18], un polinomio de nudo descubierto por Vaughan Jones. Aunque ahora son teoremas, se les sigue llamando conjeturas por motivos históricos. Para los propósitos de este trabajo, nos centraremos en la conjetura número 3.

**Tercer conjetura de Tait** *Dos nudos alternantes son isotópicos si y sólo si sus diagramas correspondientes difieren por una cantidad finita de flypes.*

**Proposición 3.2.6** *Si dos ovillos racionales alternantes son isotópicos entonces difieren por una cantidad finita de flypes racionales.*

**Demostración:**

Sean  $T$  y  $T'$  dos ovillos racionales alternantes isotópicos. Entonces  $V(T)$  y  $V(T')$  son dos nudos racionales alternantes isotópicos. Por la tercer conjetura de Tait,  $V(T)$  y  $V(T')$  difieren por una cantidad finita de flypes. De aquí podemos concluir que  $T$  y  $T'$  difieren por una cantidad finita de flypes. ■

**Definición 3.2.7** *Sea  $T = [[a_1], [a_2], \dots, R, [a_j], \dots, [a_n]]$  un ovillo racional, donde*

$$R = [\pm 1] + T \quad \text{o} \quad R = [\pm 1] * T.$$

*Sea*

$$R' = T^\Delta + [\pm 1] \quad \text{o} \quad R' = T^\triangleleft * [\pm 1],$$

*Si  $T' = [[a_1], [a_2], \dots, R', [a_j], \dots, [a_n]]$ , entonces decimos que  $T$  y  $T'$  **difieren por un flype racional**.*

**Lema 3.2.8** *Sea  $T$  un ovillo racional, entonces*

$$F([\pm 1] + T) = F(T^\Delta + [\pm 1])$$

y

$$F([\pm 1] * T) = F(T^\triangleleft * [\pm 1])$$

**Demostración:**

Sea  $T$  un ovillo racional, por el Lema 3.1.12 tenemos que,

$$F(T^\Delta) = F(T) = F(T^\triangleleft),$$

y por el Lema 3.1.7 tenemos que,

$$F([\pm 1] + T) = F(T + [\pm 1])$$

y

$$F([\pm 1] * T) = F(T * [\pm 1]).$$

Ahora partiendo de esto, para el caso  $F(T^\Delta) = F(T)$  se tiene que,

$$\begin{aligned} F([\pm 1] + T) &= F(T + [\pm 1]) \\ &= F(T) + (\pm 1) \quad \text{por la Proposición 3.1.11} \\ &= F(T^\Delta) + (\pm 1) \\ &= F(T^\Delta + [\pm 1]). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F([\pm 1] * T) &= F(T * [\pm 1]) \\ &= F(T) * (\pm 1) \quad \text{por la Proposición 3.1.11} \\ &= F(T^\Delta) * (\pm 1) \\ &= F(T^\Delta * [\pm 1]). \end{aligned}$$

Para  $F(T) = F(T^\triangleleft)$ , el proceso es análogo. ■

**Proposición 3.2.9** *Si dos ovillos racionales  $T$  y  $T'$  difieren por un flype racional entonces*

$$F(T) = F(T').$$

**Demostración:**

Sean  $T$  y  $T'$  dos ovillos racionales que difieren por un flype racional, entonces,

$$\begin{aligned} F(T) &= [a_1, a_2, \dots, F(R), a_j, \dots, a_n] \quad \text{por la Proposición 3.1.11} \\ &= [a_1, a_2, \dots, F(R'), a_j, \dots, a_n] \quad \text{por el Lema 3.2.8} \\ &= F(T') \end{aligned}$$

Lo cual prueba el resultado. ■

### 3.3. Demostración del teorema de Conway

La presente sección constituye el núcleo central de este trabajo y se centra en la demostración del teorema de Conway, un resultado importante en el estudio de nudos y ovillos racionales en el área de topología. Este teorema, propuesto por John H. Conway en 1970, establece una correspondencia entre los ovillos racionales y las fracciones continuas. El teorema de Conway afirma que dos ovillos racionales son isotópicos si y sólo si tienen la misma fracción. A lo largo de los años se han propuesto diversas demostraciones de este teorema, entre las más destacadas se encuentra *Rational Tangles* de J. R. Goldman y Louis H. Kauffman [11] y *On the classification of rational tangles* de Louis H. Kauffman y Sofia Lambropoulou [16], artículo del cual está basado nuestro trabajo.

Se presentará la demostración dividida en dos partes importantes encapsuladas en dos teoremas, el Teorema 3.3.1, en el cual se demostrará que si dos ovillos racionales son isotópicos, entonces tienen la misma fracción y el Teorema 3.3.2 donde se probará que si dos ovillos racionales tienen la misma fracción, entonces son isotópicos.

**Teorema de Conway** *Dos ovillos racionales son isotópicos si y sólo si tienen la misma fracción.*

**Teorema 3.3.1** *Si dos ovillos racionales son isotópicos entonces tienen la misma fracción.*

**Demostración:**

Sean  $T$  y  $S$  dos ovillos racionales tales que  $T \sim S$  y además  $T$  y  $S$  están en forma torsión. Entonces

por el Lema 2.3.20 y la Proposición 3.1.2 los ovillos  $T$  y  $S$  son isotópicos a dos ovillos racionales  $T'$  y  $S'$  en forma de fracción continua y además son alternantes, ahora por la Proporsición 3.1.8,

$$F(T) = F(T')$$

y

$$F(S) = F(S'),$$

además por la Proposición 3.2.3 los ovillos  $T'$  y  $S'$  son isótopicos a los ovillos  $T''$  y  $S''$  los cuales son sus formas canónicas respectivamente. Ahora por el Lema 3.2.4 tenemos que

$$F(T') = F(T'')$$

y

$$F(S') = F(S'').$$

Finalmente, por la Proposición 3.2.6, los ovillos  $T''$  y  $S''$  se diferenciarán solo por flypes racionales y por la Proposición 3.2.9 tenemos que,

$$F(T'') = F(S'').$$

Por lo tanto

$$F(T) = F(S).$$

■

**Teorema 3.3.2** *Si dos ovillos racionales tienen la misma fracción entonces son isotópicos.*

**Demostración:**

Sean  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  y  $S = [[b_1], [b_2], \dots, [b_n]]$  ovillos racionales con  $F(T) = F(S) = \frac{p}{q}$  y sean  $T' = [[\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_n]]$  y  $S' = [[\beta_1], [\beta_2], \dots, [\beta_n]]$  sus formas canónicas respectivamente. Como

$$T \sim T' \quad \text{y} \quad S \sim S',$$

entonces

$$F(T') = F(T) = F(S) = F(S') = \frac{p}{q}.$$

Por la Proposición 1.2.12 tenemos que la fracción continua de  $\frac{p}{q}$  puede ser transformada de manera única. Esto es

$$\frac{p}{q} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n].$$

Sea

$$Q = [[\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_n]],$$

entonces

$$F(Q) = \frac{p}{q}.$$

Supongamos que  $Q$  no es isotópico a  $T'$ , como

$$F(T') = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = \frac{p}{q}$$

y

$$F(Q) = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n] = \frac{p}{q}$$

entonces tenemos la misma fracción  $\frac{p}{q}$  representada con dos formas canónicas distintas, lo que contradice la unicidad, por lo tanto  $Q \sim T'$  y análogamente  $Q \sim S'$ . Por lo tanto  $T' \sim S'$ . ■

### 3.3.1. Ejemplos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos que ilustran los conceptos y métodos analizados previamente en la demostración del teorema de Conway. Se ejemplificará el proceso paso a paso para transformar un ovrillo racional dado en su forma canónica, utilizando las isotopías y fracciones continuas, además se ilustrará el método para obtener la fracción continua correspondiente a un ovrillo racional.

**Ejemplo 3.3.3** *En el Ejemplo 2.3.21, dado el ovrillo  $G_5 = [-1] + \left(\frac{1}{[-2]} * [-3] * \frac{1}{[-3]}\right) + [4]$  obtuvimos su forma estándar  $G_5 = \left([-3] * \frac{1}{[-5]}\right) + [3]$  mediante isotopías. Veamos que a partir de la forma estándar de  $G_5$  obtendremos la fracción que le corresponde.*

Primero expresamos  $G_5$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G_5 &= ([3] * \frac{1}{5}) + [-3] \\ &\sim [-3] + \frac{1}{[5] + \frac{1}{[3]}} \quad \text{por la Proposición 2.3.18} \end{aligned}$$

Luego calculamos la fracción continua correspondiente.

$$\begin{aligned} F(G_5) &= -3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}} \\ &= -3 + \frac{3}{16} \\ &= -\frac{45}{16} \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.3.4** Para el ovilleo  $T = \left( [5] + \left( \frac{1}{[-1]} * [-2] * \frac{1}{[-4]} \right) + [1] \right) * \frac{1}{[1]}$  que se muestra en la Figura 3.5,

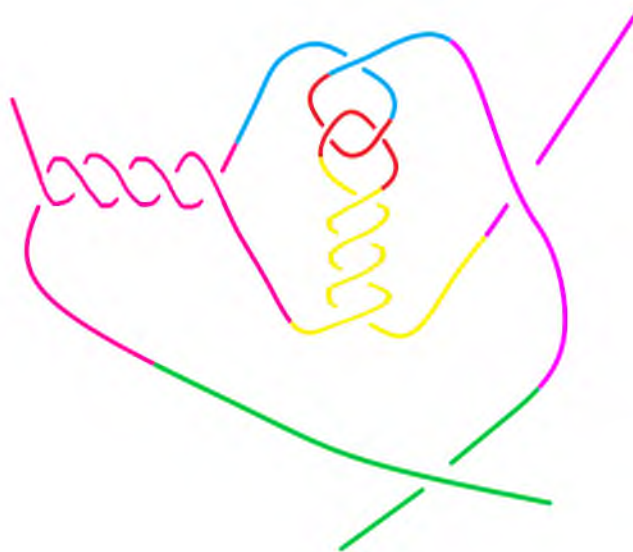


Figura 3.5: Ovilleo  $T = \left( [5] + \left( \frac{1}{[-1]} * [-2] * \frac{1}{[-4]} \right) + [1] \right) * \frac{1}{[1]}$

tenemos que su forma estándar es

$$T = \left( \left( [-2] * \frac{1}{[-5]} \right) + [6] \right) * \frac{1}{[1]}.$$

Luego, por la Proposición 3.1.2, podemos expresar  $T$  en su forma fracción

$$T = [0] + \frac{1}{[1] + \frac{1}{[6] + \frac{1}{[-5] + \frac{1}{[-2]}}}}$$

Luego, calculamos la fracción continua correspondiente

$$\begin{aligned} F(T) &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{-5 + \frac{1}{-2}}}} \\ &= \frac{64}{75}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.3.5** Consideremos el número racional  $\frac{29}{12}$  y expresémoslo como una fracción continua

$$\begin{aligned} \frac{29}{12} &= 2 + \frac{5}{12} \\ &= 2 + \frac{1}{\frac{12}{5}} \\ &= 2 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} \\ &= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} \\ &= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \\ &= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} \end{aligned}$$

Luego, la fracción continua de  $\frac{29}{12}$ ,  $F^{-1}\left(\frac{29}{12}\right)$  (ver la Definición 3.1.1), da como resultado un ovillo en forma de fracción continua y por el Lema 2.3.20 se obtiene su forma estándar

$$\begin{aligned}
 F^{-1}\left(\frac{29}{12}\right) &= [2] + \frac{1}{[2] + \frac{1}{[2] + \frac{1}{[1] + \frac{1}{[1]}}}} \\
 &= \left( \left( \left( [2] + \frac{1}{[1] * \frac{1}{[1]}} \right) * \frac{1}{[2]} \right) + [2] \right) \\
 &= \left( \left( \left( [1] * \frac{1}{[1]} \right) + [2] \right) * \frac{1}{[2]} \right) + [2].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el ovillo resultante es el que se muestra en la Figura 3.6.



Figura 3.6: Ovillo correspondiente al número racional  $\frac{29}{12}$ .

**Ejemplo 3.3.6** Para el número racional

$$-\frac{35}{19} = -1 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-5 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{-1}}}}$$

le asociaremos el ovillo racional

$$\begin{aligned}
 F^{-1}\left(-\frac{35}{19}\right) &= [-1] + \frac{1}{[-1] + \frac{1}{[-5] + \frac{1}{[-2] + \frac{1}{[-1]}}]} \\
 &= ((([-1] * \frac{1}{[-2]}) + [-5]) * \frac{1}{[-1]}) + [-1].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el ovillo que le corresponde es el que se muestra en la Figura 3.7.

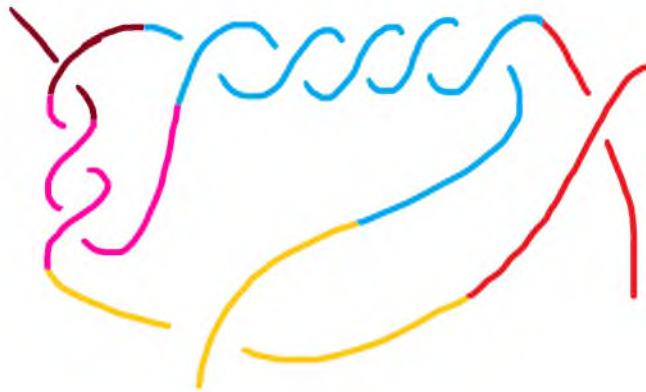


Figura 3.7: Ovillo correspondiente al número racional  $-\frac{35}{19}$ .

En esta sección, se ha demostrado el teorema de Conway, estableciendo que dos ovillos racionales son equivalentes si y sólo si sus fracciones asociadas son iguales utilizando la teoría abordada en este trabajo de tesis. Los ejemplos que se presentan en esta sección no sólo ilustran la aplicación práctica de los teoremas demostrados, sino que también consolidan nuestra comprensión de cómo las fracciones continuas pueden ser utilizadas para representar y manipular ovillos racionales.

### 3.4. Ovillos en biología

La demostración del teorema de Conway y la comprensión de los ovillos racionales han sentado las bases para aplicaciones prácticas en el campo de la biología molecular, específicamente en el estudio del ADN y la acción de las enzimas sobre su estructura. La versatilidad y flexibilidad del ADN permiten que adopte diferentes formas, incluyendo nudos. Utilizando modelos de ovillos y nudos

racionales, es posible analizar los cambios estructurales que ocurren en el ADN cuando las enzimas actúan sobre él. Es importante señalar que lo que se presentará en esta sección no es un análisis exhaustivo, sino una simplificación destinada a ejemplificar cómo los resultados demostrados en esta tesis pueden ser utilizados para entender fenómenos biológicos.

El ácido desoxirribonucleico (ADN) es el portador del código genético y el encargado del funcionamiento de los organismos vivos. La estructura helicoidal consiste en una doble hélice formada por dos hebras o cadenas que serpentean alrededor, una de la otra, como una escalera de caracol. Cada cadena tiene una columna vertebral que alterna un azúcar (desoxirribosa) y grupos fosfato, la molécula de azúcar llamada desoxirribosa es un sólido cristalino e inoloro que se compone de una molécula de cinco carbonos, y el grupo fosfato es la columna vertebral del fosfato que es la porción de la doble hélice del ADN que proporciona soporte estructural a la molécula. Los fosfatos son compuestos químicos que consisten en sales del ácido fosfórico. Todos comparten la característica de tener un átomo de fósforo central rodeado por cuatro átomos de oxígeno dispuestos en una estructura tetraédrica. La columna vertebral está unida a cada azúcar y forman una de las cuatro bases y uno de cuatro posibles compuestos que además contienen nitrógeno, entrelazados con adenina (abreviada como A), guanina (G), timina (T) y citosina (C), que forman pares específicos (A-T y C-G).

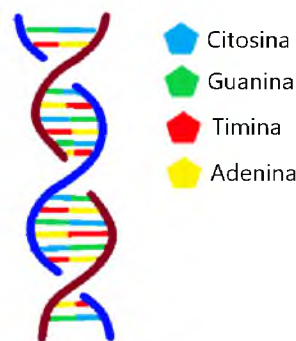


Figura 3.8: Doble hélice del ADN.

En 1953, el biólogo estadounidense James Watson y el físico británico Francis Crick propusieron un modelo de doble hélice del ADN [6]. Este avance se apoyó en la cristalografía. La cristalografía es la descripción de las formas que toman los cuerpos al cristalizar. Utilizando los datos de difracción de rayos X de Rosalind Franklin [2], experta en una poderosa técnica para la determinación de la estructura de moléculas, conocida como cristalografía de rayos X, Watson y Crick pudieron construir la famosa estructura de doble hélice del ADN. Por este logro fueron galardonados con el

Premio Nobel de Medicina en 1962.

La molécula de ADN es una estructura versátil debido a su longitud y flexibilidad, permitiendo adoptar diferentes formas, incluso nudos. Se puede pensar en el ADN como dos cuerdas entrelazadas que, a su vez, pueden estar enlazadas con enzimas.

Para entender el funcionamiento de una enzima analizando los cambios topológicos en la estructura de la molécula se han desarrollado modelos que explican cómo diferentes enzimas actúan sobre el ADN. Imaginemos al ADN como un largo hilo enrollado en forma de círculo, utilizando microscopía electrónica se observó que al actuar ciertas enzimas sobre una molécula circular de ADN se forma una burbuja con 2 o 3 arcos saliendo de ella. Esta burbuja la podemos imaginar como una bola  $\mathbb{B}^3$ , por lo que estas estructuras tienen forma de ovillos. También se observó que la estructura resultante de la interacción de la enzima sobre el ADN es un nudo racional.



Figura 3.9: ADN circular, imagen tomada de [10].

Cuando la enzima se acerca a la molécula de ADN se tuerce ligeramente, facilitando encontrar puntos específicos sobre la superficie del ADN en los cuales se adherirá. Una vez unida a estos puntos, la enzima realizará su trabajo, que varía según el tipo de enzima. Recordemos que las enzimas son proteínas que producen cambios químicos, por ejemplo la coagulación de la sangre o la descomposición de los alimentos en el jugo gástrico para su posterior absorción por el cuerpo.

A la acción de la enzima unida al ADN lo llamaremos **complejo sináptico**, a las partes del ADN que no están rodeadas por la enzima durante el complejo sináptico las llamaremos **sinaptosoma**.

Cuando culmina el trabajo de la enzima sobre la molécula de ADN, esta se desprende y el ADN sufre cambios en su estructura, a la nueva molécula de ADN modificada por la enzima la llamaremos

**producto.**

El sinaptosoma está compuesto por dos partes, en donde la enzima actúa y donde no está ocurriendo nada, por lo que se puede representar al sinaptosoma como una suma de ovillos. Al trabajo que realiza la enzima sobre el sinaptosoma lo podemos interpretar como una **cirugía de ovillos**, esto significa que un ovillo es reemplazado por otro. En términos más simples, la enzima “corta” un ovillo y lo “reemplaza” por otro. Este proceso de “cirugía de ovillos” es una analogía para describir los cambios que ocurren en la estructura celular debido a la acción de la enzima. Es posible conocer los productos obtenidos después de que una enzima actúa en el ADN una o más veces, a través de un modelo propuesto por el matemático estadounidense De Witt Lee Sumners en [10] y [22]. El modelo es el siguiente:

- $N(S + O) =$  nudo trivial

Representa el estado inicial, donde  $S$  es un ovillo que no se ve afectado por la enzima, y  $O$  es un ovillo donde ocurre la acción de la enzima.

- $N(S + T) =$  primer producto

Representa el primer producto resultante después de una acción de la enzima. El ovillo  $T$  reemplaza al ovillo  $O$  después de que la enzima ha actuado en la molécula.

- $N(S + T + T) = N(S + 2T) =$  segundo producto, etc.

Representa el segundo producto resultante después de dos acciones de la enzima, y así sucesivamente.

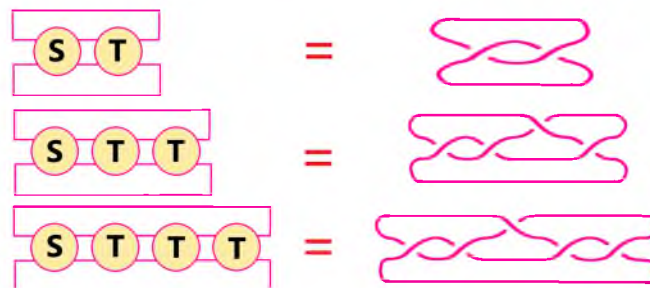
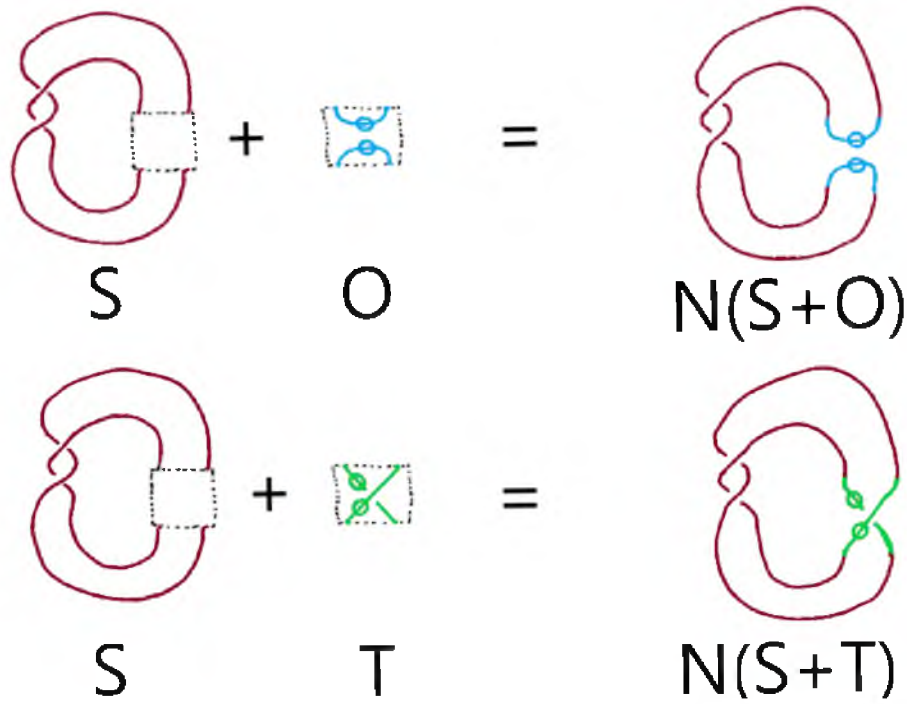


Figura 3.10: Productos obtenidos por la acción de la enzima Tn3 resolvasa.

- $N(S + O)$ : Este es un estado inicial.  $S$  es un ovillo que no se ve afectado por la enzima y  $O$

es un ovillo donde ocurre la acción de la enzima.

- $N(S + T) =$  primer producto: El ovillo  $T$  reemplaza al ovillo  $O$  después de que la enzima ha actuado en la molécula.



- $N(S + T + T) = N(S + 2T) =$  segundo producto, etc.: Es el producto resultante después de dos acciones de la enzima, y así sucesivamente.

Datos específicos obtenidos de la acción de la enzima  $Tn3$  resolvasa:

$$N(S + O) = \langle 1 \rangle = \text{nudo trivial}$$

$$N(S + T) = \langle 2 \rangle$$

$$N(S + 2T) = \langle 2, 1, 1 \rangle$$

Como en los datos obtenidos de la acción de la enzima  $Tn3$  resolvasa solo en una de las ecuaciones se encuentra el ovillo cero, el proceso de resolución de ecuaciones es más complejo de determinar por lo que en [10], Sumners demostró el siguiente teorema el cual es importante porque determina cuales son los ovillos  $S$  y  $T$ .

**Teorema 3.4.1** *Supóngase que los ovillos  $\{O, S, T\}$  satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$N(S + O) = \prec 1 \succ,$$

$$N(S + T) = \prec 2 \succ,$$

$$N(S + 2T) = \prec 2, 1, 1 \succ .$$

*Entonces  $\{S, T\} \in \{ \{[-3], [1]\}, \{[3], [-1]\}, \{-2, -3, -1\}, [1]\}, \{[2, 3, 1], [-1]\} \}$ .*

En esta sección, se ha explorado cómo la teoría de ovillos racionales y la demostración del teorema de Conway se aplican al estudio del ADN y la acción enzimática. Se analizó que el ADN, con su estructura flexible forma nudos que se pueden modelar utilizando ovillos racionales para analizar los cambios topológicos inducidos por las enzimas. Los modelos matemáticos propuestos permiten representar y entender estos cambios, como se ilustra en la acción de la enzima *Tn3* resolvasa. A través de estos modelos, se facilita la interpretación de los productos de las reacciones enzimáticas y se proporcionan herramientas para identificar los ovillos resultantes de la acción de la enzima en el ADN.

# Conclusiones

En esta tesis, a través de un análisis detallado, se logró demostrar el teorema de Conway, el cual establece que dos ovillos racionales son equivalentes si y sólo si sus fracciones asociadas son iguales. Este resultado confirma una conexión entre la topología y la aritmética, la cual provee una herramienta para clasificar y comprender la teoría de los ovillos racionales. Se definieron operaciones entre ovillos, se clasificaron los ovillos racionales, y se estudiaron las fracciones continuas. Se desarrollaron ejemplos didácticos de operaciones entre ovillos como un recurso didáctico para aquellos que inician en el estudio de los ovillos racionales. Se ejemplifica también cómo asignar a los ovillos racionales su correspondiente número racional mediante fracciones continuas, así como a asignar a cada número racional su ovillo racional correspondiente. Además, se realizaron ilustraciones que ejemplifican los teoremas más importantes de la teoría de ovillos racionales. Se demostraron teoremas de isotopías y se estableció una biyección entre el conjunto de ovillos racionales y el conjunto de números racionales. Como línea de investigación futura, se sugiere el desarrollo de un algoritmo, implementado en algún lenguaje de programación, que permita automatizar la biyección entre ovillos racionales y números racionales. Este algoritmo debería ser capaz de, dado un número racional, encontrar su ovillo racional correspondiente, o, al ingresar un ovillo racional, determinar su número racional asociado.

# Bibliografía

- [1] J. Antonio Pérez, *Topología de Conjuntos, un primer curso*. Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana, Serie: Textos. **18** (2015).
- [2] J. A. Acevedo Díaz, A. García Carmona, *Rosalind Franklin y la estructura molecular del ADN: un caso de historia de la ciencia para aprender sobre la naturaleza de la ciencia*. Revista Científica, Universidad Distrital Francisco José de las Caldas, **25** (2016) 162 – 175.
- [3] S. Ardanza Trevijano, J. Arsuaga, J.A. Crespo, J.I. Extremiana, L.J. Hernández, M.T. Rivas, J. Roca y M. Vázquez, *Invariantes topológicos en el ADN, los Fullerenos y la Teoría de Elección Social*, La Gaceta de la RSME, **10.3** (2007) 611 – 632.
- [4] M. Boege, G. Hinojosa, *Nudos para explicar enzimas*, *Inventio*, **2(4)** (2006), 41 – 47.
- [5] N. Cambil Teba, *Determinación de órbitas mediante técnicas iterativas de orden de convergencia óptimo libres de derivadas*, Tesis de ingeniería, Universidad Politécnica de Valencia, 2013.
- [6] J. L. Cisneros Molina *Introducción a la teoría de nudos*, V jornadas de física y matemáticas, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, 2011.
- [7] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*, 1ª edición, Pergamon Press, 1970.
- [8] J. H. Davenport, *The Higher Arithmetic*, 8ª edición, Universidad de Cambridge, 2008.
- [9] J. Dugundji, *Topology*, 2ª edición, Allyn and Bacon, 1966.
- [10] C. Ernst, D. W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **108** (1990), 489 – 515.

- 
- [11] J. R. Goldman, L. H. Kauffman, *Rational Tangles*, Advances in Applied Mathematics **18** (1997), 300 – 332.
- [12] M. I. González Vasco, *Criptosistemas basados en Teoría de grupos*, Tesis de doctorado, Universidad de Oviedo, 2003.
- [13] E. Grgeta, *Simony, knots and continued fractions*, Senior Thesis, George Washington University, 1998.
- [14] Euclides, *Elementos*, Traducción: M. L. Puertas Castaños, Edición en español, Gredos, 1991.
- [15] F. Hernández Hernández, *Curso de topología: Un enfoque conjuntista*, 1ª edición, Aportaciones Matemáticas, 2021.
- [16] L. H. Kauffman, Sofia Lambropoulou, *On the classification of rational tangles*, Advances in Applied Mathematics, **33** (2004), 199 - 237.
- [17] J. R. Munkres, *Topología*, 2ª edición, Prentice Hall, 2002.
- [18] K. Murasugi, *Knot theory and its applications*, 1ª edición, Birkhauser, 1993.
- [19] K. Reidemeister, *Knot theory*, English edition, BCS Associates, 1983.
- [20] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Z. **65** (1956), 133 - 170.
- [21] O. Simony, *Über den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung*, Wien. Ak. Sber, **96** (1888), 191 – 286.
- [22] D. W. Sumners, C. Ernst, S. J. Spengler, N. R. Cozzarelli, *Analysis of the mechanism of DNA recombination using tangles*, Quarterly Review of Biophysics, **28**(3) (1995), 253 – 313.
- [23] P. G. Tait, *On Knots I, II, III*, *Scientific Papers*, I, Cambridge Univ. Press, London, (1898), 273 – 437.
- [24] W. Thomson, *On Fourier's expansions of functions in trigonometric series*, Cambridge Mathematical Journal, **2** (1841), 258 - 259.
- [25] J. L. Trueba Santander, *Nudos Electromagnéticos*, Tesis de doctorado, Universidad Complutense, 1997.



**Joaquín Correa Arias**

---

**TESIS URGENTES**

**8 HORAS**

**Encuadernación**

**Libros**

**Folletos**

**Rep. de Cuba No. 99**

**Int. 3 Primer Piso**

**Centro Histórico México, D.F.**

**Tel.: 2124 6185**

**Cel.: 55 8519 4658**

**E-mail: [correa\\_arias@hotmail.com](mailto:correa_arias@hotmail.com)**

**<https://tesiscaj.wixsite.com>**

