SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA
Memorias **18** (2022) 49–68
Artículo de Exposición

PRESERVACIÓN DE LÍMITES INVERSOS Y G-FIBRACIONES BAJO EL FUNTOR DE PRODUCTO TORCIDO

AURA LUCINA KANTÚN-MONTIEL, JORGE ALBERTO SÁNCHEZ MARTÍNEZ Y ANAHÍ ROJAS CARRASCO

RESUMEN. En este artículo se presentan algunas categorías equivariantes y los funtores entre ellas, prestando especial atención en el funtor de producto torcido. Mostraremos que al aplicar este funtor se preservan los límites inversos y las fibraciones equivariantes.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría equivariante de homotopías se encuentra en la intersección de dos ramas de la topología: la teoría de homotopías y la teoría equivariante, conocida también como la teoría de grupos de transformaciones. En la topología equivariante, en general, se estudian los G-espacios (espacios topológicos equipados con la acción continua de un grupo topológico) y las G-funciones. Muchos conceptos de la teoría clásica de homotopías pueden trasladarse de forma natural a la teoría equivariante y obtener de este modo nociones tales como G-homotopías, G-retractos, espacios G-ANR, etc. Así, la categoría G-Top de G-espacios y G-funciones es en cierto sentido "paralela" a la categoría Top de espacios topológicos y funciones continuas.

En particular, el concepto de una G-fibración representa una versión equivariante del concepto de una fibración de Hurewicz, esto es, una G-función se llama G-fibración si tiene la propiedad de levantamiento de G-homotopías para la clase de todos los G-espacios.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 54H11, 54H15, 55P91.
Keywords and phrases. Funtor, producto torcido, límite inverso, G-fibración.

Dado cualquier subgrupo cerrado H de un grupo topológico G, resulta natural tratar con la categoría H-Top simplemente restringiendo la acción de todo el grupo en H. El funtor de restricción, inducido por el encaje $H \hookrightarrow G$, preserva muchas propiedades de los objetos y morfismos en G-Top, por ejemplo, los límites inversos, fibraciones equivariantes, espacios ANR equivariantes, espacios fibrantes equivariantes, entre otras (ver e.g. [8, Proposition 2.2]). El funtor de restricción es adjunto derecho al funtor de producto torcido que asigna a cada H-espacio y cada H-función, un G-espacio y una G-función, respectivamente. Bajo ciertas condiciones, el funtor de producto torcido asignará a un espacio H-ANR, un G-ANR ([2, Proposition 3.1]); a un espacio H-fibrante, un espacio G-fibrante ([7, Corollary 4.6]); a cada H-fibración, una G-fibración ([6, Lemma 6.1]) y al límite de una sucesión inversa en H-Top, el límite de una sucesión inversa en G-Top (e.g. ver en demostración de [7, Proposition 4.2]). En este artículo, nos centraremos en estos dos últimos casos, las fibraciones y los límites inversos; a diferencia de las demostraciones presentadas en [6] y [7], el grupo G no será necesariamente compacto obteniendo, de hecho, una generalización a los resultados presentados en dichos artículos.

Como principales referencias, donde se encontrarán los conceptos y resultados principales sobre la teoría de grupos topológicos de transformaciones, mencionamos [4], [10], [15], [16] y [17].

2. Preliminares

Un grupo topológico es una combinación entre un grupo y un espacio topológico de manera que sus dos estructuras, algebraica y topológica, están relacionadas entre sí por la condición de continuidad de sus operaciones. Formalmente, un *grupo topológico* es un conjunto G junto con una operación binaria $\cdot$ y una familia τ de subconjuntos de G, es decir, una terna $(G, \cdot, \tau)$ tal que $(G, \cdot)$ es un grupo; (G, τ) es un espacio topológico y las operaciones de multiplicación $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, e inversa $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$, son continuas.

De esta manera, en tales grupos se definen conceptos topológicos tales como los axiomas de separación, compacidad, metrizabilidad, entre otros; asimismo tenemos los conceptos de subgrupos, subgrupos normales, grupos cocientes, espacios de clases laterales, etc.

De ahora en adelante, con la letra G nos referiremos siempre a un grupo topológico localmente compacto de Hausdorff; mientras que al elemento neutro de G, lo denotaremos con la letra e.

Sea G_0 la componente conexa de G que contiene a e, decimos que G es *casi conexo* si el espacio cociente G/G_0 es compacto. En particular, todo grupo compacto y todo grupo conexo, es casi conexo.

Un *grupo de Lie* es un grupo topológico segundo numerable G con estructura de n-variedad diferenciable, tal que las operaciones del grupo son funciones diferenciables. Observemos que todo grupo de Lie además de ser localmente compacto, es metrizable y separable.

Un *G-espacio* es un espacio topológico X provisto de una acción continua $\cdot\colon G\times X \to X$, $(g,x)\mapsto gx$, de G en X.

Sean X y Y dos G-espacios. Se dice que una función continua $f\colon X\to Y$, es una *función equivariante* o *G-función* si $f(gx) = gf(x)$, para cada $(g,x)\in G\times X$. Si f es un homeomorfismo equivariante, diremos que es un G-homeomorfismo.

Ejemplo 2.1. *Si H es un subgrupo de G, el espacio cociente $G/H = \{gH \mid g\in G\}$, es un G-espacio con la acción por traslaciones izquierdas $g\cdot g'H = gg'H$ y la proyección natural $G/K \to G/H$, $gK\mapsto gH$, donde $K < H$, es una G-función.*

Sea X un G-espacio y $x\in X$, al conjunto $G(x) = \{gx \mid g\in G\}$ se le llama *órbita* de x. El *espacio orbital* de un G-espacio X, es el conjunto de órbitas $X/G = \{G(x) \mid x\in X\}$ dotado con la topología cociente con respecto a la proyección orbital $\pi\colon X \longrightarrow X/G$, $\pi(x) = G(x)$.

Las acciones continuas de grupos compactos tienen propiedades muy agradables, una de ellas es la siguiente.

Proposición 2.2. [4, Ch. I, Theorem 3.1] *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio. Entonces la proyección orbital $\pi\colon X\to X/G$ es cerrada.*

3. Producto Torcido

Sea H un subgrupo cerrado de G. Si X es un H-espacio, entonces podemos considerar $G \times X$ como H-espacio con la acción

$$h \cdot (g,x) = (gh^{-1}, hx).$$

Definimos el *producto torcido* $G \times_H X$ como el correspondiente espacio orbital

$$G \times_H X = (G \times X)/H,$$

y a la H-órbita del punto (g,x), la denotamos por $[g,x]$.

Se define una acción continua de G en $G \times_H X$ por

$$g' \cdot [g,x] = [g'g, x],$$

de esta manera, $G \times_H X$ es un G-espacio.

Si H es compacto, el H-espacio X, puede considerarse como un subconjunto del producto torcido, ya que es H-homeomorfo al conjunto $[e,X] = \{[e,x] \mid x \in X\} \subset G \times_H X$, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sea H un subgrupo compacto de un grupo G y X un H-espacio. Entonces la función*

$$\imath_X \colon X \to G \times_H X$$

dada por $\imath_X(x) = [e,x]$, es un H-encaje cerrado.

Demostración. Observemos que $\imath_X = \pi\delta_e$, donde $\delta_e \colon X \to G \times X$ es el encaje cerrado dado por $\delta_e(x) = (e,x)$ y $\pi \colon G \times X \to G \times_H X$ es la proyección orbital. Luego, $\imath_X$ es continua. Además, como H es compacto entonces, por la Proposición 2.2, π es cerrada y, como δ_e es cerrado, entonces $\imath_X$ también lo es.

Ahora veamos que $\imath_X$ es inyectiva. Sean $x, y \in X$ tales que $\imath_X(x) = \imath_X(y)$. Entonces $[e,x] = [e,y]$; luego, existe $h \in H$ tal que $(e,y) = (eh^{-1}, hx)$ por lo que, en este caso, $h = e$, lo que implica que $x = y$.

Finalmente, $\imath_X$ es H-equivariante ya que $\imath_X(hx) = [e,hx] = [eh,x] = h[e,x] = h\imath_X(x)$ para toda $x \in X$ y $h \in H$. $\square$

Además, muchos G-espacios tienen una estructura natural de producto torcido.

Proposición 3.2. [1, Lemma 3.5] *Sean H un subgrupo compacto de un grupo G, $f\colon X \to G/H$ una G-función y $A = f^{-1}(eH)$. La función $\psi\colon G\times_H A \to X$ definida como $\psi([g,a]) = ga$ es un G-homeomorfismo.*

4. Algunas categorías equivariantes

La teoría de categorías nos permite unificar y simplificar diversas propiedades de estructuras matemáticas y, así, trasladar problemas matemáticos de un campo a otro. Para conocer más y aprovechar los conceptos y métodos de esta teoría, recomendamos [3], [9] y [14]. Iniciaremos esta sección recordando algunos conceptos básicos.

Una *categoría* $\mathscr{C}$ consiste en una clase de objetos $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ y una clase de morfismos $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ tales que

(I) Para cada morfismo f, existen objetos $\mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{cod}(f)$, llamados dominio y codominio de f, respectivamente. Si $A = \mathrm{dom}(f)$ y $B = \mathrm{cod}(f)$, escribimos $f\colon A \to B$.

(II) Dados dos morfismos $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$, existe un morfismo $g\circ f\colon A \to C$, llamado la *composición* de f y g.

Esta composición es asociativa siempre que está definida. Esto es, si los morfismos f, g y h son tales que $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ y $\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(h)$, entonces $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.

(III) Para cada objeto A existe un morfismo $1_A\colon A \to A$ llamado el *morfismo identidad* de A, tal que para todo morfismo $f\colon A \to B$, $f\circ 1_A = f = 1_B\circ f$.

(IV) Para cada par de objetos A y B en $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, la clase

$$\mathscr{C}(A,B) = \{f \mid f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}), \mathrm{dom}(f) = A \text{ y } \mathrm{cod}(f) = B\}$$

es un conjunto.

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías, un *funtor* $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una aplicación que envía objetos en objetos y morfismos en morfismos tal que

(a) $F(f\colon A \to B) = F(f)\colon F(A) \to F(B)$,
(b) $F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$,
(c) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Decimos que un funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un *isomorfismo de categorías* si existe un funtor $K\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $K \circ F = 1_{\mathscr{C}}$ y $F \circ K = 1_{\mathscr{D}}$.

Si H es un subgrupo de un grupo topológico G, podemos considerar las siguientes categorías:

- G-Top, cuyos objetos son los G-espacios y sus morfismos son las G-funciones.
- H-Top, cuyos objetos son los H-espacios y sus morfismos son las H-funciones.
- G-Top$_{G/H}$, la categoría de G-espacios sobre G/H, cuyos objetos son las parejas (u, X), donde X es un G-espacio, $u\colon X \to G/H$ es una G-función y los morfismos $f\colon (u, X) \to (v, Y)$ son todas las funciones G-equivariantes $f\colon X \to Y$ tales que $v \circ f = u$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & Y \arrow[dl, "v"] \\ & G/H & \end{tikzcd}$$

Entre ellas podemos definir los siguientes funtores:

- $\mathrm{res}_H^G\colon G\text{-Top} \to H\text{-Top}$. El funtor de restricción inducido por el homomorfismo de inclusión $H \hookrightarrow G$ (ver e.g. [6, §3]), que considera todos los G-espacios y G-funciones, como H-espacios y H-funciones, simplemente restringiendo la acción de todo G en H. En otras palabras, la acción de H en X está dada por la composición $H \times X \hookrightarrow G \times X \to X$.
- $G \times_H -\colon H\text{-Top} \to G\text{-Top}$. El funtor de producto torcido, que asigna a cada H-espacio X, el G-espacio $G \times_H X$ y a cada H-función $f\colon X \to Y$, la G-función $G \times_H f\colon G \times_H X \to G \times_H Y$ definida como $[g, x] \mapsto [g, f(x)]$.
- $S\colon H\text{-Top} \to G\text{-Top}_{G/H}$. El cual asigna a cada H-espacio X, el par $(p_X, G \times_H X)$, donde la G-función $p_X\colon G \times_H X \to G/H$ se define como $[g, x] \mapsto gH$ y a cada H-función $f\colon X \to Y$, se le asigna el morfismo $G \times_H f\colon (p_X, G \times_H X) \to (p_Y, G \times_H Y)$,

esto es, el morfismo

$$\begin{tikzcd} G\times_H X \arrow[rr, "G\times_H f"] \arrow[dr, "p_X"'] & & G\times_H Y \arrow[dl, "p_Y"] \\ & G/H & \end{tikzcd}$$

- $T\colon G\text{-Top}_{G/H} \to H\text{-Top}$. El cual asigna a cada par (u,X), el H-espacio $u^{-1}(eH)$ y a cada morfismo $f\colon (u,X)\to(v,Y)$, la H-función $f|_{u^{-1}(eH)}\colon u^{-1}(eH)\to v^{-1}(eH)$. Efectivamente, es claro que, para cada morfismo f en $G\text{-Top}_{G/H}$, $T(f\colon (u,X)\to (v,Y)) = T(f)\colon T((u,X))\to T((v,Y))$. Ahora bien, si $f\colon (u,X)\to(v,Y)$ y $g\colon (v,Y)\to(w,Z)$ son dos morfismos en $G\text{-Top}_{G/H}$, la composición $g\circ f$ es una G-función $X\to Z$ tal que $w\circ g\circ f = u$.
  De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "u"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[dl, "w"] \\ & G/H & \end{tikzcd}$$

  se desprende que si $x\in u^{-1}(eH)$, entonces $f(x)\in v^{-1}(eH)$. Luego, para cada $x\in u^{-1}(eH)$,

$$\begin{aligned} T(g\circ f)(x) &= (g\circ f)|_{u^{-1}(eH)}(x) = g(f|_{u^{-1}(eH)}(x)) \\ &= (g|_{v^{-1}(eH)}\circ f|_{u^{-1}(eH)})(x) \\ &= T(g)\circ T(f)(x). \end{aligned}$$

  Finalmente, para cada $x\in u^{-1}(eH)$,

$$T(1_{(u,X)})(x) = 1|_{u^{-1}(eH)}(x) = x = 1_{T(u,X)}(x)\,.$$

Ahora bien, las categorías H-Top y $G\text{-Top}_{G/H}$ son equivalentes, más aún, son isomorfas.

Proposición 4.1. *Sea H un subgrupo compacto de G. Las categorías H-*Top *y G-*Top$_{G/H}$ *son isomorfas.*

Demostración. Consideremos los funtores S y T descritos anteriormente.

Sea X un H-espacio. Entonces

$$(T\circ S)(X) = T(p_X, G\times_H X) = p_X^{-1}(eH) = [e, X]$$

que, por la Proposición 3.1, es H-homeomorfo a X.

Sea $f\colon X\to Y$ una H-función. Entonces

$$\begin{aligned}(T\circ S)(f\colon X\to Y) &= T(G\times_H f\colon (p_X, G\times_H X)\to(p_Y, G\times_H Y))\\ &= G\times_H f\,|_{p_X^{-1}(eH)}\colon p_X^{-1}(eH)\to p_Y^{-1}(eH)\\ &= G\times_H f\,|_{p_X^{-1}(eH)}\colon [e,X]\to[e,Y]\end{aligned}$$

y de nuevo, por la Proposición 3.1, esta función es H-equivalente a $f\colon X\to Y$.

Consideremos ahora la G-función $u\colon X\to G/H$. Entonces

$$(S\circ T)(u,X) = S(u^{-1}(eH)) = p_{u^{-1}(eH)}\colon G\times_H u^{-1}(eH)\to G/H,$$

pero, por la Proposición 3.2, $G\times_H u^{-1}(eH)$ es G-homeomorfo a X, de esta forma, es fácil ver que $p_{u^{-1}(eH)} = u\colon X\to G/H$.

Finalmente, tomemos un morfismo $f\colon (u,X)\to(v,Y)$ en G-$\mathrm{Top}_{G/H}$, entonces

$$\begin{aligned}(S\circ T)(f\colon (u,X)\to(v,Y)) &= S(f\,|_{u^{-1}(eH)}\colon u^{-1}(eH)\to v^{-1}(eH))\\ &= G\times_H(f\,|_{u^{-1}(eH)})\colon (p_{u^{-1}(eH)}, G\times_H u^{-1}(eH))\to(p_{v^{-1}(eH)}, G\times_H v^{-1}(eH)),\end{aligned}$$

esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd} G\times_H u^{-1}(eH) \arrow[rr, "G\times_H(f|_{u^{-1}(eH)})"] \arrow[dr, "p_{u^{-1}(eH)}"'] & & G\times_H v^{-1}(eH) \arrow[dl, "p_{v^{-1}(eH)}"] \\ & G/H & \end{tikzcd}$$

que es equivalente a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & Y \arrow[dl, "v"] \\ & G/H & \end{tikzcd}$$

debido a la Proposición 3.2 y la definición de las funciones involucradas.

Así, hemos probado que $T\circ S = 1_{H\text{-Top}}$ y $S\circ T = 1_{G\text{-Top}_{G/H}}$. □

No nos adentraremos en la equivalencia de categorías, que es una generalización del concepto de isomorfismo, sino en la adjunción de funtores, que puede considerarse intuitivamente como una forma débil de equivalencia entre dos categorías.

Dados dos funtores $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ y $F'\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, un *morfismo de funtores* (o transformación natural) $\tau\colon F \to F'$, es una familia de morfismos en $\mathscr{D}$, $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow F'(X)$, uno para cada $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, tal que para cada morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ en $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & F'(X) \arrow[d, "F'(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"] & F'(Y)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Sean $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $K\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos funtores. Se dice que F es un *funtor adjunto izquierdo* para K o que K es un *funtor adjunto derecho* para F, si para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ y para todo $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, existe una biyección

$$\psi_{(X,Y)}\colon \mathscr{D}(F(X),Y) \to \mathscr{C}(X,K(Y))$$

tal que si $u\colon X' \to X$, $u \in \mathscr{C}(X',X)$ y $v\colon Y \to Y'$, $v \in \mathscr{D}(Y,Y')$, entonces el diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(F(X),\, Y) \arrow[r, "\psi_{(X,\,Y)}"] \arrow[d, "{[F(u)^*, v_*]}"'] & \mathscr{C}(X,\, K(Y)) \arrow[d, "{[u^*, K(v)_*]}"] \\
\mathscr{D}(F(X'),\, Y') \arrow[r, "\psi_{(X',\,Y')}"] & \mathscr{C}(X',\, K(Y'))
\end{tikzcd}$$

Donde

$$[F(u)^*, v_*](\alpha) = v \circ \alpha \circ F(u) \ \text{ y } \ [u^*, K(v)_*](\beta) = K(v) \circ \beta \circ u,$$

para cada homomorfismo $\alpha \in \mathscr{D}(F(X),\, Y)$ y $\beta \in \mathscr{C}(X,\, K(Y))$, respectivamente.

La definición anterior de adjunción es equivalente a la existencia de un morfismo de funtores $\tau\colon 1_{\mathscr{C}} \to (K \circ F)$ que cumple la siguiente propiedad universal:

Para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ y $f\colon X \to K(Y)$, existe un único morfismo $\widehat{f}\colon F(X) \to Y$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau_X"'] & K(Y) \\ (K \circ F)(X) \arrow[ur, dotted, "K(\widehat{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, en H-Top, la familia de H-funciones $\iota_X\colon X \to G \times_H X$, $\iota_X(x) = [e, x]$, para cada H-espacio X, es un morfismo de funtores $\iota\colon 1_{H-\mathrm{Top}} \to (\mathrm{res}^G_H \circ G \times_H -)$.

Esta transformación natural ι satisface la siguiente propiedad universal: para todo H-espacio X, G-espacio Y y cada H-función $f\colon X \to Y$, existe una única G-función $\widehat{f}\colon G \times_H X \to Y$ que hace conmutativo el diagrama siguiente de H-espacios.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_X"'] & Y \\ G \times_H X \arrow[ur, dotted, "\widehat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Es fácil comprobar que tal $\widehat{f}\colon G \times_H X \to Y$, está definida como $\widehat{f}([g, x]) = gf(x)$, satisface las condiciones anteriores y es única.

Por tanto, el funtor de producto torcido $G \times_H -$ es adjunto izquierdo del funtor de restricción res^G_H, lo que significa que existe una biyección entre los morfismos en G-Top y H-Top, como lo expresa la siguiente proposición.

Proposición 4.2. [17, Ch. I, Proposition 4.3] *Sean X un H-espacio y Y un G-espacio. Entonces existe una biyección natural*

$$G\text{-}\mathrm{Top}(G \times_H X, Y) \leftrightarrow H\text{-}\mathrm{Top}(X, \mathrm{res}^G_H(Y)).$$

donde K-Top(A, B) representa el conjunto de todos los morfismos $A \to B$ en K-Top.

Observemos que el isomorfismo de los funtores T y S en la Proposición 4.1 significa que, en particular, el funtor T es, a la vez, adjunto izquierdo y adjunto derecho de S.

Esta doble adjunción implica que existen 2 biyecciones naturales

$$G\text{-}\mathrm{Top}_{G/H}(S(X),(u,Y)) \leftrightarrow H\text{-}\mathrm{Top}(X,T(u,Y))$$

y

$$H\text{-}\mathrm{Top}(T(u,Y),X) \leftrightarrow G\text{-}\mathrm{Top}_{G/H}((u,Y),S(X)),$$

donde X es un H-espacio y $u\colon Y \to G/H$ es una G-función.

En la siguiente sección veremos cómo podemos emplear de forma natural esta equivalencia para preservar el límite de una sucesión inversa al aplicar el funtor de producto torcido.

5. Límites inversos

Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Por una *sucesión inversa* en $\mathscr{C}$, nos referimos a la familia $\mathbf{X} = \{X_i, q_i^j\}$ donde $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de objetos en $\mathscr{C}$ y $q_i^j\colon X_j \to X_i$ son morfismos definidos para cada par $i \leq j$ que satisfacen

(a) $q_i^i = 1_{X_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.
(b) $q_i^j \circ q_j^k = q_i^k$ siempre que $i \leq j \leq k$.

El *límite inverso* de $\mathbf{X}$ es un objeto X junto con una familia de morfismos $\{q_i\colon X \to X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que para cada $i \leq j$, $q_i = q_i^j \circ q_j$ y que satisfacen la siguiente propiedad universal:

Para cualquier objeto Y y para toda familia de morfismos $\{f_i\colon Y \to X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que satisface $f_i = q_i^j \circ f_j$ cuando $i \leq j$ (a tal familia le llamaremos *cono sobre* $\mathbf{X}$), existe un único morfismo $f\colon Y \to X$ tal que $q_i \circ f = f_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

En este caso escribiremos $(X,\{q_i\}) = \varprojlim \mathbf{X}$ o simplemente $X = \varprojlim \mathbf{X}$. Notemos que la propiedad universal implica la unicidad del límite salvo por homeomorfismos.

Es fácil ver que el límite de una sucesión inversa en G-Top seguirá siendo el límite de la misma sucesión en H-Top al restringir la acción de G a su subgrupo H. Ahora probaremos que también al aplicar el funtor de producto torcido se preservan los límites inversos.

Teorema 5.1. *Sea H un subgrupo compacto de un grupo G y sea $\boldsymbol{X} = \{X_i, q_i^j\}$ una sucesión inversa en H-*Top*. Si $(X, \{q_i\}) = \varprojlim \boldsymbol{X}$ entonces*

$$(G \times_H X, \{G \times_H q_i\}) = \varprojlim \{G \times_H X_i, G \times_H q_i^j\}.$$

Demostración. Sea $(Z, \{t_i\})$ un cono en G-Top sobre $\{G \times_H X_i, G \times_H q_i^j\}$, de manera que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & G \times_H X \arrow[dllll, "G\times_H q_1"'] \arrow[dlll, "G\times_H q_2"'] \arrow[dl, "G\times_H q_i"'] \arrow[d, "G\times_H q_{i+1}"] & \\
G \times_H X_1 & G \times_H X_2 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & G \times_H X_i \arrow[l, "G\times_H q_{i-1}^{i}"] & G \times_H X_{i+1} \arrow[l, "G\times_H q_i^{i+1}"] & \cdots \arrow[l] \\
 & & & & Z \arrow[ullll, "t_1"] \arrow[ulll, "t_2"] \arrow[ul, "t_i"] \arrow[u, "t_{i+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Sean $p\colon G \times_H X \to G/H$ y $p_i\colon G \times_H X_i \to G/H$ las G-funciones dadas por $[g, y] \mapsto gH$, para toda $[g, y] \in G \times_H Y$. Entonces $p = p_i \circ (G \times_H q_i)$ y $p_j = p_i \circ (G \times_H q_i^j)$, para toda i, y para toda $j \geq i$.

Esto es, tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
G \times_H X_i \arrow[dr, "p_i"'] & & G \times_H X \arrow[ll, "G\times_H q_i"'] \arrow[dl, "p"] \\
 & G/H &
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
G \times_H X_i \arrow[dr, "p_i"'] & & G \times_H X_j \arrow[ll, "G\times_H q_i^j"'] \arrow[dl, "p_j"] \\
 & G/H &
\end{tikzcd}$$

Sea $A = (p_i \circ t_i)^{-1}(eH)$ luego, por la Proposición 3.2, podemos considerar $Z = G \times_H A$.

De esta manera, tenemos los siguientes morfismos en G-$\mathrm{Top}_{G/H}$:

$$t_i\colon (p_i \circ t_i, G \times_H A) \to (p_i, G \times_H X_i)$$
$$G \times_H q_i\colon (p, G \times_H X) \to (p_i, G \times_H X_i) \text{ y}$$
$$G \times_H q_i^j\colon (p_j, G \times_H X_j) \to (p_i, G \times_H X_i).$$

Aplicando el funtor $T\colon G\text{-}\mathrm{Top}_{G/H} \to H\text{-}\mathrm{Top}$, obtenemos

$$T(G \times_H q_i) = q_i\colon X \to X_i$$
$$T(G \times_H q_i^j) = q_i^j\colon X_j \to X_i$$

Sea $\widehat{t}_i = T(t_i)\colon A \to X_i$, entonces $(A, \{\widehat{t}_i\})$ es un cono sobre $\mathbf{X}$ y, como $(X, \{q_i\}) = \varprojlim \mathbf{X}$, existe una H-función única salvo homeomorfismos $\widehat{\varphi}\colon A \to X$ tal que $q_i \circ \widehat{\varphi} = \widehat{t}_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Luego, la G-función $\varphi = G \times_H \widehat{\varphi}\colon Z \to G \times_H X$ es tal que $(G \times_H q_i) \circ \varphi = t_i$. Esto es, $G \times_H X$ satisface la propiedad universal de límite inverso. Además, las biyecciones naturales que se desprenden de la Proposición 4.1 implican que la G-función φ es única. □

6. G-FIBRACIONES

Por una G-fibración entendemos una versión equivariante de una fibración de Hurewicz, esto es, $p\colon E \to B$ es una *G-fibración* si para toda G-función $f\colon X \to E$ y toda G-homotopía $F\colon X \times I \to B$ tal que $F(x, 0) = p \circ f(x)$ para cada $x \in X$, existe una G-homotopía $\widetilde{F}\colon X \times I \to E$ tal que hace conmutativo el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\partial_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$

donde $\partial_0(x) = (x, 0)$.

Las G-funciones sobre el espacio homogéneo G/H, donde H es un subgrupo cerrado de G, proporcionan un ejemplo importante de G-fibraciones. Por ejemplo, la proyección $q\colon G \to G/H$, $g \mapsto gH$, con la acción de G por traslaciones izquierdas en ambos espacios, es una G-fibración para cualquier grupo localmente compacto G ([11, Proposition 4.1]).

Además, cualquier G-función $p\colon E \to G/H$ será una G-fibración en cualquiera de los siguientes casos:

- G es un grupo compacto de Lie ([17, p. 54]).
- G es un grupo de Lie y H es compacto ([11, Theorem 4.4]).
- G es un grupo compacto metrizable ([6, Corollary 6.5]).
- G es un grupo casi conexo metrizable y H es compacto ([12, Theorem 4.3]).

Si el subgrupo H es compacto, entonces las fibraciones equivariantes se preservan bajo el funtor de restricción res_H^G como lo enuncia la proposición siguiente (ver también [5, Proposition 4.1] y [6, Proposition 3.1]).

Proposición 6.1. *Sea H un subgrupo compacto de un grupo G. Si $p\colon E \to B$ es una G-fibración, entonces p es una H-fibración.*

Demostración. Sea X un H-espacio. Dado el diagrama de H-espacios y H-funciones

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\partial_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "F"'] & B
\end{tikzcd}$$

veamos que existe una H-función $\widetilde{F}\colon X \times I \longrightarrow E$ que preserva la conmutatividad.

Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_X"] \arrow[ddd, "\partial_0"'] & & E \arrow[ddd, "p"] \\
& G \times_H X \arrow[ur, "\widehat{f}"'] \arrow[d, "\bar{\partial}_0"'] & \\
& G \times_H (X \times I) \arrow[dr, "\widehat{F}"] & \\
X \times I \arrow[ur, "i_{X\times I}"] \arrow[rr, "F"'] & & B
\end{tikzcd}$$

donde i_X y $i_{X\times I}$ son los H-encajes cerrados dados en la Proposición 3.1; $\widehat{f}$ y $\widehat{F}$ son las G-funciones inducidas por f y F, respectivamente, dadas en la Proposición 4.2; y $\bar{\partial}_0 = G\times_H \partial_0$; esto es, para $x\in X$, $g\in G$ y $t\in I$, se definen

$$\begin{aligned} i_X(x) &= [e,x], \\ i_{X\times I}(x,t) &= [e,(x,t)], \\ \widehat{f}([g,x]) &= g\cdot f(x), \\ \widehat{F}([g,(x,t)]) &= g\cdot F(x,t) \ \text{ y} \\ \bar{\partial}_0([g,x]) &= [g,\partial_0(x)]\,. \end{aligned}$$

Ahora consideremos la G-función $\gamma\colon G\times_H(X\times I)\to(G\times_H X)\times I$ dada por $[g,(x,t)]\mapsto([g,x],t)$. No es difícil ver que γ es una G-función biyectiva, continua y además, como H es compacto, es cerrada; esto es, γ es un G-homemorfismo.

Ahora definamos la G-función $\partial_0'\colon G\times_H X\to(G\times_H X)\times I$ como $\partial_0'=\gamma\circ\bar{\partial}_0$.

Como p es una G-fibración, existe $\bar{F}\colon (G\times_H X)\times I\to E$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} G\times_H X \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\partial_0'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ (G\times_H X)\times I \arrow[r, "\widehat{F}"'] \arrow[ur, dotted, "\bar{F}"] & B \end{tikzcd}$$

Así, la H-función $\widetilde{F}\colon X\times I\to E$ definida como $\widetilde{F}=\bar{F}\circ i_{X\times I}$ es el levantamiento que deseabamos hallar. □

Ahora veamos algunas condiciones suficientes para que el funtor de producto torcido preserve también las fibraciones equivariantes, esto es, que a partir de una H-fibración, obtengamos una G-fibración.

Observemos las propiedades siguientes.

Propiedad 6.2. *Si $f\colon X\to G/H$ es una G-función y $S=f^{-1}(eH)$, entonces $\eta\colon G\times_H S\to X$, dada por $[g,s]\mapsto gs$, es un G-homeomorfismo.*

Propiedad 6.3. *La proyección $q\colon G \to G/H$ es una H-fibración, donde H actúa en G por conjugación, esto es, con la acción $h * g = hgh^{-1}$.*

Para que la Propiedad 6.2 se cumpla, es suficiente que se cumpla una de las siguientes condiciones:

- H es compacto y G localmente compacto ([1, Lemma 3.5]).
- La proyección $q\colon G \to G/H$ tiene una sección local ([17, Ch. 1, Proposition 4.4]), en particular, si G es un grupo de Lie.

Ahora bien, para que la Propiedad 6.3 se cumpla, es suficiente que se cumpla cualquiera de las siguientes condiciones:

- G es un grupo compacto de Lie ([13, p. 266]).
- G es un grupo compacto metrizable ([6, Proposition 6.3]).
- G es un grupo de Lie y H es compacto ([11, Corollary 4.3]).
- G es un grupo casi conexo metrizable y H es compacto ([12, Theorem 4.2]).

Las condiciones anteriores son, de hecho, las condiciones suficientes que deseábamos para afirmar que el producto torcido preserva fibraciones equivariantes.

En [6, Theorem 6.4] encontramos que si G es un grupo compacto metrizable, entonces el funtor de producto torcido asignará a cada H-fibración una G-fibración. Aunque en dicho artículo se piden las condiciones de compacidad y metrizabilidad, se infiere fácilmente que las condiciones suficientes para la preservación de fibraciones equivariantes bajo el funtor de producto torcido, son justamente las propiedades 6.2 y 6.3. De manera que la demostración del teorema siguiente es, esencialmente, la misma presentada en [6] pero la reproducimos a continuación para beneficio del lector.

Teorema 6.4. *Sea H un subgrupo compacto de un grupo G tales que las propiedades 6.2 y 6.3 se cumplen. Si $p\colon E \to B$ es una H-fibración entonces la G-función inducida*

$$\tilde{p} = G \times_H p\colon G \times_H E \to G \times_H B$$

dada por $\tilde{p}([g, y]) = [g, p(y)]$ es una G-fibración.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de G-funciones

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\partial_0"'] & G \times_H E \arrow[d, "\tilde{p}"] \\
X \times I \arrow[r, "F"'] & G \times_H B
\end{tikzcd}$$

y sea $\lambda\colon G \times_H B \to G/H$ dada por $\lambda([g,b]) = gH$, $g \in G$, $b \in B$.

Sea $A = \partial_0^{-1} F^{-1} \lambda^{-1}(eH)$.

Entonces podemos identificar X con $G \times_H A$ por medio del G-homeomorfismo

$$\eta\colon \underset{[g,a] \longmapsto ga}{G \times_H A \to X}$$

Así, tenemos el diagrama conmutativo de H-funciones

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "c_e"] \arrow[d, hook, "\partial_0|_A"'] & & G \arrow[d, "q"] \\
A \times I \arrow[r, "F|_{A\times I}"'] & G \times_H B \arrow[r, "\lambda"'] & G/H
\end{tikzcd}$$

donde G es un H-espacio con la acción $h * g = hgh^{-1}$ y c_e es la H-función constante $a \mapsto e$, $\forall a \in A$.

Como $q\colon G \to G/H$ es una H-fibración, existe una H-función $\vartheta\colon A \times I \to G$ tal que $\vartheta \circ \partial_0(a) = c_e(a)$ y $q \circ \vartheta(a,t) = \lambda \circ F(a,t)$.

Sea $\psi\colon A \times I \to G \times_H B$ dada por $\psi(a,t) = (\vartheta(a,t))^{-1} F(a,t)$.

Notemos que ψ es una H-función ya que

$$\begin{aligned}
\psi(ha,t) &= (\vartheta(ha,t))^{-1} F(ha,t) = (h * \vartheta(a,t))^{-1} hF(a,t) \\
&= (h\vartheta(a,t)h^{-1})^{-1} hF(a,t) = h(\vartheta(a,t))^{-1} h^{-1} hF(a,t) \\
&= h(\vartheta(a,t))^{-1} F(a,t) = h\psi(a,t).
\end{aligned}$$

Más aún $\Im\psi \subset \lambda^{-1}(eH)$, en efecto, para cada $a \in A$ y $t \in I$ tenemos

$$\begin{aligned}\lambda(\psi(a,t)) &= \lambda((\vartheta(a,t))^{-1}F(a,t)) = (\vartheta(a,t))^{-1}\lambda(F(a,t))\\ &= (\vartheta(a,t))^{-1}q(\vartheta(a,t)) = q((\vartheta(a,t))^{-1}\vartheta(a,t))\\ &= q(e) = eH.\end{aligned}$$

Por la Proposición 3.1, podemos identificar $B = \{[e,b] | b \in B\} = \lambda^{-1}(eH)$; y notemos que para cada $a \in A$, $\tilde{p} \circ f(a) = F \circ \partial_0(a) \in \lambda^{-1}(eH) = B$, lo que significa que $f(a) \in \tilde{p}^{-1}(B) = E$.

De manera que podemos considerar el diagrama de H-funciones

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f|_A"] \arrow[d, hook, "\partial_0|A"'] & E \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "\psi"'] & B \end{tikzcd}$$

Como p es una H-fibración, entonces existe una H-función $\widetilde{\psi}\colon A \times I \to E$ tal que $\widetilde{\psi} \circ \partial_0(a) = f(a)$ y $p \circ \widetilde{\psi}(a,t) = \psi(a,t)$.

Para cada $x = ga \in X$ definimos la función

$$\widetilde{F}\colon X \times I \to G \times_H E$$

por $\widetilde{F}(x,t) = \widetilde{F}(ga,t) = [g\vartheta(a,t), \widetilde{\psi}(a,t)]$. Notemos que $\widetilde{F}$ es una G-función, ya que para cada $g' \in G$,

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(g'x,t) = \widetilde{F}(g'ga,t) &= [g'g\vartheta(a,t), \widetilde{\psi}(a,t)]\\ &= g'[g\vartheta(a,t), \widetilde{\psi}(a,t)] = g'\widetilde{F}.\end{aligned}$$

Más aún

$$\begin{aligned}\widetilde{F} \circ \partial_0(x) &= \widetilde{F}(x,0) = [g\vartheta(a,0), \widetilde{\psi}(a,0)]\\ &= [ge, f(a)] = [g, f(a)] = gf(a) = f(ga) = f(x)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{p}\circ\widetilde{F}(x,t) &= \tilde{p}([g\vartheta(a,t),\widetilde{\psi}(a,t)]) = [g\vartheta(a,t),p(\widetilde{\psi}(a,t))]\\ &= [g\vartheta(a,t),\psi(a,t)] = [g\vartheta(a,t),(\vartheta(a,t))^{-1}F(a,t)]\\ &= g\vartheta(a,t)(\vartheta(a,t))^{-1}F(a,t) = gF(a,t)\\ &= F(ga,t) = F(x,t).\end{aligned}$$

Luego $\widetilde{F}$ es un levantamiento de F y, por tanto, $\tilde{p}$ es una G-fibración. □

7. Conclusiones

En este artículo hemos trabajado con algunos funtores entre categorías equivariantes, centrándonos en el funtor de producto torcido $G\times_H -\colon H\text{-Top}\to G\text{-Top}$, el cual se ha estudiado en [4], [6] y [7] para el caso en el que el grupo G es compacto.

En particular, en [6] y [7] se estudian algunas propiedades de los H-espacios que se preservan al aplicar el funtor de producto torcido. En el presente trabajo, nos hemos concentrado en los límites inversos y las fibraciones equivariantes extendiéndonos al caso no compacto, esto es, se probó que, bajo ciertas condiciones que no necesariamente involucran la compacidad de todo el grupo, al aplicar el funtor de producto torcido a una sucesión inversa en H-Top, se obtiene una sucesión inversa en G-Top cuyo límite es justamente el producto torcido del límite inverso de la sucesión original (Teorema 5.1); de igual forma, al aplicar el producto torcido a una H-fibración, la G-función obtenida es una G-fibración (Teorema 6.4).

Referencias

[1] H. Abels, *A universal proper G-space*, Math. Z. **159** (1978), 143–158.

[2] S. Antonyan, *Orbit spaces of proper equivariant absolute extensors*, Topology Appl. **153** (2005) 698–709.

[3] S. Awodey, Category Theory, *Oxford University Press*, New York, 2006.

[4] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups, *Acad. Press*, New-York, 1972.

[5] A. Bykov, *The homogeneous space G/H as an equivariant fibrant space*, Topology Appl. **157** (2010) 2604–2612.

[6] A. Bykov, R. Juárez Flores, *G-fibrations and twisted products*, Topology Appl. **196** (2015) 379–397.

[7] A. Bykov, J. A. Sánchez Martínez, *G-fibrant extensions and twisted products*, Topology Appl. **201** (2016) 157–170.

[8] A. Bykov, A. Torres Juan, *Fibrant extensions of free G-spaces*, Topology Appl. **159** (2012) 1179–1186.

[9] H. Herrlich, G. E. Strecker, Category Theory, *Heldermann Verlag*, 1979.

[10] I. M. James, General topology and homotopy theory, *Springer-Verlag*, 1984.

[11] A. L. Kantún-Montiel, *Canonical projections of Lie groups as equivariant fibrations*, Topology Proceedings, **54** (2019) 361–369.

[12] A. L. Kantún-Montiel, V. M. Méndez-Salinas, *The quotient map as an H-fibration by conjugations*, Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana, **15** (2019) 3–11.

[13] R. K. Lashof, *Equivariant bundles*, Illinois J. Math. **26** (1982), 257–271.

[14] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, *Springer-Verlag*, New York, 1998.

[15] S. de Neymet, *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*, Aportaciones Matemáticas, 23, SMM, 2005.

[16] R. S. Palais, The classification of G-spaces, *Memoirs of the AMS*, 36, Providence, RI, 1960.

[17] T. tom Dieck, Transformation groups, *Walter de Gruyter*, Berlin-New York, 1987.

INSTITUTO DE AGROINGENIERÍA, UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN, AV. FERROCARRIL S\N, CIUDAD UNIVERSITARIA, CP 68400, LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO.

E-mail address: `alkantun@unpa.edu.mx`

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FINANCIERA, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE TLAXCALA, AVENIDA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA NO. 1, COLONIA SAN PEDRO XALCALTZINCO, TEPEYANCO, TLAXCALA, MÉXICO, C.P. 90180.

E-mail address: `jorgealberto.sanchez@uptlax.edu.mx`

INSTITUTO DE AGROINGENIERÍA, UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN, AV. FERROCARRIL S\N, CIUDAD UNIVERSITARIA, CP 68400, LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO.

E-mail address: `arojas@unpa.edu.mx`