

**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
CAMPUS LOMA BONITA**

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**Control Para el Seguimiento de Trayectoria
Basado en Observador de Estados, para un
Robot Móvil Diferencial, utilizando un
Modelo de Segundo Orden**

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN OPTIMIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS

PRESENTA:

Luis Aldair Castro Romero

Director:

Dr. Hiram Netzahualcóyotl García Lozano

Codirector:

Dr. Jesús Santiaguillo Salinas

LOMA BONITA, OAX.

2024



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

OFICIO	DEP/2024/427
ASUNTO	Autorización de impresión de tesis

San Juan Bautista Tuxtepec, Oaxaca, a 18 de septiembre de 2024

M. EN C. HÉCTOR LÓPEZ ARJONA
VICE-RECTOR ACADÉMICO
UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Sirva la presente para informarle que, el jurado evaluador del examen para obtener el grado de **Maestro en Optimización y Control de Sistemas** del **C. Luis Aldair Castro Romero**, con número de **Matrícula 22170154**, ha autorizado la impresión del manuscrito que lleva por título "**Control Para el Seguimiento de Trayectoria Basado en Observador de Estados, para un Robot Móvil Diferencial, utilizando un Modelo de Segundo Orden**", para su posterior presentación y defensa por el sustentante.

Agradezco su atención y quedo a sus órdenes para cualquier duda o aclaración.

Atentamente
terra uberrima, mens aperta
Bøu Lo-tama, chí jí jú

Dr. José Abad Zavaleta
Jefe de la División de Estudios de Posgrado



C.c.p. Dr. Hiram Nezahualcóyotl García Lozano – Director de tesis.
C.c.p. Dr. Hiram Nezahualcóyotl García Lozano – Coordinador de la Maestría en Optimización y Control de Sistemas.
C.c.p. M. E. Yesenia Barrientos Arenal – Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
C.c.p. Archivo.

CAMPUS TUXTEPEC
C. Circuito central No. 200, Col. Parque Industrial.
C.P. 38301, Tuxtepec, Oax.
Tel. 01(287)8759240

www.unpa.edu.mx

CAMPUS LOMA BONITA
Av. Ferrocarril S/N, Ciudad universitaria.
C.P. 68400, Loma Bonita, Oax.
Tel. 01(281)8729230



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

OFICIO	DEP/2024/428
ASUNTO	Jurado para examen de grado

San Juan Bautista Tuxtepec, Oaxaca, a 18 de septiembre de 2024

C. LUIS ALDAIR CASTRO ROMERO
MAESTRÍA EN OPTIMIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS
UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Por este medio le informo que el jurado de su examen para obtener el grado de **Maestro en Optimización y Control de Sistemas** estará integrado por los siguientes investigadores.

Profesor Investigador	Jurado de Examen
M. en C. Rafael Fernando González Zarate	Presidente
Dra. Anahí Rojas Carrasco	Secretario
Dr. Hiram Nezahualcóyotl García Lozano	Vocal
Dr. Mauro Sánchez Sánchez	Primer Suplente
Dr. Jesús Santiaguillo Salinas	Segundo Suplente

Sin más por el momento, le envío saludos cordiales.

Atentamente

terra uberrima, mens aperta
Bou Lo-tama, chí jí jú

Dr. José Abad Zavaleta
Jefe de la división de estudios
de posgrado.



M. en C. Héctor López Arjona
Vicerrector Académico
Vo. Bo.



C.c.p. Dr. Hiram Nezahualcóyotl García Lozano – Director de tesis.
C.c.p. Dr. Hiram Nezahualcóyotl García Lozano – Coordinador de la Maestría en Optimización y Control de Sistemas.
C.c.p. M. E. Yesenia Barrientos Arenal – Jefa del Departamento de Servicios Escolares
C.c.p. Archivo.

CAMPUS TUXTEPEC
C. Circuito central No. 200, Col. Parque Industrial.
C.P. 38301, Tuxtepec, Oax.
Tel. 01(287)8759240

www.unpa.edu.mx

CAMPUS LOMA BONITA
Av. Ferrocarril S/N, Ciudad universitaria.
C.P. 68400, Loma Bonita, Oax.
Tel. 01(281)8729230

*Dedico este logro a quienes me enseñaron a soñar en grande y a nunca rendirme.
Este es solo el comienzo de todo lo que aún estoy por alcanzar.*

Agradecimientos

Llegar a este punto lleno de retos, aprendizajes y experiencias no hubiera sido posible sin el apoyo y la compañía de muchas personas a quienes quiero expresar mi más profundo agradecimiento.

En primer lugar, agradezco a mis padres José Luis Castro Reyes y Guadalupe Romero Valerio, quienes con su amor incondicional, sus sacrificios y su constante apoyo me han dado la fuerza necesaria para superar cada obstáculo. Ustedes son mi mayor inspiración y mi motivación para seguir adelante en cada paso que doy. Sin su guía y ejemplo, este logro no habría sido posible.

A mis hermanos, Yosimar Castro Romero y Jordi Isait Castro Romero, quienes han estado en cada momento, brindándome su apoyo y su cariño. Gracias por ser mis compañeros en esta aventura, por animarme en los momentos difíciles y por celebrar conmigo cada pequeño triunfo. Su presencia en mi vida es invaluable.

Mi gratitud también se dirige a mi director de tesis, el Dr. Hiram Netzahualcóyotl García Lozano. Su orientación experta, su paciencia y su dedicación han sido fundamentales en la realización de este trabajo. Agradezco profundamente su compromiso y su tiempo, así como los conocimientos y consejos que me ha brindado a lo largo de este proceso.

A mi codirector, Dr. Jesús Santiaguillo Salinas, quiero expresarle mi sincero agradecimiento por su apoyo constante y por compartir conmigo su experiencia y conocimiento. Sus observaciones y sugerencias han sido cruciales para el desarrollo de esta tesis, y su disposición para ayudarme en todo momento ha sido un pilar en este camino.

Agradezco al M.C. Rafael Fdo. González Zárate por su valiosa ayuda y por compartir conmigo su conocimiento y experiencia. Su apoyo ha sido un recurso invaluable para el desarrollo de este trabajo.

No puedo dejar de mencionar a mis amigos y compañeros de laboratorio, Zurisadai Flores Murcia y Daly Yareth Lara Solís, quienes han estado a mi lado en cada paso de este proceso. Gracias por su amistad, por el apoyo incondicional, y por hacer del laboratorio un lugar donde el trabajo se convertía en una experiencia enriquecedora y gratificante. Su compañía ha sido esencial para mantener el ánimo y la motivación durante todo este tiempo.

A mis compañeros de maestría, gracias por su amistad, por las interminables horas de estudio compartidas, por las discusiones que nos llevaron a nuevas ideas, y por ser una fuente constante de apoyo y ánimo. Juntos hemos superado los desafíos y hemos celebrado los logros, y sin ustedes, este camino habría sido mucho más difícil.

Quiero expresar un agradecimiento especial a mi novia, Joruary, por su amor, paciencia y

comprensión a lo largo de todo este proceso. Tu apoyo incondicional y tus palabras de aliento han sido una fuente de fortaleza y motivación para mí. Gracias por estar siempre a mi lado y por ser mi mayor respaldo en este viaje.

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento a los alumnos de M-10, quienes con su curiosidad y entusiasmo han sido una inspiración constante. Gracias por recordarme la importancia de seguir aprendiendo y creciendo cada día. Su energía y ganas de aprender han sido un motor que me ha impulsado a dar lo mejor de mí en todo momento.

A todos ustedes, gracias por ser parte de este viaje y por contribuir de manera tan significativa a mi formación y a la realización de esta tesis. Este logro es tanto mío como de ustedes.

Se agradece a CONAHCYT por el financiamiento de esta tesis, por medio de la beca con número 1253109.

Tabla de Contenido

1. Introducción	3
1.1. Robótica	3
1.2. Robots Móviles	4
1.2.1. Robots móviles terrestres a ruedas.	4
1.2.2. Tipos de ruedas	4
1.2.3. Configuraciones	5
1.3. Estado del arte	7
1.4. Definición del problema	7
1.5. Justificación	8
1.6. Objetivo	8
1.6.1. Objetivos Específicos	8
2. Modelo Cinemático	9
2.1. Modelo cinemático	9
2.1.1. Restricciones cinemáticas	10
2.2. Robot móvil diferencial	10
2.3. Modelado del RMD con punto de control en el centro del eje virtual de las ruedas motorizadas.	11
2.3.1. Modelo con un punto de control Frontal (PF)	12
2.3.2. Modelo Extendido (Modelo de Segundo Orden)	14
3. Estabilidad	15
3.1. Criterio de estabilidad de Routh	15
3.2. Criterio de Routh	15
3.2.1. Construcción de la Tabla de Routh	16
3.3. Estabilidad en sentido de Lyapunov	17
4. Observadores de Estados	21
4.1. Observabilidad	21
4.2. Observador de estados de Orden completo	22
4.3. Diseño del observador de estados para el modelo cinemático extendido	23
5. Estrategia de control	26
5.1. Desarrollo	26
5.2. Estrategia de control más observador de estados	27
5.2.1. Control no lineal	29
5.2.2. Modelado de Sistemas no Lineales	29
5.2.3. Diseño de un control no lineal	29

6. Resultados Teóricos: Simulación numérica	31
6.1. Trayectoria de una Lemniscata de Bernoulli	31
6.1.1. Trayectoria de un Círculo	35
6.2. Trayectoria de un Cuadrifolio.	38
6.3. Estrategia de control no lineal	39
7. Resultados experimentales	43
7.1. Plataforma Experimental	43
7.2. Trayectoria Lemniscata de Bernoulli	44
7.3. Trayectoria Circular	48
7.3.1. Trayectoria de un Cuadrifolio	52
7.4. Pruebas experimentales control no lineal	56
Conclusión	60
Bibliografía	62
Apendice	64

Índice de Tablas

1.1.	Tipos de Robots	3
3.1.	Tabla de Routh	16
4.1.	Tabla de Routh	25
4.2.	Matriz K_e y Tabla de Routh.	25

Índice de Figuras

1.2.	Robot móvil en configuración Ackerman.	5
1.3.	Robot móvil en configuración omnidireccional.	6
1.4.	Robot móvil en configuración diferencial.	6
2.1.	Robot móvil diferencial considerando el centro del eje de las ruedas motorizadas.	12
2.2.	Diagrama de un robot móvil diferencial haciendo uso de un PF.	13
3.1.	Estabilidad en el sentido de Lyapunov.	17
3.2.	Estabilidad asintótica.	18
3.3.	Inestabilidad en el sentido de Lyapunov.	19
4.1.	Diagrama a bloques de un sistema real y un observador de estados de orden completo.	22
6.1.	Seguimiento de trayectoria.	32
6.2.	Errores de seguimiento.	32
6.3.	Observador de estados Trayectoria Lemniscata.	33
6.4.	Seguimiento con control sub-amortiguado.	33
6.5.	Errores de seguimiento con control sub-amortiguado.	34
6.6.	Observador de estados Trayectoria Lemniscata.	34
6.7.	Trayectoria Circular.	35
6.8.	Errores de seguimiento.	35
6.10.	Trayectoria Circular segunda prueba.	36
6.11.	Errores de seguimiento.	37
6.12.	Observador de estados Trayectoria Circular.	37
6.13.	Trayectoria Cuadrifolio.	38
6.14.	Errores de seguimiento Cuadrifolio.	38
6.15.	Velocidades estimadas y errores de estimación.	39
6.16.	Seguimiento de trayectoria.	40
6.17.	Errores de seguimiento.	40
6.18.	Entradas de control.	41
6.19.	Seguimiento de trayectoria.	41
6.20.	Errores de seguimiento.	42
6.21.	Entradas de control.	42
7.1.	Plataforma Experimental.	44
7.2.	Seguimiento de trayectoria.	44
7.3.	Errores de posición.	45
7.4.	Observador de estados.	45
7.5.	Entradas de control.	46
7.6.	Seguimiento de trayectoria.	46
7.7.	Errores de posición.	47
7.8.	Observador de estados.	47

7.9.	Entradas de control.	48
7.10.	Trayectoria Circular.	48
7.11.	Errores de posición.	49
7.12.	Observador de estados.	49
7.13.	Entradas de control.	50
7.14.	Seguimiento de trayectoria.	50
7.15.	Errores de posición.	51
7.16.	Errores de observación.	51
7.17.	Entradas de control.	52
7.18.	Seguimiento de trayectoria.	52
7.19.	Errores de posición.	53
7.20.	Observador de estados.	53
7.21.	Entradas de control.	54
7.22.	Seguimiento de trayectoria.	54
7.23.	Errores de posición.	55
7.24.	Observador de estados.	55
7.25.	Entradas de control.	56
7.26.	Seguimiento de trayectoria.	57
7.27.	Errores de posición.	57
7.28.	Entradas de control.	58
7.29.	Seguimiento de trayectoria.	58
7.30.	Errores de posición.	59
7.31.	Entradas de control.	59

Resumen

En esta tesis se aborda el problema del seguimiento de trayectorias para un robot móvil terrestre, específicamente un robot con tracción diferencial. El problema de seguimiento de trayectoria consiste en dada una trayectoria preestablecida por el usuario, el robot converge a la trayectoria en tiempo finito. Para ello se construyen modelos cinemáticos. Un modelo cinemático es una representación matemática del robot sin considerar las fuerzas externas que actúan sobre él. La convergencia del robot a la trayectoria se garantiza mediante una estrategia de control, haciendo uso de un observador de estados. Los resultados teóricos se validan numérica y experimentalmente.

Abstract

This thesis addresses the problem of trajectory tracking for a ground mobile robot, specifically a robot with differential drive. The trajectory tracking problem involves ensuring that, given a user-defined trajectory, the robot converges to the trajectory in finite time. To achieve this, kinematic models are constructed. A kinematic model is a mathematical representation of the robot that does not take into account the external forces acting on it. The convergence of the robot to the trajectory is ensured through a control strategy that employs a state observer. The theoretical results are validated both numerically and experimentally.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se presenta una visión general sobre la robótica móvil, así como un panorama sobre las investigaciones que han llevado a la propuesta de este trabajo.

1.1. Robótica

La robótica es una disciplina científica que aborda la investigación y desarrollo de una clase particular de sistemas mecánicos, denominados robots, diseñados para realizar una amplia variedad de aplicaciones industriales, científicas, domésticas y comerciales [1].

La robótica es una disciplina que involucra distintas áreas de conocimiento tales como matemáticas, física, electrónica, computación, visión e inteligencia artificial, entre otras. Se podría pensar que la robótica es eminentemente experimental, sin embargo, todos sus resultados son sustentados con un estricto rigor teórico.

Entre las áreas principales donde la robótica incursiona se encuentra: control de movimiento, inteligencia artificial, sensores, visión, planificación y coordinación, entre otras. Los robots presentan nuevos espacios de desarrollo, siendo piezas claves de la modernización tecnológica.

Los robots se pueden clasificar según la locomoción y configuración estructural en la que se desarrollen. En la Tabla 1.1 se muestra la clasificación de los robots [1].

Tabla 1.1: Tipos de Robots

Clasificación de Robots		
Móviles	Terrestres: ruedas, patas	
	Submarinos: aéreo-espaciales	
Humanoides	Diseño complejo	
Industriales	Brazos mecánicos	Robots manipuladores

En la sociedad moderna, estos dispositivos robóticos son un nicho de oportunidades para la investigación y crecimiento tecnológico. Esta tesis se centra en el desarrollo de una estrategia de control que aporte en la solución del problema de seguimiento de trayectorias en robots móviles, modelados con base a un sistema de segundo orden.

1.2. Robots Móviles

Los robots móviles plantean la capacidad autónoma de movimiento sobre entornos no estructurados, esto es, entornos cuyas principales características físicas y geométricas no son conocidos [2]. Éstos se caracterizan por una conexión inteligente entre las operaciones de percepción y acción, que definen su comportamiento, lo que permite que lleven a cabo de manera eficiente el objetivo por el cual fueron construidos.

La percepción de un robot móvil se define como la capacidad de determinar el entorno bajo el cual se encuentra operando. Esto comúnmente se realiza mediante el sistema sensorial a bordo del robot, el cual puede generar mapas globales y locales del entorno en el que se encuentra inmerso el robot móvil.

El robot móvil utiliza la información obtenida en la operación de percepción para realizar acciones de control a fin de realizar diversas tareas como son: Seguimiento de trayectorias, evasión de obstáculos, seguimiento de caminos, entre otras.

Como se muestra en la Tabla 1.1, hay tres tipos de clasificación para los robots, sin embargo, este trabajo se enfoca en los robots móviles terrestres a ruedas.

1.2.1. Robots móviles terrestres a ruedas.

Los Robots Móviles a Ruedas (RMR's), son vehículos con la capacidad de moverse de manera autónoma sobre una superficie lisa, desconocida o conocida parcialmente, mediante la acción de las ruedas montadas en su estructura. Sus aplicaciones cubren gran variedad de campos, entre los cuales se encuentran: minería, construcción de túneles, exploración de terrenos hostiles, aplicaciones militares, entre otras. [1], [3].

Una parte fundamental en los RMR's es su sistema de locomoción, el cual puede estar constituido de ruedas convencionales, orugas, ruedas suecas, entre otras. Estas proporcionan al robot características propias de maniobrabilidad, agilidad para desplazarse, entre otras propiedades físicas. De igual forma los RMR's, según la necesidad, son construidos con distintas configuraciones, tales como diferencial, Ackerman, omnidireccional, entre otras.

1.2.2. Tipos de ruedas

La movilidad en los robots terrestres a ruedas está caracterizada por el tipo de rueda que poseen y la disposición de éstas en su estructura mecánica. En la robótica móvil terrestre se consideran dos tipos de ruedas, siendo estas las ruedas convencionales y las omnidireccionales o suecas. Independientemente del tipo de rueda a utilizar se considera que el contacto entre la rueda con la superficie se reduce a un único punto del plano.

Para el uso de la rueda convencional se supone que la rodadura no presenta deslizamiento, es decir, la velocidad en el punto de contacto es igual a cero. Las ruedas convencionales pueden sub-clasificarse en tres tipos. [1],[3],[4].

- Rueda fija: No posee articulación de dirección, por lo que su posición se mantiene fija a la estructura del robot.
- Rueda orientable centrada: Ésta presenta una articulación de dirección, siendo orientable respecto a la estructura del robot, pasando su eje de dirección por el centro de rotación de la rueda.



(a) Rueda Convencional



(b) Rueda Omnidireccional

- Rueda orientable descentrada: Posee una articulación de dirección, la cual no pasa por el centro de rotación de la rueda.

La rueda omnidireccional o sueca permite el desplazamiento del robot móvil en cualquier dirección en un solo movimiento. Las ruedas omnidireccionales poseen rodillos sobre el perímetro de la rueda. Estos rodillos pueden estar montados a 45° o 90° y su orientación permite el desplazamiento suave en cualquier dirección. Este tipo de rueda es utilizado en robots móviles omnidireccionales.

1.2.3. Configuraciones

En la robótica móvil terrestre existen distintos tipos de configuraciones bajo las cuales se pueden diseñar los robots. Algunas de ellas se presentan a continuación.

- Ackerman: Ésta configuración es utilizada en robots móviles de cuatro ruedas. Tiene la particularidad de ser la configuración que se asemeja a los automóviles convencionales, pudiendo contar con tracción delantera, trasera o en sus cuatro ruedas. Sus ruedas delanteras le proporcionan la dirección al robot, considerando siempre que el ángulo de giro en cada rueda será distinto, es decir, la rueda interior presentará un ángulo de giro mayor a la rueda exterior. En la Fig.(1.2), se muestra un robot móvil en configuración Ackerman.

Figura 1.2: Robot móvil en configuración Ackerman.

- Triciclo clásico delta: La configuración triciclo clásico hace uso de una rueda delantera y dos traseras. La rueda delantera tiene dos funciones principales, las cuales consisten en

proporcionar la tracción del robot y el direccionamiento del mismo. La maniobrabilidad en ésta configuración puede ser mayor a la configuración Ackerman, sin embargo, puede presentar problemas de estabilidad y pérdida de tracción en terrenos con pendientes.

- Omnidireccional: En la configuración omnidireccional se hace uso de ruedas omnidireccionales o suecas. Según lo amerite el diseño pueden usarse 3 o 4 ruedas. Ésta configuración permite al robot desplazarse en cualquier dirección sin la necesidad de hacer cambios de orientación, por lo tanto, presenta una alta maniobrabilidad y precisión en el control de sus movimientos. En la Fig.(1.3), se presenta un robot de tres ruedas en configuración omnidireccional.

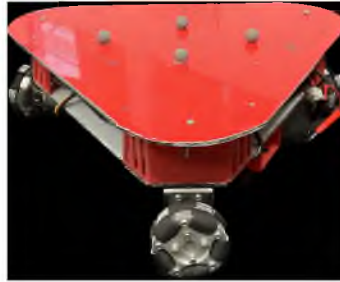


Figura 1.3: Robot móvil en configuración omnidireccional.

- Diferencial: Un robot con tracción diferencial utiliza un sistema de transmisión de dos ruedas independientes, cada rueda está unida a su propio motor. Para dar estabilidad al robot se coloca una o más ruedas libres que giran pasivamente. Su movimiento (locomoción) se basa en la diferencia de velocidades de las dos ruedas, es decir, el robot realiza sus movimientos con base en el activamiento de los motores que lo componen. Si los dos motores giran en la misma dirección y con la misma velocidad, el robot se moverá en línea recta hacia adelante, en caso contrario, si cambia el sentido de giro y mantiene la velocidad, el vehículo se desplazará hacia atrás. Cuando las dos ruedas giran en la misma dirección, pero con diferentes velocidades, el robot girará con sentido hacia el motor más lento. En la Fig.(1.4), se muestra un robot móvil en configuración diferencial.



Figura 1.4: Robot móvil en configuración diferencial.

En la siguiente sección se presentan algunos trabajos de investigación relevantes sobre robótica móvil, donde se busca aportar en la solución del problema de seguimiento de trayectorias, haciendo uso de robots móviles y de observadores de estados.

1.3. Estado del arte

En la robótica móvil, el posicionamiento, seguimiento de trayectoria y evasión de obstáculos son algunos de los problemas a considerar cuando se busca la autonomía de desplazamiento del robot. Los resultados de las recientes investigaciones permiten avanzar en la solución de estos problemas. Con respecto al posicionamiento, en [5], se presentan distintos métodos que permiten al robot móvil conocer su posición dentro del ambiente de trabajo, estudiando los distintos tipos de sensores. En [6] se aborda el problema de estimación del posicionamiento de un robot móvil, mediante la cuantificación de errores de odometría de tipo sistemáticos. Por su parte en [7] se integran dos métodos de mapeo para la navegación de un robot dentro de un ambiente cerrado y estructurado.

Respecto al seguimiento de trayectoria, se propone en [8] el control de un convoy de robots móviles con un tiempo variable de separación, aquí se propone una estrategia de control donde cada robot es el líder del robot que se encuentra detrás de él, formando así una cadena de vehículos. En [9], se propone una estrategia de control jerarquizada en dos niveles, un lazo interno compuesto por un controlador PID asociado a los motores del robot y un lazo externo asociado al modelo cinemático del robot. Este se encarga de generar los perfiles de velocidad para cada motor.

Para la obtención de la estrategia de control es necesario conocer los estados del sistema. Sin embargo, algunas veces no se cuenta con los sensores necesarios para medir todos los estados o son difíciles de medir. En estos casos, los observadores son una alternativa para estimar los estados del sistema. Los observadores han sido ampliamente aplicados en sistemas de robótica móvil. Por ejemplo en [10] se propone un control para un robot de dos ruedas tipo péndulo invertido utilizando un observador de estados. En [11] se hace uso de observadores de estados en robots móviles aéreos, aplicando una retroalimentación de estados, estimando los estados no medibles del robot. En [12] se hace uso de observadores de estados en multi-agentes, estimando las velocidades angulares y lineales para generar una estrategia de control para el seguimiento de trayectorias.

Los resultados reportados en la literatura, sugieren un avance en la búsqueda de la autonomía. No obstante, aún existe amplio margen en la investigación sobre el comportamiento autónomo de los robots móviles.

En este trabajo de tesis se utiliza un modelo cinemático de segundo orden para describir el comportamiento de un robot móvil diferencial. Se diseñará una estrategia de control a fin de que éste realice el seguimiento de una trayectoria de forma tal que garantice el decaimiento asintótico del error entre la posición actual del robot y la trayectoria. Para la estrategia de control se requiere, de manera precisa, la medición de las velocidades del robot en el plano. Con este fin se propone el diseño de un observador de estados. Se realizarán pruebas numéricas y experimentales, a fin de validar los resultados teóricos desarrollados.

1.4. Definición del problema

En esta tesis se abordan los siguientes problemas: modelado de un robot móvil diferencial con base en un modelo de segundo orden, seguimiento de trayectoria y estimación de estados por medio de un observador tipo Luenberger.

Este trabajo consiste en utilizar una estrategia de control, linealización entrada/salida, a fin que la posición del robot móvil converja asintóticamente a la trayectoria deseada. Esta

estrategia linealiza el modelo del robot vía retro-alimentación de estados, para ello requiere la inversa de la matriz de desacoplamiento cinemático. Con este fin se construye un modelo cinemático extendido de segundo orden. Como consecuencia del uso del modelo cinemático extendido, se requiere el conocimiento de las velocidades del robot en el plano, para lo cual se propone el diseño de un observador tipo Luenberger. El sistema control-observador se valida por medio de un software de cómputo numérico y experimentalmente.

1.5. Justificación

Esta tesis busca aportar en la solución al problema de seguimiento de trayectoria de un robot móvil. Para la cual se obtendrá la posición del robot por medio de un sistema de posicionamiento local. La velocidad de desplazamiento será estimada mediante observadores de estados. Los observadores y el diseño de los controles se construirán con base en un modelo cinemático extendido de segundo orden. Esto, buscando mejorar el desempeño en el seguimiento de trayectoria reportados en la literatura.

1.6. Objetivo

Diseñar una estrategia de control para el seguimiento de trayectorias de un robot móvil diferencial, a partir del modelo cinemático extendido del robot y la estimación de su velocidad por medio de observadores de estados.

1.6.1. Objetivos Específicos

- Construir el modelo cinemático extendido del robot móvil diferencial.
- Obtener condiciones necesarias para la observabilidad del modelo cinemático extendido del robot móvil.
- Construir un observador de estados que nos permita estimar las velocidades del robot móvil diferencial.
- Diseñar una estrategia de control basado en el observador de estados, para realizar el seguimiento de trayectorias del robot móvil diferencial.
- Validar numéricamente las estrategias de control diseñadas.
- Realizar pruebas preliminares de la plataforma experimental.
- Validar experimentalmente las estrategias de control diseñadas.

En el siguiente capítulo se presenta y desarrolla el modelo cinemático del robot móvil diferencial, así como los distintos modelos que pueden usarse para el desarrollo de esta tesis.

Capítulo 2

Modelo Cinemático

Uno de los principales objetivos de un robot móvil es la realización de movimientos específicos con precisión. La correcta ejecución de estos movimientos requiere del diseño de una estrategia de control y de la construcción de un modelo matemático. Este modelo representa la estructura física del robot como un conjunto de ecuaciones que describen las relaciones entrada/salida del robot. Las bases para tales modelos se obtienen mediante leyes físicas fundamentales que rigen dichos sistemas o por métodos experimentales. Existen distintos enfoques que se pueden seguir para la construcción de modelos matemáticos. El modelo cinemático, el cual es el utilizado en este trabajo, describe el movimiento del robot con respecto a un eje de referencia fijo, sin considerar las fuerzas y momentos que lo causan [2].

En la siguiente sección se desarrolla, en forma precisa, el concepto de modelo cinemático, así como algunos modelos cinemáticos con distintas características del robot móvil diferencial.

2.1. Modelo cinemático

En la robótica móvil, el modelo cinemático describe de forma analítica el movimiento espacial del robot en función del tiempo con respecto a un marco de referencia fijo. Este modelo debe equilibrar complejidad y exactitud. Para tal efecto se utilizan las siguiente hipótesis:

- El robot se mueve sobre una superficie plana.
- Los ejes de guiado son perpendiculares al suelo.
- Las ruedas se mueven con rodadura pura; es decir, el deslizamiento es despreciable en el periodo de control.
- El robot no tiene partes flexibles.
- Durante un periodo de tiempo suficientemente pequeño en el que se mantiene constante la consigna de dirección, el vehículo se moverá de un punto al siguiente a lo largo de un arco de circunferencia.
- El robot se comporta como un sólido rígido, de forma que si existen partes móviles (ruedas de dirección), éstas se situarán en la posición adecuada mediante el sistema de control [4].

Estas hipótesis consideran las restricciones físicas de la estructura del robot, así como su relación con el entorno en que se desplaza [2]. Sin embargo no considera las restricciones de movilidad debidas a la forma en que se desplazan sus ruedas. En la siguiente sección se ahonda en este tema.

2.1.1. Restricciones cinemáticas

Las restricciones cinemáticas son condiciones que limitan el movimiento de un robot móvil. Estas restricciones, debidas a diversas fuentes, se deben tomar en cuenta al desarrollar el modelo matemático de un robot. Consideremos q un conjunto de coordenadas generalizadas. Las restricciones pueden ser presentadas de forma general [2]

$$h_i(q) = 0, \quad i = 1, \dots, k < n. \quad (2.1)$$

Un sistema cuyas restricciones se representan como en (2.1), se considera un sistema holónomo. Estas restricciones son comúnmente generadas por las uniones mecánicas del sistema y se encuentran presentes en sistemas manipuladores, tales como brazos mecánicos, grúas, entre otro. Una característica importante de las restricciones holonómicas es que pueden ser obtenidas por medio de integración directa.

En robótica móvil, las restricciones cinemáticas se deben a los elementos que permiten el desplazamiento del robot. Por ejemplo, una rueda no puede desplazarse en dirección de su eje de giro, sin embargo, mediante determinados movimientos tiene acceso a todo el espacio de trabajo. Otro ejemplo es la longitud del robot, la cual puede imponer restricciones sobre su capacidad para realizar movimientos, tales como giros cerrados o maniobras en espacios estrechos. Estas restricciones son representadas por ecuaciones y desigualdades en las cuales se involucran coordenadas generalizadas y sus velocidades. Estas tienen la siguiente forma

$$a_i(q, \dot{q}) = 0, \quad i = 1, \dots, k < n. \quad (2.2)$$

El conjunto de restricciones cinemáticas (2.2), no puede ser obtenido por integración directa. A este tipo de restricciones se les denomina no holonómicas. Este tipo de restricción permite el acceso a todo su espacio de trabajo, restringiendo la forma de llegar a algunos puntos.

La descripción matemática de los movimientos instantáneos admisibles de un robot móvil, considerando sus restricciones, se conoce como modelo cinemático [2]. El desplazamiento de este tipo de robot esta directamente ligado a la configuración de sus ruedas, lo que se le denomina sistema de locomoción. En este trabajo se utiliza un robot móvil con sistema de locomoción diferencial. En la siguiente sección se presentan las principales características de un robot móvil diferencial.

2.2. Robot móvil diferencial

Uno de los diseños más comunes y versátiles es el robot móvil diferencial. Este tipo de robot destaca por su capacidad para moverse de manera ágil y eficiente en variedad de entornos, gracias a su diseño mecánico y sistema de control. A continuación, se presenta en detalle las características distintivas y las configuraciones posibles que puede adoptar un robot diferencial.

La estructura mecánica de un robot móvil diferencial es relativamente simple, consiste de un chasis que aloja las ruedas motorizadas, un sistema de control y de ser necesario una rueda libre para mejorar su estabilidad. Debido a su diseño, este robot puede realizar una amplia gama de movimientos, incluyendo giros sobre su propio eje, desplazamientos rectos y cambios rápidos de dirección. Es por este motivo, que en la construcción del modelo cinemático, se debe considerar la notable influencia del tipo de rueda utilizada, así como de la forma en que interactúan para lograr su locomoción. Por ejemplo, en la industria de la construcción y en el régimen militar se hace uso de robots móviles diferenciales con sistemas de locomoción por pistas de deslizamiento (orugas), debido a su gran estabilidad en diversos terrenos irregulares. Sin embargo, presenta algunas desventajas tales como: velocidad reducida y mayor gasto de energía debido al rozamiento entre el suelo y la pista de deslizamiento [13].

Existen configuraciones de robot móviles diferenciales que cuentan con 2 ruedas motorizadas, y más de una rueda de apoyo, como es el caso de un robot móvil diferencial de seis ruedas, dos convencionales motorizadas y 4 ruedas de castor como ruedas de apoyo [4].

Otro ejemplo, el utilizado en este trabajo, es el robot móvil en configuración diferencial. En este robot dos de sus ruedas convencionales son motorizadas en forma independiente, una tercera rueda, denominada rueda libre, se desempeña como rueda de apoyo.

En las siguientes secciones se construyen modelos cinemáticos del robot móvil diferencial (RMD), considerando diversos puntos de control dentro y fuera del robot, entre otras características.

2.3. Modelado del RMD con punto de control en el centro del eje virtual de las ruedas motorizadas.

Para la construcción de este modelo cinemático se considera un marco de referencia fijo (X, Y) en el plano horizontal y un punto (x, y) el cual determina la ubicación del robot en el plano. La orientación del RMD θ queda determinada por la diferencia angular entre el marco de referencia fijo (X, Y) y un marco de referencia inercial (x_r, y_r) centrado en este punto (x, y) . La abscisa y_r , del marco de referencia inercial, se encuentra en dirección del eje longitudinal del robot y x_r es ortogonal a la abscisa, como se observa en la Fig.(2.1).

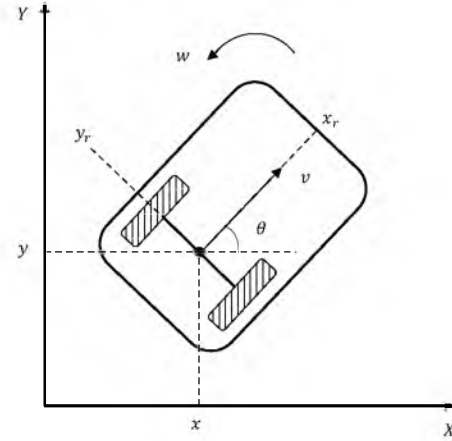


Figura 2.1: Robot móvil diferencial considerando el centro del eje de las ruedas motorizadas.

El modelo cinemático del RMD en forma matricial es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

donde v es la velocidad lineal y ω su velocidad angular del punto de control. El modelo cinemático (2.3) puede reescribirse de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

donde $A(\theta)$ se conoce como matriz de desacoplamiento cinemático. En (2.4) la matriz $A(\theta)$ es singular, es decir, $\det(A(\theta)) = 0$.

Para que el robot móvil realice el seguimiento de una trayectoria deseada (x_d, y_d) , es necesario una estrategia de control. La estrategia de control seleccionada en este trabajo está basada en una linealización entrada/salida (input/output linearization), [2]. Esta estrategia requiere que la matriz de desacoplamiento $A(\theta)$ sea invertible, por lo tanto no puede ser utilizada con el modelo (2.4). A continuación se construirán otros modelos cinemáticos del RMD, a fin de poder utilizar esta estrategia de control.

2.3.1. Modelo con un punto de control Frontal (PF)

En este modelo se considera el punto de control en la parte frontal del RMD. En la Fig.(2.2) se presenta un diagrama esquemático del RMD con el punto de control desplazado sobre el eje y_r .

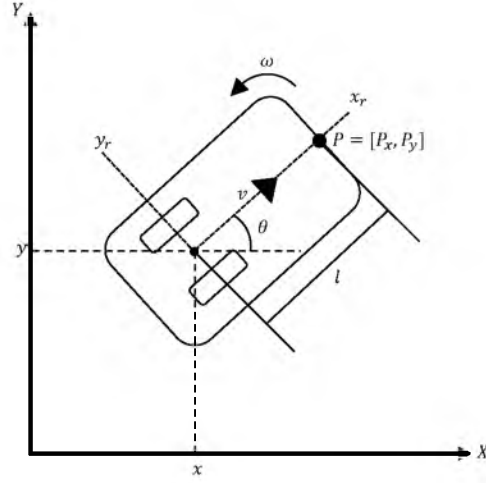


Figura 2.2: Diagrama de un robot móvil diferencial haciendo uso de un PF.

En la Fig.(2.2), $P = [P_x, P_y]^T$ es el punto de control del robot y l es la distancia de las ruedas motorizadas hacia el punto de control. Representando el punto P en función de las coordenadas del centro del eje virtual de las ruedas motorizadas, se tiene

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + l \cos \theta \\ y + l \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

derivando con respecto al tiempo (2.5), se obtiene la dinámica de las componentes en $[P_x, P_y]$.

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - l\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} + l\dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Sustituyendo \dot{x} y \dot{y} de (2.3) en (2.6) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta - l\omega \sin \theta \\ v \sin \theta + l\omega \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -l \sin \theta \\ \sin \theta & l \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Considerando la velocidad angular, $\dot{\theta}$, el modelo cinemático del punto frontal es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -l \sin \theta \\ \sin \theta & l \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

La matriz de desacoplamiento cinemático de (2.8) es

$$A(\theta, l) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -l \sin \theta \\ \sin \theta & l \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

esta matriz es no singular para todo valor de $l \neq 0$.

Los modelos cinemáticos descritos en (2.3) y (2.8) se encuentran expresados en ecuaciones diferenciales de primer orden. Otra aproximación distinta para el modelo del RMD considera ecuaciones diferenciales de segundo orden. A continuación se construye el modelo cinemático

extendido, el cual considera la aceleración del RMD para describir su movimiento.

2.3.2. Modelo Extendido (Modelo de Segundo Orden)

Para considerar la aceleración en el modelo cinemático extendido, se introduce una nueva variable de control, la aceleración lineal (longitudinal) denotada por u , como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (2.10)$$

En el modelo (2.10), las variables de control no afectan a \dot{x} y \dot{y} . Para poder relacionarlas, se obtiene la segunda derivada de las velocidades lineales, \dot{x} y \dot{y} en (2.10), [14], obteniendo la siguiente dinámica de segundo orden

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v} \cos \theta - v \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{v} \sin \theta + v \cos \theta \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

sustituyendo $\dot{\theta}$ y \dot{v} de (2.10) en (2.11), se llega a la siguiente igualdad

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \theta - v \sin \theta \omega \\ u \sin \theta + v \cos \theta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -v \sin \theta \\ \sin \theta & v \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

De (2.12) la matriz de desacoplamiento cinemático

$$A(\theta, v) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -v \sin \theta \\ \sin \theta & v \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

es no singular siempre y cuando $v \neq 0$.

A continuación se utilizan estas dos técnicas para construir el modelo cinemático extendido haciendo uso del punto frontal de control, considerando la aceleración lineal y angular como entradas de control.

Los modelos cinemáticos (2.7) y (2.12) describen el comportamiento del RMD y fueron construidos de forma tal, que se pueda utilizar la estrategia de control linealización entrada/-salida. Esta estrategia de control garantiza la convergencia del robot a la trayectoria deseada. Para tal efecto, es necesario establecer bajo que condiciones se logra esta convergencia. Estas condiciones se construyen con base a criterios de estabilidad. En el siguiente capítulo se describen las herramientas utilizadas para la estabilidad por medio del criterio de Routh-Hurwitz y la segunda teoría de Lyapunov.

Capítulo 3

Estabilidad

La estabilidad en un sistema crucial para el análisis y diseño de sistemas de control. Un comportamiento estable garantiza que la respuesta del sistema permanezcan dentro de límites aceptables de desempeño. Por lo tanto, se han desarrollado diferentes enfoques para establecer la estabilidad en los sistemas de control. Por ejemplo, para sistemas lineales, en el dominio de la frecuencia, se cuenta con el criterio de Routh. En cambio, los sistemas no lineales presentan un comportamiento dinámico mucho más complejo, debiéndose utilizar otras técnicas para el análisis de su estabilidad. Una de estas técnicas es la teoría de estabilidad de Liapunov.

A continuación, se desarrolla brevemente el criterio de estabilidad de Routh y el segundo método de estabilidad de Liapunov, utilizados en el diseño de la estrategia de control y del observador de estados.

3.1. Criterio de estabilidad de Routh

El criterio de Routh es una técnica algebraica utilizada para determinar la estabilidad de un sistema lineal analizando los coeficientes del polinomio característico de su función de transferencia. En la siguiente sección se presenta el criterio de Routh.

3.2. Criterio de Routh

Este criterio se basa en la construcción de una tabla, conocida como tabla de Routh, para determinar la estabilidad de un sistema lineal continuo e invariante en el tiempo [15]. Para la construcción de esta tabla se hace uso de la función de transferencia, la cual se define como el cociente de la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) del sistema [15]. El polinomio característico es el denominador de la función de transferencia y tiene la siguiente forma general

$$P(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n, \quad (3.1)$$

Las raíces del polinomio característico se denominan polos y determinan el comportamiento del sistema, donde a_0, a_1, \dots, a_n son coeficientes reales. Una condición necesaria y suficiente para que un sistema continuo lineal e invariante en el tiempo sea estable, es que el polinomio característico del sistema tenga polos con parte real negativa.

El criterio de Routh permite, por medio de la tabla de Routh, establecer el número de

raíces en el semi-plano complejo izquierdo, dado un polinomio característico. A continuación se presenta en forma breve la construcción de la tabla de Routh [16].

3.2.1. Construcción de la Tabla de Routh

La metodología mediante la cual se construye la tabla de Routh es la siguiente:

- Los dos primeros renglones se completan con los coeficientes del polinomio característico alternados. Es decir, el primer renglón contiene los coeficientes con subíndices pares, iniciando por a_0 , (a_0, a_2, a_4, \dots) . El segundo renglón contiene los coeficientes con subíndices impares (a_1, a_3, a_5, \dots) .

Tabla 3.1: Tabla de Routh

s^n	a_0	a_2	a_4	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

- Los elementos restantes se calculan usando la fórmula de Routh-Hurwitz [17]:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \dots$$

El número de cambio de signos en la primera columna de la tabla de Routh, determina el número de raíces del polinomio característico en el semi-plano complejo derecho. Si el número de cambios de signo es cero, todas las raíces están en el semi-plano complejo izquierdo, por lo tanto, el sistema es estable [18].

Se considera, que el criterio de Routh y el de Hurwitz son equivalentes porque la información contenida en los determinantes de Hurwitz está implícita en los coeficientes que aparecen en la tabla de Routh. Específicamente, los determinantes de Hurwitz corresponden a los primeros elementos de las filas de la tabla de Routh. Aunque los procedimientos son diferentes, Hurwitz utiliza determinantes y Routh utiliza una tabla, ambos métodos derivan la misma conclusión sobre la estabilidad del sistema. Por lo tanto, si un sistema cumple con el criterio de Routh, también cumple con el criterio de Hurwitz, y viceversa.

El criterio de Routh es una herramienta poderosa para determinar la estabilidad de sistemas lineales mediante el análisis de los coeficientes del polinomio característico. Su aplicación es fundamental en el diseño y análisis de sistemas de control. Sin embargo, este solo es aplicable a sistemas lineales, para sistemas no lineales o lineales variantes en el tiempo se hace uso de la teoría de Lyapunov.

3.3. Estabilidad en sentido de Lyapunov

La teoría de Lyapunov es una metodología que establece las condiciones suficientes, para que un punto de equilibrio de un sistema sea estable en el sentido de Lyapunov. Por lo tanto, es necesario introducir algunas definiciones teóricas antes de establecer el teorema de estabilidad de Lyapunov. Una de ellas, la cual es muy simple pero juega un papel de suma importancia en la teoría de Lyapunov, es la definición de equilibrio, [19][15][20][21].

Definición 1. Equilibrio.

Un vector constante $x_e \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ si

$$f(t, x_e) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

Como consecuencia inmediata, se tiene que si la condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ es justamente un equilibrio ($x(0) = x_e \in \mathbb{R}^n$), entonces se satisface

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e \quad \forall t \geq 0, \\ \dot{x}(t) &= 0 \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Definición 2. Estabilidad en sentido de Lyapunov.

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio estable en el sentido de Lyapunov si para cada número $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número $\lambda > 0$, tal que

$$\|x(0)\| < \lambda \implies \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0. \quad (3.3)$$

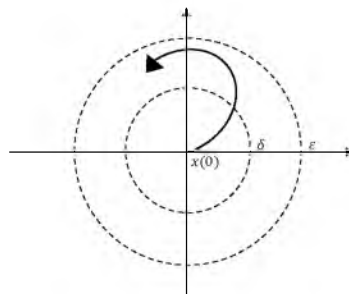


Figura 3.1: Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Definición 3. Estabilidad asintótica.

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable si

1. El origen es estable.
2. El origen es atractor, es decir, existe un número $\delta > 0$ tal que :

$$\|x(0)\| > \delta \implies \|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

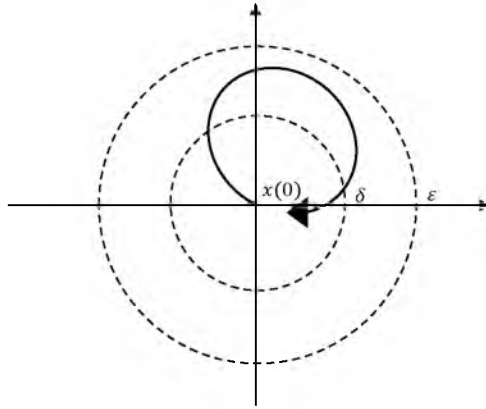


Figura 3.2: Estabilidad asintótica.

Definición 4. Estabilidad asintótica global.

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global si

1. El origen es estable.
2. El origen es atractor globalmente, es decir,

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

De la definición anterior se deduce que un equilibrio asintóticamente estable globalmente implica que dicho equilibrio es también asintóticamente estable, pero lo contrario es falso [21].

Existen bastantes más definiciones de estabilidad. Entre ellas, el concepto de estabilidad parcial, en el cual se hace referencia al caso en el que solamente interesa el comportamiento de algunos de los componentes del vector de estados.

Un equilibrio que no es estable en el sentido de Lyapunov se dice que es inestable. En la Fig.(3.3). Se observa que un equilibrio inestable no implica necesariamente que las trayectorias tiendan a infinito. Simplemente con que se alejen del punto de equilibrio es condición suficiente para ser considerado inestable [15][19].

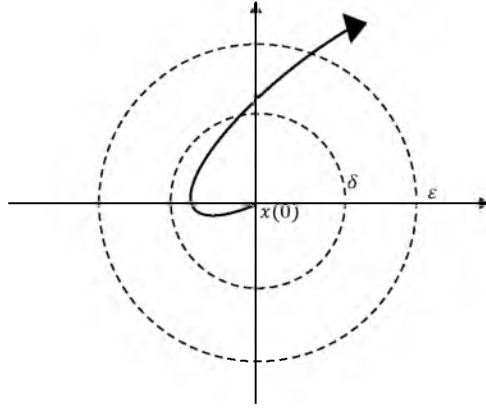


Figura 3.3: Inestabilidad en el sentido de Lyapunov.

Lyapunov presentó dos teorías a las cuales llamó teoría 1 y teoría 2. La primera teoría se compone de todos los procedimientos en los cuales se usa la forma explícita de la solución de las ecuaciones diferenciales para el análisis.

En cambio en la segunda teoría no se requiere de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Es decir, mediante la segunda teoría de Lyapunov, se determina la estabilidad de un sistema sin resolver las ecuaciones de estado. Aunque al ser aplicada esta teoría a sistemas no lineales, se requiere de mucha experiencia e ingenio.

Para un sistema dinámico descrito por:

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.4)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $f(x)$ es una función continua, el método de Lyapunov se basa en encontrar una función $V(x)$ que satisfaga ciertas condiciones para determinar la estabilidad del sistema.

Un punto de equilibrio $x(0)$ del sistema es asintóticamente estable si existe una función de Lyapunov $V(x)$ tal que:

- $V(x)$ es continua, positiva definida y tiene un mínimo en $x(0)$, es decir, $V(x) > 0$ para $x \neq x(0)$ y $V(x(0)) = 0$.
- La derivada de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema, $\dot{V}(x)$, es negativa definida o negativa semidefinida, es decir, $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$.

La condición de que $\dot{V}(x)$ sea negativa definida garantiza que $x(0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

La segunda teoría de Lyapunov proporciona una forma eficaz de analizar la estabilidad de sistemas dinámicos no lineales mediante la construcción de una función de Lyapunov adecuada. La correcta selección y verificación de esta función permite determinar la estabilidad del sistema sin resolver directamente las ecuaciones diferenciales del mismo. Sin embargo es un método que no garantiza el poder construir rápidamente una función candidata de Lyapunov, es una teoría muy poderosa, pero también una teoría donde la experiencia juega un papel crucial para su desarrollo. Esta teoría será utilizado en el capítulo 8, en donde se va a

desarrollar y analizar un control no lineal para el robot móvil diferencial.

En el capítulo siguiente se lleva a cabo el diseño del observador de estados, el cual va a estimar las velocidades en x y y del modelo cinemático de segundo orden, (modelo cinemático extendido), seleccionado para este trabajo de tesis. En este capítulo se definirá el concepto de observador de estados y de observabilidad, así como las condiciones suficientes para que un sistema sea observable.

Capítulo 4

Observadores de Estados

Un observador de estados es un subsistema que estima las variables de estado a partir de las mediciones de las variables de control y salida [15][22]. Existen distintos tipos de observadores, según los requerimientos del diseño de la estrategia de control. Cuando un observador estima todas las variables de estado, se denomina observador de orden completo. En ocasiones solo se requiere estimar los estados no medibles, es decir, menos de las n variables de estado. A este observador se le denomina observador de orden reducido [15].

En este trabajo se diseña un observador de orden completo. De los estados estimados por el observador, se utilizan las velocidades lineales \dot{x} y \dot{y} , debido a que son difícilmente medibles.

Para llevar a cabo el diseño del observador de estados, es necesario que el sistema sea de estado completo observable, lo cual se garantiza cuando la matriz de observabilidad tiene rango n . En las siguientes secciones se desarrollan los temas de observabilidad, observadores de estado y se presenta el diseño y construcción de un observador de estados para el modelo cinemático extendido del RMD.

4.1. Observabilidad

Uno de los problemas en la implementación de estrategias de control, en robots móviles, es la medición de su velocidad de desplazamiento. Para tal efecto se puede hacer uso de mediciones directas e indirectas. Por ejemplo, con respecto a las mediciones directas, se pueden utilizar sensores (por efecto Hall, ultrasónicos, basados en el efecto Doppler, entre otros) o codificadores ópticos, los cuales son los más comunes. Una desventaja importante de estos codificadores, es el hecho de que consideran el desplazamiento angular de las ruedas, para calcular su velocidad, y no la velocidad real del robot. Esto genera falsas lecturas por el deslizamiento de las ruedas. Los observadores de estados son una alternativa para estimar las velocidades del robot móvil (los estados). Para poder construir un observador de estados, es necesario que el modelo de la planta, representado en el espacio de estados, satisfaga la condición de observabilidad. La observabilidad es la capacidad de inferir el estado interno de un sistema basándose en sus entradas y salidas.

Considere el siguiente sistema sin excitación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{4.1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{4.2}$$

donde x es el vector de estado de dimensión n , y el vector de salida de dimensión m , A la matriz de $n \times n$ y C la matriz de $m \times n$.

Definición 1: El sistema (4.1), es completamente observable, si su estado inicial $x(0)$ puede determinarse a partir de la observación de $y(t)$ en un tiempo finito. El sistema, por lo tanto, es completamente observable, si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida [23][24][22].

Para establecer las condiciones suficientes y necesarias para que el modelo de la planta sea de estado completo observable, se debe satisfacer la siguiente proposición.

Proposición 1. El sistema descrito en (4.1), un sistema lineal e invariante en el tiempo, es de estado completo observable si su matriz de observabilidad O es de rango n .

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

La prueba de esta proposición se puede encontrar en [15].

La matriz (4.3) se conoce como matriz de observabilidad del sistema en tiempo continuo. A continuación se diseña un observador de orden completo para el RMD.

4.2. Observador de estados de Orden completo

Considere ahora un sistema no autónomo, es decir, con entradas. En la Fig.(4.1), se presenta un diagrama esquemático de interconexión de una planta con un observador de estados.

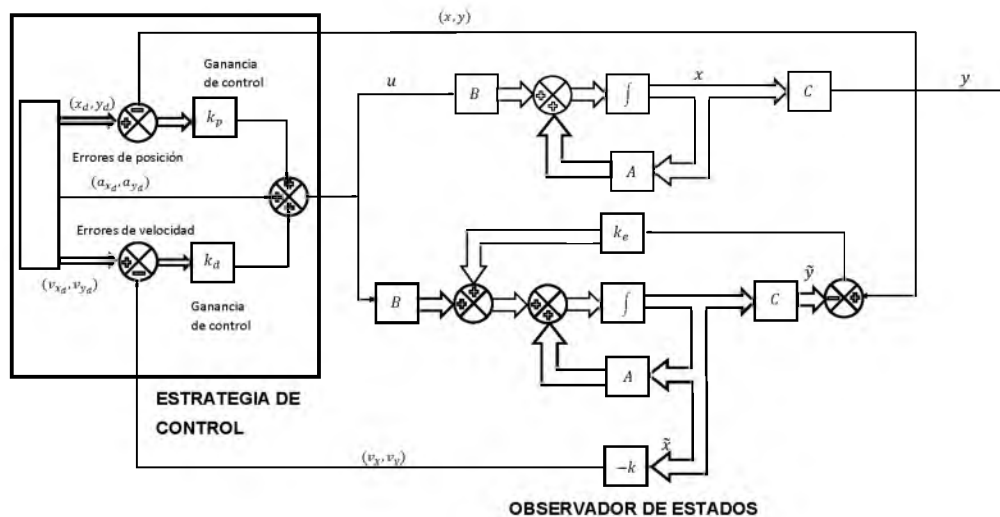


Figura 4.1: Diagrama a bloques de un sistema real y un observador de estados de orden completo.

El diseño de un observador de orden completo considera el siguiente sistema en variables de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.4)$$

$$y = Cx. \quad (4.5)$$

El estado x se aproxima por medio del modelo

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x}), \quad (4.6)$$

el cual representa al observador de estados, con u como su entrada y \tilde{x} su salida. En la ecuación del observador (4.6) se añade el término $K_e(y - C\tilde{x})$, el cual representa una corrección proporcional (K_e), de la diferencia entre la salida de la planta y y la salida estimada $\tilde{y} = C\tilde{x}$. Al estado aproximado por la ecuación (4.6), también se le denomina estado estimado. [15].

La siguiente proposición garantiza la convergencia de los estados estimados a los estados del sistema.

Proposición 2. Sea el error $\tilde{e} = x - \tilde{x}$ y la dinámica del error $\dot{\tilde{e}} = \dot{x} - \dot{\tilde{x}}$. Entonces los estados estimados del observador (4.6) convergen a los estados del sistema (4.4), si se selecciona una matriz K_e Hurwitz [15].

Prueba. Se define la dinámica del error como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}} &= \dot{x} - \dot{\tilde{x}}, \\ &= Ax + Bu - A\tilde{x} - Bu - K_e C(y - \tilde{x}), \\ &= (A - K_e C)\tilde{e}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

El comportamiento del error (4.7), con respecto al tiempo, está determinado por los valores propios de la matriz $(A - K_e C)$. Si se selecciona K_e , tal que los valores propios de $(A - K_e C)$ estén en el semi-plano complejo izquierdo, el error converge asintóticamente a cero, por lo tanto los estados del observador convergen a los estados del sistema.

Por lo tanto, el diseño del observador de estados se reduce a determinar una matriz de ganancias K_e , tal que la dinámica del error (4.7) sea asintóticamente estable. En la siguiente sección se realiza el diseño del observador de estados a el modelo cinemático extendido del RMD.

4.3. Diseño del observador de estados para el modelo cinemático extendido

Para realizar el diseño del observador de estados se considera la siguiente representación del sistema en variables de estados,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \ddot{x} &= u \cos \theta - v \sin \theta \omega \\ \ddot{y} &= u \sin \theta + v \cos \theta \omega \end{aligned} \quad (4.8)$$

El modelo de segundo orden se reescribe en ecuaciones diferenciales de primer orden y se consideran los estados no medibles las velocidades del robot. Las variables para el vector de

estados son

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x \\
 x_2 &= y \\
 x_3 &= \dot{x} \\
 x_4 &= \dot{y}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

por lo tanto, el modelo cinemático de segundo orden del RMD (4.8), considerando (4.9) es el siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= v \cos \theta \\
 \dot{x}_2 &= v \sin \theta \\
 \dot{x}_3 &= u \cos \theta - v \sin \theta \omega \\
 \dot{x}_4 &= u \sin \theta + v \cos \theta \omega.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Para diseñar el observador de estados se representa (4.10), en la forma general de los sistemas en variables de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos \theta & -v \sin \theta \\ \sin \theta & v \cos \theta \end{bmatrix} u \tag{4.11}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \tag{4.12}$$

y se construye la matriz de observabilidad

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

La matriz de observabilidad (4.13) es de rango 4, por lo tanto, el sistema (4.12) es de estado completamente observable, por lo, que se procede al diseño del observador de orden completo con base a la dinámica del error (4.7). Con este fin, para que el error converja asintóticamente a cero, la matriz $(A - K_e C)$ debe ser Hurwitz.

Sea K_e

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{e11} & K_{e12} \\ K_{e21} & K_{e22} \\ K_{e31} & K_{e32} \\ K_{e41} & K_{e42} \end{bmatrix}.$$

Entonces, el polinomio característico asociado a la matriz de coeficientes de la dinámica del error es el siguiente.

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4, \quad (4.14)$$

donde los valores de los coeficientes son

$$\begin{aligned} a_1 &= K_{e11} + K_{e22} \\ a_2 &= K_{e11}K_{e22} - K_{e12}K_{e21} + K_{e31} + K_{e42} \\ a_3 &= K_{e11}K_{e42} + K_{e22}K_{e31} - K_{e21}K_{e32} - K_{e21}K_{e41} \\ a_4 &= K_{e42}K_{e31} - K_{e32}K_{e41} \end{aligned}$$

Es condición suficiente y necesaria para garantizar la convergencia asintótica del error a cero, que la tabla de Routh no tenga cambio de signos en la primer columna. La tabla de Routh del polinomio característico (4.14) es la siguiente

Tabla 4.1: Tabla de Routh

λ^4	1	a_2	a_4
λ^3	a_1	a_3	0
λ^2	b_1	a_4	0
λ	b_2	0	0
λ^0	b_3	0	0

donde $b_1 = \frac{a_1a_2 - a_3}{a_1}$, $b_2 = \frac{b_1a_3 - a_1a_4}{b_1}$ y $b_3 = a_4$.

Los valores seleccionados de K_e , que garantizan que no haya cambio de signo en la primer columna de la tabla de Routh son los siguientes

Tabla 4.2: Matriz K_e y Tabla de Routh.

$K_e = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 20 \\ 30 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$	\rightarrow	λ^4	1	179	148
		λ^3	30	626	0
		λ^2	158.13	148	0
		λ	597.93	0	0
		λ^0	148	0	0

Considerando que los estados estimados convergen a los estados del sistema, se procede a construir la estrategia de control, la cual dará solución al seguimiento asintótico de una trayectoria pre-establecida. En el siguiente capítulo se construye la estrategia de control seleccionada, haciendo uso de los estados estimados por el observador.

Capítulo 5

Estrategia de control

En este capítulo se construye una estrategia de control para el seguimiento de trayectoria de un RMD. Una estrategia de control es un enfoque sistemático para regular el comportamiento de un sistema dinámico con el objetivo de alcanzar un desempeño deseado, minimizando el error entre el estado actual del sistema y una referencia deseada [25]. Existen distintas estrategias de control las cuales permiten dar solución al seguimiento de trayectoria. Algunas de estas estrategias son: Controles acotados [26], controles robustos [27], controles no lineales y lineales [4][2][28], así como estrategias de control aplicando métodos numéricos [29]. En este trabajo se utiliza una linealización entrada/salida (linealization input/output) [2]. En las siguientes secciones se desarrolla la estrategia de control linealización entrada/salida, con base en el modelo cinemático extendido controlando el punto medio del eje virtual de las ruedas motorizadas del robot. Adicionalmente se diseña una estrategia de control no lineal, haciendo uso de la teoría de estabilidad de Lyapunov presentada en secciones anteriores.

5.1. Desarrollo

La estrategia de control por linealización entrada/salida linealiza el modelo del robot vía retroalimentación de estados reduciendo el problema de seguimiento de trayectoria a un control lineal en términos del error [2].

Ésta estrategia de control está dada por

$$\begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = A^{-1}(v, \theta) \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde $A^{-1}(v, \theta)$ es la inversa de la matriz de desacoplamiento y el vector $(r_x, r_y)^T$ contiene las variables de control auxiliar. Sustituyendo la estrategia de control (5.1) en el sistema (2.13) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = A(v, \theta) \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = A(v, \theta) A^{-1}(v, \theta) \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Proposición 3. Considere el sistema de ecuaciones (2.12). La aplicación de la estrategia de control (5.1) garantiza la convergencia de los errores de seguimiento a cero.

Prueba. Se definen las componentes del error en x y y como sigue

$$\begin{aligned} e_1 &= x - x_d = x_1 - x_d, \\ e_2 &= y - y_d = x_2 - y_d. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Por lo tanto, las señales auxiliares de control se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} r_x &= -k_p e_1 - k_d \dot{e}_1 + \ddot{x}_d, \\ r_y &= -k_p e_2 - k_d \dot{e}_2 + \ddot{y}_d, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $\dot{e}_i = \frac{d}{dt} e_i$, para $i = 1, 2$.

Sustituyendo las señales de control (5.4) en el modelo matemático de segundo orden (5.2) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_p e_1 - k_d \dot{e}_1 + \ddot{x}_d \\ -k_p e_2 - k_d \dot{e}_2 + \ddot{y}_d \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

El sistema de ecuaciones (5.5) está desacoplado, es decir, no depende una del otro, por lo tanto, se puede analizar por separado como ecuaciones diferenciales de segundo orden.

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + k_d \dot{e}_1 + k_p e_1 &= 0, \\ \ddot{e}_2 + k_d \dot{e}_2 + k_p e_2 &= 0, \end{aligned}$$

donde $\ddot{e}_i = \frac{d^2}{dt^2} e_i$, para $i = 1, 2$.

La selección de los valores de k_p y k_d determinan la forma en que el error decae a cero. El criterio de Routh garantiza que, cuando los valores de k_p y k_d son positivos, los errores de seguimiento convergen a cero.

5.2. Estrategia de control más observador de estados

Considere el sistema (4.12) utilizando la estrategia de control (5.1). Dado que la velocidad en x, y del robot, las componentes (x_3, x_4) , no son fácilmente medibles, se construye un observador que estime estos estados. El sistema robot-control-observador, con \tilde{x}_3 y \tilde{x}_4 estimadas, es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Sustituyendo los valores de r_x y r_y definidos en (5.4), considerando la velocidad lineal en x y la velocidad lineal en y observadas $(\tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$, se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_p(x_1 - x_d) - k_d(\tilde{x}_3 - \dot{x}_d) + \ddot{x}_d \\ -k_p(x_2 - y_d) - k_d(\tilde{x}_4 - \dot{y}_d) + \ddot{y}_d \end{bmatrix}.$$

Sea e_i , con $i = 1, 2, 3, 4$, el error entre el estado del sistema (4.12) y la trayectoria deseada en cada uno de sus componentes, definido en (5.3), y definase \hat{e} como en la proposición 2. Agrupando términos diferenciales de segundo orden se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 + \dot{x}_d \\ \dot{e}_2 + \dot{y}_d \\ \dot{\tilde{x}}_3 - \ddot{x}_d \\ \dot{\tilde{x}}_4 - \ddot{y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_p e_1 - k_d \hat{e}_3 \\ -k_p e_2 - k_d \hat{e}_4 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Por lo tanto, la dinámica del error con velocidades observadas es la siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{\hat{e}}_3 \\ \dot{\hat{e}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_p & 0 & -k_d & 0 \\ 0 & -k_p & 0 & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \hat{e}_3 \\ \hat{e}_4 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Proposición 4. Sea (5.8) la dinámica del error entre la trayectoria deseada, los estados del sistema y los estimados, entonces el error converge a cero siempre y cuando los valores de k_p y k_d sean positivos. Más aún, si se selecciona $k_d = \frac{2\sqrt{k_p}}{\sqrt{2}}$ el error tendrá una rápida convergencia con muy poco sobre impulso.

Prueba. Los valores propios de (5.8) son $(s(s + k_d))^2 + 2k_p s(s + k_d) + k_p^2 = (s(s + k_d) + k_p)^2$, por lo tanto, si se seleccionan los valores k_p y k_d positivos, el polinomio es Hurwitz. Adicionalmente, si se selecciona $k_d = 1.4\sqrt{k_p}$ el polinomio característico tendrá un factor de amortiguamiento de 0.707.

Observación: En [15] se demuestra que los polos de lazo cerrado del sistema control-observador consisten en los polos debidos al diseño del control más los polos debidos al diseño del observador. En la proposición 2 se garantiza la convergencia de error de observación, en la proposición 3 se garantiza el seguimiento de trayectoria con error igual a cero, para k_p y k_d mayor que cero, con lo que se cumple este criterio. Adicionalmente la proposición 4 establece condiciones suficientes en forma reducida de este criterio, para el sistema controlador-observador, [30].

Con fines comparativos, se desarrolló una técnica de control no lineal que utiliza el modelo cinemático (2.3) del RMD, controlando el punto medio del eje virtual de las ruedas motorizadas, el cual se desarrolla a continuación.

5.2.1. Control no lineal

El control no lineal aborda sistemas donde las ecuaciones no son lineales o donde la dinámica varía de manera significativa con el estado del sistema. En esta sección se introduce conceptos básicos del control no lineal, métodos de análisis y diseño.

5.2.2. Modelado de Sistemas no Lineales

Los sistemas no lineales pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) no lineales

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (5.9)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada. La función $f(x, u)$ representa la dinámica del sistema, y puede incluir términos no lineales en x y u .

5.2.3. Diseño de un control no lineal

Considerando el modelo no lineal del RMD

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

y una trayectoria deseada

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d \cos \theta_d \\ v_d \sin \theta_d \\ \omega_d \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Para el problema seleccionado de diseño de una estrategia de control, se hace uso de la siguiente ecuación dinámica del error [4],

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Obteniendo la dinámica de los errores (ver el desarrollo en el Apéndice 2),

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \omega + v_d \cos e_3 - v \\ \dot{e}_2 &= -e_1 \omega + v_d \sin e_3 \\ \dot{e}_3 &= \omega_d - \omega \end{aligned} \quad (5.13)$$

de forma matricial se obtiene

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin e_3 \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Linealizando el sistema (5.14) alrededor de $e = 0$ y $u = 0$, considerando $\sin e_3 = e_3$, se tiene

el siguiente sistema lineal variante en el tiempo

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

si consideramos que $v_d \neq 0$ y $\omega_d \neq 0$, el sistema es controlable.

Se propone la siguiente ley de control

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1(v_d, \omega_d)e_1, \\ u_2 &= -k_2(v_d) \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 - k_3(v_d, \omega_d)e_3. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Sustituyendo la estrategia de control (5.16) en el sistema (5.15) se obtiene el siguiente sistema autónomo

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -k_1(v_d, \omega_d) & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & -k_2(v_d) \frac{\sin e_3}{e_3} & v_d - (-k_3(v_d, \omega_d)) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e \quad (5.17)$$

donde el origen es un punto de equilibrio de (5.17). Se considera que k_2 es una constante positiva y k_1, k_3 son funciones continuas estrictamente positivas.

La teoría de Lyapunov establece que, dado el sistema (5.17), si existe una función escalar $V(e, t)$, con primeras derivadas parciales continuas, que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $V(e, t)$ es definida positiva,
2. $\dot{V}(e, t)$ es definida negativa,
3. $V(e, t) \rightarrow \infty$ cuando la norma de $\|e\| \rightarrow \infty$.

Entonces el estado de equilibrio $e = 0$ es asintóticamente estable en forma total [15]. La función $V(e, t)$ que satisface estas condiciones se le llama función de Lyapunov.

Seleccionamos la función de Lyapunov como

$$V(e, t) = \frac{k_2}{2} (e_1^2 + e_2^2) + \frac{e_3^2}{2}. \quad (5.18)$$

La derivada con respecto a las trayectorias de (5.17) es la siguiente

$$\dot{V}(e, t) = -k_1(v_d, \omega_d) k_2 e_1^2 - k_3(v_d, \omega_d) e_3^2. \quad (5.19)$$

Dado que (5.18) es definida positiva, $V(e, t) \rightarrow \infty$ cuando $\|e\| \rightarrow \infty$ y además $\dot{V}(e, t)$ es definida negativa, entonces el punto de equilibrio $e = 0$ es asintóticamente estable, es decir, el $e \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En el capítulo siguiente se presentan las simulaciones numéricas utilizando la estrategia de control diseñada, el observador de estados, aplicados al modelo de segundo orden del robot móvil diferencial. Adicionalmente se presenta una simulación del diseño de un control no lineal implementado en el modelo cinemático de primer orden del robot móvil diferencial.

Capítulo 6

Resultados Teóricos: Simulación numérica

En este capítulo se presentan gráficamente los resultados numéricos obtenidos de la aplicación de la ley de control, linealización entrada/salida, en el modelo de segundo orden, haciendo uso de los estados estimados por el observador, en el software Matlab Simulink. Para el seguimiento se utilizaron tres trayectorias, una Lemniscata de Bernoulli, un Círculo y un Cuadrifolio.

A continuación se presentan las simulaciones numéricas.

6.1. Trayectoria de una Lemniscata de Bernoulli

Las ecuaciones paramétricas de la Lemniscata de Bernoulli, utilizada como trayectoria deseada, son las siguientes

$$\begin{aligned}x &= \cos(bt), \\y &= \sen(ct),\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde $b = \frac{2\pi}{T}$, $c = \frac{4\pi}{T}$ y el periodo $T = 120$. En esta primer simulación se considera como condición inicial $[0.5, 0]$.

Las entradas auxiliares de control (5.4), en la estrategia de linealización entrada/salida, utilizan las ganancias $k_d = 4$ y $k_p = 4$, por lo que se obtiene una respuesta críticamente amortiguada.



Figura 6.1: Seguimiento de trayectoria.

En la Fig.(6.1), en línea continua roja se observa la trayectoria deseada, mientras que en línea azul punteada se presenta el comportamiento del sistema control-observador aplicado al modelo de segundo orden. La condición inicial del modelo del robot se coloca fuera de la trayectoria, y a pesar que es un resultado local, se alcanza la trayectoria deseada antes del primer cambio de dirección de la Lemniscata como se puede ver en la Fig.(6.2) del error de seguimiento.

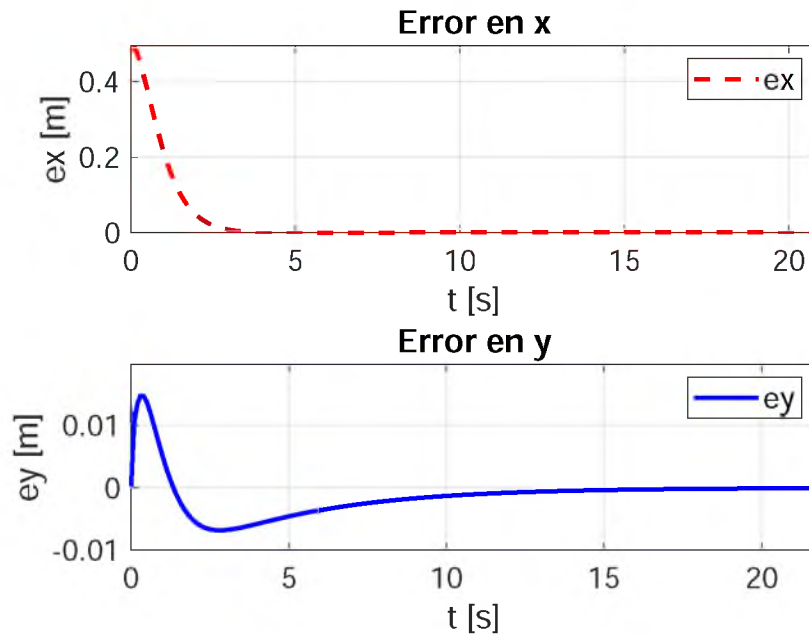


Figura 6.2: Errores de seguimiento.

La trayectoria deseada parte de la posición inicial $(1, 0)$, mientras que el modelo del robot en $(0.5, 0)$. Conforme avanza el tiempo de ejecución, el error en x decrece, debido a que la

trayectoria deseada y la del robot se acercan. El error en x es cero aproximadamente en 3 segundos. Sin embargo, para la componente en y , la trayectoria deseada se adelanta, por lo que el error inicialmente crece, para posteriormente decrecer generando un sobre-impulso negativo, lo que provoca que el error se aproxime suavemente a 0 como se ve en la Fig.(6.2).

Las velocidades estimadas, por el observador de estados, así como los errores de observación se muestran en la Fig.(6.3.a) y la Fig.(6.3.b) respectivamente.

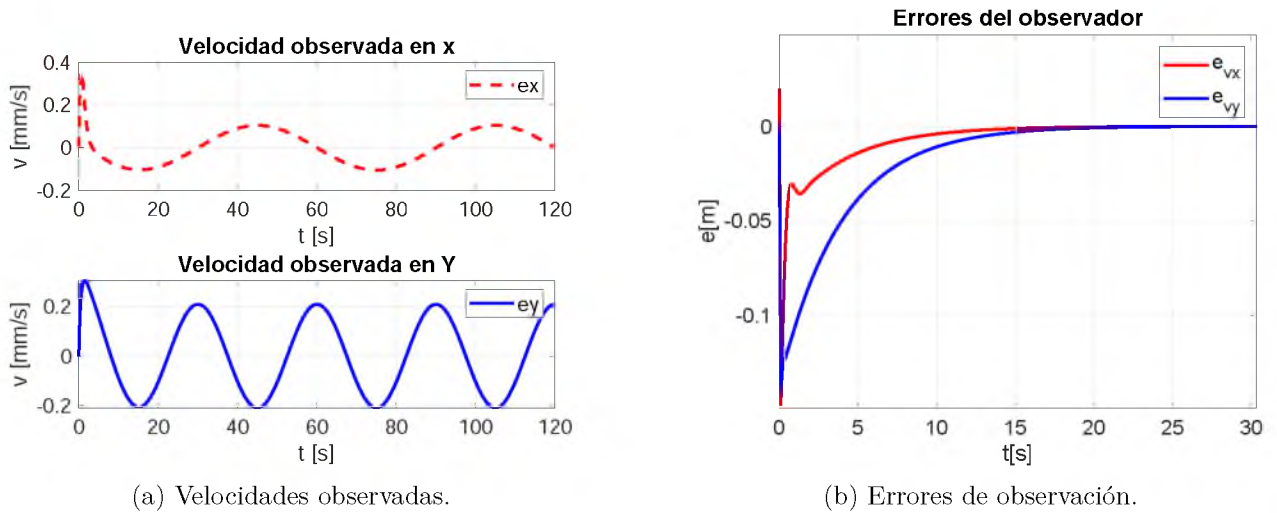


Figura 6.3: Observador de estados Trayectoria Lemniscata.

Un segundo ejemplo, utilizando las mismas ecuaciones paramétricas (6.1), se presenta a continuación. A fin de reducir el tiempo en que los errores en las componentes x y y decaen a cero, se modifican las ganancias de control, de tal modo que la respuesta sea sub-amortiguada. La trayectoria del robot se aproxima a la trayectoria deseada de una manera más rápida sin presentar sobre impulso. El resultado de esta segunda prueba puede verse en la Fig.(6.4)

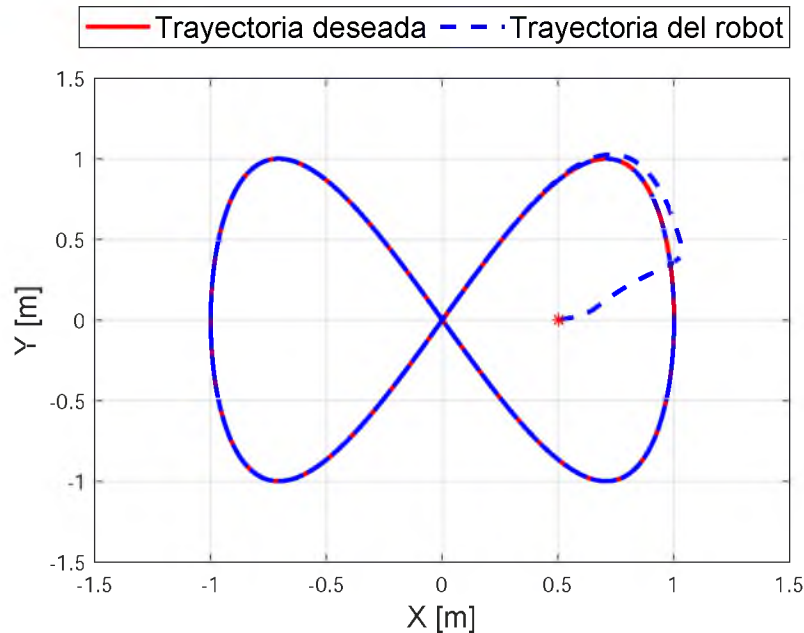


Figura 6.4: Seguimiento con control sub-amortiguado.

Como se puede observar en la Fig.(6.5), se disminuyó el tiempo de convergencia del error a cero en ambas componentes.

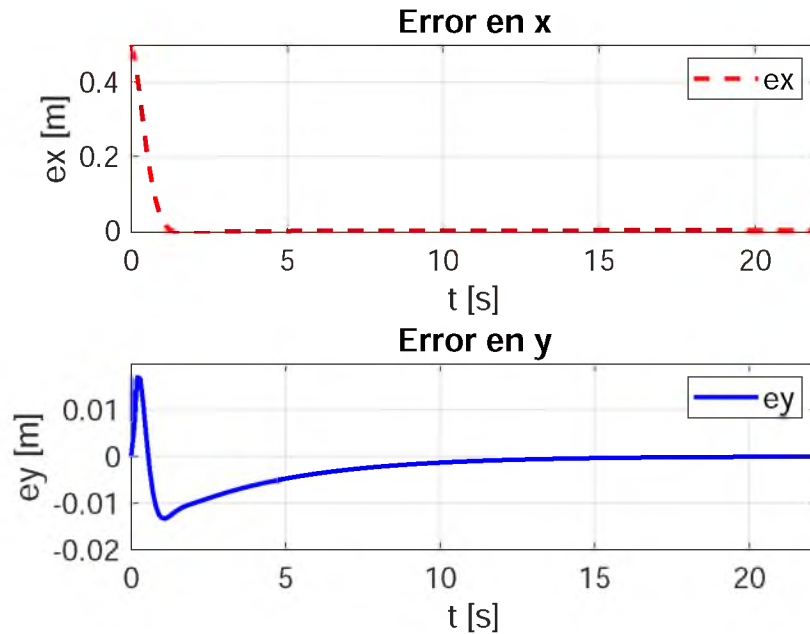
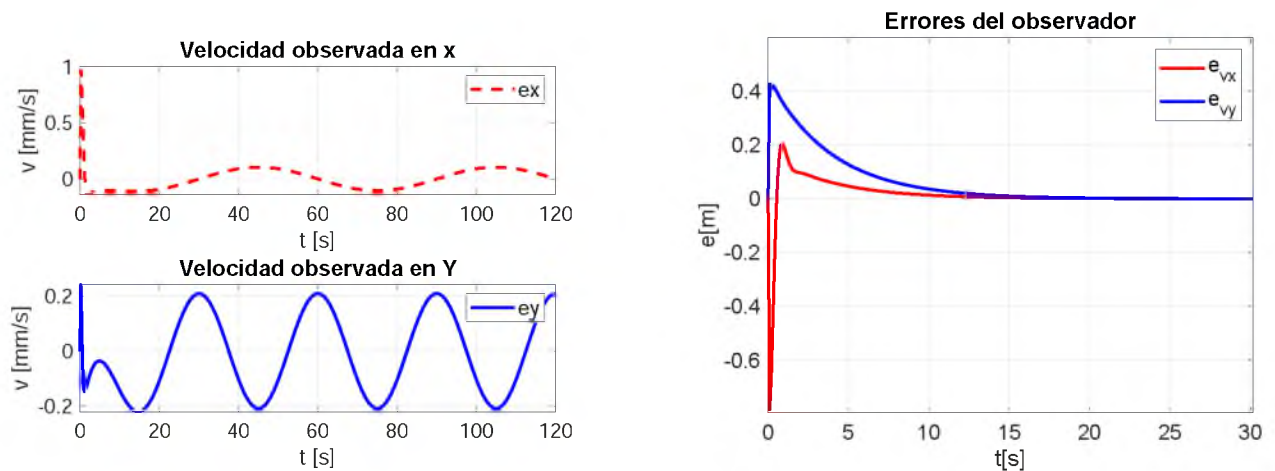


Figura 6.5: Errores de seguimiento con control sub-amortiguado.

Las velocidades estimadas y los errores de observación se visualizan en las Fig.(6.6.a) y Fig.(6.6.b) respectivamente. Se puede observar que el tiempo de convergencia del error de estimación disminuyó con respecto al de la simulación anterior.



(a) Velocidades observadas.

(b) Errores de observación.

Figura 6.6: Observador de estados Trayectoria Lemniscata.

6.1.1. Trayectoria de un Círculo

La segunda trayectoria utilizada fue un Círculo, con las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}x &= 0.6 \cos(bt), \\y &= 0.6 \text{sen}(ct).\end{aligned}\tag{6.2}$$

Con $c = b = \frac{2\pi}{T}$, $T = 120$. Las ganancias de control seleccionadas para esta simulación son $k_d = 4$ y $k_p = 4$. A continuación se muestran los resultados obtenidos de las pruebas realizadas con esta trayectoria.

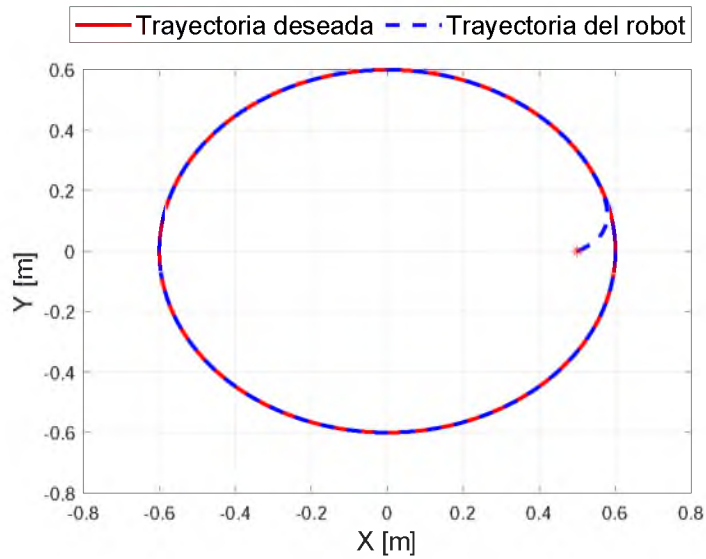


Figura 6.7: Trayectoria Circular.

La Fig.(6.7), muestra el seguimiento de trayectoria por el sistema modelo-control-observador.

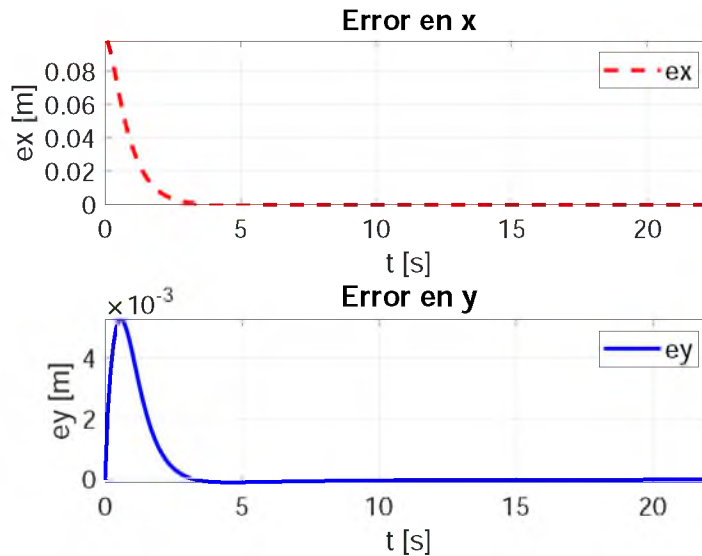
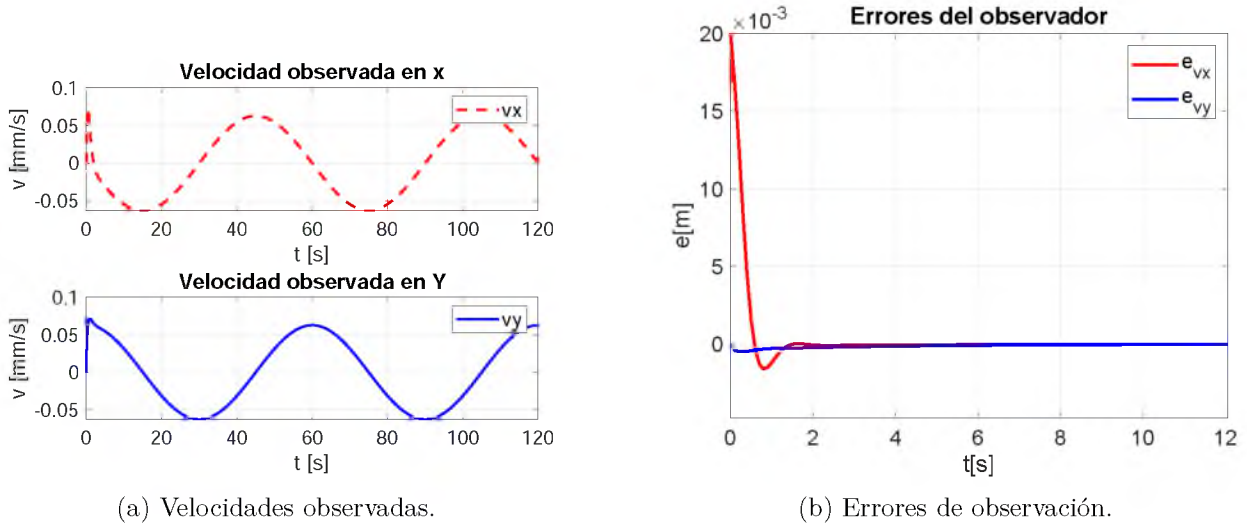


Figura 6.8: Errores de seguimiento.

Los errores de seguimiento en la componente en x decrece a cero, mientras que el error en la componente en y crece hasta un punto máximo, para posteriormente decrecer y converger rápidamente a cero. Como se presenta en la Fig.(6.8).

Como se puede ver en la Fig.(6.9.b), el error de observación es menor con respecto a los obtenidos con la Lemniscata de Bernoulli, esto debido a que la trayectoria es suave, es decir, no presenta cambios bruscos en su dirección y su velocidad angular es constante.



A continuación se seleccionan nuevas ganancias de control, $k_p = 25$ y $k_d = 10$, para las mismas ecuaciones paramétricas del Círculo. Como se puede apreciar en la Fig.(6.11), el error de seguimiento converge a cero rápidamente con un sobre impulso. El resultado obtenido de esta segunda prueba se muestra a continuación.

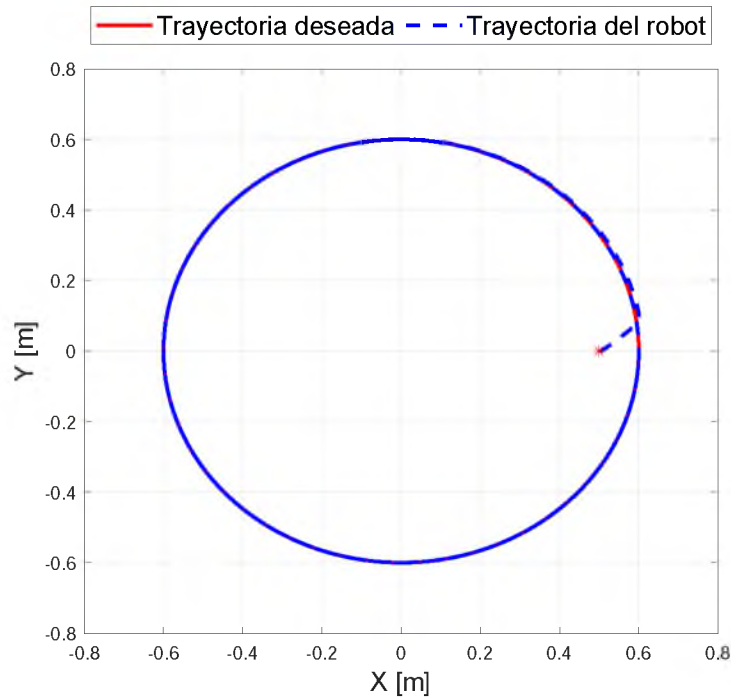


Figura 6.10: Trayectoria Circular segunda prueba.

En la Fig.(6.10) se presenta el seguimiento de trayectoria del RMD. Se observa que el comportamiento del sistema modelo-control-observador difiere de la prueba realizada anteriormente debido al cambio en las ganancias del control, pasando de una respuesta críticamente amortiguado a uno sub amortiguado.

Los errores de seguimiento de trayectoria se muestran en la figura siguiente

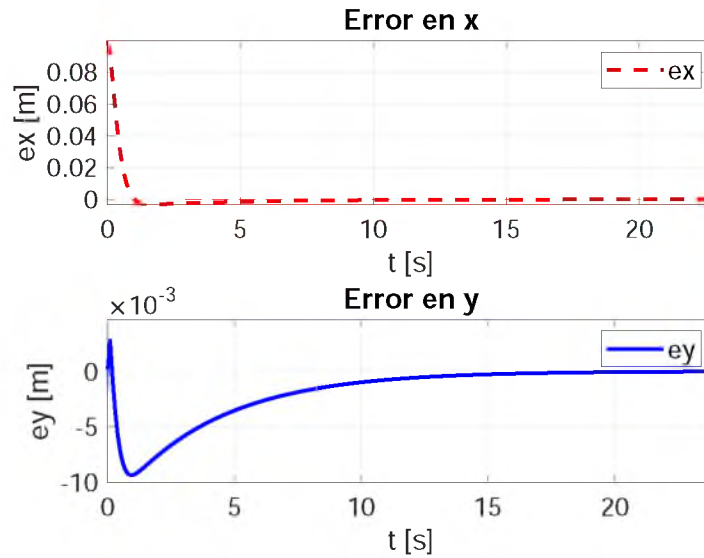
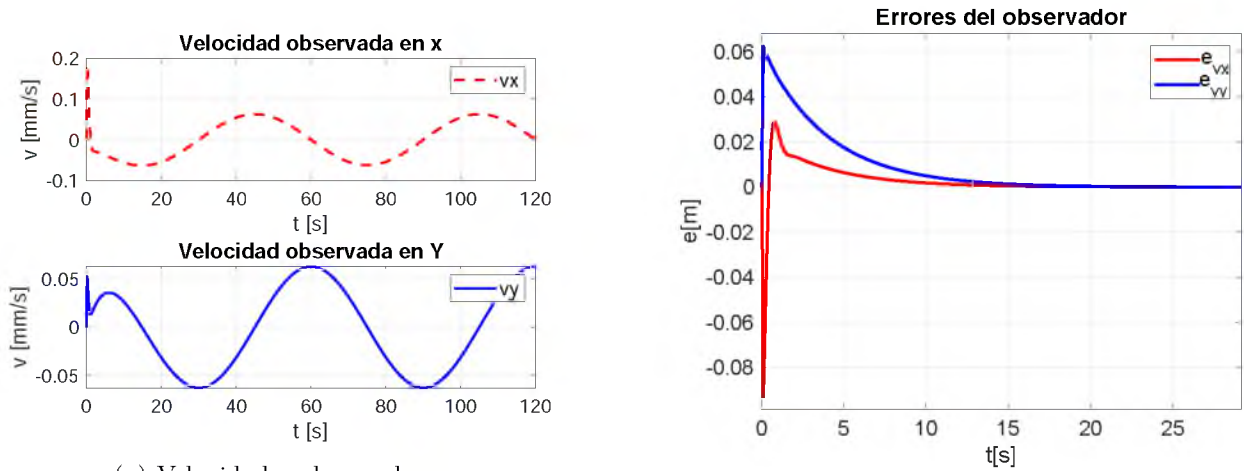


Figura 6.11: Errores de seguimiento.

En la Fig(6.11) se observa que el error rápidamente decae a cero, debido a la convergencia del sistema modelo-control-observador a la trayectoria deseada.

Los estados estimados y los errores de observación son mostrados en las figuras (6.12.a) y (6.12.b).



(a) Velocidades observadas.

(b) Errores de observación.

Figura 6.12: Observador de estados Trayectoria Circular.

6.2. Trayectoria de un Cuadrifolio.

Se realizó una tercera prueba, un Cuadrifolio. Los resultados obtenidos de esta prueba se muestran en la Fig.(6.13).

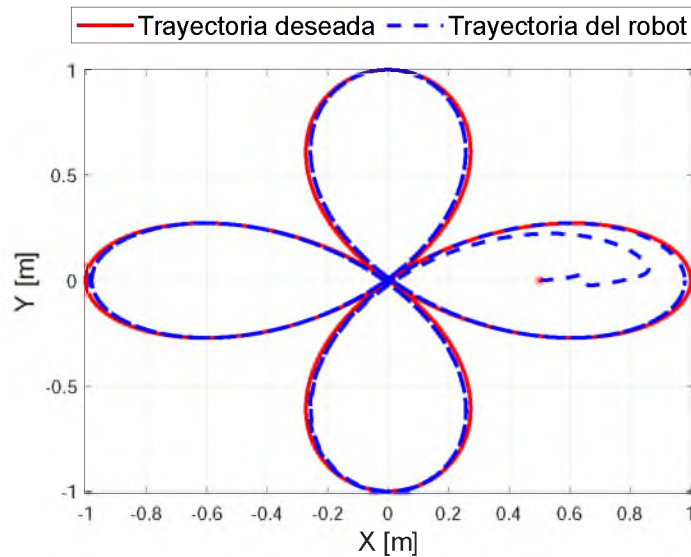


Figura 6.13: Trayectoria Cuadrifolio.

Se debe considerar que la trayectoria a seguir es una trayectoria con una mayor complejidad, teóricamente se podría considerar que se está realizando una doble Lemniscata de Bernoulli.

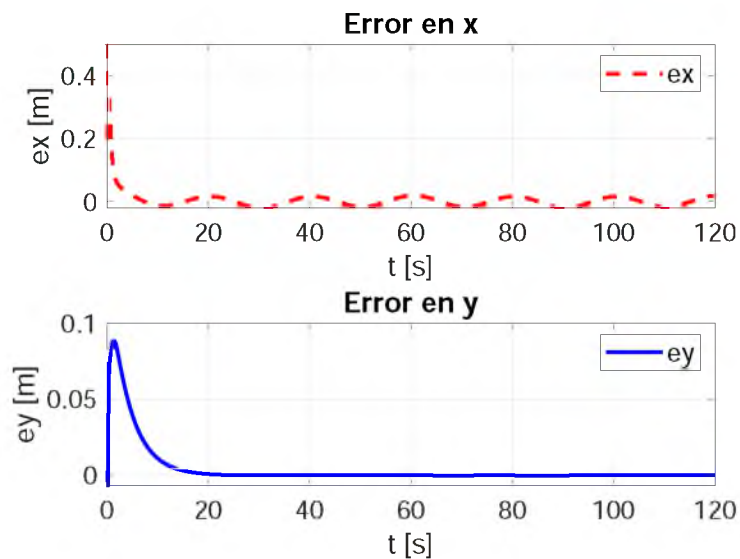


Figura 6.14: Errores de seguimiento Cuadrifolio.

Para esta tercera prueba se utilizaron las siguientes ganancias de control, $k_p = 50$ y $k_d = 30$, debido a que el sistema modelo-control-observador necesita de mayor impulso para llegar a cada pétalo del Cuadrifolio, sin embargo los errores de seguimiento en x oscilan en una vecindad del cero, como se presenta en la Fig.(6.14).

Los errores de observación, así como las velocidades estimadas por el observador de estados se muestran en las Figuras (6.15.b) y (6.15.a)

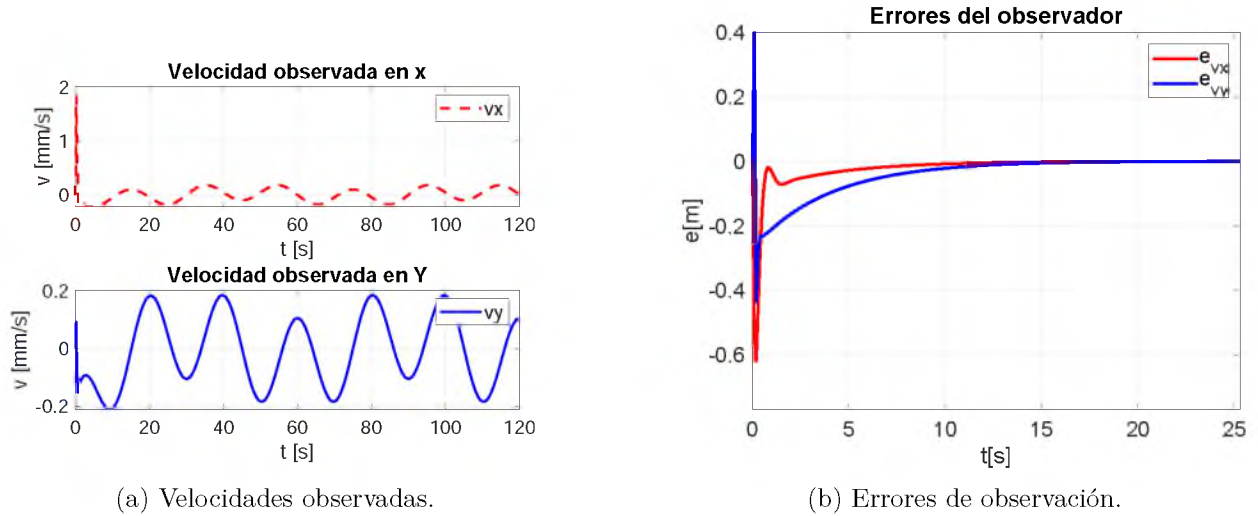


Figura 6.15: Velocidades estimadas y errores de estimación.

Las pruebas numéricas validan los resultados teóricos. Como se pudo observar los estados estimados de las variables requeridas con las ganancias de control seleccionadas permiten realizar el seguimiento de trayectoria de forma aceptable. A continuación se presentan las pruebas numéricas de una estrategia de control no lineal.

6.3. Estrategia de control no lineal

Para estas pruebas se consideraron dos trayectorias, un Círculo y una Lemniscata de Bernoulli. Los parámetros usados para estas pruebas son:

- Para la trayectoria circular un tiempo de 40 segundos, ganancias de control $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ y $k_3 = 4$, [4], y un radio de 50 cm.
- Para la trayectoria Lemniscata de Bernoulli se usó un tiempo de 80 segundos, ganancias de control $k_1 = 10$, $k_2 = 20$ y $k_3 = 40$ y una trayectoria de 1 m.

Los resultados obtenidos de la trayectoria circular se muestran a continuación.



Figura 6.16: Seguimiento de trayectoria.

En la Fig.(6.16), se muestra la trayectoria que realiza el sistema modelo-control con respecto a la trayectoria deseada. En el tiempo seleccionado se repite dos veces el seguimiento de trayectoria sin alcanzarla, esto se puede observar en la gráfica de los errores en x y y , Fig.(6.17)

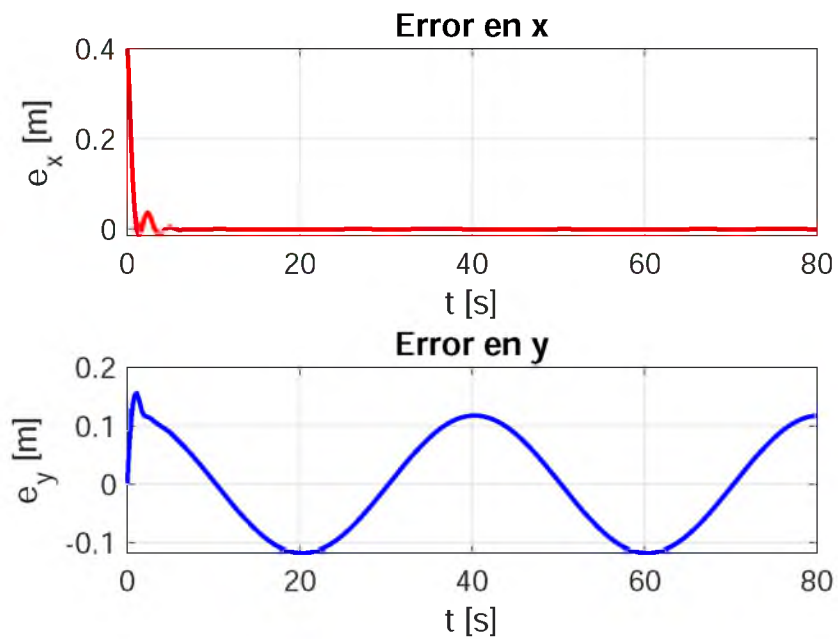


Figura 6.17: Errores de seguimiento.

Las entradas de control para el seguimiento de trayectorias, v y ω , se muestran en la Fig.(6.18).

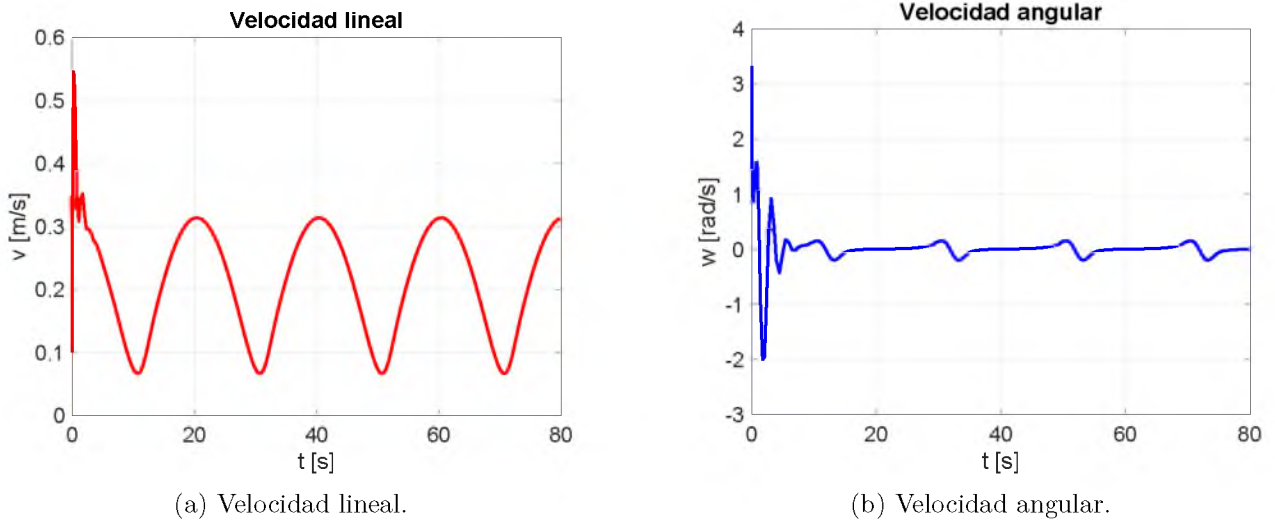


Figura 6.18: Entradas de control.

Una segunda prueba realizada con este control no lineal, utiliza como trayectoria deseada una Lemniscata de Bernoulli. El seguimiento de trayectoria del modelo-control se presenta en la Fig.(6.19).

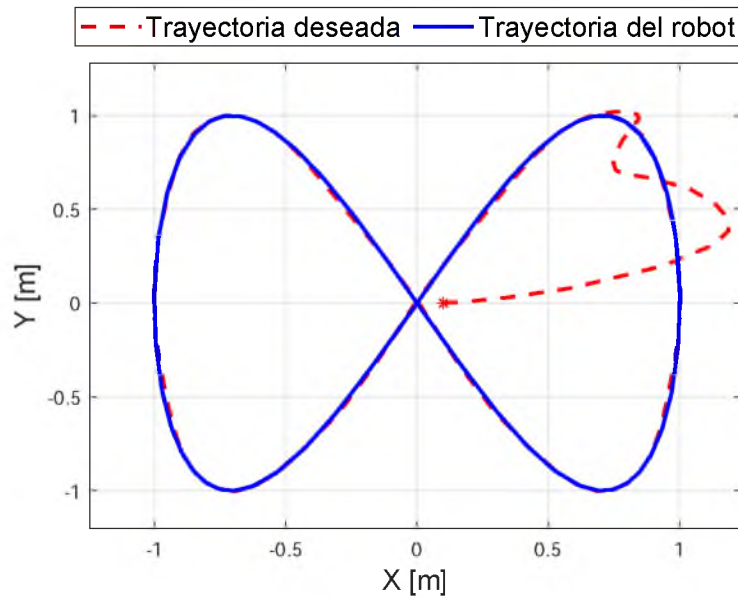


Figura 6.19: Seguimiento de trayectoria.

Los errores de seguimiento de esta trayectoria no son mayores de 3 cm, sin embargo, requiere ganancias de control más grandes que las utilizadas en la estrategia linealización entrada/salida. Aun así, los errores de seguimiento no decaen a cero, Fig.(6.20).

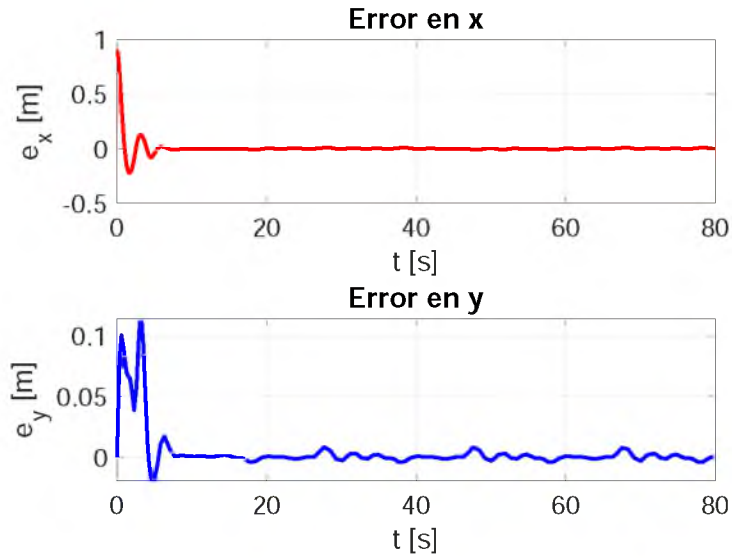
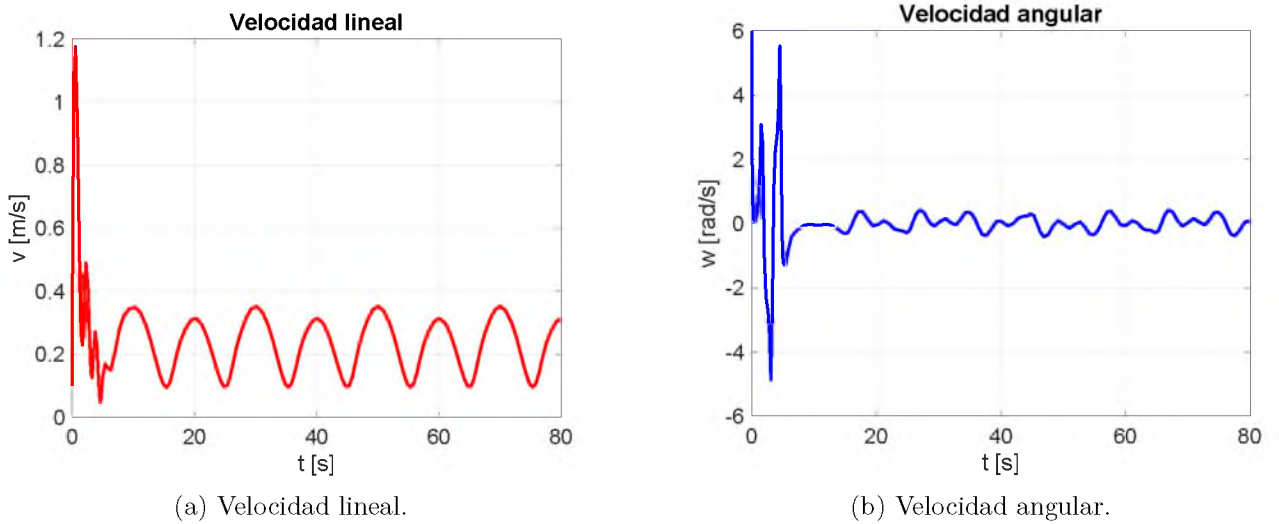


Figura 6.20: Errores de seguimiento.

Las entradas de control utilizadas son presentadas a continuación



(a) Velocidad lineal.

(b) Velocidad angular.

Figura 6.21: Entradas de control.

Las pruebas presentadas en este capítulo validan numéricamente los resultados teóricos desarrollados. En el siguiente capítulo se presenta la plataforma experimental, así como el resultado del seguimiento de trayectorias con el robot móvil diferencial.

Capítulo 7

Resultados experimentales

En este capítulo se realiza la implementación de las estrategia de control seleccionadas en un robot móvil diferencial. Utilizando una plataforma de adquisición de datos, se realiza el seguimiento de trayectoria, haciendo uso de las mismas trayectorias que en las pruebas numéricas. A continuación se detalla la plataforma experimental.

7.1. Plataforma Experimental

La plataforma experimental está conformada por los siguientes elementos:

- Un robot LEGO® MINDSTROM® EV3 construido en configuración de un RMD. El robot es controlado mediante Micro-Python, cuenta con dos ruedas motorizadas y una rueda de soporte o rueda libre, presenta una interfaz de comunicación vía wifi haciendo uso de sockets.
- La orientación y posición del RMD es obtenida por medio de un sistema SLP, el cual tiene un campo de visión de 4 x 4 metros aproximadamente. Este sistema consiste en 7 cámaras infrarrojas Optitrack y del software Motive.
- Una computadora para el procesamiento de la estrategia de control, la cual es programada en lenguaje de programación Python.

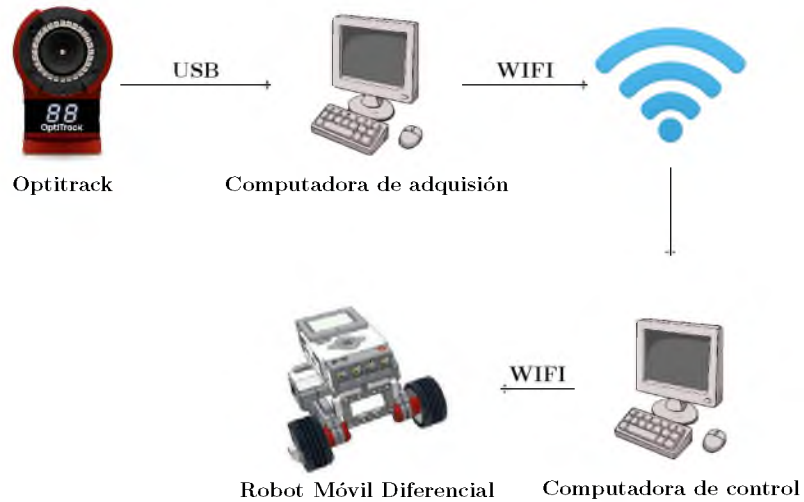


Figura 7.1: Plataforma Experimental.

7.2. Trayectoria Lemniscata de Bernoulli

El primer experimento ocupa la siguiente Lemniscata de Bernoulli $x = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $y = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$, como trayectoria deseada, el robot se posiciona en las condiciones iniciales $(0.595, 0.0453)$. El control linealización entrada/salida utiliza las siguientes ganancias de control $k_p = 4$, $k_d = 4$. En la siguiente figura se presenta la trayectoria deseada en línea continua azul y la trayectoria realizada por el robot en línea punteada roja.

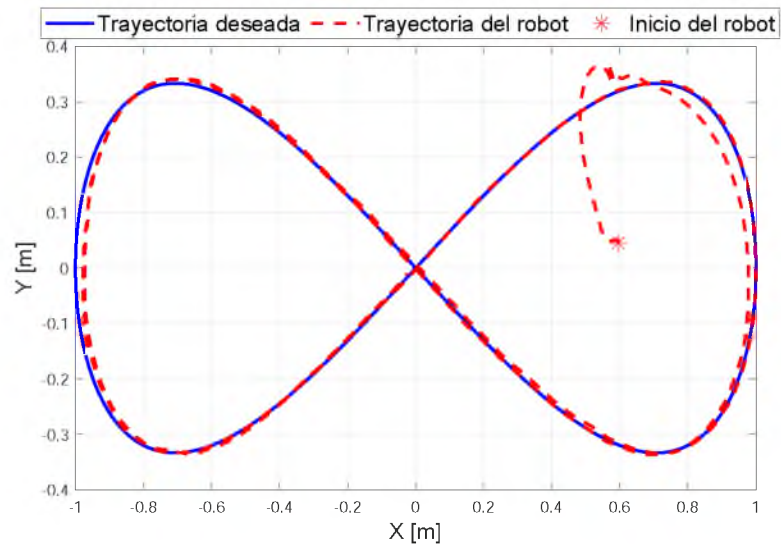
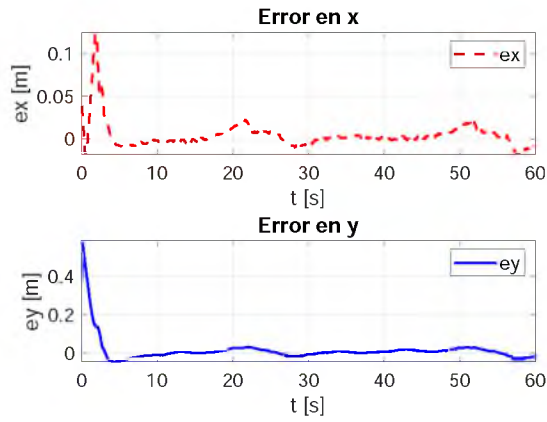
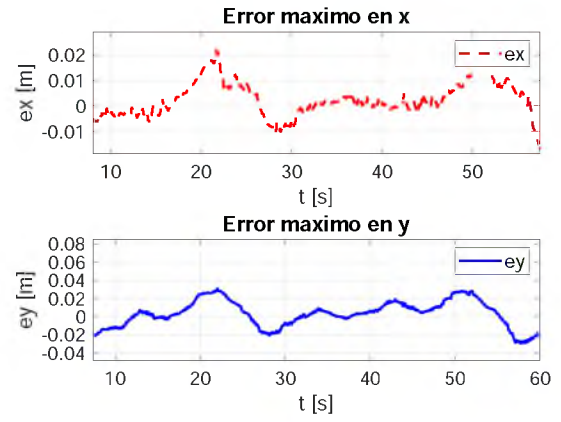


Figura 7.2: Seguimiento de trayectoria.

El sistema robot-control-observador fue diseñado para tener una respuesta críticamente amortiguada. Los errores de seguimiento, para esta trayectoria, son menores a 3 cm, los cuales se muestran en la Fig.(7.3.a). Una vez alcanzada la trayectoria, el máximo error se presenta cerca de los 21 segundos, tanto en la componente en x como en y . Fig.(7.3.b).



(a) Error de seguimiento de trayectoria.



(b) Errores máximo de seguimiento.

Figura 7.3: Errores de posición.

Las velocidades estimadas por el observador de estados, así como los errores de estimación, son presentados a continuación

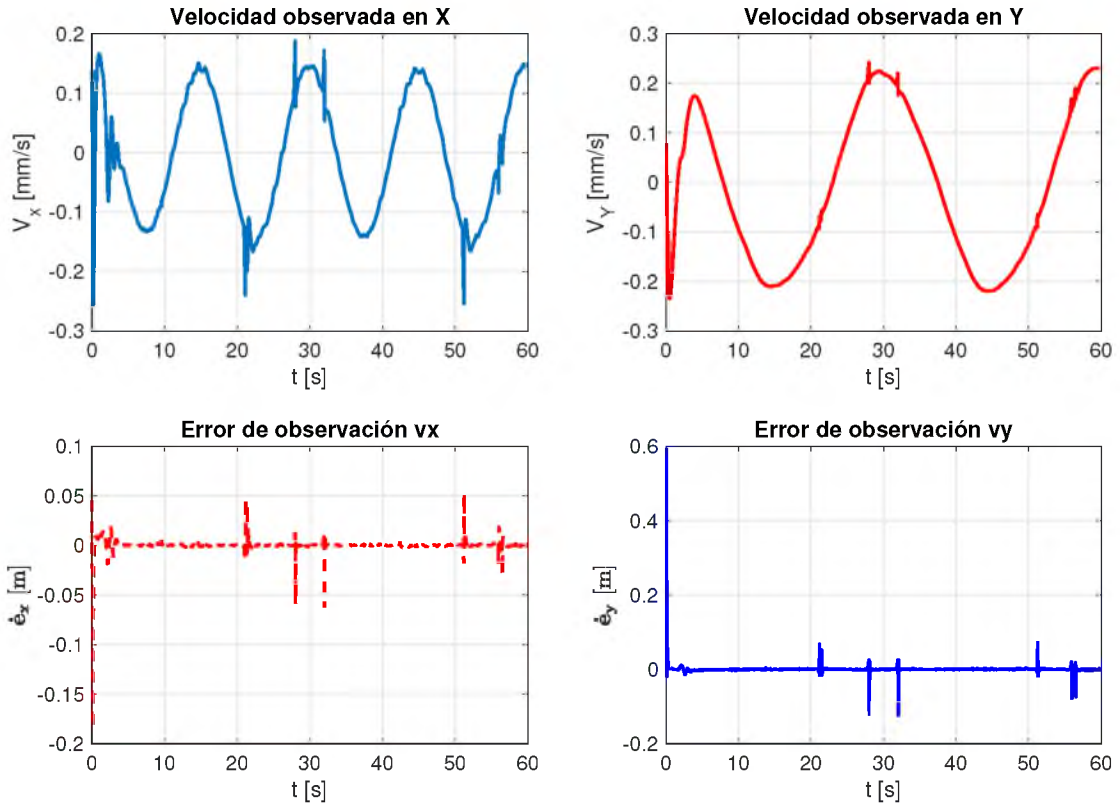


Figura 7.4: Observador de estados.

Las figuras (7.5.a) y (7.5.b), presentan las entradas de control para este experimento. En el instante inicial se tiene la máxima diferencia entre la posición del robot y la trayectoria deseada. Con la finalidad de alcanzar a la trayectoria deseada, la entrada de control se incrementa considerablemente, una vez alcanzada la trayectoria la entrada de control se

mantiene en una oscilación sostenida.

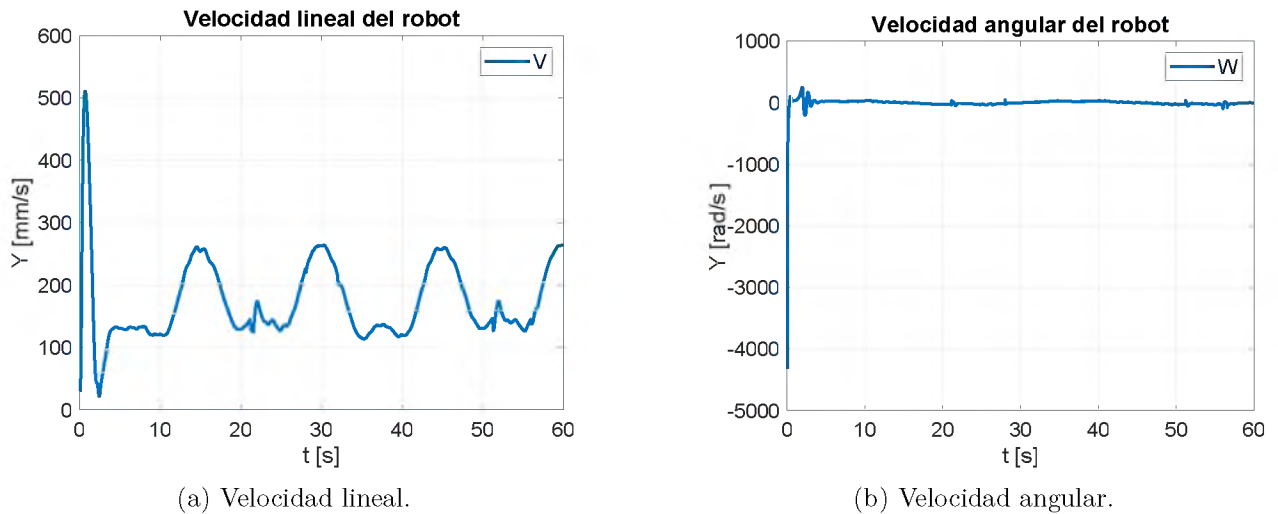


Figura 7.5: Entradas de control.

Un segundo experimento se realiza, para esta trayectoria, haciendo uso de un control subamortiguado. Las ganancias de control utilizadas en este experimento son $k_p = 25$ y $k_d = 10$. A diferencia del experimento anterior, la condición inicial se encuentra fuera de la Lemniscata, por lo tanto el error inicial es más grande que en el experimento anterior. Como resultado, a fin de alcanzar la trayectoria, la señal de control es más grande que en el experimento anterior debido a las condiciones iniciales del robot (1.2959, 0.6439). En la Fig.(7.6), se muestra el resultado del seguimiento de la trayectoria

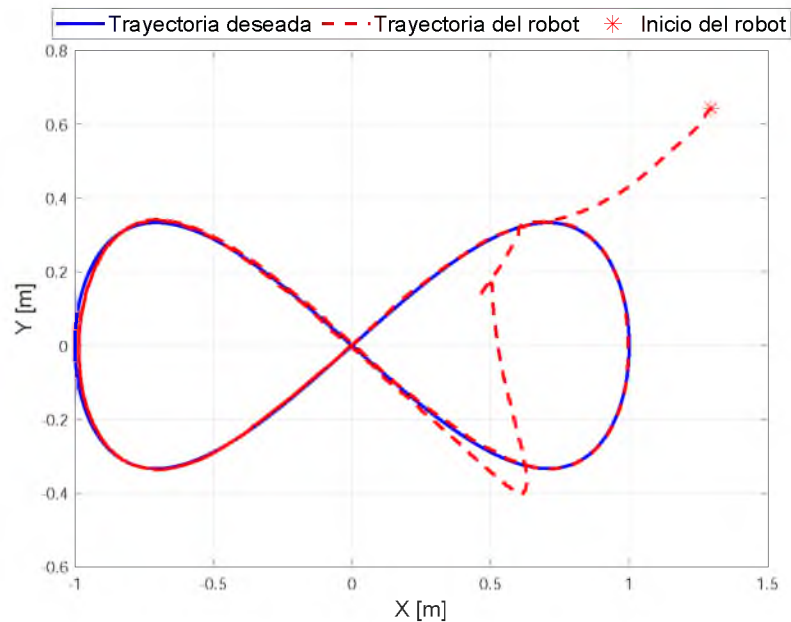
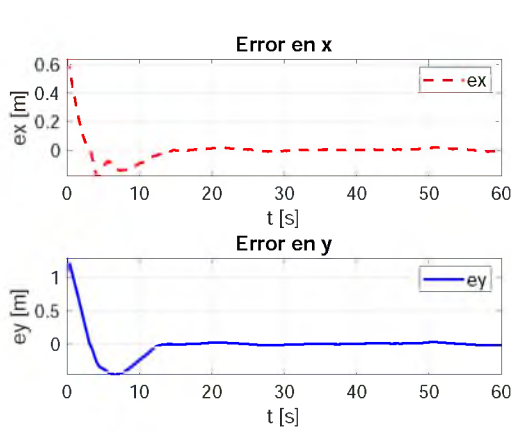
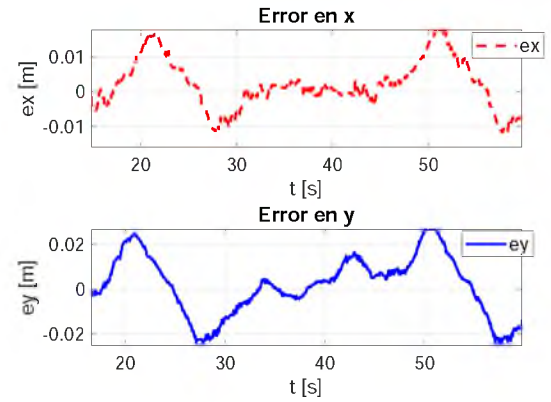


Figura 7.6: Seguimiento de trayectoria.

Como se puede observar en las Figuras (7.7.a) y (7.7.b) el error máximo en x es menor de 2 cm y en y menor de 2.5 cm. Las velocidades lineales estimadas, así como los errores de observación se presentan en la Fig.(7.8). Los errores de observación más grandes se presentan al inicio de la trayectoria, posteriormente estos rápidamente decrecen. Una vez que el robot se encuentra sobre la trayectoria deseada, el error de estimación se mantiene en la vecindad del cero, Fig.(7.8).



(a) Errores de posición del robot en el plano.



(b) Errores máximo de posición del robot en el plano.

Figura 7.7: Errores de posición.

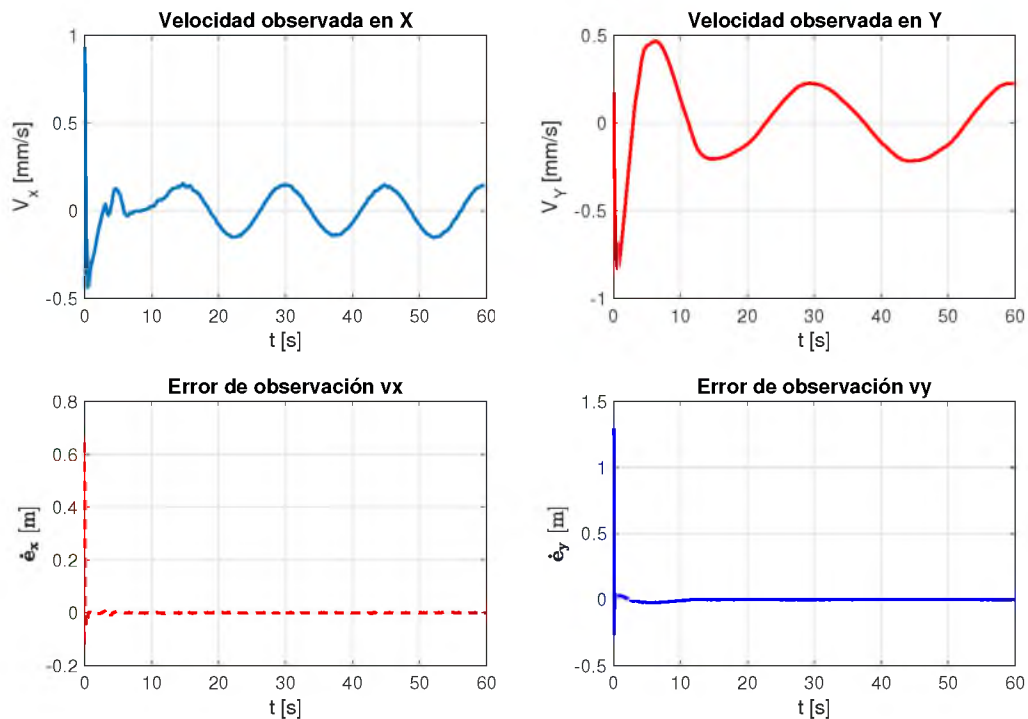


Figura 7.8: Observador de estados.

Las entradas de control para el seguimiento de trayectoria son la velocidad lineal y la velocidad angular, mostradas en la Fig.(7.9).

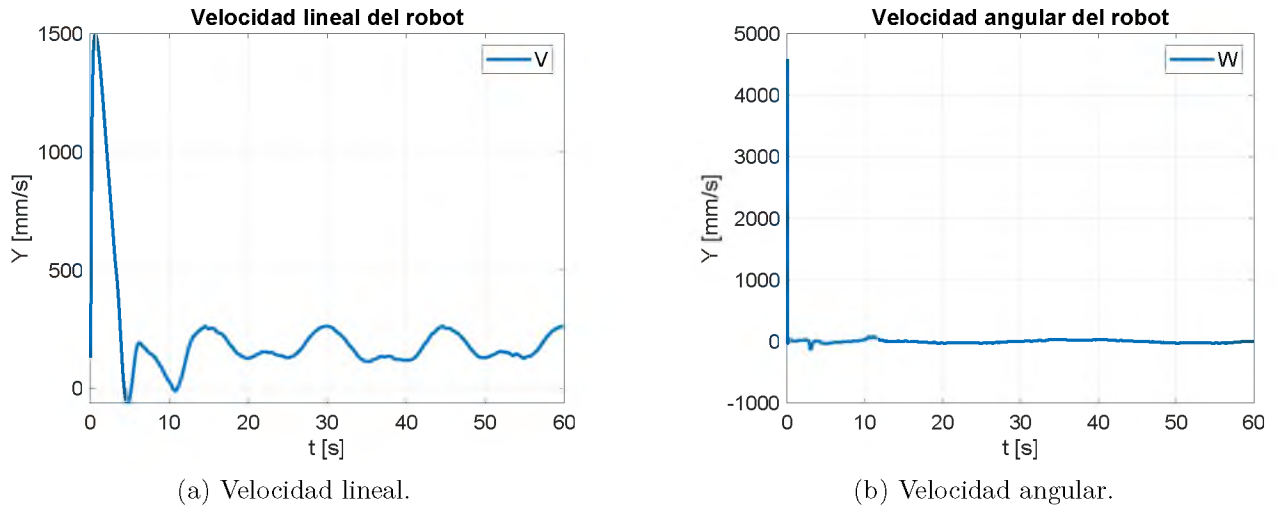


Figura 7.9: Entradas de control.

7.3. Trayectoria Circular

La segunda trayectoria, descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

$$y = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

es un Círculo.

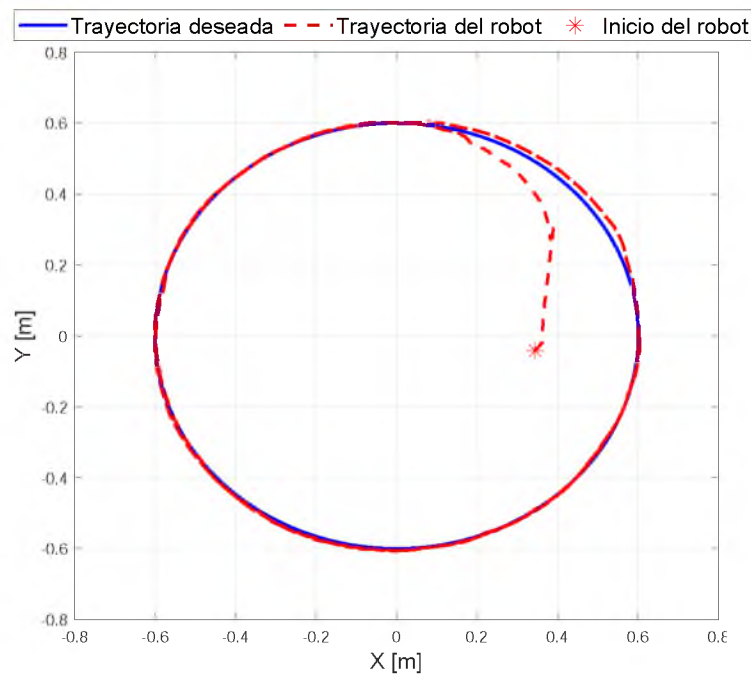


Figura 7.10: Trayectoria Circular.

En esta trayectoria no existen cambios bruscos de dirección, por lo que se considera más sencilla de realizar. Para el uso de la estrategia de control por linealización entrada/salida se utilizan las siguientes ganancias de control $k_p = 4$ y $k_d = 4$. En la Fig.(7.10) se muestra la trayectoria recorrida por el RMD con condiciones iniciales de $(0.34, -0.041)$.

La Fig.(7.11.a) muestra los errores de seguimiento del RMD, los cuales se mantienen oscilando en una vecindad cercana a cero. El error máximo en x es de 1 cm, mientras que en y es menor de 1.5 cm. Estos errores se muestran en la Fig.(7.11.b).

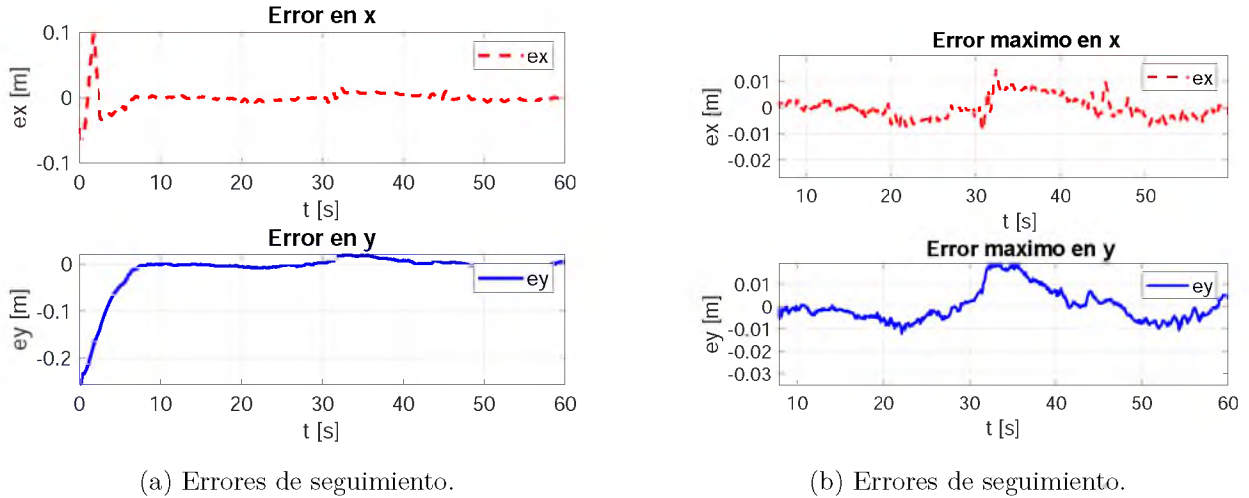


Figura 7.11: Errores de posición.

En las Figuras (7.12.a) y (7.12.b) se presentan las gráficas de las velocidades estimadas y de los errores de estimación.

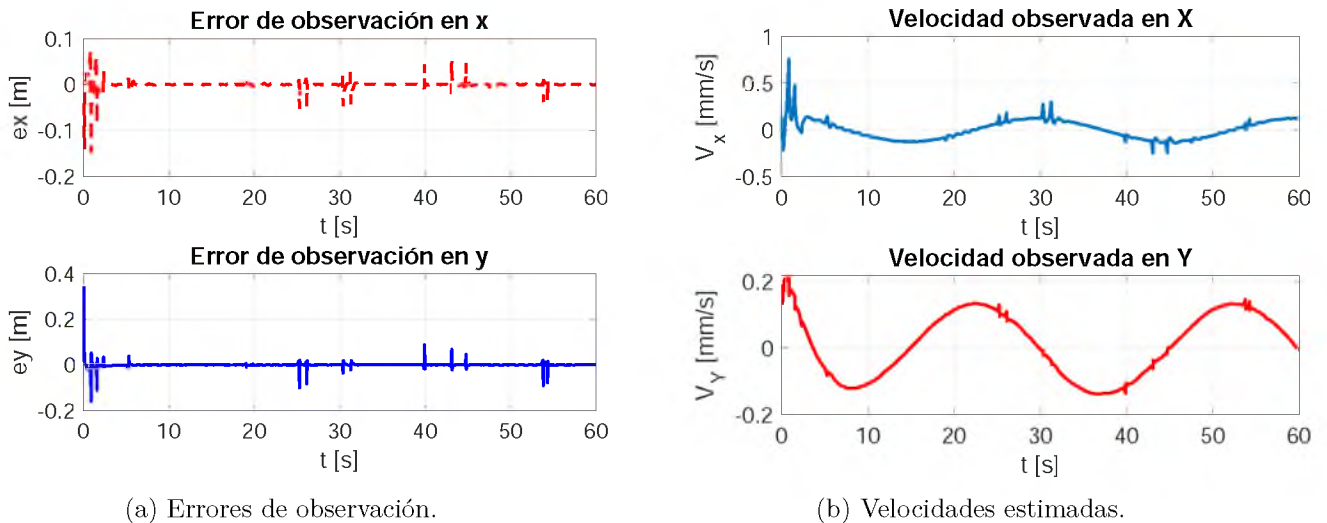
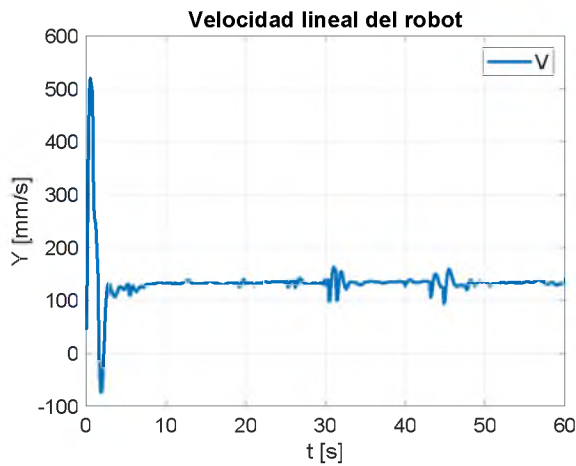


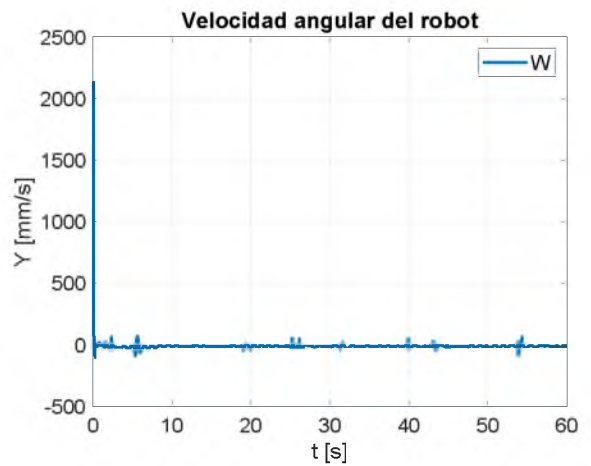
Figura 7.12: Observador de estados.

Las entradas de control que son enviadas vía wifi al RMD, son mostradas en la Fig.(7.13.a) y la Fig.(7.13.b).

Se realizó una segunda prueba con un Círculo, haciendo uso de las mismas ecuaciones paramétricas para la trayectoria deseada. Sin embargo, se cambió la condición inicial del robot



(a) Velocidad lineal.



(b) Velocidad angular.

Figura 7.13: Entradas de control.

al punto $(-0.517, 0.22)$ y también se modificaron las ganancias de control a los siguientes valores, $k_p = 25$, $k_d = 10$. El resultado de esta prueba se muestra en la Fig.(7.14).

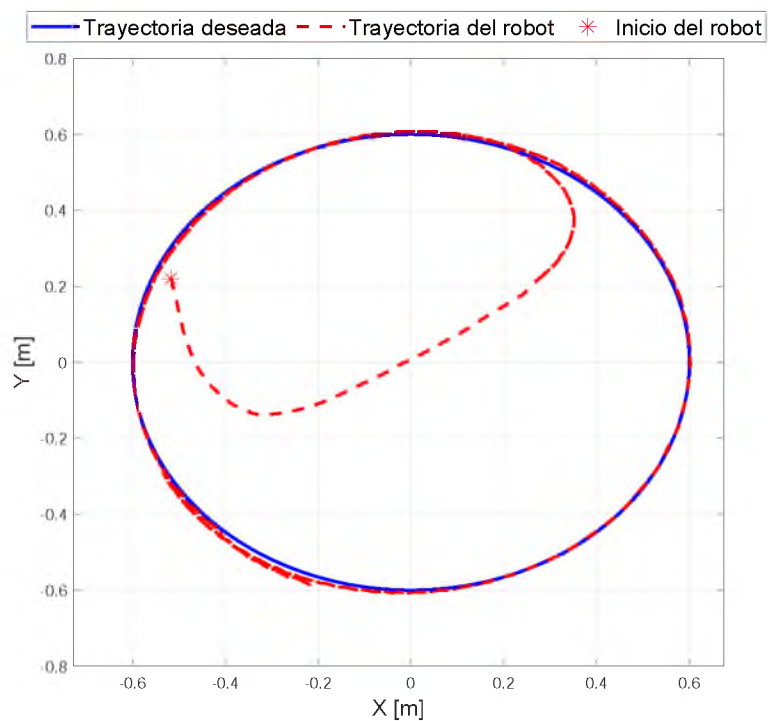
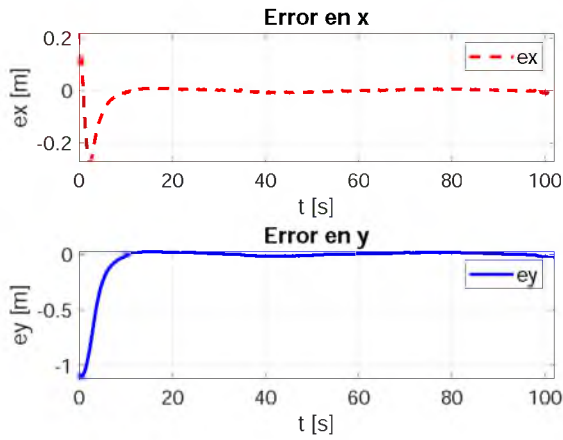
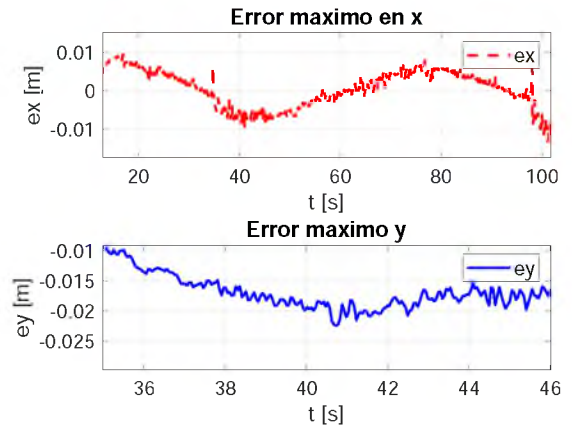


Figura 7.14: Seguimiento de trayectoria.

Los errores de seguimiento para este experimento se muestran en las Figuras (7.15.a) y (7.15.b), con errores máximos menores a los 2 cm en x y menores de 2.5 cm en y .



(a) Errores de seguimiento.



(b) Errores máximo de seguimiento.

Figura 7.15: Errores de posición.

Las velocidades lineales, estimadas por el observador, y los errores de estimación se presentan en la Fig.(7.16).

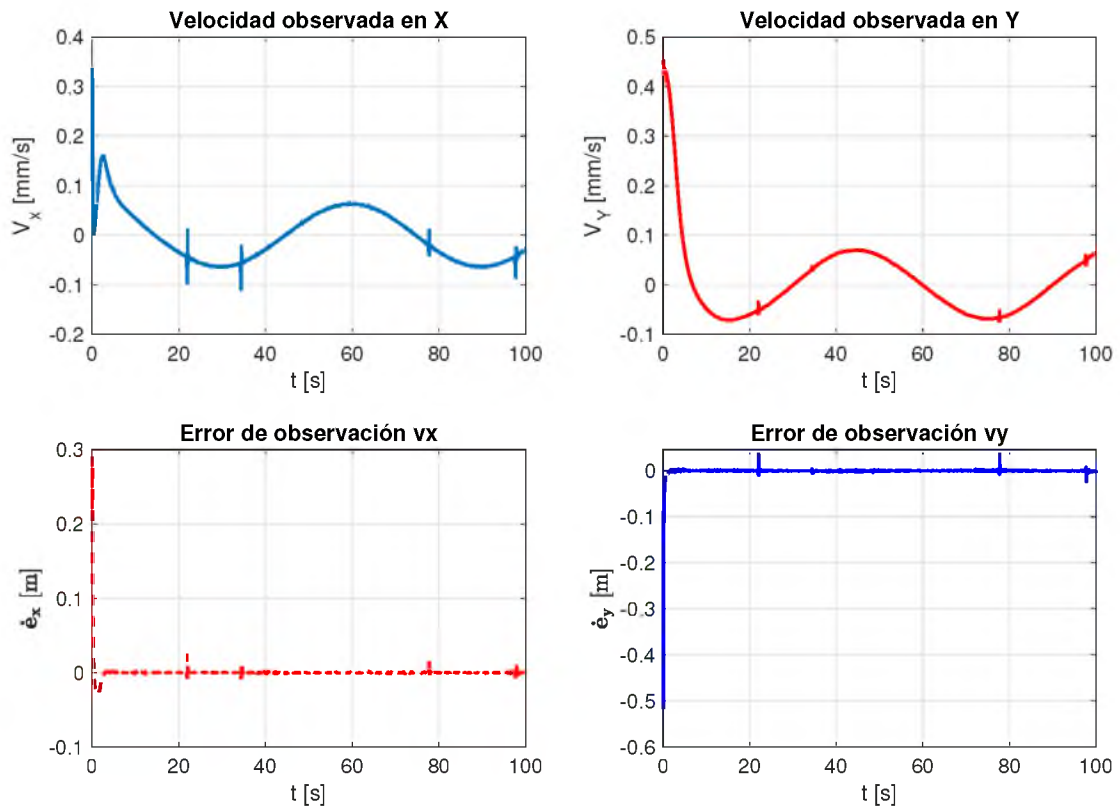


Figura 7.16: Errores de observación.

Las entradas de control utilizadas para esta prueba se muestran en la Fig.(7.17.a) y la Fig.(7.17.b). En estas figuras se puede observar que las velocidades iniciales son grandes debido a que las ganancias de control son, al menos, el doble que las ganancias de control del

experimento anterior y la posición inicial del robot se encuentra más distante a la posición inicial de la trayectoria deseada.

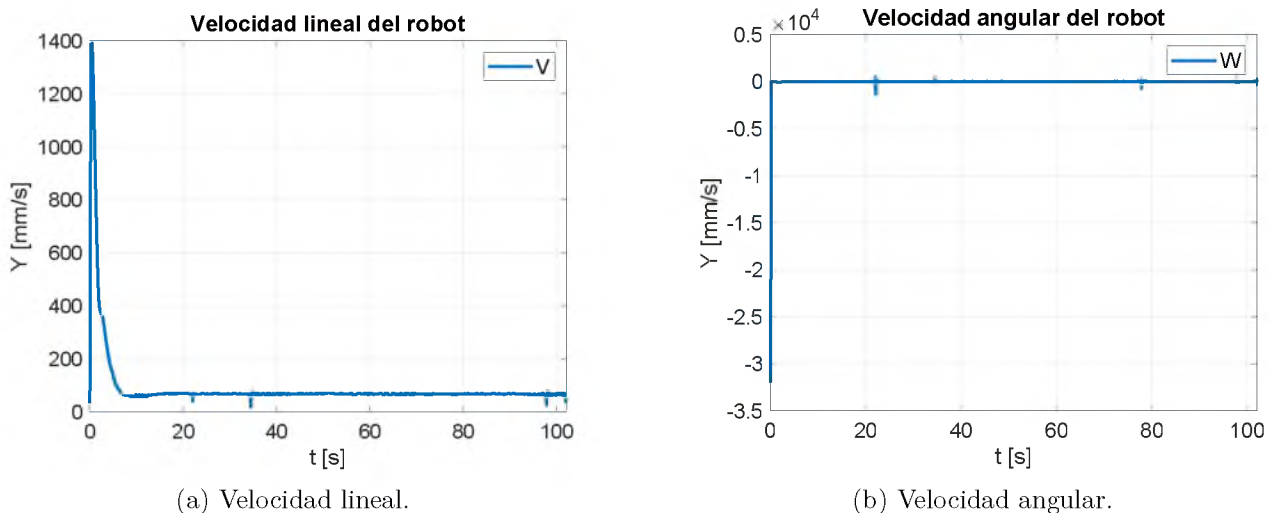


Figura 7.17: Entradas de control.

Sin embargo, después de este periodo transitorio, las velocidades se establecen, reduciendo el error hasta encontrarse en una vecindad de cero.

7.3.1. Trayectoria de un Cuadrifolio

La tercera trayectoria es un Cuadrifolio, dado por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}
 x &= \cos(2bt)\cos(bt), \\
 y &= \cos(2ct)\sin(ct),
 \end{aligned}$$

con $b = \frac{(2\pi)}{120}$ y $c = \frac{(2\pi)}{120}$.

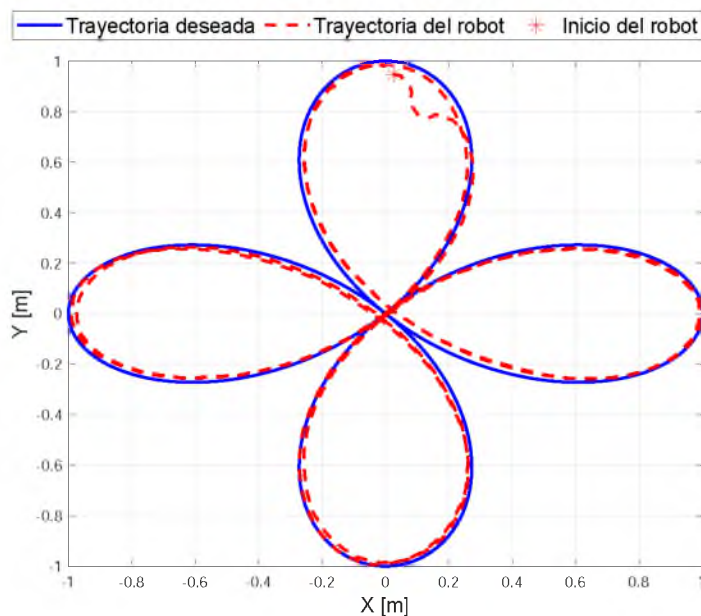


Figura 7.18: Seguimiento de trayectoria.

Esta trayectoria, al ser más larga y compleja que las anteriores, se tuvieron que utilizar ganancias de control más grandes $k_p = 50$ y $k_d = 25$ y se aumentó el tiempo de ejecución al doble. En la Fig.(7.18), se muestra la trayectoria deseada en línea continua de color azul, y el seguimiento de trayectoria por el sistema robot-control-observador, en línea punteada de color rojo.

Los errores más grandes se presentan en el estado transitorio de la ejecución de la trayectoria, posteriormente se reducen oscilando alrededor de cero y tres, en el estado estacionario. Las gráficas del error se muestran en la Fig.(7.19).

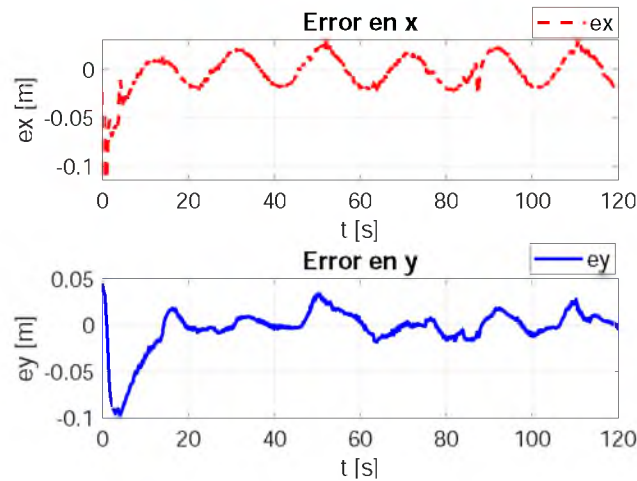


Figura 7.19: Errores de posición.

Las velocidades estimadas por el observador Luenberger, y los errores de estimación se presentan en la siguiente figura

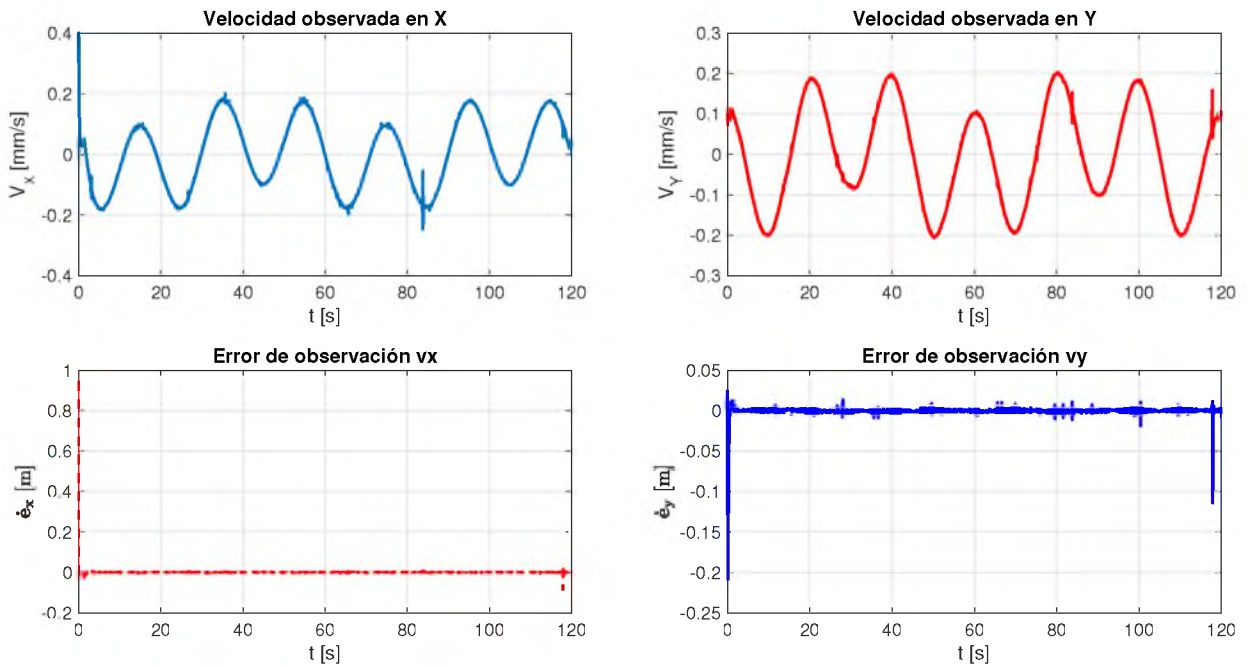


Figura 7.20: Observador de estados.

Las entradas de control, velocidad lineal y velocidad angular, se muestran en la Fig.(7.21)

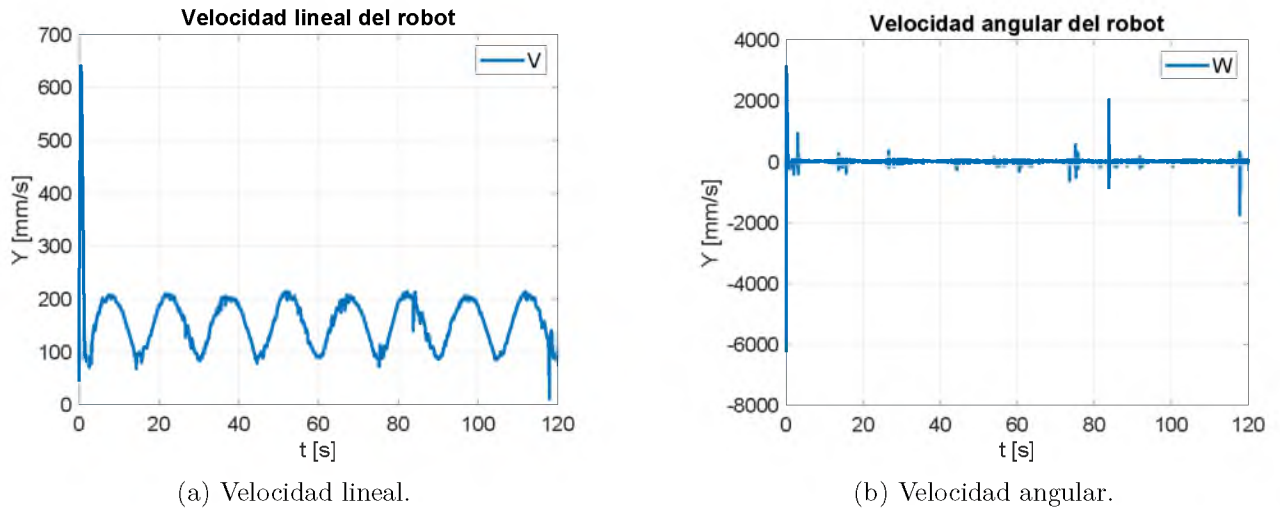


Figura 7.21: Entradas de control.

En el último experimento, utilizando linealización entrada/salida y ocupando las mismas ecuaciones paramétricas del Cuadrifolio, se modificaron las ganancias de control, con los siguientes valores $k_p = 40$ y $k_d = 15$. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

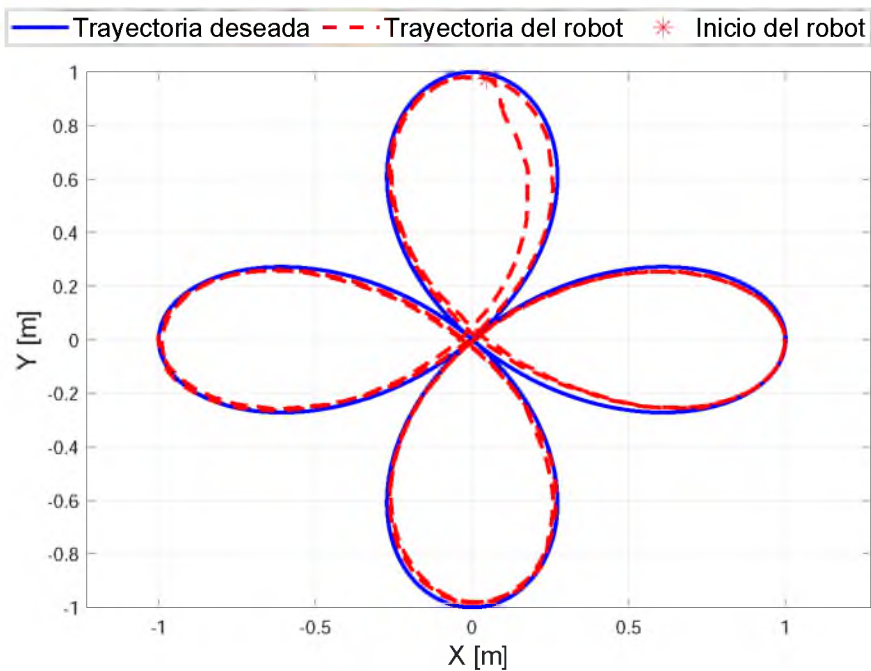


Figura 7.22: Seguimiento de trayectoria.

En la fig.(7.22), la posición del robot se encuentra sobre la trayectoria deseada. A diferencia de la prueba anterior, el comportamiento del robot al alcanzar la trayectoria es más suave. Este avanza disminuyendo el error en x y en y , hasta alcanzar la trayectoria.

Los errores de seguimiento se presentan en la Fig.(7.23).

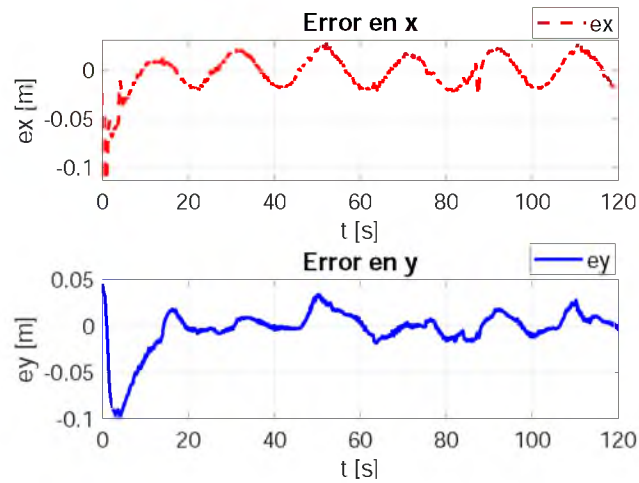


Figura 7.23: Errores de posición.

En esta prueba los errores de seguimiento de la trayectoria son ligeramente mayores a la prueba realizada anteriormente. Se puede ver gráficamente, Fig.(7.23), que a los 50 segundos se presenta un error cercano a los 5 centímetros en y , mientras que en la prueba anterior, Fig.(7.19), a los 50 segundos el error en y era de no mas de 2 cm. Las velocidades estimadas por el observador de estados y los errores de estimación, se muestran en la figura siguiente:

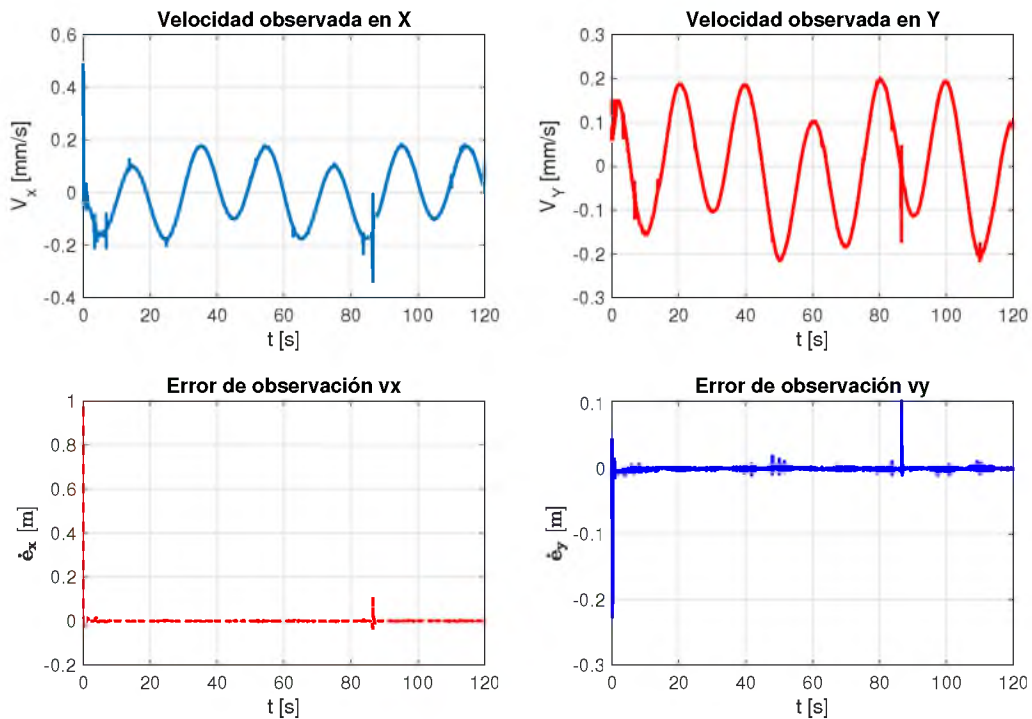


Figura 7.24: Observador de estados.

Las entradas de control usadas en este experimento se muestran a continuación.

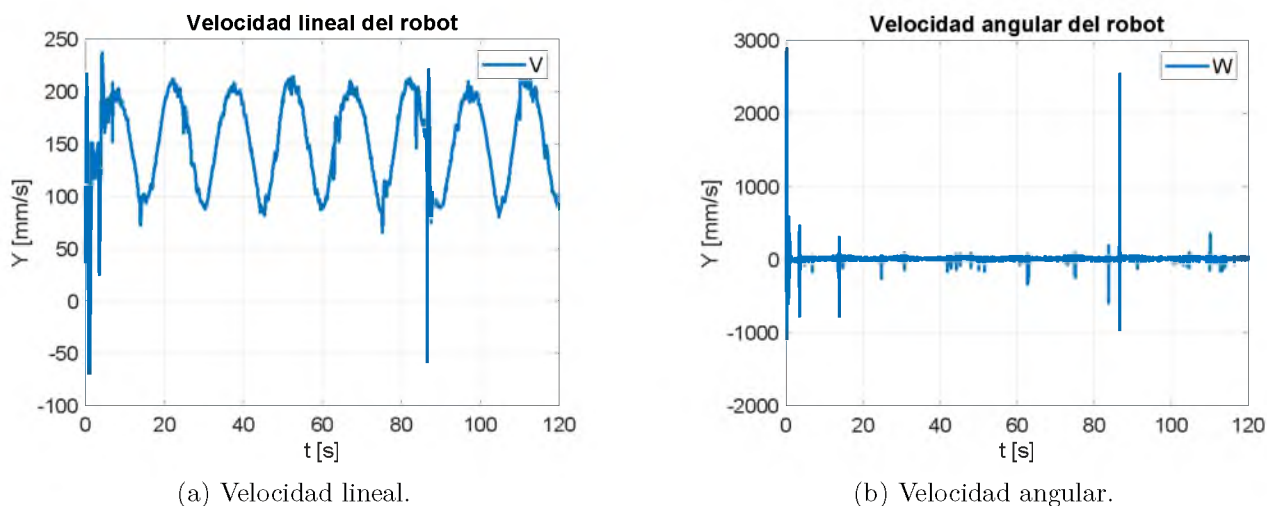


Figura 7.25: Entradas de control.

En la siguiente sección se presentan las pruebas experimentales del seguimiento de trayectoria haciendo uso del control no lineal, el cual utiliza el teorema de estabilidad de Lyapunov. Con fin de tener resultados que permitan realizar una comparación entre estrategias de control.

7.4. Pruebas experimentales control no lineal

Para la prueba experimental, de la misma forma que las pruebas numéricas, se realizaron dos trayectorias, el Círculo y la Lemniscata de Bernoulli. La primer trayectoria, un Círculo, está dada por las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \\ y &= 0.5 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \end{aligned}$$

con un periodo de 60 segundos. Para la estrategia de control, se hace uso de las ganancias de control $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ y $k_3 = 4$, con condiciones iniciales del robot $(-0.43, 0.26)$. Los resultados de la primera trayectoria se muestran a continuación

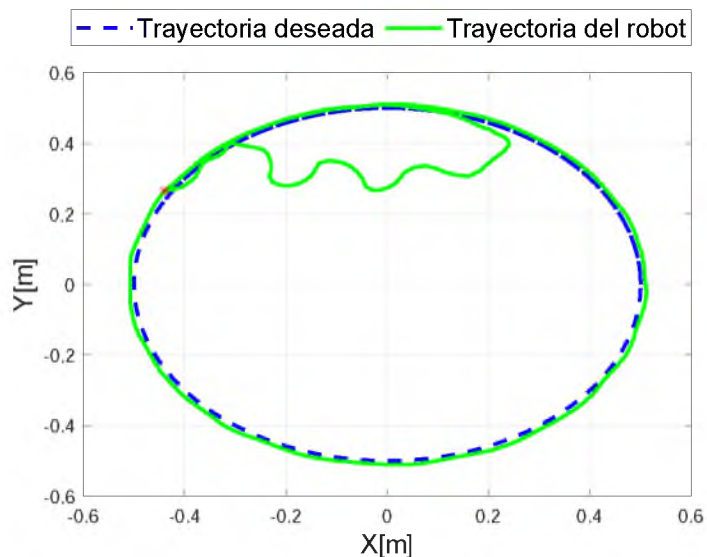


Figura 7.26: Seguimiento de trayectoria.

En la Fig.(7.26), se muestra el comportamiento del robot cuando realiza el seguimiento de la trayectoria deseada, la cual, a diferencia de la prueba numérica, se realiza una sola vez.

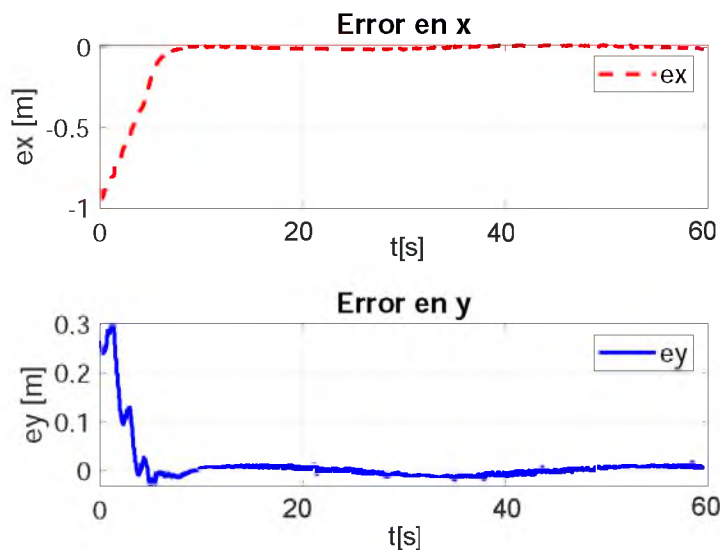
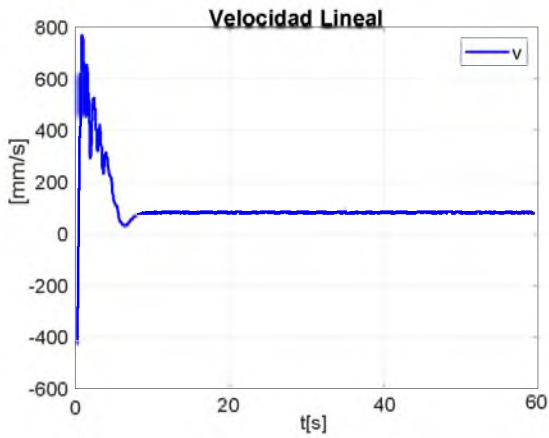


Figura 7.27: Errores de posición.

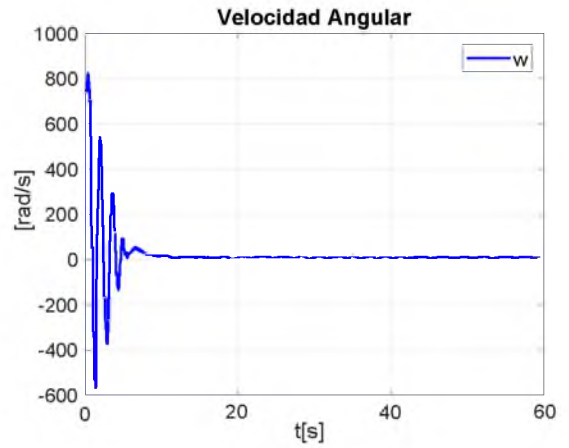
Los errores de seguimiento son mostrados en la Fig.(7.27). Se puede apreciar que en la etapa transitoria, se presentan oscilaciones pronunciadas en el eje y y una convergencia del error a cero en el eje x .

Las entradas de control utilizadas para esta trayectoria se muestran a continuación.

Para la segunda trayectoria, el robot está posicionado inicialmente en $(0.20, 0.359)$. La trayectoria deseada, una Lemniscata de Bernoulli, está dada por las ecuaciones paramétricas



(a) Velocidad lineal.



(b) Velocidad angular.

Figura 7.28: Entradas de control.

$x = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $y = \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$, con periodo de 60 segundos. Las ganancias control son modificadas como sigue $k_1 = 10$, $k_2 = 20$, y $k_3 = 40$, es decir, 10 veces más grandes que las usadas en el experimento anterior.

En la Fig.(7.29), se presenta el resultado del experimento.

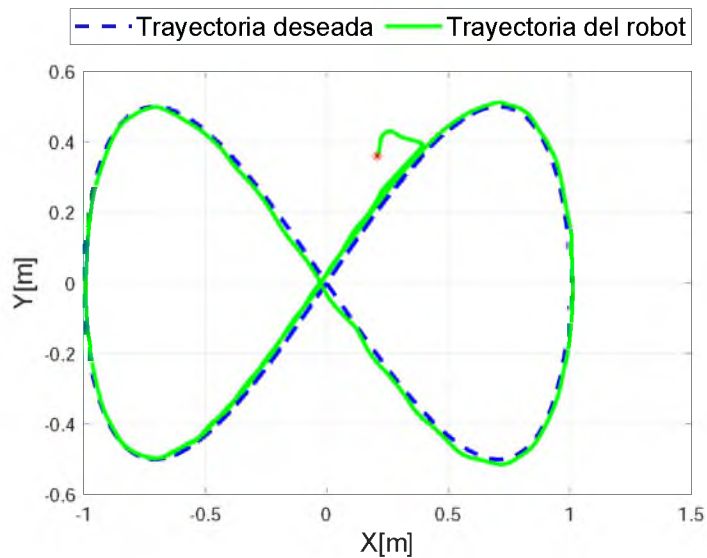


Figura 7.29: Seguimiento de trayectoria.

En el periodo transitorio, el robot se aproxima a la trayectoria deseada, reduciendo el error a una vecindad del cero, tanto en x como en y . Sin embargo, en la coordenada x el error solo tiene ligeras oscilaciones fuera del cero, a diferencia de la coordenada y en la cual el error oscila entre ± 5 cm. Los errores de seguimiento se presentan en la Fig.(7.30).

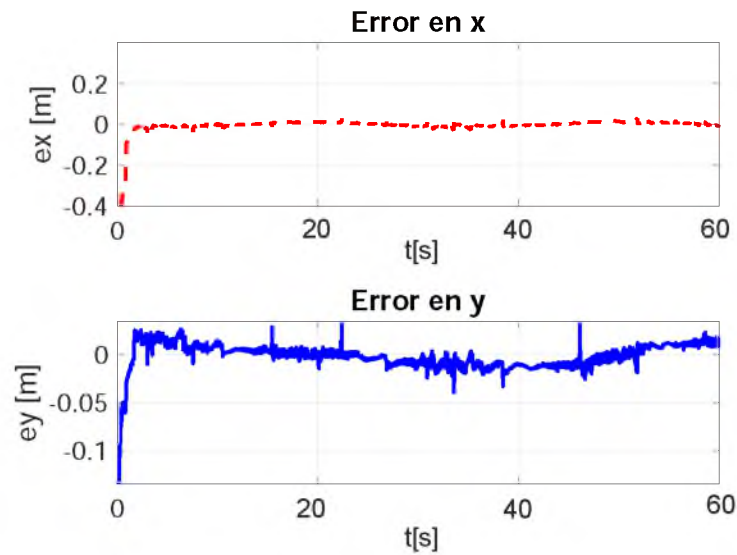
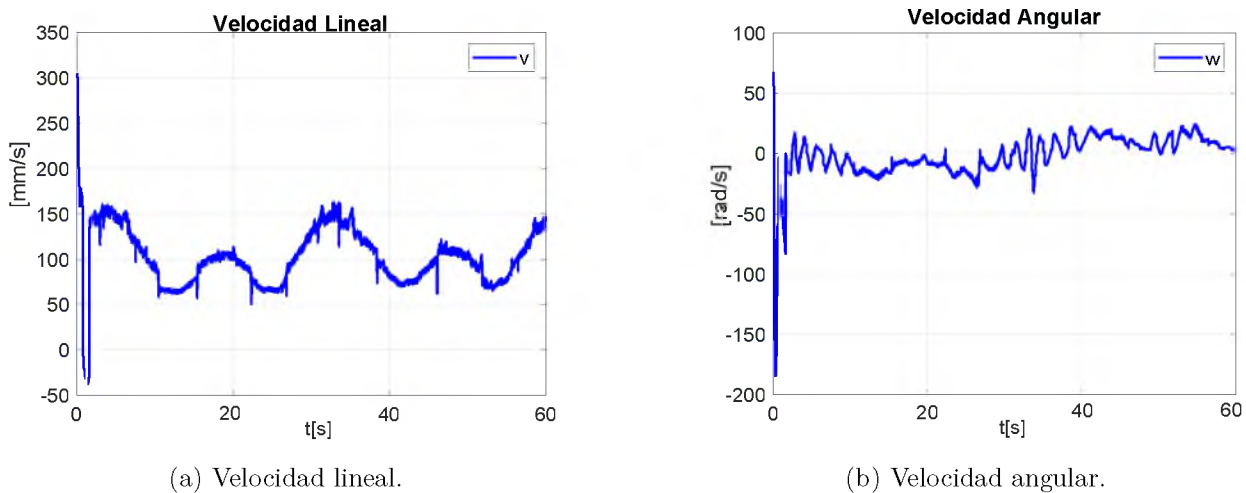


Figura 7.30: Errores de posición.

Las entradas de control utilizadas para el seguimiento de esta trayectoria son las siguientes



(a) Velocidad lineal.

(b) Velocidad angular.

Figura 7.31: Entradas de control.

En la sección siguiente se presentan conclusiones del trabajo realizado, así como puntos de vista del autor sobre lo desarrollado.

Conclusión

En este trabajo de tesis, se presentó el desarrollo teórico práctico para el seguimiento de trayectorias con un RMD. Para describir matemáticamente el robot móvil diferencial se presentaron 3 modelos cinemáticos. En el primer modelo se utiliza como punto de control el centro del eje virtual de las ruedas motorizadas del robot. En el segundo, a fin de tener una matriz de desacoplamiento cinemático invertible, se hace uso de un punto de control fuera del robot (punto frontal). En el tercer modelo, el cual se utiliza para la validación numérica y experimental, se aplica una extensión cinemática, con lo que se obtiene un modelo de segundo orden.

Para el control se seleccionaron dos estrategias diferentes: una linealización por retroalimentación de estados y un control no lineal. Los controles fueron sintonizados de forma tal, que se garantiza la convergencia del error de seguimiento a cero, presentando las respectivas demostraciones teóricas.

La linealización por retroalimentación requiere el conocimiento de todos los estados, sin embargo, para el modelo de segundo orden se utilizan estados difícilmente medibles, como lo son las velocidades lineales. Por lo tanto, se hace uso de un observador tipo Luenberger. Se presenta un análisis del error para la convergencia de los estados estimados del observador a los estados del modelo, así como el efecto que tiene el utilizar los estados observados en el sistema robot-control-observador.

Los resultados teóricos fueron validados numéricamente con MatlabSimulink[®]. En la validación se ocuparon tres trayectorias deseadas: un Círculo, una Lemniscata de Bernoulli y un Cuadrifolio. Con cada trayectoria se programó una simulación de la estrategia de control linealización por retroalimentación, modificando las ganancias de control, k_d , k_d , de modo que la respuesta del sistema fuera sub amortiguada y críticamente amortiguada. El control no lineal se sintonizó por medio de la segunda teoría de Lyapunov, de modo que las ganancias de control garanticen que el error decaiga asintóticamente a cero. En la sección **Resultados Teóricos: Simulación numérica** se presentan gráficas de los resultados de estas simulaciones, donde se puede observar tanto las trayectorias, los errores de posicionamiento, así como los esfuerzos de control, los estados estimados y los errores de observación.

La validación experimental fue realizada, en el laboratorio de robótica-control-sistemas digitales, usando un robot LEGO[®] MINDSTROM[®] EV3 en configuración diferencial. La retroalimentación en posición y orientación del robot, se realizó por medio de un sistema LPS constituido por 7 cámaras infrarrojas y una computadora con el sistema Motive. Otra computadora dedicada fue utilizada para calcular los estados estimados por el observador, generar las trayectorias deseadas y calcular la estrategia de control. La comunicación Robot-Control-LPS control fue realizada vía wifi por medio de un enrutador.

Cada trayectoria simulada fue implementada como trayectoria deseada para el seguimiento de trayectorias con el robot LEGO® MINDSTROM® EV3. En el Capítulo 7 se presentan los resultados de la validación experimental. Como se puede observar tanto en las simulaciones como en los experimentos los errores de seguimiento se mantienen acotados en una vecindad del cero, por lo que se logran los objetivos propuestos.

Este trabajo aporta a la solución del problema de seguimiento de trayectorias en los robots móviles diferenciales, en dos aspectos: el modelado matemático y la estrategia de control. Con respecto al modelado se utilizan dos técnicas innovadoras para la construcción del modelo cinemático: un modelo con punto frontal y extensión cinemática. Con respecto al control, estas técnicas permiten linealizar el modelo gracias a presentar una matriz de desacoplamiento no singular. La linealización reduce el problema de seguimiento de trayectorias a un sistema lineal de segundo orden, por lo que es posible aplicar una gran variedad de técnicas de control lineal. En comparación con el control no lineal, en el cual los métodos de sintonización solo dan condiciones para establecer diversos criterios de estabilidad. Sin embargo, cuando se linealiza alrededor de un punto de operación se tienen condiciones meramente locales, al contrario del control no lineal en el cual el criterio de estabilidad puede ser global. Adicionalmente la linealización requiere un observador de estados a fin de conocer las velocidades lineales del RMD, lo que no es necesario en el control no lineal.

Como trabajos futuros se pretende abordar el diseño e implementación de nuevas estrategias de control, haciendo uso de distintos robots móviles terrestres y aéreos, implementar los observadores de estados lineales y no lineales. Estudiar la formación en enjambre para robots móviles aéreos para seguimiento de trayectorias y evasión de obstáculos.

Bibliografía

- [1] Cortés, F. R., Robótica: control de robots manipuladores. Marcombo, 2020.
- [2] Bruno, S., Lorenzo, S., Luigi, V., y Giuseppe, O., Robotics: modelling, planning and control, 2010, vol. 1. 1994.
- [3] Ortigoza, R. S., Sánchez, J. G., Sotelo, V. B., Vilchis, M. A. M., Guzmán, V. H., y Ortigoza, G. S., “Una panorámica de los robots móviles”, *Télématique: Revista Electrónica de Estudios Telemáticos*, vol. 6, no. 3, pp. 1–14, 2007.
- [4] Baturone, A. O., Robótica: manipuladores y robots móviles. Marcombo, 2005.
- [5] Borenstein, J., Everett, H., Feng, L., *et al.*, “Where am i? sensors and methods for mobile robot positioning”, *University of Michigan*, vol. 119, no. 120, p. 27, 1996.
- [6] Borenstein, J. y Feng, L., “Umbmark: A benchmark test for measuring odometry errors in mobile robots”, en *Mobile Robots X*, vol. 2591, pp. 113–124, SPIE, 1995.
- [7] Bücken, S. T. A., “Learning maps for indoor mobile robot navigation”, rep. tec., 1996.
- [8] Domínguez-Ortega, C., Cruz-Morales, R., Rodríguez-Angeles, A., y Velasco-Villa, M., “Control de un convoy de robots móviles con tiempo variable de separación”, *Memorias del CNCA*, pp. 140–145, 2018.
- [9] Jimenez, T. S., “Diseño, construcción y control en tiempo real de un robot móvil”, Departamento de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV, 1999.
- [10] Lima-Pérez, A., Díaz-Téllez, J., Gutiérrez-Vicente, V., Estévez-Carreón, J., Pérez-Pérez, J., García-Ramírez, R. S., y Chávez-Galán, J., “Robust control of a two-wheeled self-balancing mobile robot”, en *2021 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)*, pp. 196–201, 2021, [doi:10.1109/ICMEAE55138.2021.00038](https://doi.org/10.1109/ICMEAE55138.2021.00038).
- [11] González, E. C. V., Rivera, D. M., y Gómez, E. J., “Model and observer-based controller design for a quadcopter helicopter with two dof”, en *2012 IEEE Ninth Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*, pp. 267–271, 2012, [doi:10.1109/CERMA.2012.50](https://doi.org/10.1109/CERMA.2012.50).
- [12] Rosaldo-Serrano, M. A., Santiaguillo-Salinas, J., y Aranda-Bricaire, E., “Observer-based time-varying backstepping control for a quadrotor multi-agent system”, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 93, pp. 135–150, 2019.
- [13] Correa, A. C., “Sistemas robóticos teleoperados”, *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, vol. 15, pp. 62–72, 2005.
- [14] Consensus Algorithms for Double-integrator Dynamics, pp. 77–104. London: Springer London, 2008, [doi:10.1007/978-1-84800-015-5_4](https://doi.org/10.1007/978-1-84800-015-5_4).

- [15] Ogata, K., Ingeniería de control moderna. Pearson Educación, 2003.
- [16] Dorf, R. C. y Bishop, R. H., Modern Control Systems. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 12 ed., 2011.
- [17] Franklin, G. F., Powell, J. D., y Emami-Naeini, A., Feedback Control of Dynamic Systems. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 6 ed., 2010.
- [18] Kuo, B. C. y Golnaraghi, F., Automatic Control Systems. Hoboken, NJ: Wiley, 9 ed., 2003.
- [19] Gordillo, F., “Estabilidad de sistemas no lineales basada en la teoría de liapunov”, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI, vol. 6, no. 2, pp. 5–16, 2009, doi:[https://doi.org/10.1016/S1697-7912\(09\)70088-3](https://doi.org/10.1016/S1697-7912(09)70088-3).
- [20] Halanay, A. y Rasvan, V., Applications of Lyapunov Methods in Stability. 1993, doi:[10.1007/978-94-011-1600-8](https://doi.org/10.1007/978-94-011-1600-8).
- [21] Kelly, R. y Santibáñez, V., Control de movimiento de robots manipuladores. Automática robótica, Pearson Educación, 2003, <https://books.google.com.mx/books?id=LPwMAAAACAAJ>.
- [22] Ogata, K., Sistemas de control en tiempo discreto. Pearson educación, 1996.
- [23] Kalman, R. E., “Mathematical description of linear dynamical systems”, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control, vol. 1, no. 2, pp. 152–192, 1963.
- [24] Kalman, R., Ho, Y., y Narendra, K., “Con-trollability of linear dynamical systems”, Contributions to Differential Equations, vol. 1, no. 2, pp. 189–213, 1962.
- [25] Franklin, G., Powell, J. D., y Workman, M., Feedback Control of Dynamic Systems. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2014.
- [26] Castellanos, J. G., Cervantes, M. V., Santana, J. S., y Martínez, S. R., “Seguimiento de trayectorias de un robot móvil (3, 0) mediante control acotado”, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, vol. 11, no. 4, pp. 426–434, 2014.
- [27] Raffo, G. V., Robust control strategies for a quadrotor helicopter: An underactuated mechanical system. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2011.
- [28] Fernández, C., Pantano, N., Godoy, S., Serrano, E., y Scaglia, G., “Optimización de parámetros utilizando los métodos de monte carlo y algoritmos evolutivos. aplicación a un controlador de seguimiento de trayectoria en sistemas no lineales”, vol. 16, no. 1, p. 89, 2018, doi:<https://doi.org/10.4995/riai.2018.8796>.
- [29] Scaglia, G., Mut, V., Quintero, O., y Di Sciascio, F., “Seguimiento de trayectorias de robots móviles usando el método de integración trapezoidal”, en XX Congreso Argentino de Control Automático AADECA, 2006.
- [30] Castro-Romero, L. A., Garcia-Lozano, H. N., Santiaguillo-Salinas, J., Pérez-Castro, N., *et al.*, “Control-observador para seguimiento en un robot diferencial de segundo orden”, Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI, vol. 12, no. Especial2, pp. 1–7, 2024.

Apéndice.

A.1. Trabajos Publicados.

- Castro-Romero, L. A., García-Lozano, H. N., Santiaguillo-Salinas, J., & Pérez-Castro, N. (2024). Control-observador para seguimiento en un robot diferencial de segundo orden. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 12(Especial2), 1-7. (Publicado)

A.2. Trabajos Aceptados en Congresos Nacionales.

- Castro-Romero, L. A., García-Lozano, H., Santiaguillo-Salinas, J., Alfonso-Jiménez, J. L., González-Zárate, R. F. Seguimiento de trayectorias basado en observadores de estados para un esquema Líder-Seguidor. Observer based trajectory tracking for a leader-follower scheme. CNCA, Ciudad de México, 2024 (Aceptado).
- Alfonso-Jiménez, J. L., Santiaguillo-Salinas, J., García-Lozano, H., Castro-Romero, L. A. Seguimiento en formación basado en observadores para un sistema multi-agente. Observer based formation tracking for multi-agent systems. CNCA, Ciudad de México, 2024 (Aceptado).

A.3. Trabajos sometidos a Congresos Nacionales.

- Torres-López, J., Reyes-Ríos, J. R., Castro-Romero, L. A., Alfonso-Jiménez, J. L., García-Lozano, H., Santiaguillo-Salinas, J. Seguimiento de trayectoria con modelo cinemático extendido para un robot Ackerman. Comrob, Tec de la Laguna, 2024. (Revisión)

A.4. Equivalencia del Criterio de Routh y Criterio de Hurwitz.

Prueba. *Se construye una matriz triangular, donde los elementos bajo la diagonal son cero y los que se encuentran sobre la diagonal son números, está adoptaría la siguiente forma, considerando $n = 4$*

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Si a (7.1), se le resta del i -ésimo renglón el j -ésimo multiplicado por una constante k .

y restando del segundo renglón a_0/a_1 veces el primer renglón, se obtiene

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

con

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_1, \\ a_{22} &= a_2 - \frac{a_0}{a_1}a_3, \\ a_{23} &= a_4 - \frac{a_0}{a_1}a_5, \\ a_{24} &= a_6 - \frac{a_0}{a_1}a_7. \end{aligned}$$

Asimismo, restar del cuarto renglón el tercer renglón multiplicado por a_0/a_1 , da como resultado

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

donde $\hat{a}_{43} = a_2 - \frac{a_0}{a_1}a_3$ y $\hat{a}_{44} = a_4 - \frac{a_0}{a_1}a_5$.

A continuación, se resta del tercer renglón el segundo renglón multiplicado por a_1/a_{22} genera

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

con $a_{33} = a_3 - \frac{a_1}{a_{22}}a_{23}$ y $a_{34} = a_5 - \frac{a_1}{a_{22}}a_{24}$.

Por último, restar del último renglón el segundo renglón multiplicado por \hat{a}_{43}/a_{33} produce

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{44} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

donde $a_{44} = \hat{a}_{44} - \frac{\hat{a}_{43}}{a_{33}}a_{34}$.

A partir de este análisis, las condiciones de Hurwitz para la estabilidad se reducen a

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} > 0, \\ \Delta_3 &= a_{11}a_{22}a_{33} > 0, \\ \Delta_2 &= a_{11}a_{22} > 0, \\ \Delta_1 &= a_1 > 0, \end{aligned}$$

con

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{33} > 0, a_{44} > 0, \dots$$

El arreglo del criterio de Routh para el polinomio

$$a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$$

en donde $a_0 > 0$, se obtiene a partir de

$$\begin{array}{l|cccc} s^4 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ s^3 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ s^2 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ s^1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & d_1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (7.6)$$

A partir del arreglo (7.6), observamos que

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_1 \\ a_{22} &= a_2 - \frac{a_0}{a_1}a_3 = b_1 \\ a_{33} &= a_3 - \frac{a_1}{a_2}a_2 \approx \frac{a_3b_1 - a_1b_2}{b_1} = c_1 \\ a_{44} &= a_4 - \frac{a_4}{a_3}a_3 = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{c_1} = d_1 \end{aligned}$$

Por tanto, las condiciones de Hurwitz para la estabilidad asintótica se vuelven

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad d_1 > 0, \dots$$

De esta manera, se demuestra que las condiciones de Hurwitz para la estabilidad asintótica se reducen a las condiciones de Routh. Por tanto, una matriz evaluada por medio del criterio de estabilidad de Routh se puede considerar Hurwitz [15].

A.5. Dinámica del error de un control no lineal.

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= (\dot{x}_d - \dot{x}) \cos \theta - \dot{\theta}(x_d - x) \sin \theta + (\dot{y}_d - \dot{y}) \sin \theta + \dot{\theta}(y_d - y) \cos \theta \\
 &= ((x_d - x) + (y_d - y) \cos \theta) \sin \theta \omega + \dot{x}_d \cos \theta - \dot{x} \cos \theta + \dot{y}_d \sin \theta - \dot{y} \sin \theta \\
 &= e_2 \omega + (v_d \cos \theta_d) \cos \theta - (v \cos \theta) \cos \theta + (v_d \sin \theta_d) \sin \theta - (v \sin \theta) \sin \theta \\
 &= e_2 \omega + (v_d \cos \theta_d \cos \theta + v_d \sin \theta_d \sin \theta) - v(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= e_2 \omega + v_d \cos(\theta_d - \theta) - v \\
 \dot{e}_1 &= e_2 \omega + v_d \cos e_3 - v
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_2 &= -(\dot{x}_d - \dot{x}) \sin \theta - \dot{\theta}(x_d - x) \cos \theta + (\dot{y}_d - \dot{y}) \cos \theta - \dot{\theta}(y_d - y) \sin \theta \\
 &= \omega(-(x_d - x) \cos \theta - (y_d - y) \sin \theta) - \dot{x}_d \sin \theta + \dot{x} \sin \theta + \dot{y}_d \cos \theta - \dot{y} \cos \theta \\
 &= -e_1 \omega - v_d \cos \theta_d \sin \theta + (v \cos \theta) \sin \theta + (v_d \sin \theta_d) \cos \theta - (v \sin \theta) \cos \theta \\
 &= -e_1 \omega + v_d(-\cos \theta_d \sin \theta + \sin \theta_d \cos \theta) \\
 &= -e_1 \omega + v_d \sin(\theta_d - \theta) \\
 &= -e_1 \omega + v_d \sin e_3
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_3 &= \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \\
 &= \omega_d - \omega
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Donde $-v + v_d \cos e_3 = u_1$ y $\omega_d - \omega = u_2$, se obtiene la siguiente expresión para la dinámica de los errores de seguimiento

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2(\omega_d - u_2) + v_d \cos e_3 - (v_d \cos e_3 - u_1) \\
 &= e_2 \omega_d - e_2 u_2 - u_1 \\
 \dot{e}_2 &= -e_1 \omega_d + e_1 u_2 + v_d \sin e_3 \\
 \dot{e}_3 &= \omega_d - \omega_d + u_2 \\
 &= u_2
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Con ello la convergencia del error decae asintóticamente a cero, por lo tanto, la trayectoria del modelo del robot converge a la trayectoria deseada.

A.6. Código en Python del Sistema Robot-Control-Observador y Control no lineal basado en Lyapunov.

Para las estrategias de control, se debe considerar el uso de las ganancias de control establecidas en el Capítulo 7: **Resultados experimentales**.

Configuración de Variables

```

1  xr = 0.0
2  yr = 0.0
3  xd = 0.0
4  yd = 0.0

```

```

5   Dxd = 0.0
6   Dyd = 0.0
7   DDxd = 0.0
8   DDyd = 0.0
9   thd = 0.0
10  kp = 25
11  kd = 10
12  rx6 = 0.0
13  ry6 = 0.0
14  v6 = 0.0
15  w6 = 0.0

```

Trayectorias Establecidas

```

1   TRAYECTORIA LEMNISCATA
2   ##### X(t) #####
3   yd=sin((2*pi*t)/T)
4   Dyd=cos((2*pi*t)/T)*((2*pi)/T)
5   DDyd = (-1)*sin((2*pi*t)/T)*((2*pi)/T)*((2*pi)/T)
6   ##### Y(t) #####
7   xd=(1/3)*sin((4*pi*t)/T)
8   Dxd=(1/3)*cos((4*pi*t)/T)*((4*pi)/T)
9   DDxd = (-1/3)*sin((4*pi*t)/T)*((4*pi)/T)*((4*pi)/T)
10  #####
11
12
13  TRAYECTORIA CIRCULO
14  ##### X(t) #####
15  xd=(0.5)*sin((2*pi*t)/T)
16  Dxd=(0.5)*cos((2*pi*t)/T)*((2*pi)/T)
17  DDxd=(-0.5)*sin((2*pi*t)/T)*((2*pi)/T)*((2*pi)/T)
18  ##### Y(t) #####
19  yd=(0.5)*cos((2*pi*t)/T)
20  Dyd=(-0.5)*sin((2*pi*t)/T)*((2*pi)/T)
21  DDyd=(-0.5)*cos((2*pi*t)/T)*((2*pi)/T)*((2*pi)/T)
22  #####
23
24
25  TRAYECTORIA CUADRIFOLIO
26  ##### X(t) #####
27  xd=(cos(2*b*t)*cos(b*t))
28  Dxd=(-2*b*sin(2*b*t)*cos(b*t)-b*cos(2*b*t)*sin(b*t))
29  DDxd=(-4*b*2*cos(2*b*t)*cos(b*t)+4*b*2*sin(2*b*t)*sin(b*t)-b*2*cos(2*b*t)*cos(b*t)-b*b
    ↪ *sin(2*b*t)*sin(b*t))
30  ##### Y(t) #####
31  yd=(cos(2*c*t)*sin(c*t))
32  Dyd=(-2*c*sin(2*c*t)*sin(c*t)+c*cos(2*c*t)*cos(c*t))
33  DDyd=(-4*c*c*cos(2*c*t)*sin(c*t)-4*c*c*sin(2*c*t)*cos(c*t)-c*c*cos(2*c*t)*sin(c*t)+c*c*
    ↪ sin(2*c*t)*cos(c*t))

```

Comunicación y Conversión de Datos obtenidos del Sistema OptiTrack.

```
1 def euler_from_quaternion(x, z, y, w):
2     a1 = 2*(w*y+z*x)
3     b1 = 1-2*(z*z+y*y)
4     yaw = atan2(a1,b1)
5     if yaw>=0 and yaw<=180:
6         yaw=yaw
7     else:
8         yaw=yaw+2*pi
9     return yaw
10
11 def receive_rigid_body_frame( new_id, position, rotation ):
12     pass
13     angle = euler_from_quaternion(rotation[0],rotation[1],rotation[2],rotation[3])
14     if(new_id==1):
15         global lego06
16         lego06 = [-1*position[0], -1*position[1], angle]
17         print("Posición del robot: ", new_id," ", lego06[0]," ", lego06[1]," ", angle*180/pi, "fin")
```

Construcción del Control y de Trayectoria Deseada.

```
1 if (Dt>=tmuestreo):
2     ##### POSICION DEL EJE MEDIO DE LAS RUEDAS DEL ROBOT
3     ↪ #####
4     xr = lego06[0]
5     yr = lego06[1]
6     th = lego06[2]
7     ##### TRAYECTORIA LEMNISCATA #####
8     ##### X(t) #####
9     yd = sin((2*pi*t)/T)
10    Dyd = cos((2*pi*t)/T)*((2*pi)/T)
11    DDyd = (-1)*sin((2*pi*t)/T)*((2*pi)/T)*((2*pi)/T)
12    ##### Y(t) #####
13    xd = (1/3)*sin((4*pi*t)/T)
14    Dxd = (1/3)*cos((4*pi*t)/T)*((4*pi)/T)
15    DDxd = (-1/3)*sin((4*pi*t)/T)*((4*pi)/T)*((4*pi)/T)
16    ##### ERROR DE POSICIÓN #####
17    e6x = xr - xd
18    e6y = yr - yd
19    ##### ERROR DE VELOCIDAD #####
20    De6x = dx_o - Dxd
21    De6y = dy_o - Dyd
22    ##### CONTROL AUXILIAR #####
23    rx6 = -kd*e6x - kp*De6x + DDxd
24    ry6 = -kd*e6y - kp*De6y + DDyd
25    u = rx6*cos(th) + ry6*sin(th)
```

```

25  wr = ((-sin(th)*rx6 + cos(th)*ry6)/(v1))
26  ##### Modelo Extendido #####
27  #dx = v1*cos(th)
28  #dy = v1*sin(th)
29  ddx = u*cos(th) - v1*wr*sin(th)
30  ddy = u*sin(th) + v1*wr*cos(th)
31  ##### Integral U #####
32  v2 = Dt*(u+u1)/2.0
33  v1 = (v1 + v2)
34  #####
35  ##### CONTROL #####
36  v6 = v1*1000  ## Entrada de Control Velocidad Lineal
37  w6 = wr*(180/pi)  ### Entrada de Control Velocidad Angular

```

Construcción del Observador de Estados.

```

1  ##### Errores de observacion #####
2  ex = xr - x1_o
3  ey = yr - y1_o
4
5  ##### Observador de estados #####
6  dx1_o = dx_o + 10*ex + 7*ey
7  dx2_o = dy_o + 8*ex + 20*ey
8  dx3_o = ddx + 30*ex + 1*ey
9  dx4_o = ddy + 2*ex + 5*ey
10
11 ##### Integrales del observador #####
12 x1_o = (Dt*dx1_o) + x1_o
13 y1_o = (Dt*dx2_o) + y1_o
14 dx_o = (Dt*dx3_o) + dx_o
15 dy_o = (Dt*dx4_o) + dy_o

```

Control no lineal Basado en Lyapunov.

```

1  if (Dt >= tmuestreo):
2  ##### POSICION DEL EJE MEDIO DE LAS RUEDAS DEL ROBOT #####
3  xr = lego06[0]
4  yr = lego06[1]
5  th = lego06[2]
6
7  ##### TRAYECTORIA LEMNISCATA #####
8  ##### X(t) #####
9  yd = sin((2*pi*t)/T)
10 Dyd = cos((2*pi*t)/T)*((2*pi)/T)
11 DDyd = (-1)*sin((2*pi*t)/T)*((2*pi)/T)*((2*pi)/T)
12
13 ##### Y(t) #####

```

```

14 xd = (1/3)*sin((4*pi*t)/T)
15 Dxd = (1/3)*cos((4*pi*t)/T)*((4*pi)/T)
16 DDxd = (-1/3)*sin((4*pi*t)/T)*((4*pi)/T)*((4*pi)/T)
17
18 ##### ERRORES DE POSICIÓN #####
19 e1 = xr - xd # Error en la posición x
20 e2 = yr - yd # Error en la posición y
21 e3 = th - thd # Error en la orientación
22
23 ##### FUNCIÓN DE LYAPUNOV #####
24 # V(e,t) = (k2/2) * (e1^2 + e2^2) + (1/2) * e3^2
25 V = (k2 / 2) * (e1**2 + e2**2) + (1 / 2) * e3**2
26
27 ##### CONTROL #####
28 u1 = -1 * e1 # k1 = 1 (Nota: en la ecuación k1 es función de v_d y ω_d, pero aquí se ha
    ↪ simplificado a k1 = 1)
29 if e3 != 0:
30     u2 = -2 * (sin(e3) / e3) * e2 - 4 * e3 # k2 = 2, k3 = 4
31 else:
32     u2 = -2 * e2 - 4 * e3 # Manejo del caso cuando e3 es cero

```