

CAPÍTULO 9

Propiedades dinámicas en productos II

Anahí Rojas, Aura L. Kantún-Montiel, José N. Méndez-Alcocer
Víctor M. Méndez-Salinas
Universidad del Papaloapan, Oaxaca, México

1. Introducción	149
2. Notación y conceptos básicos	150
3. Conjugación topológica	152
4. Propiedades dinámicas de funciones producto	156
5. Conclusiones	163
Bibliografía	165

1. Introducción

Un *sistema dinámico* es una pareja formada por un espacio topológico X (espacio fase) y una función $f : X \rightarrow X$, y es denotado por (X, f) . Además, si $X_1, \dots, X_m$ son espacios topológicos, con $m \geq 2$ y, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i : X_i \rightarrow X_i$ es una función, se puede definir la función $\prod_{i=1}^m f_i : \prod_{i=1}^m X_i \rightarrow \prod_{i=1}^m X_i$ dada por $\prod_{i=1}^m f_i((x_1, \dots, x_m)) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m))$, para cada $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Esta función es llamada *función producto*. De este modo, podemos analizar las relaciones entre los sistemas dinámicos (1) $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$ y (2) (X_i, f_i) , para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Sea $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: exacta, mezclante, transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω -transitiva, TT_{++} , suavemente mezclante, exactamente Devaney caótica, minimal inversa, totalmente minimal, dispersora, Touhey o un F -sistema. En [11], A. Rojas, F. Barragán y S. Macías, estudian relaciones entre las siguientes condiciones:

- (1) Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$ y
- (2) $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$,

considerando espacios topológicos y funciones no necesariamente continuas.

Continuando con el estudio realizado en [4, 11], en este capítulo analizaremos relaciones entre las condiciones (1) y (2) mencionadas anteriormente, ahora considerando las siguientes clases de funciones: exacta en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, completamente exacta, fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, muy fuertemente transitiva, exacta transitiva, fuertemente exacta transitiva y fuertemente producto transitiva.

Cabe mencionar que este capítulo está basado en las secciones tres y cuatro del artículo *Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products*

II [10]. El contenido se ha adaptado y reorganizado para hacerlo más accesible y comprensible para un público general.

2. Notación y conceptos básicos

En esta sección presentamos la notación y conceptos básicos necesarios para el desarrollo de este capítulo.

Dado un espacio topológico X y un subconjunto A de X , con $\text{int}(A)$ y $\text{cl}(A)$ denotaremos al interior y la clausura del conjunto A en X , respectivamente. También, nos referiremos a los conjuntos de números naturales y enteros no negativos como $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}_+$, respectivamente.

Por otra parte, si $f : X \rightarrow X$ es una función, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima iteración de f la definimos como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k . Es decir, $f^{k+1} = f \circ f^k$. Se entiende que $f^1 = f$ y se define $f^0 = \text{id}_X$ (la función identidad en X). Para un subconjunto A de X y k un entero, usaremos $f^k(A)$ para referirnos a la imagen de A bajo f^k cuando $k \geq 0$ y la preimagen bajo $f^{|k|}$ cuando $k < 0$.

En todo este capítulo, m denotará un entero mayor o igual que dos.

Definición 2.1. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea X_i un conjunto no vacío. Se define y denota su **producto cartesiano** como el conjunto:

$$\prod_{i=1}^m X_i = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in X_i, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Cuando $X_1 = X_2 = \dots = X_m$, al conjunto $\prod_{i=1}^m X_i$ se le denota con X^m .

Definición 2.2. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, τ_i) un espacio topológico. La **topología producto** $\mathcal{X}$ sobre el conjunto $\prod_{i=1}^m X_i$ es la topología que tiene como base la colección $\beta = \{U_1 \times \dots \times U_m : U_i \in \tau_i, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}$. El espacio topológico $(\prod_{i=1}^m X_i, \mathcal{X})$ se llama **espacio producto** de la familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^m$ y se denota simplemente por $\prod_{i=1}^m X_i$.

Definición 2.3. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sean X_i un conjunto no vacío y $f_i : X_i \rightarrow X_i$ una función. Se define la **función producto** $\prod_{i=1}^m f_i : \prod_{i=1}^m X_i \rightarrow \prod_{i=1}^m X_i$ como:

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i \right) ((x_1, \dots, x_m)) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)),$$

para cada $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$.

Cuando $f_1 = f_2 = \dots = f_m$, a la función $\prod_{i=1}^m f_i$ se le denota con $f^{\times m}$.

Definición 2.4. Sea (X, f) un sistema dinámico. La **órbita de un punto** $x \in X$ bajo f , denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, es el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$. Esto es:

$$\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Definición 2.5. Sean (X, f) un sistema dinámico y A y B subconjuntos de X . Se define el siguiente conjunto:

$$n_f(A, B) = \{k \in \mathbb{N} : A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset\}.$$

Definición 2.6. Sea (X, f) un sistema dinámico, y $x, y \in X$. Se tiene que x es un punto:

- **fijo de f** si $f(x) = x$;
- **transitivo de f** si la órbita $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X ;
- **periódico de f** si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$. El conjunto de puntos periódicos de f es denotado por $\text{Per}(f)$;
- **recurrente de f** si para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(x) \in U$;
- **casi-periódico de f** si para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^{kl}(x) \in U$ para cada $k \geq 0$;
- **no errante de f** si para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(U) \cap U \neq \emptyset$;
- **ω -límite de y bajo f** si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cualquier subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un entero positivo $l \geq k$ tal que $f^l(y) \in U$. El conjunto de todos los puntos ω -límite de y bajo f , es denotado por $\omega(y, f)$ y es llamado **conjunto ω -límite** de y .

En el diagrama de la Figura 1 se muestran contenciones entre las clases de puntos presentadas en la Definición 2.6 para el caso general, es decir, X espacio topológico y $f : X \rightarrow X$ una función no necesariamente continua.



FIGURA 1. Relaciones entre clases de puntos.

En [9], se puede encontrar un análisis detallado del diagrama de la Figura 1; además, mediante la construcción de contraejemplos, los autores establecen que estas contenciones entre clases de puntos son propias.

Las siguientes definiciones se pueden encontrar en [1, 2, 8, 12].

Definición 2.7. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es:

- **exacta**, si para cada subconjunto abierto no vacío U de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$;
- **mezclante**, si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$;
- **transitiva**, si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$;
- **débilmente mezclante**, si $f^{\times 2}$ es transitiva;
- **totalmente transitiva**, si f^s es transitiva, para todo $s \in \mathbb{N}$;
- **fuertemente transitiva**, si para cada subconjunto abierto no vacío U de X , existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{k=0}^s f^k(U) = X$;
- **caótica**, si es transitiva y $\text{Per}(f)$ es denso en X (esta definición corresponde al caos en el sentido Devaney [3]);
- **órbita-transitiva**, si existe $x \in X$ tal que $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$;
- **estrictamente órbita-transitiva**, si existe $x \in X$ tal que $\text{cl}(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$;
- **ω -transitiva**, si existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$;

- **TT_{++}** , si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , el conjunto $n_f(U, V)$ es infinito;
- **suavemente mezclante**, si para cualquier función transitiva $f_1 : X_1 \rightarrow X_1$, la función $f \times f_1$ es transitiva;
- **exactamente Devaney caótica**, si f es exacta y $\text{Per}(f)$ es denso en X ;
- **dispersora**, si para cualquier función minimal (esto es, si la órbita de cada punto de X es un conjunto denso en X), $f_1 : X_1 \rightarrow X_1$, la función $f \times f_1$ es transitiva;
- **Touhey**, si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , existe un punto periódico $x \in U$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f^k(x) \in V$;
- **un F -sistema**, si f es totalmente transitiva y $\text{Per}(f)$ es denso en X ;
- **exacta en el sentido de Akin-Auslander-Nagar**, si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$;
- **completamente exacta**, si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(f^k(U) \cap f^k(V)) \neq \emptyset$;
- **fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar**, si para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X , $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = X$;
- **muy fuertemente transitiva**, si para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{k=1}^N f^k(U) = X$;
- **exacta transitiva**, si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , $\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(U) \cap f^k(V))$ es denso en X ;
- **fuertemente exacta transitiva**, si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(U) \cap f^k(V)) = X$;
- **fuertemente producto transitiva**, si para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $f^{\times k}$ es fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar.

Por conveniencia, de aquí en adelante nos referimos a las funciones exactas en el sentido de Akin-Auslander-Nagar y fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar como AAN exactas y AAN fuertemente transitivas, respectivamente.

Además, ya que toda función exacta es sobreyectiva, se tiene que $f : X \rightarrow X$ es exacta si y sólo si, para todo subconjunto abierto no vacío U de X , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$, para cada $k \geq N$. En lo que resta de este trabajo, utilizaremos esta equivalencia.

En el diagrama de la Figura 2 se muestran algunas contenciones entre las clases de funciones de la Definición 2.7. Los lectores interesados en la prueba de dichas contenciones pueden revisar, por ejemplo, [1, 2, 5, 8, 9].

Por otra parte, al agregar las condiciones adecuadas al espacio fase o a la función, se pueden obtener otras relaciones entre clases de funciones. En [9], se encuentra un análisis detallado de contenciones entre las siguientes clases de funciones: AAN exactas, completamente exactas, AAN fuertemente transitivas, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas y fuertemente producto transitivas.

3. Conjugación topológica

En esta sección presentamos los resultados preliminares necesarios para el desarrollo de la Sección 4.

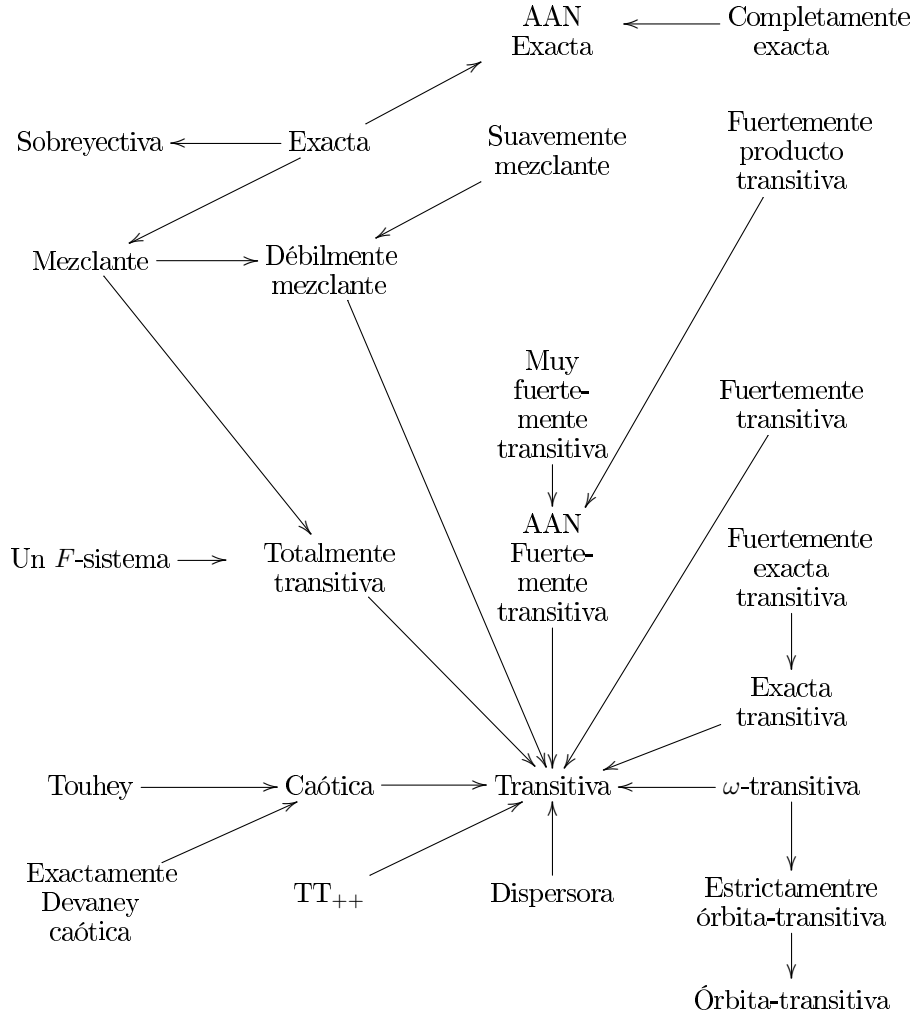


FIGURA 2. Relaciones entre clases de funciones.

Definición 3.1. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Se tiene que f y g son **topológicamente conjugadas** si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. El homeomorfismo h es llamado una **conjugación topológica entre f y g** .

Bajo las condiciones de la Definición [3.1](#) diremos que f y g son topológicamente conjugadas **vía h** .

Observación 3.2. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos, $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo y $k \in \mathbb{N}$. Si f y g son topológicamente conjugadas vía h , entonces:

- (1) g y f son topológicamente conjugadas vía h^{-1} ,
- (2) $f^k = h^{-1} \circ g^k \circ h$ y $g^k = h \circ f^k \circ h^{-1}$.

El siguiente resultado se sigue de [\[7\]](#) Proposición 2.3.29] y [\[6\]](#) Lema 7, p. 51].

Teorema 3.3. Sean $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m$ espacios topológicos, y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ una función. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es un homeomorfismo si y sólo si $\prod_{i=1}^m f_i$ es un homeomorfismo.

La prueba del Teorema 3.4 se sigue del Teorema 3.3. No obstante, para facilitar la comprensión de este capítulo y en consideración al lector, la hemos incluido.

Teorema 3.4. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos, $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo y $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que f y g son topológicamente conjugadas vía h si y sólo si $f^{\times k}$ y $g^{\times k}$ son topológicamente conjugadas vía $h^{\times k}$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f y g son topológicamente conjugadas vía h . Por el Teorema 3.3, $h^{\times k}$ es un homeomorfismo. Veamos que $h^{\times k} \circ f^{\times k} = g^{\times k} \circ h^{\times k}$. Sea $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$. De aquí,

$$\begin{aligned} (h^{\times k} \circ f^{\times k})((x_1, \dots, x_k)) &= h^{\times k}(f^{\times k}((x_1, \dots, x_k))) \\ &= h^{\times k}(f(x_1), \dots, f(x_k)) \\ &= (h(f(x_1)), \dots, h(f(x_k))) \\ &= (g(h(x_1)), \dots, g(h(x_k))) \\ &= g^{\times k}(h(x_1), \dots, h(x_k)) \\ &= g^{\times k}(h^{\times k}((x_1, \dots, x_k))) \\ &= (g^{\times k} \circ h^{\times k})((x_1, \dots, x_k)). \end{aligned}$$

Así, $f^{\times k}$ y $g^{\times k}$ son topológicamente conjugadas vía $h^{\times k}$.

Ahora supongamos que $f^{\times k}$ y $g^{\times k}$ son topológicamente conjugadas vía $h^{\times k}$. Sea $x \in X$. De aquí, $(x, \dots, x) \in X^k$ y por hipótesis,

$$\begin{aligned} (h^{\times k} \circ f^{\times k})((x, \dots, x)) &= (g^{\times k} \circ h^{\times k})((x, \dots, x)) \\ (h(f(x)), \dots, h(f(x))) &= (g(h(x)), \dots, g(h(x))) \end{aligned}$$

Finalmente, $(h \circ f)(x) = (g \circ h)(x)$, para cualquier $x \in X$. Más aún, por el Teorema 3.3, h es un homeomorfismo. Por lo tanto, f y g son topológicamente conjugadas vía h . $\square$

Existen propiedades dinámicas que se preservan bajo conjugación topológica, como vemos a continuación.

Teorema 3.5. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos, $h : X \rightarrow Y$ una conjugación topológica entre f y g y $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: AAN exacta, completamente exacta, AAN fuertemente transitiva, muy fuertemente transitiva, exacta transitiva, fuertemente exacta transitiva o fuertemente producto transitiva. Se cumple que $f \in \mathcal{M}$ si y sólo si $g \in \mathcal{M}$.

DEMOSTRACIÓN: Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de Y . De aquí, $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X .

Supongamos que f es AAN exacta. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V)) \neq \emptyset$, esto es, $h^{-1}(g^k(U)) \cap h^{-1}(g^k(V)) = h^{-1}(g^k(U) \cap g^k(V)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $g^k(U) \cap g^k(V) \neq \emptyset$ y así, g es AAN exacta.

Supongamos que f es completamente exacta. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{int}(f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V))) \neq \emptyset.$$

Es decir, $\text{int}(h^{-1}(g^k(U)) \cap h^{-1}(g^k(V))) = \text{int}(h^{-1}(g^k(U) \cap g^k(V))) \neq \emptyset$. Sea $x \in \text{int}(h^{-1}(g^k(U) \cap g^k(V)))$. Luego, existe un subconjunto abierto W de X tal que $x \in W \subseteq h^{-1}(g^k(U) \cap g^k(V))$. Finalmente, $h(x) \in h(W) \subseteq g^k(U) \cap g^k(V)$. Por lo tanto, $h(x) \in \text{int}(g^k(U) \cap g^k(V))$ y así, g es completamente exacta.

Supongamos que f es AAN fuertemente transitiva. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{\infty} g^k(U) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (h \circ f^k \circ h^{-1})(U) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} h(f^k(h^{-1}(U))) \\ &= h \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(h^{-1}(U)) \right). \end{aligned}$$

Ya que f es AAN fuertemente transitiva, $\bigcup_{k=1}^{\infty} g^k(U) = h(X) = Y$. Por lo tanto, g es AAN fuertemente transitiva.

La prueba para la clase de las funciones muy fuertemente transitivas es similar a la dada para la clase de las funciones AAN fuertemente transitivas.

Supongamos que f es exacta transitiva. De aquí,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V)))$$

es denso en X y, puesto que h es un homeomorfismo, se tiene que

$$h \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V))) \right)$$

es denso en Y . Además, utilizando la Observación 3.2, parte (2):

$$\begin{aligned} h \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V))) \right) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} h(f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V))) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (g^k(U) \cap g^k(V)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, g es exacta transitiva.

Supongamos que f es fuertemente exacta transitiva. De aquí,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V))) = X,$$

lo cual implica que $h(\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V)))) = Y$. Finalmente,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (g^k(U) \cap g^k(V)) = Y.$$

Por lo tanto, g es fuertemente exacta transitiva.

Supongamos que f es fuertemente producto transitiva. De aquí, $f^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Por otro lado, por el Teorema 3.4, $f^{\times k}$ y $g^{\times k}$ son topológicamente conjugadas vía $h^{\times k}$. Finalmente, por el tercer párrafo de

la prueba de este teorema, $g^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, g es fuertemente producto transitiva.

La prueba del recíproco se sigue de la Observación 3.2, parte (1). $\square$

Concluimos esta sección estableciendo que las funciones $(\prod_{i=1}^m f_i)^{\times k}$ y $\prod_{i=1}^m f_i^{\times k}$ son topológicamente conjugadas. Antes tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, $k \in \mathbb{N}$, y $h : (\prod_{i=1}^m X_i)^k \rightarrow \prod_{i=1}^m X_i^k$ una función dada por:*

$$h((x_1^1, \dots, x_m^1), \dots, (x_1^k, \dots, x_m^k)) = ((x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^k), \dots, (x_m^1, x_m^2, \dots, x_m^k)).$$

Se tiene que h es un homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: No es difícil verificar que h es una función biyectiva. Veamos que h es una función continua y abierta. Sean $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i^k$ y $\varphi \in h^{-1}(\mathcal{U})$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y todo $j \in \{1, \dots, k\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i^j de X_i tal que $h(\varphi) \in \prod_{i=1}^m (\prod_{j=1}^k U_i^j) \subseteq \mathcal{U}$, esto es, $\varphi \in h^{-1} \left(\prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^k U_i^j \right) \right) \subseteq h^{-1}(\mathcal{U})$. Más aún, ya que $h^{-1} \left(\prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^k U_i^j \right) \right) = \prod_{j=1}^k \left(\prod_{i=1}^m U_i^j \right)$, se tiene que $h^{-1}(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de $(\prod_{i=1}^m X_i)^k$. Por lo tanto, h es continua.

Ahora, sean $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $(\prod_{i=1}^m X_i)^k$ y $\varphi \in h(\mathcal{U})$. Se sigue que, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ y cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i^j de X_i tal que $h^{-1}(\varphi) \in \prod_{j=1}^k \left(\prod_{i=1}^m U_i^j \right) \subseteq \mathcal{U}$. Más aún, ya que $h(\prod_{j=1}^k (\prod_{i=1}^m U_i^j)) = \prod_{i=1}^m (\prod_{j=1}^k U_i^j)$, concluimos que $\varphi \in \prod_{i=1}^m (\prod_{j=1}^k U_i^j) \subseteq h(\mathcal{U})$. Por lo tanto, h es abierta y así, h es un homeomorfismo. $\square$

Como una consecuencia del Teorema 3.6, obtenemos lo siguiente.

Teorema 3.7. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, y sean $k \in \mathbb{N}$ y $h : (\prod_{i=1}^m X_i)^k \rightarrow \prod_{i=1}^m X_i^k$ como en el Teorema 3.6. Se tiene que las funciones $(\prod_{i=1}^m f_i)^{\times k}$ y $\prod_{i=1}^m f_i^{\times k}$ son topológicamente conjugadas vía el homeomorfismo h .*

De la Observación 3.2, parte (1), y los Teoremas 3.7 y 3.5, se desprende el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, y sean $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: AAN exacta, completamente exacta, AAN fuertemente transitiva, muy fuertemente transitiva, exacta transitiva, fuertemente exacta transitiva o fuertemente producto transitiva. Se tiene que $(\prod_{i=1}^m f_i)^{\times k} \in \mathcal{M}$ si y sólo si $\prod_{i=1}^m f_i^{\times k} \in \mathcal{M}$.*

4. Propiedades dinámicas de funciones producto

En esta sección estudiamos las relaciones que existen entre las funciones $\prod_{i=1}^m f_i$ y f_i , para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, cuando cualquiera de estas es AAN exacta, completamente exacta, AAN fuertemente transitiva, muy fuertemente transitiva, exacta transitiva, fuertemente exacta transitiva o fuertemente producto transitiva.

En [11] Teorema 3.3], A. Rojas, F. Barragán y S. Macías estudiaron relaciones entre puntos transitivos, ω -límite, aislados y periódicos de las funciones $\prod_{i=1}^m f_i$ y

f_i , para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Ahora, analizamos el mismo problema considerando puntos recurrentes, casi-periódicos y no errantes.

Teorema 4.1. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, y sea $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Si $(x_1, \dots, x_m)$ es un punto recurrente, casi-periódico o no errante de $\prod_{i=1}^m f_i$, entonces, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, x_i es un punto recurrente, casi-periódico o no errante de f_i , respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $(x_1, \dots, x_m)$ es un punto recurrente de $\prod_{i=1}^m f_i$. Sean $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ y U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $U_i = X_i$. De aquí, $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{U}$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \dots, x_m)) \in \mathcal{U}$ esto es, $(\prod_{i=1}^m f_i^k)((x_1, \dots, x_m)) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $f_{i_0}^k(x_{i_0}) \in U_{i_0}$ y así, x_{i_0} es un punto recurrente de f_{i_0} .

La prueba para puntos casi-periódicos y no errantes es similar a la dada para puntos recurrentes. $\square$

En el Teorema 4.2 se reemplaza la condición “ X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i ” de [11, Teorema 3.7] por “ $x_i \in X_i$ es un punto fijo de f_i ” para obtener un resultado análogo.

Teorema 4.2. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sean (X_i, f_i) un sistema dinámico y $x_i \in X_i$, y sea $i_0 \in \{1, \dots, m\}$. Se cumple lo siguiente:*

- (1) *Si $\omega(x_{i_0}, f_{i_0}) = X_{i_0}$ y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, x_i es un punto fijo de f_i , entonces $\omega((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$.*
- (2) *Si $\text{cl}(\mathcal{O}(x_{i_0}, f_{i_0})) = X_{i_0}$ y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, x_i es un punto fijo de f_i , entonces $\text{cl}(\mathcal{O}((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$.*

DEMOSTRACIÓN: (1) Tomemos $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ y supongamos que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, x_i es un punto fijo de f_i y que $\omega(x_{i_0}, f_{i_0}) = X_{i_0}$. Sea $(y_1, \dots, y_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Veamos que $(y_1, \dots, y_m) \in \omega((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{U}$ y $k \in \mathbb{N}$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe un abierto U_i de X_i tal que $(y_1, \dots, y_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, existe $l \geq k$ tal que $f_{i_0}^l(x_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por otra parte, para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, como x_i es un punto fijo y $x_i \in U_i$, $f_i^l(x_i) \in U_i$. Así, $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((x_1, \dots, x_m)) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $(y_1, \dots, y_m) \in \omega((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)$ y así, $\omega((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$.

(2) Supongamos que x_{i_0} es un punto transitivo. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{U}$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe un subconjunto abierto U_i de X_i tal que $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, existe $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f_{i_0}^l(x_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por otro lado, ya que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, x_i es un punto fijo de f_i , se tiene que $f_i^l(x_i) \in U_i$. Así,

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^l((x_1, \dots, x_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}.$$

Finalmente, $\mathcal{O}((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{O}((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$ y así $(x_1, \dots, x_m)$ es un punto transitivo de $\prod_{i=1}^m f_i$. $\square$

Teorema 4.3. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sean $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ e $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea*

$x_i \in X_i$ un punto fijo de f_i . Si x_{i_0} es un punto recurrente, casi-periódico o no errante de f_{i_0} , entonces $(x_1, \dots, x_m)$ es un punto recurrente, casi-periódico o no errante de $\prod_{i=1}^m f_i$, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que x_{i_0} es un punto recurrente de f_{i_0} . Sea Ω un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(x_1, \dots, x_m) \in \Omega$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe un subconjunto abierto U_i de X_i tal que $(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega$. Por hipótesis, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}^{k_{i_0}}(x_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por otro lado, ya que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, x_i es un punto fijo, se tiene que $f_i^{k_{i_0}}(x_i) \in U_i$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}})((x_1, \dots, x_m)) \in \mathcal{U}$, es decir, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{k_{i_0}}((x_1, \dots, x_m)) \in \mathcal{U} \subseteq \Omega$. Por lo tanto, $(x_1, \dots, x_m)$ es un punto recurrente de $\prod_{i=1}^m f_i$.

La prueba para puntos casi-periódicos y no errantes es similar a la dada para puntos recurrentes. $\square$

Teorema 4.4. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Se tiene que $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN exacta si y sólo si f_i es AAN exacta, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN exacta. Sean $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, y U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} . Para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sean $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De este modo, $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^k (\mathcal{U}) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^k (\mathcal{V}) \neq \emptyset,$$

es decir, $(\prod_{i=1}^m f_i^k(U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m f_i^k(V_i)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0}) \neq \emptyset$ y así, f_{i_0} es AAN exacta.

Ahora supongamos que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es AAN exacta. Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Así, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i) \cap f_i^{k_i}(V_i) \neq \emptyset$. Sea $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Luego, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $l_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $k = k_i + l_i$ y así,

$$f_i^k(U_i) \cap f_i^k(V_i) = f_i^{l_i}(f_i^{k_i}(U_i) \cap f_i^{k_i}(V_i)) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, $(\prod_{i=1}^m f_i^k(U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m f_i^k(V_i)) \neq \emptyset$. Finalmente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{V}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\Omega_1) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\Omega_2) \neq \emptyset$ y así, $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN exacta. $\square$

Teorema 4.5. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, y sea $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: completamente exactas, AAN fuertemente transitivas, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas o fuertemente producto transitivas. Si $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$, entonces, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} , y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sean $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. Se tiene que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es completamente exacta. De aquí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}((\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{V})) \neq \emptyset$. Esto es

$$\text{int} \left(\left(\prod_{i=1}^m f_i^k(U_i) \right) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i^k(V_i) \right) \right) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, $\left(\prod_{i=1}^m \text{int}(f_i^k(U_i)) \right) \cap \left(\prod_{i=1}^m \text{int}(f_i^k(V_i)) \right) \neq \emptyset$, lo cual implica que $\text{int}(f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0})) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f_{i_0} es completamente exacta.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN fuertemente transitiva. De aquí, se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty} (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) = \prod_{i=1}^m X_i$. Sea $x_{i_0} \in X_{i_0}$, y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $x_i \in X_i$. Claramente $\varphi = (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Luego, por hipótesis, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_{i_0}}(\mathcal{U})$, esto es, $\varphi \in \prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}}(U_i)$. Por lo tanto, $x_{i_0} \in f_{i_0}^{k_{i_0}}(U_{i_0}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f_{i_0}^k(U_{i_0})$ y así, f_{i_0} es AAN fuertemente transitiva.

La prueba para la clase de las funciones muy fuertemente transitivas es similar a la dada para la clase de las funciones AAN fuertemente transitivas.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta transitiva. Luego, $\bigcup_{k=1}^{\infty} ((\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{V}))$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Sea W_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $W_i = X_i$. Notemos que $\mathcal{W} = \prod_{i=1}^m W_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Consecuentemente, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $((\prod_{i=1}^m f_i)^{k_{i_0}}(\mathcal{U}) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_{i_0}}(\mathcal{V})) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$, o bien, $(\prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}}(U_i) \cap \prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}}(V_i)) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. En consecuencia, $(f_{i_0}^{k_{i_0}}(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{k_{i_0}}(V_{i_0})) \cap W_{i_0} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^{\infty} (f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0}))$ es denso en X_{i_0} y así, f_{i_0} es exacta transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es fuertemente exacta transitiva. De aquí,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^k(\mathcal{U}) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^k(\mathcal{V}) \right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Sea $x_{i_0} \in X_{i_0}$, y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $x_i \in X_i$. Así, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi = (x_1, \dots, x_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_{i_0}}(\mathcal{U}) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_{i_0}}(\mathcal{V})$, esto es, $\varphi \in (\prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}}(U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}}(V_i))$. Lo cual implica que $x_{i_0} \in f_{i_0}^{k_{i_0}}(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{k_{i_0}}(V_{i_0})$. Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^{\infty} (f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0})) = X_{i_0}$ y así, f_{i_0} es fuertemente exacta transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es fuertemente producto transitiva. Luego, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Por el Teorema 3.8, se tiene que $\prod_{i=1}^m f_i^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva. Finalmente, por el tercer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que $f_{i_0}^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, f_{i_0} es fuertemente producto transitiva. $\square$

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico con X_i +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i [11, pág. 493]. En [11, Teorema 4.10], A. Rojas, F. Barragán y S. Macías, demostraron que: si para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, caótica, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω -transitiva, TT_{++} , Touhey, scattering, un F -sistema o suavemente mezclante, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ tiene la misma propiedad. En los Teoremas 4.8, 4.9 y 4.10, presentamos una forma alternativa de [11, Teorema 4.10]

cuando $\mathcal{M}$ es una de las siguientes clases de funciones: transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, caótica, TT_{++} , Touhey o un F -sistema. Específicamente, reemplazamos la condición “para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y $f_i \in \mathcal{M}$ ” por “para todo $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es mezclante, y f_{i_0} es sobreyectiva, continua y transitiva (respectivamente, débilmente mezclante, totalmente transitiva o TT_{++})” (Teorema 4.8), “para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es mezclante y $\text{Per}(f_i)$ es denso en X_i , y f_{i_0} es sobreyectiva, continua y caótica (respectivamente, un F -sistema)” (Teorema 4.9) y “para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es continua y mezclante, y $\text{Per}(f_i)$ es denso en X_i , y f_{i_0} sobreyectiva, continua y Touhey” (Teorema 4.10). Más aún, exploramos las siguientes clases de funciones: AAN exactas, completamente exactas, AAN fuertemente transitivas, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas y fuertemente producto transitivas, obteniendo resultados análogos a los presentados en [11] Teorema 4.10].

Teorema 4.6. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sean $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ y f_{i_0} sobreyectiva, y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea f_i exacta. Si f_{i_0} es AAN fuertemente transitiva, fuertemente transitiva, muy fuertemente transitiva, fuertemente exacta transitiva o fuertemente producto transitiva, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN fuertemente transitiva, fuertemente transitiva, muy fuertemente transitiva, fuertemente exacta transitiva o fuertemente producto transitiva, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f_{i_0} es AAN fuertemente transitiva. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega$. Ya que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es exacta, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^l(U_i) = X_i$, para cada $l \geq N_i$. Por hipótesis, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f_{i_0}^k(U_{i_0}) = X_{i_0}$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}\}$. En consecuencia, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f_{i_0}^{N+k}(U_{i_0}) = X_{i_0}$. Finalmente, si $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_0} \in f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(U_{i_0})$, y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, $x_i \in f_i^{N+k_{i_0}}(U_i)$. De este modo, $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m f_i^{N+k_{i_0}}(U_i)$, esto es

$$(x_1, \dots, x_m) \in \left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^{N+k_{i_0}} (\mathcal{U}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^k (\Omega).$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN fuertemente transitiva.

La prueba para la clase de las funciones muy fuertemente transitivas y fuertemente transitivas es similar a la dada para la clase de las funciones AAN fuertemente transitivas.

Supongamos que f_{i_0} es fuertemente exacta transitiva. Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Ya que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es exacta, existen $N_i^1, N_i^2 \in \mathbb{N}$ tales que $f_i^{k_1}(U_i) = X_i$ y $f_i^{k_2}(V_i) = X_i$, para todo $k_1 \geq N_i^1$ y $k_2 \geq N_i^2$. Por hipótesis, $\bigcup_{k=1}^{\infty} (f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0})) = X_{i_0}$. Sea $N = \max\{N_i^1, N_i^2 : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}\}$. Notemos que $\bigcup_{k=1}^{\infty} (f_{i_0}^{N+k}(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{N+k}(V_{i_0})) = X_{i_0}$. Sea $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_0} \in f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(V_{i_0})$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, $x_i \in f_i^{N+k_{i_0}}(U_i) \cap f_i^{N+k_{i_0}}(V_i)$. En consecuencia,

$(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m f_i^{N+k_{i_0}}(U_i) \cap \prod_{i=1}^m f_i^{N+k_{i_0}}(V_i)$, es decir

$$(x_1, \dots, x_m) \in \left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^{N+k_{i_0}} (\mathcal{U}) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^{N+k_{i_0}} (\mathcal{V}).$$

Esto implica que

$$(x_1, \dots, x_m) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^k (\Omega_1) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^k (\Omega_2) \right).$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es fuertemente exacta transitiva.

Supongamos que f_{i_0} es fuertemente producto transitiva. Así, $f_{i_0}^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Además, por [11] Teorema 4.3], para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, $f_i^{\times k}$ es exacta. Por el primer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva, o bien, por el Teorema 3.8] $(\prod_{i=1}^m f_i)^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es fuertemente producto transitiva. $\square$

Teorema 4.7. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sea f_{i_0} continua y exacta transitiva, para algún $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$ sea f_i exacta. Se tiene que $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta transitiva.*

DEMOSTRACIÓN: Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Dado que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es exacta, existen $N_i^1, N_i^2 \in \mathbb{N}$ tales que $f_i^{k_1}(U_i) = X_i$, para cada $k_1 \geq N_i^1$ y $f_i^{k_2}(V_i) = X_i$, para todo $k_2 \geq N_i^2$. Por otro lado, puesto que f_{i_0} es exacta transitiva, $\bigcup_{k=1}^{\infty} (f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0}))$ es denso en X_{i_0} . Sea $N = \max\{N_i^1, N_i^2 : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}\}$. Como f_{i_0} es continua, se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty} (f_{i_0}^{N+k}(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{N+k}(V_{i_0}))$ es denso en X_{i_0} . Sea Ω_3 un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De este modo, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío W_i de X_i tal que $\mathcal{W} = \prod_{i=1}^m W_i \subseteq \Omega_3$. En consecuencia, existen $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ y $x_{i_0} \in X_{i_0}$ tales que $x_{i_0} \in f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(V_{i_0}) \cap W_{i_0}$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, $f_i^{N+k_{i_0}}(U_i) = X_i$ y $f_i^{N+k_{i_0}}(V_i) = X_i$. Finalmente, para todo $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $x_i \in W_i$. Notemos que $(x_1, \dots, x_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i^{N+k_{i_0}}(U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m f_i^{N+k_{i_0}}(V_i))$, es decir,

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_m) &\in \left(\left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^{N+k_{i_0}} (\mathcal{U}) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^{N+k_{i_0}} (\mathcal{V}) \right) \cap \mathcal{W} \\ &\subseteq \left(\left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^{N+k_{i_0}} (\Omega_1) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^{N+k_{i_0}} (\Omega_2) \right) \cap \Omega_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^{\infty} ((\prod_{i=1}^m f_i)^k (\Omega_1) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^k (\Omega_2))$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$ y así, $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta transitiva. $\square$

Teorema 4.8. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sea f_{i_0} una función continua y sobreyectiva, para algún $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea f_i mezclante. Si f_{i_0} es transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva o TT_{++} , entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva o TT_{++} , respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f_{i_0} es transitiva. Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Dado que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para todo $k \geq N_i$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}\}$. Es claro que $f_{i_0}^N$ es sobreyectiva y continua, lo cual implica que $f_{i_0}^{-N}(V_{i_0})$ es un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} . Por hipótesis, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}^l(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}) \neq \emptyset$. De aquí, $f_{i_0}^N(f_{i_0}^l(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{-N}(V_{i_0})) = f_{i_0}^{N+l}(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, $f_i^{N+l}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Consecuentemente, existe $(x_1, \dots, x_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i^{N+l}(U_i)) \cap \mathcal{V} = ((\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\mathcal{U})) \cap \mathcal{V}$ y así, $((\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\Omega_1)) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva.

Supongamos que f_{i_0} es débilmente mezclante. Sea $\Omega_1, \Omega_2, \Sigma_1$ y Σ_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i^1, U_i^2, V_i^1 y V_i^2 de X_i tales que $\mathcal{U}_1 = \prod_{i=1}^m U_i^1 \subseteq \Omega_1$, $\mathcal{U}_2 = \prod_{i=1}^m U_i^2 \subseteq \Omega_2$, $\mathcal{V}_1 = \prod_{i=1}^m V_i^1 \subseteq \Sigma_1$ y $\mathcal{V}_2 = \prod_{i=1}^m V_i^2 \subseteq \Sigma_2$. Puesto que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es mezclante, existen $N_i^1, N_i^2 \in \mathbb{N}$ tales que $f_i^{k_1}(U_i^1) \cap V_i^1 \neq \emptyset$ y $f_i^{k_2}(U_i^2) \cap V_i^2 \neq \emptyset$, para todo $k_1 \geq N_i^1$ y $k_2 \geq N_i^2$. Sea $N = \max\{N_i^1, N_i^2 : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}\}$. Como $f_{i_0}^N$ es sobreyectiva y continua, se tiene que $f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}^1)$ y $f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}^2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} . Por hipótesis, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}^l(U_{i_0}^1) \cap f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}^1) \neq \emptyset$ y $f_{i_0}^l(U_{i_0}^2) \cap f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}^2) \neq \emptyset$. Esto implica que $f_{i_0}^{N+l}(U_{i_0}^1) \cap V_{i_0}^1 \neq \emptyset$ y $f_{i_0}^{N+l}(U_{i_0}^2) \cap V_{i_0}^2 \neq \emptyset$. Por otra parte, para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, $f_i^{N+l}(U_i^1) \cap V_i^1 \neq \emptyset$ y $f_i^{N+l}(U_i^2) \cap V_i^2 \neq \emptyset$. Consecuentemente, existen $(x_1, \dots, x_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{V}_1$ y $(y_1, \dots, y_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{V}_2$ y así, $((\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\Omega_1)) \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$ y $((\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\Omega_2)) \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es débilmente mezclante.

Supongamos que f_{i_0} es totalmente transitiva. Sean $s \in \mathbb{N}$, Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Dado que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $k \geq N_i$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}\}$. Es claro que $f_{i_0}^{sN}$ es sobreyectiva y continua y así, $f_{i_0}^{-sN}(V_{i_0})$ es un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} . Por hipótesis, puesto que $f_{i_0}^s$ es transitiva, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $(f_{i_0}^s)^l(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{-sN}(V_{i_0}) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $f_{i_0}^{sN+sl}(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, $f_i^{sN+sl}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Luego, existe

$$(x_1, \dots, x_m) \in \left(\prod_{i=1}^m f_i^{sN+sl}(U_i) \right) \cap \left(\prod_{i=1}^m V_i \right) = \left(\prod_{i=1}^m f_i \right)^{sN+sl} (\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}$$

y así, $((\prod_{i=1}^m f_i)^s)^{N+l}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Finalmente, $((\prod_{i=1}^m f_i)^s)^{N+l}(\Omega_1) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es transitiva y así, $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva.

Supongamos que f_{i_0} es TT_{++} . Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Puesto que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $k \geq N_i$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}\}$. Note que f_{i_0} es sobreyectiva y continua, lo cual implica que $f_{i_0}^{-N}(V_{i_0})$ es un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} . Más aún, como f_{i_0} es TT_{++} , se tiene que $n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}))$ es infinito. Sea $l \in n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}))$. Se tiene que, $f_{i_0}^l(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $f_{i_0}^{N+l}(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$. Por otra parte, para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, $f_i^{N+l}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. De lo anterior, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y así, $N+l \in n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\Omega_1, \Omega_2)$. Finalmente, ya que $n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}))$ es infinito, se tiene que $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\Omega_1, \Omega_2)$ es infinito. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es TT_{++} . $\square$

Como una consecuencia de [11, Teorema 3.15] y del Teorema 4.8, se sigue el resultado siguiente.

Teorema 4.9. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sea f_{i_0} continua y sobreyectiva para algún $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea f_i mezclante y $\text{Per}(f_i)$ denso en X_i . Si f_{i_0} es caótica o un F -sistema, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es caótica o un F -sistema, respectivamente.*

Teorema 4.10. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sea f_{i_0} sobreyectiva, continua y Touhey para algún $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea f_i continua y mezclante y $\text{Per}(f_i)$ denso en X_i . Se tiene que $\prod_{i=1}^m f_i$ es Touhey.*

DEMOSTRACIÓN: Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Ya que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $k \geq N_i$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}\}$. Notemos que $f_{i_0}^N$ es sobreyectiva y continua, lo cual implica que $f_{i_0}^{-N}(V_{i_0})$ es un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} . Por hipótesis, existe un punto periódico $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y $k_{i_0} \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f_{i_0}^{k_{i_0}}(x_{i_0}) \in f_{i_0}^{-N}(V_{i_0})$. Se sigue que, $f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(x_{i_0}) \in V_{i_0}$. Por otra parte, para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, $f_i^{N+k_{i_0}}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ y así, $U_i \cap f_i^{-(N+k_{i_0})}(V_i)$ es un subconjunto abierto no vacío de X_i . Más aún, ya que para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, $\text{Per}(f_i)$ es denso en X_i , se tiene que, existe $x_i \in U_i \cap f_i^{-(N+k_{i_0})}(V_i)$ tal que $x_i \in \text{Per}(f_i)$. Finalmente, $(x_1, \dots, x_m) \in \Omega_1$, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{N+k_{i_0}}((x_1, \dots, x_m)) \in \mathcal{V} \subseteq \Omega_2$ y por [11, Teorema 3.3], parte (4), $(x_1, \dots, x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es Touhey. $\square$

5. Conclusiones

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. En los teoremas 4.4 y 4.5, se verificó que si la función producto $\prod_{i=1}^m f_i$, pertenece a alguna de las siguientes clases de funciones: AAN exactas, completamente exactas, AAN fuertemente transitivas, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas o fuertemente producto transitivas, entonces, para cada

$f_{i_0} + f_i, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\} \Rightarrow \prod_{i=1}^m f_i$		
AAN exacta	AAN exacta	AAN exacta Teorema 4.4
AAN fuertemente transitiva y sobreyectiva	exacta	AAN fuertemente transitiva Teorema 4.6
fuertemente transitiva y sobreyectiva	exacta	fuertemente transitiva Teorema 4.6
muy fuertemente transitiva y sobreyectiva	exacta	muy fuertemente transitiva Teorema 4.6
fuertemente exacta transitiva y sobreyectiva	exacta	fuertemente exacta transitiva Teorema 4.6
fuertemente producto transitiva y sobreyectiva	exacta	fuertemente producto transitiva Teorema 4.6
exacta transitiva y continua	exacta	exacta transitiva Teorema 4.7
transitiva, continua y sobreyectiva	mezclante	transitiva Teorema 4.8
débilmente mezclante, continua y sobreyectiva	mezclante	débilmente mezclante Teorema 4.8
totalmente transitiva, continua y sobreyectiva	mezclante	totalmente transitiva Teorema 4.8
TT_{++} , continua y sobreyectiva	mezclante	TT_{++} Teorema 4.8
caótica, continua y sobreyectiva	mezclante y $\text{Per}(f_i)$ denso en X_i	caótica Teorema 4.9
un F -sistema, continua y sobreyectiva	mezclante y $\text{Per}(f_i)$ denso en X_i	un F -sistema Teorema 4.9
Touhey, continua y sobreyectiva	continua y mezclante y $\text{Per}(f_i)$ denso en X_i	Touhey Teorema 4.10

FIGURA 3. Resumen de resultados

$i \in \{1, \dots, m\}$, f_i pertenece a la misma clase. Más aún, para el caso de la clase de las funciones AAN exactas, el recíproco es verdadero (Teorema 4.4).

Para el resto de clases no fue posible demostrar la contrarrecíproca, sin embargo, al pedir más propiedades a las funciones, es posible establecer otras relaciones entre clases. En el cuadro de la Figura 3, hemos resumido dichos resultados.

Agradecimientos: Los autores agradecemos al revisor o a la revisora el tiempo dedicado a la lectura de este escrito y sus valiosas recomendaciones que sin duda alguna, mejoraron la presentación de este capítulo.

Bibliografía

- [1] E. Akin, J. D. Carlson, *Conceptions of topological transitivity*, Topology Appl. **159(12)** (2012), 2815–2830.
- [2] E. Akin, J. Auslander and A. Nagar, *Variations on the concept of topological transitivity*, Studia Math. **235(3)** (2016), 225–249.
- [3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, *On Devaney’s definition of chaos*, Amer. Math. Monthly, **99(4)** (1992), 332–334.
- [4] F. Barragán y A. Rojas, *Propiedades dinámicas en productos*. Capítulo 8 en Topología y sus Aplicaciones 8. Editores: Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Manuel Ibarra Contreras y Agustín Contreras Carreto. Dirección General de Publicaciones, BUAP, Manuales y Textos, 2021.
- [5] E. Bilokopytov and S. F. Kolyada, *Transitive maps on topological spaces*, Ukr. Math. J. **65(9)** (2014), 1293–1318.
- [6] C. R. Borges, Elementary Topology and Applications, World Scientific, Singapore, 2000.
- [7] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [8] J. H. Mai and W. H. Sun, *Transitivities of maps of general topological spaces*, Topology Appl. **157(5)** (2010), 946–953.
- [9] A. Rojas, A. L. Kantún-Montiel, J. N. Méndez-Alcocer y V. M. Méndez-Salinas, *Más nociones relacionadas con la transitividad topológica*. Capítulo 6 en Topología y sus Aplicaciones 9. Editores: Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Raúl Escobedo Conde y María de Jesús López Toriz. Dirección General de Publicaciones, BUAP, Manuales y Textos, 2023.
- [10] A. Rojas, A. L. Kantún, J. N. Méndez y V. M. Méndez, *Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products II*, Glas. Mat. **59(79)** (2024), 147–169.
- [11] A. Rojas, F. Barragán and S. Macías, *Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products*, Turk. J. Math. **44(2)** (2020), 491–523.
- [12] P. Touhey, *Yet another definition of chaos*, Am. Math. Mon. **104(5)** (1997), 411–414.

Correo electrónico:

arojas@unpa.edu.mx (Anahí Rojas),
 alkantun@unpa.edu.mx (Aura L. Kantún Montiel),
 jmendez@unpa.edu.mx (José N. Méndez Alcocer),
 vmendez@unpa.edu.mx (Víctor M. Méndez Salinas).