



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

**ALGORITMO DE GRADO TOTAL PARA
LA APROXIMACIÓN RACIONAL
MINIMAX DISCRETA**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

ALFA KAREN MARTÍNEZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ NOBEL MÉNDEZ ALCOCER

LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO

FEBRERO 2022

UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

LA PRESENTE TESIS TITULADA “ALGORITMO DE GRADO TOTAL PARA LA APROXIMACIÓN RACIONAL MINIMAX DISCRETA” PRESENTADA POR LA SUS-TENTANTE DE LA LICENCIATURA C. ALFA KAREN MARTÍNEZ HERNÁNDEZ BA-JO LA DIRECCIÓN DEL DR. JOSÉ NOBEL MÉNDEZ ALCOCER , HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITÉ EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLI-CADAS.

DR. JOSÉ NOBEL MÉNDEZ ALCOCER
DIRECTOR

DR. JUAN MANUEL
PÉREZ ABARCA
REVISOR



DRA. IVONNE LILIÁN
MARTÍNEZ CORTÉS
REVISORA

DR. VÍCTOR MANUEL MÉNDEZ
SALINAS
REVISOR

LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO

FEBRERO 2022



Universidad del Papaloapan

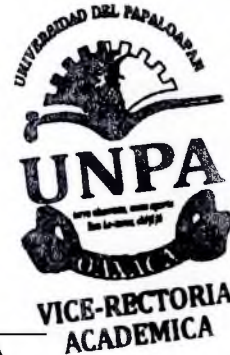
FECHA:	22 de Febrero del 2022
ÁREA:	Vice-Rectoría Académica
OFICIO NÚMERO:	UNPA/VRA/051/2022
ASUNTO:	Autorización de Impresión de tesis.

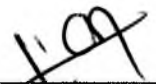
C. ALFA KAREN MARTINEZ HERNANDEZ
P R E S E N T E:

En base al artículo 120 del reglamento de alumnos, por medio de la presente se aprueba la impresión de la tesis titulada "**Algoritmo de grado total para la aproximación racional *minimax discreta***" así como la programación del examen profesional bajo la dirección del Dr. José Nobel Méndez Alcocer.

Sin más por el momento aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente.
terra uberrima, mens aperta
Bou Lo-tama, chi jí jú




MC. HÉCTOR LÓPEZ ARJONA
Vice-Rector Académico.

C.c.p. Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas Jefe de Carrera de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
C.c.p. L.P. Yesenia Barrientos Arenal. Jefa del Departamento de Servicios Escolares
C.c.p. Dr. José Nobel Méndez Alcocer. Director de Tesis.
C.c.p. Archivo.

OAXACA

Campus Loma Bonita

Av. Ferrocarril S/N, Col. Ciudad Universitaria, Loma Bonita, Oaxaca C.P. 68400
Tel/Fax: 01 281 872 92 30

www.unpa.edu.mx

Campus Tuxtepec

Circuito Central N° 200, Col. Parque Industrial C.P. 68301
Tel/Fax: 01 287 875 9240



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

Oficio No. LMA029/2022

Loma Bonita Oaxaca a 18 de febrero del 2022

Asunto: Asignación de sinodales de tesis

M.E. Yesenia Barrientos Arenal

Jefa del departamento de servicios escolares

PRESENTE

Por este medio le informo que la Vicerrectoría Académica, ha designado a los siguientes profesores como sinodales del examen profesional de la alumna **Alfa Karen Martínez Hernández**, quien defenderá su trabajo de tesis titulado "*Algoritmo de grado total para la aproximación racional minimax discreta*", para obtener el título de Licenciada en Matemáticas Aplicadas.

Titulares:

Presidente: Dr. Juan Manuel Pérez Abarca

Secretario: Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas

Vocal: Dra. Ivonne Lilián Martínez Cortés

Suplentes:

Dra. Aura Lucina Kantún Montiel

Dra. Anahí Rojas Carrasco



Sin otro particular me despido quedando a sus ordenes para cualquier aclaración.

Atentamente



Vo.Bo.

Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas

Jefe de carrera de la Lic. en Matemáticas Aplicadas

M.C. Héctor López Arjona

Vicerrector Académico

c.c.p. M.C. Héctor López Arjona. Vicerrector académico

c.c.p. Archivo

Dedicado para mi esposo y mis hijos

Dedicatoria

Dedico mi tesis a mi esposo Francisco y a mis hijos: Dánika y Nohek.

Francisco: La ayuda que me has brindado ha sido muy importante, estuviste a mi lado a pesar de los momentos y situaciones tormentosas, siempre has estado aquí conmigo y me motivaste para que siguiera adelante con mis estudios. De corazón, gracias por todo lo que me has dado, tu amor, tu apoyo, tu paciencia, tu cariño y tu comprensión. Sin tí, no hubiera podido terminar mis estudios.

Hijos: Gracias por comprenderme, por su paciencia y todo el amor que me han dado. Los amo muchísimo.

Agradecimientos

Quiero agradecerle a Dios por darme fuerzas para seguir adelante.

A mi esposo y a mis hijos, por su amor y apoyo incondicional.

Quiero agradecerle a la Universidad por haberme dado la oportunidad de estudiar en esta institución y a la Dra. Beatriz Carely Luna Olivera por todo el apoyo. También agradezco a mis profesores: Dr. Victor Manuel Méndez, Dra. Aura Lucina Kantún Montiel, a mi asesor de tesis Dr. José Nobel Alcocer y al profesor Ariel López por ser comprensivos, por su paciencia, por sus enseñanzas y la confianza que pusieron en mí.

A todos mis profesores de la carrera que me impartieron clases y me motivaron para seguir adelante. Agradezco a la Dra. Ivonne Lilián Martínez, al Dr. Juan Manuel Pérez y a la Dra. Anahí Rojas por sus observaciones para el mejoramiento de la tesis.

A mi amigo Cosme López Juárez, te agradezco el apoyo y cariño que me brindaste durante la carrera, eres una buena persona y eres un gran amigo. Agradezco a mi cuñada Cristina Gutiérrez Zainos, a la señora Francisca Zainos y a toda la familia Gutiérrez Zainos por todo el apoyo y la confianza que pusieron en mí. También agradezco a mis padres y a mis hermanas por su apoyo.

De corazón, gracias a todos...

Alfa Karen Martínez Hernández

Resumen

El problema de la aproximación minimax discreta para un par (m, n) se corresponde, debido al Teorema de Chebyshev, con resolver un sistema homogéneo de $m + n + 2 - d_{(m,n)}(r)$ ecuaciones en igual número de incógnitas. Las siguientes dificultades, sin embargo, surgen al buscar solucionarlo: (i) no linealidad del sistema, (ii) aparición de soluciones no acotadas, (iii) gran cantidad de conjuntos de referencias, (iv) referencias degeneradas ($d > 0$) y (v) no existencia de una aproximación minimax.

La aproximación de grado total $N = m + n$ se sobrepone a las tres primeras dificultades (i), (ii) y (iii) y no le afectan a las otras dos (iv) y (v). Con este fin, estudiaremos la definición de dicha aproximación, así como los teoremas correspondientes y desarrollaremos un programa que aplique el algoritmo de grado total para encontrar la aproximación racional de grado total para una función establecida y aplicarlo a varias funciones para comparar entre la aproximación racional minimax y la de grado total.

Palabras clave: aproximación racional, intercambio unipuntual, aproximación grado total

Abstract

The discrete minimax approximation problem for a pair (m, n) corresponds, due to Chebyshev's Theorem, to solving a homogeneous system of $m + n + 2 - d_{(m,n)}(r)$ equations in the same number of unknowns. The following difficulties, however, arise when trying to solve it: (i) non-linearity of the system, (ii) appearance of unbounded solutions, (iii) large number of sets of references, (iv) degenerate references ($d > 0$) and (v) non-existence of a minimax approximation.

The total degree approximation $N = m + n$ overcomes the first three difficulties (i), (ii) and (iii) and does not affect the other two (iv) and (v). To this end, we will study the definition of such an approximation, theorems, and develop a program that applies the total degree algorithm to find the total degree rational approximation for a given function and apply it to several functions to compare between the minimax rational approximation and that of total degree.

Keywords: rational approximation, one point exchange, total degree approximation.

Índice de figuras

1.1. Conjunto alternante	4
1.2. Representación gráfica de la función $f(x) = x^2$ y la función racional $r = \frac{1}{2}$	5
1.3. Representación gráfica de la función $f(x) = x $ y la función racional $r(x) = \frac{1}{2}$	6
1.4. Función f definida sobre $X = \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$ (puntos rojos), función racional r (puntos en azul) y función $g(x) = \frac{1}{x}$	10
1.5. Función f definida en $X = \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$ (puntos rojos) y la función racional g interpola a f en X (línea azul).	11
2.1. Primera iteración con una referencia inicial X_0	22
2.2. Segunda iteración	23
2.3. Tercera iteración	24
2.4. Cuarta iteración	25
2.5. Quinta iteración	26
2.6. Sexta iteración	27
3.1. Matriz persimétrica S_{N+1} para $N + 1 = 4$. Para rellenarla únicamente hace falta conocer 9 valores (indicados en azul).	40
3.2. Matriz Λ de eigenvalores para $N + 1 = 4$	42
3.3. Matriz A para $N = 3$. n_{ij} son los ceros del polinomio $b_{0ij} + b_{1ij}x + \dots + b_{iij}x^i$ (indicados en rojo).	44
3.4. Gráfica de las funciones racionales de mejor aproximación de grado total 4 para la función $f(x)=\log(x+1)$	56
3.5. Gráfica de las funciones racionales de mejor aproximación de grado total 2 para la función $f(x)=\exp(x)$	61

Índice general

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Abstract	VI
Índice de Figuras	VII
1. Aproximación racional minimax	2
1.1. Aproximación racional con la norma uniforme de funciones continuas	2
1.2. Aproximación racional discreta	8
2. Algoritmo de intercambio unipuntual (algoritmo tipo Remez)	14
2.1. Algoritmo de intercambio unipuntual de Remez para hallar la mejor aproximación racional	14
2.2. Ejemplo	21
3. Aproximación de grado total	28
3.1. Análisis de la degeneración de la aproximación racional discreta	28
3.2. Aproximación racional de grado total	30
3.3. Algoritmo de grado total	34
3.4. Detalles del proceso para llevar a cabo el algoritmo.	35
3.4.1. Polinomios ortogonales	35
3.4.2. Procedimiento Lo-Hi	40
3.4.3. Prueba de Sturm	43
3.5. Convergencia del algoritmo de grado total	45
3.6. Diagrama de flujo	45
3.7. Ejemplos	48
Bibliografía	62

Introducción

Uno de los problemas de la Teoría de Aproximación es determinar, como su nombre lo sugiere, la mejor aproximación a una función conocida de entre los elementos de un conjunto establecido de funciones. La idea fundamental de esta rama de las matemáticas, es reemplazar un objeto de estudio por uno de manipulación más sencilla, a su vez, está fuertemente influenciada por nuestra necesidad de encontrar respuestas concretas a problemas matemáticos prácticos utilizando recursos computacionales.

La Teoría de Aproximación proporciona procedimientos numéricos para estimar, como se mencionó anteriormente, los elementos de mejor aproximación y una de sus metas es caracterizarlos cuando existan.

A finales del siglo XIX, el matemático Karl Weierstrass desarrolló el teorema de aproximación de funciones y demostró que se puede aproximar una función continua de cualquier grado, mediante un polinomio algebraico [5], [8], [4]. El teorema de Weierstrass y las ideas de Chebyshev, tienen un papel importante en la Teoría de Aproximación para establecer los conceptos básicos de esta rama.

Una de las clases de funciones mejor conocidas, es la de los polinomios algebraicos que han sido de gran utilidad, debido a que aproximan de manera uniforme las funciones continuas. Una de las ventajas de la aproximación por polinomios algebraicos, es que podemos encontrar el polinomio de mejor aproximación a una función continua bajo una tolerancia tan pequeña como se desee en un intervalo cerrado y acotado. Además, los polinomios se evalúan fácilmente en valores arbitrarios, puesto que están definidos para cualquier número real y son fáciles de derivar e integrar dado que sus respectivas derivadas e integrales existen para cualquier dominio compacto.

El problema surge cuando la aproximación en un intervalo concreto tiende a oscilar dependiendo del grado del polinomio y que las cotas error excedan el error de aproximación promedio. Por situaciones como ésta, se desarrolló el estudio de otra teoría en la cual se utiliza otra familia de funciones llamadas funciones racionales, que presenta algunas ventajas con respecto a la aproximación polinomial.

La aproximación racional de funciones trata de hallar una función racional, de entre las pertenecientes a una clase dada, que minimiza la distancia a una función previamente establecida. Si esta

función, así como los elementos de la clase que se mencionó, se consideran continuas sobre un intervalo cerrado y acotado, entonces la norma usual para definir dicha distancia es la conocida norma de Chebyshev ó uniforme [13]. En el caso que la *clase aproximante* de funciones racionales consista únicamente de polinomios algebraicos el anterior problema se denomina Aproximación polinomial. Este problema fue estudiado, entre otros, por Chebyshev, quién logró establecer un teorema que caracteriza el polinomio de mejor aproximación (en la norma uniforme) a una función continua conocida, usando la equioscilación de la función error (*i.e.* la función a aproximar menos dicho polinomio) [18]. Resultados similares se han podido establecer para determinar a su vez la función racional de menor distancia uniforme a una función continua dada (ver [12]).

Aprovechando el antes mencionado, teorema de equioscilación establecido por Chebyshev [3], el matemático ruso Evgeny Yakovlevich Remez, desarrolló un algoritmo que construye *buenas* que convergen al polinomio de grado a lo más n de mejor aproximación minimax (*i.e.* la correspondiente a la norma uniforme) para cualquier función $f \in C[a, b]$ [16], [18]. El algoritmo de Remez es una herramienta útil que se ha utilizado en distintas ramas de la ciencia. Posteriores intentos de ampliar el anterior algoritmo para que sea capaz de construir buenas aproximaciones que converjan a la función racional algebraica de mejor aproximación a una función $f \in C[a, b]$ conocida, se han desarrollado sólo de manera parcial, pues los obstáculos que surgen de la Teoría de Aproximación racional nos obligan a solicitar condiciones iniciales estrictas.

Franklin Kemp establece la noción de aproximación racional de grado total con el fin de evitar los escollos que surgen en la Teoría de Aproximación racional discreta, es decir, cuando la función a aproximar y la clase aproximante racional se consideran definidas sobre un conjunto finito de puntos. A su vez, Kemp nos presenta un algoritmo de grado total que nos conduce a la función racional de mejor aproximación de grado total correspondiente a cualquier función previamente conocida. Este algoritmo si bien, no pretende encontrar la función racional de mejor aproximación minimax a una función conocida, sino más bien la función de mejor aproximación de grado total, sí presenta ventajas sobre el algoritmo de Remez de la aproximación racional discreta (en el que se inspira).

En este trabajo, se analiza la convergencia del algoritmo de grado total y la aproximación racional de grado total. Además, se desarrolla un programa en MATLAB que lo aplicamos a ciertos ejemplos y mostramos los resultados obtenidos.

Para presentar los resultados, hemos desarrollado la tesis en tres capítulos:

En el primer capítulo, desarrollamos resultados referentes a la aproximación racional con norma uniforme y aproximación racional discreta, considerando la clase aproximante $R(m, n)$ de las funciones racionales.

En el segundo capítulo, analizamos el algoritmo de intercambio unipuntual (ó algoritmo de Remez) para hallar la mejor aproximación sobre una clase aproximante de grado total a una función dada. Mostramos un teorema que nos garantiza la convergencia de dicho algoritmo y un ejemplo de

aplicación.

El tercer capítulo, nos dedicaremos al estudio del algoritmo de grado total, estudiaremos resultados de la aproximación racional de grado total y se presentan los resultados principales de la aplicación del algoritmo de grado total.

Por último, se presentan las conclusiones de los capítulos anteriores.

Capítulo 1

Aproximación racional minimax

En el presente capítulo, analizaremos las definiciones y algunos teoremas referentes a la aproximación racional para funciones reales continuas uniforme y aproximación racional discreta, tales como la existencia, la caracterización y unicidad de la misma.

1.1. Aproximación racional con la norma uniforme de funciones continuas

La forma natural para obtener resultados en técnicas de aproximación, es trabajar con espacios lineales normados. Estos espacios vectoriales se convierten en objetos familiares en matemáticas, así que podemos suponer que ya estamos familiarizados con sus propiedades elementales (ver [2]).

Sea $C[a, b]$ el espacio lineal normado de todas las funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$, es decir,

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua sobre } [a, b]\},$$

con la norma conocida como **uniforme o del supremo**, definida como:

$$\|f\|_{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

para $f \in C[a, b]$.

Debido al Teorema de valores extremos (ver [2], pág. 5) la norma anterior es equivalente a:

$$\|f\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Sea $R(m, n)$ la clase de funciones racionales continuas sobre el intervalo $[a, b]$, en las cuales el polinomio numerador tiene grado a lo más m y el polinomio denominador de grado a lo más n , es decir,

$$R(m, n) = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathcal{P}_m, q \in \mathcal{P}_n, q \neq 0 \text{ sobre } [a, b] \right\}.$$

En primer lugar, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.1 ([18, Theorem 5.1]) (Existencia de mejor aproximación racional) Si $f \in C[a, b]$, entonces existe $r^* \in R(m, n)$ tal que para todo $r \in R(m, n)$,

$$\|f - r^*\| \leq \|f - r\|$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma uniforme sobre $[a, b]$.

El anterior teorema nos conduce a la siguiente definición:

Definición 1.1 Sean $f \in C[a, b]$ y $r^* \in R(m, n)$. Si

$$\|r^* - f\| = \min_{r \in R(m, n)} \|r - f\|,$$

entonces, se dice que r^* es una **mejor aproximación racional** a f de $R(m, n)$.

Debido al Teorema 1.1, para cualquier función continua siempre existe al menos una aproximación racional de cada una de las clases $R(m, n)$, con $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición 1.2 Si r^* es una aproximación racional a f de la clase $R(m, n)$, definimos y denotamos como **error de aproximación (racional)** al valor

$$E = E(m, n, f; [a, b]) = \|r^* - f\|$$

y a su vez, la **función error (de aproximación)** es la función continua definida por

$$e(x) = f(x) - r^*(x)$$

sobre el intervalo $[a, b]$.

Definición 1.3 Sea $g \in C[a, b]$. Un conjunto de $k \in \mathbb{N}$ puntos ordenados $a \leq x_1 < \dots < x_k \leq b$, se denomina **conjunto alternante** de g si cumple que

$$|g(x_i)| = \|g\|, \quad i = 1, \dots, k$$

y

$$|g(x_i)| = -g(x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, k-1.$$

A los elementos de un conjunto alternante se les denomina **puntos alternantes** de dicha función.

Como se observa en la Figura 1.1,

$$\begin{aligned} &\{x_5, x_7\} \\ &\{x_1, x_3, x_4\} \\ &\{x_2, x_5, x_7\} \\ &\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7\} \end{aligned}$$

son ejemplos de conjuntos alternantes de la función $f - r$.

Sin embargo los conjuntos

$$\begin{aligned} &\{x_1, x_2, x_3\} \\ &\{x_1, x_3, x_5, x_7\} \end{aligned}$$

no son alternantes.

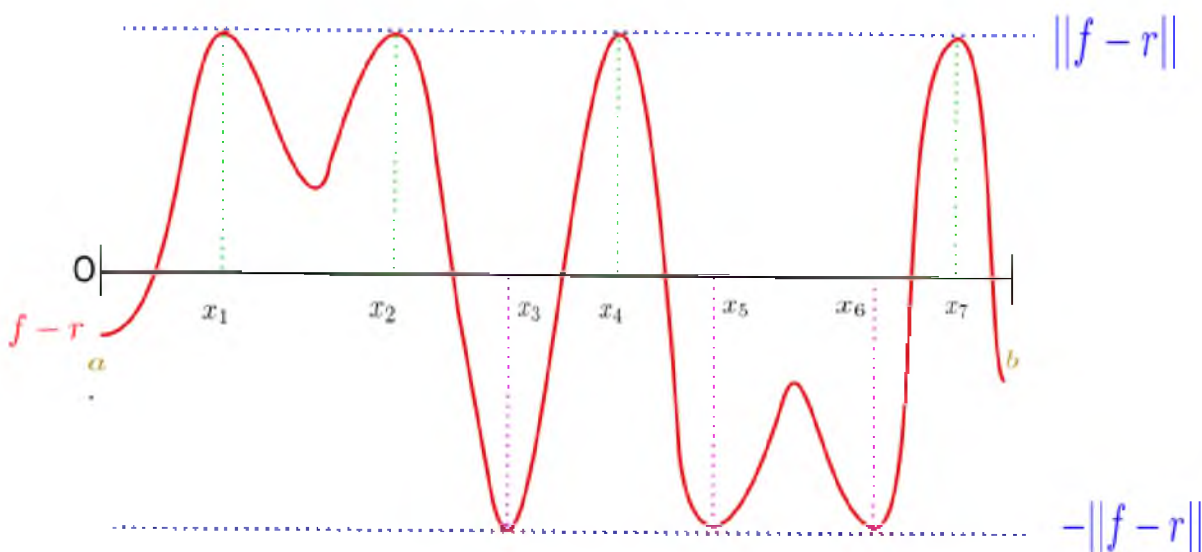


Figura 1.1: Conjunto alternante

Teorema 1.2 ([18, Theorem 5.2]) (Alternancia de la aproximación racional) La función racional irreducible $r = p/q \in R(m, n)$, con $(p : q) = 1$ es de mejor aproximación racional a $f \in C[a, b]$ si y sólo si la función $f - r$ tiene un conjunto alternante que consiste de

$$N_r = 2 + \text{máx}(n + \text{deg } p, m + \text{deg } q)$$

puntos. Donde $\text{deg } p$ y $\text{deg } q$ son los grados de los polinomios p y q , respectivamente.

Como se puede observar, la cantidad N_r no es necesariamente la misma para todos los elementos de la clase $C[a, b]$. Con el fin de caracterizar dichas funciones, debemos introducir el siguiente concepto.

Definición 1.4 Sea $r = \frac{p}{q} \in R(m, n)$ una función racional de forma irreducible con $(p : q) = 1$. Definimos la **deficiencia de r** con respecto a (m, n) ó **(m, n) -deficiencia de r** al valor

$$d_{(m,n)}(r) = \begin{cases} \min\{m - \deg p, n - \deg q\} & \text{si } r \not\equiv 0 \\ n & \text{si } r \equiv 0 \end{cases}$$

El Teorema 1.2 se puede reescribir usando el valor $d_{(m,n)}(r)$, obsérvese que

$$N_r = m + n + 2 - d_{(m,n)}(r),$$

pues, si $n + \deg p \leq m + \deg q$ entonces $m - \deg p \geq n - \deg q = d_{(m,n)}(r)$ luego

$$\begin{aligned} N_r &= 2 + \deg q \\ &= m + n + 2 - (n - \deg q) \\ &= m + n + 2 - d_{(m,n)}(r). \end{aligned}$$

El resultado es el mismo si $m + \deg q \leq n + \deg p$.

Ejemplo 1.1.1 La función continua f de la clase $C[-1, 1]$, definida por $f(x) = x^2$, tiene a la función racional r de la clase racional $R(0, 1)$ definida por $r(x) = \frac{1}{2}$ como una mejor aproximación racional, pues la $(0, 1)$ -deficiencia de r es

$$\begin{aligned} d_{(0,1)}(r) &= \min\{m - \deg p, n - \deg q\} \\ &= \min\{0 - 0, 1 - 0\} = 0 \end{aligned}$$

además, la función $e = f - r$ tiene $N_r = 3$ puntos alternantes en $[-1, 1]$ pues

$$e(-1) = -e(0) = e(1) = E = \frac{1}{2}.$$

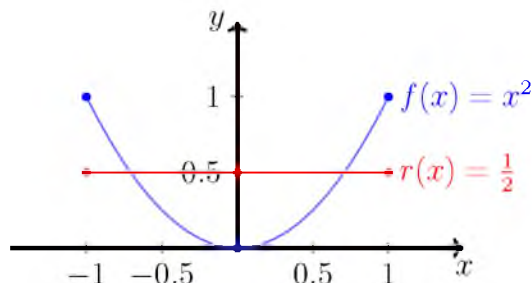


Figura 1.2: Representación gráfica de la función $f(x) = x^2$ y la función racional $r = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 1.1.2 La función continua f de la clase $C[-1, 1]$, definida por $f(x) = |x|$, tiene a la función racional r de la clase racional $R(1, 1)$ definida por $r = \frac{1}{2}$ como una mejor aproximación racional, pues la $(1, 1)$ -deficiencia de r es

$$\begin{aligned} d_{(1,1)}(r) &= \min\{m - \deg p, n - \deg q\} \\ &= \min\{1 - 0, 1 - 0\} = 1 \end{aligned}$$

además, la función $e = f - r$ tiene $N_r = 3$ puntos alternantes en $[-1, 1]$ pues

$$e(-1) = -e(0) = e(1) = E = \frac{1}{2}.$$

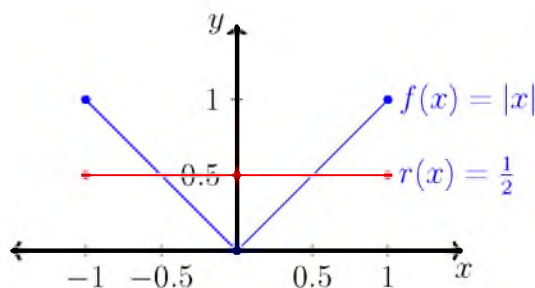


Figura 1.3: Representación gráfica de la función $f(x) = |x|$ y la función racional $r(x) = \frac{1}{2}$.

Una vez que tenemos los teoremas previos de existencia y caracterización, como consecuencia del Teorema 1.2, se deduce un resultado que nos garantiza que la mejor aproximación racional es única.

Teorema 1.3 ([18, Theorem 5.3]) (Unicidad de la aproximación racional) Si r^* es de mejor aproximación racional para $f \in C[a, b]$ de la clase $R(m, n)$, entonces

$$\|f - r^*\| < \|f - r\|$$

para todo $r \in R(m, n)$, con $r \neq r^*$.

Así, podemos reunir los teoremas 1.1 y 1.3 en uno solo que enunciamos a continuación:

Teorema 1.4 Para cada función continua f de clase $C[a, b]$, existe una única función racional $r \in R(m, n)$ tal que $|f - r| = E(m, n, f, [a, b])$.

El resultado anterior, nos permite definir un operador (no lineal) $T = T_{m,n}$ definido sobre el espacio lineal $C[a, b]$, de manera que a cada función continua le asigne su correspondiente racional de mejor aproximación de la clase $R(m, n)$. Por lo que el Teorema 1.2 se puede reescribir de forma equivalente como:

Teorema 1.5 Sean $f \in C[a, b]$ y $r \in R(m, n)$. Entonces

$$r = T_{m,n}(f)$$

si y sólo si, la función $f - r$ tiene N_r puntos alternantes en $[a, b]$.

Como habíamos comentado, la deficiencia de una función racional es un concepto que nos permite clasificar las funciones continuas, lo cual tendrá importancia más adelante.

Definición 1.5 Se dice que $f \in C[a, b]$ es **(m, n) -normal** si $d = d_{(m, n)}(T_{m, n}(f)) = 0$. En otro caso, diremos que f es **(m, n) -deficiente** con deficiencia d .

Obsérvese que la función del Ejemplo 1.1.1, es $(0, 1)$ -normal, mientras que la función del Ejemplo 1.1.2 es $(1, 1)$ -deficiente con deficiencia $d = 1$.

1.2. Aproximación racional discreta

En esta sección, nos enfocaremos en la aproximación racional discreta.

La aproximación racional discreta estudia un problema similar al anterior pero considerando ahora el dominio de las funciones como $X = \{x_1 < \dots < x_k\}$ como un conjunto finito de puntos. En este caso, la norma uniforme se corresponde con:

$$\|f\|_X = \max_{i=1, \dots, k} |f_i|$$

donde $f_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, k$.

Sea $R(m, n)_X$ la clase de funciones racionales discretas sobre X , en las cuales el polinomio numerador tiene grado a lo más m y el polinomio denominador es de grado a lo más n , es decir,

$$R(m, n)_X = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathcal{P}_m, q \in \mathcal{P}_n, q \neq 0 \text{ sobre } X \right\}.$$

Uno de los primeros problemas que pueden llegar a surgir, es la posibilidad de que no exista la mejor aproximación como tal, como se observa en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.2.1 Sea f la función definida como $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ sobre $X = \{0, 1\}$. No es posible hallar un elemento r^* de la clase $R(0, 1)_X$ tal que

$$\|f - r^*\|_X = \min\{\|f - r\|_X : r \in R(0, 1)_X\}.$$

Si consideramos las funciones,

$$r(x) = \frac{a}{bx+a} \in R(0, 1)_X, \text{ con } 0 < a < b$$

entonces,

$$\begin{aligned} \|f - r\|_X &= \max\{|f(0) - r(0)|, |f(1) - r(1)|\} = \max\left\{\left|1 - 1\right|, \left|0 - \frac{a}{b+a}\right|\right\} \\ &= \left|-\frac{a}{b+a}\right| \\ &= \frac{a}{b+a} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por lo que de existir $r^* = \frac{a_0}{b_1x+b_0} \in R(0, 1)_X$ que sea una mejor aproximación racional a f , ésta tendría que interpolar a f en los dos puntos, es decir,

$$r(0) = \frac{a_0}{0 \cdot b_1 + b_0} = 1 = f(0)$$

$$r(1) = \frac{a_0}{1 \cdot b_1 + b_0} = 0 = f(1)$$

lo cual implicaría que $a_0 = b_0 = 0$. Por lo tanto, $0 = 1$. Lo cual es una contradicción.

Ejemplo 1.2.2 Sea f la función definida como $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ y $f(2) = 0$ sobre $X = \{0, 1, 2\}$. No es posible hallar un elemento r^* de la clase $R(0, 1)_X$ tal que

$$\|f - r^*\|_X = \min\{\|f - r\|_X : r \in R(0, 1)_X\}.$$

Si consideramos las funciones,

$$r(x) = \frac{a}{bx+a} \in R(0, 1)_X, \text{ con } 0 < a < b$$

entonces,

$$\begin{aligned} \|f - r\|_X &= \max\{|f(0) - r(0)|, |f(1) - r(1)|, |f(2) - r(2)|\} = \max\left\{\left|1 - \frac{a}{b+a}\right|, \left|0 - \frac{a}{b+a}\right|, \left|0 - \frac{a}{2b+a}\right|\right\} \\ &= \left|-\frac{a}{b+a}\right| \\ &= \frac{a}{b+a} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Por lo que de existir $r^* = \frac{a_0}{b_1x+b_0} \in R(0, 1)_X$ que sea una mejor aproximación racional a f , ésta tendría que interpolar a f en los tres puntos, es decir,

$$r(0) = \frac{a_0}{2 \cdot b_1 + b_0} = 1 = f(0)$$

$$r(1) = \frac{a_0}{1 \cdot b_1 + b_0} = 0 = f(1)$$

$$r(2) = \frac{a_0}{2 \cdot b_1 + b_0} = 0 = f(2)$$

lo cual implicaría que $0 = a_0 = b_0 \neq 0$.

Por lo que sin importar la cantidad de puntos de X , se carece de garantía de existencia de la aproximación racional discreta.

Además, si quisiéramos generalizar el Teorema 1.2 para la aproximación discreta, observaríamos que puede haber dos funciones que cumplan la condición de alternancia pero sus respectivos errores de aproximación E serían diferentes, como se observa en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.3 Sea f una función definida sobre $X = \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$ como $f(-1) = -1$, $f(\frac{1}{2}) = 2$ y $f(1) = 1$. Por un lado, tenemos la función

$$r(x) = \frac{-9}{16x-20} \in R(0,1)_X$$

que cumple

$$\begin{aligned} f(-1) - r(-1) &= (-1) - \frac{-9}{16(-1) - 20} = -\frac{5}{4} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) - r\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 - \frac{-9}{16(1/2) - 20} = \frac{5}{4} \\ f(1) - r(1) &= 1 - \frac{-9}{16(1) - 20} = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

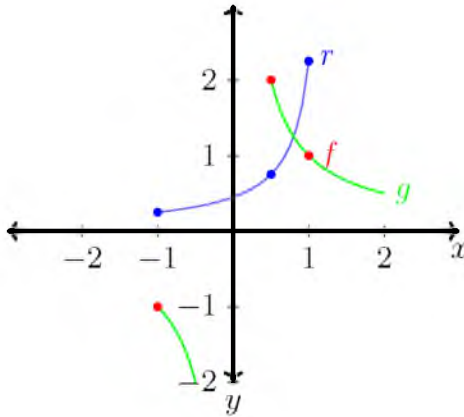


Figura 1.4: Función f definida sobre $X = \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$ (puntos rojos), función racional r (puntos en azul) y función $g(x) = \frac{1}{x}$.

La función $r(x)$ cumple con la alternancia, por lo que sería candidata para ser la mejor aproximación a f , su error de aproximación es $\frac{5}{4}$. Por otro lado, observemos que la función $g(x) = \frac{1}{x} \in R(0,1)_X$ cumple que

$$\begin{aligned} f(-1) - g(-1) &= (-1) - \left(\frac{1}{-1}\right) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0 \\ f(1) - g(1) &= (1) - \left(\frac{1}{1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo que también es un candidato para ser la mejor aproximación a f , en este caso, con un error de aproximación $E(0,1,g) = 0$.

Esta divergencia surge debido a que en el segundo caso la función presenta un polo en $x = 0 \in \text{conv}(X)$ (envoltura convexa de X). Para evitar que esto ocurra, hemos de trabajar con una nueva clase aproximante,

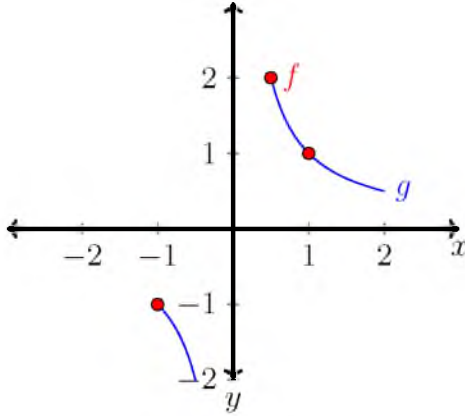


Figura 1.5: Función f definida en $X = \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$ (puntos rojos) y la función racional g interpola a f en X (línea azul).

$$\bar{R}(m, n) = R(m, n)_X \cap C(\text{conv}(X))$$

es decir, si el intervalo $[a, b] = \text{conv}(X)$ trabajaremos con la clase aproximante

$$\bar{R}(m, n) = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathcal{P}_m, q \in \mathcal{P}_n, q \neq 0 \text{ sobre } [a, b] \right\}.$$

Al igual que en la sección previa, se pueden adaptar las anteriores definiciones a este tipo de aproximación.

Definición 1.6 Sean $f \in C(X)$ y $r^* \in \bar{R}(m, n)$. Si

$$\|r^* - f\|_X = \min_{r \in \bar{R}(m, n)} \|r - f\|_X,$$

entonces se dice que r^* es una **mejor aproximación racional discreta** a f de $\bar{R}(m, n)$.

Desafortunadamente se carece de la garantía de existencia aún para esta nueva clase aproximante. De hecho, para las funciones expresadas en los ejemplos 1.1.1 y 1.1.2, no existe mejor aproximación de la clase $\bar{R}(0, 1)$ debido a un razonamiento análogo al previamente mostrado.

Definición 1.7 Si r^* es una mejor aproximación racional a f de la clase $\bar{R}(m, n)$, denotamos como error de aproximación (racional discreta) al valor

$$E = E(m, n, f; X) = \|r^* - f\|_X$$

y a su vez, la función error (de aproximación) es la función definida por

$$e(x) = f(x) - r^*(x)$$

sobre X .

Definición 1.8 Sea $g \in C(X)$. Un conjunto de $s \in \mathbb{N}$ puntos ordenados $\{x_1 < \dots < x_s\} \subset X$, se denomina **conjunto alternante** de g en X si cumple que

$$|g(x_i)| = \|g\|_X, \quad i = 1, \dots, s$$

y

$$|g(x_i)| = -g(x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, s-1.$$

A los elementos de un conjunto alternante se les denomina **puntos alternantes** de dicha función.

De manera similar al Teorema 1.2, se deduce el siguiente resultado:

Teorema 1.6 ([18, Theorem 5.7]) (Alternancia de la aproximación racional discreta) La función racional irreducible $r = \frac{p}{q} \in \bar{R}(m, n)$, con $(p : q) = 1$ es de mejor aproximación racional a f sobre X si y sólo si la función $f - r$ tiene un conjunto alternante que consiste de

$$N_r = m + n + 2 - d_{(m,n)}(r)$$

puntos sobre $[a, b]$.

Analizando el teorema anterior, debemos deducir que el conjunto X debe tener al menos N_r puntos, para garantizar la existencia de la mejor aproximación racional a f . En particular, es suficiente que $\text{card}(X) \geq m + n + 2$.

Del teorema anterior se puede deducir un teorema que es análogo al Teorema 1.3 (ver [18, pág. 131])

Teorema 1.7 (Unicidad de la aproximación racional discreta) Si r^* es de mejor aproximación racional para $f \in C(X)$ de la clase $\bar{R}(m, n)$, entonces

$$\|f - r^*\|_X < \|f - r\|_X$$

para todo $r \in \bar{R}(m, n)$, con $r \neq r^*$.

Análogo a la sección anterior, podemos definir la normalidad de una función discreta siempre que su mejor aproximación racional exista.

Definición 1.9 Sea $f \in C(X)$ y $r^* \in \bar{R}(m, n)$ su mejor aproximación sobre X , decimos que f es **(m, n) -normal** si $d = d_{(m,n)}(r^*) = 0$. En otro caso, diremos que f es **(m, n) -deficiente** con deficiencia d .

Si se observa el Ejemplo 1.1.1, la función $f(x) = x^2$ definida sobre un conjunto X discreto de puntos tales que $\{-1, 0, 1\} \subset X \subset [-1, 1]$, es $(0, 1)$ -normal. A su vez, la función $g(x) = |x|$ definida sobre un conjunto X discreto de puntos tales que $\{-1, 0, 1\} \subset X \subset [-1, 1]$ es $(1, 1)$ -deficiente, con deficiencia 1. El siguiente resultado nos presenta una comparación entre las aproximaciones racional continua y discreta.

Teorema 1.8 ([18, Lemma 5.1]) *Sea $r \in R(m, n)$ la mejor aproximación para f en el intervalo $[a, b]$. Sea $X \subset [a, b]$ con $\text{card}(X) < \infty$. Sea $\bar{r} \in \bar{R}(m, n)$ la mejor aproximación racional para f sobre X . Sea X^* un conjunto alternante de N_r puntos para la función $f - r$, entonces*

$$\|f - \bar{r}\|_X \leq \|f - r\|_{X^*} = \|f - r\|_{[a, b]} = E(m, n, f, [a, b]).$$

La igualdad se cumple solamente si $\bar{r} = r$.

Capítulo 2

Algoritmo de intercambio unipuntual (algoritmo tipo Remez)

En este capítulo describiremos el desarrollo de un algoritmo llamado algoritmo de Remez que nos conduce a la función racional de mejor aproximación de una función previamente establecida, siempre que dicha mejor aproximación exista.

El algoritmo de Remez es un procedimiento recursivo que se ha utilizado para calcular la mejor aproximación polinomial sobre intervalos cerrados (ver [1]) y se ha demostrado su convergencia. Sin embargo, para encontrar la mejor aproximación racional, no siempre hay garantía de convergencia, por consiguiente veremos bajo qué restricciones converge. Como referencia, el algoritmo puede consultarse en su forma polinomial en [10], [18], [2] y en su forma racional en [11].

Dada una función $f \in C[a, b]$, sabemos que existe una racional $r^* \in R(m, n)$ con $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que cumple $T_{(m,n)}(f) = r^*$. A su vez, la función error $f - r^*$ equioscila en una cantidad N_r de puntos en $[a, b]$, donde $N_r = m + n + 2 - d_{(m,n)}(r^*)$. Precisamente como el valor $d_{(m,n)}(r^*)$ puede variar para otra función en $C[a, b]$, entonces la cantidad de puntos alternantes de la función error no queda *a priori* determinada, salvo en el caso que f sea (m, n) -normal. Esta es la razón por la cual le pedimos al algoritmo que trabaje solamente con funciones que sean (m, n) -normales.

2.1. Algoritmo de intercambio unipuntual de Remez para hallar la mejor aproximación racional

A partir de esta sección, llamaremos **referencia** a un conjunto X de $m + n + 2$ puntos en $[a, b]$.

1. Se necesita como entradas una función continua f sobre un intervalo $[a, b]$ y la clase aproximante $R(m, n)$.

2. Tomamos un conjunto referencia inicial $X_0 = \{x_1^{(0)} < \dots < x_N^{(0)}\}$ con N puntos distintos en $[a, b]$, donde $N = m + n + 2$.

3. Establecemos el sistema de ecuaciones no lineales de la siguiente forma:

$$f(x_i^{(0)}) - r(x_i^{(0)}) = (-1)^i E \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1.1)$$

es decir,

$$f(x_i^{(0)}) - \frac{a_0 + a_1 x_i^{(0)} + \dots + a_m x_i^{(0)m}}{b_0 + b_1 x_i^{(0)} + \dots + b_n x_i^{(0)n}} = (-1)^i E \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1.2)$$

O bien,

$$f(x_i^{(0)}) - \frac{\sum_{k=0}^m a_k x_i^k}{\sum_{k=0}^n b_k x_i^k} = (-1)^i E \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1.3)$$

Multiplicando $(b_0 + b_1 x_i^{(0)} + \dots + b_n x_i^{(0)n})$ en ambos lados en (2.1.2), tenemos

$$f(x_i^{(0)})(b_0 + b_1 x_i^{(0)} + \dots + b_n x_i^{(0)n}) - (a_0 + a_1 x_i^{(0)} + \dots + a_m x_i^{(0)m}) = (-1)^i E (b_0 + b_1 x_i^{(0)} + \dots + b_n x_i^{(0)n})$$

con $i = 1, 2, \dots, N$,

que reescribiremos de la forma

$$[f(x_i^{(0)}) - (-1)^i E](b_0 + b_1 x_i^{(0)} + \dots + b_n x_i^{(0)n}) - (a_0 + a_1 x_i^{(0)} + \dots + a_m x_i^{(0)m}) = 0$$

con $i = 1, 2, \dots, N$.

Reorganizamos como

$$\begin{aligned} & [f(x_i^{(0)}) - (-1)^i E](b_0) + [f(x_i^{(0)}) - (-1)^i E](b_1 x_i^{(0)}) + \dots + [f(x_i^{(0)}) - (-1)^i E](b_n x_i^{(0)n}) - \\ & a_0 - a_1 x_i^{(0)} - \dots - a_m x_i^{(0)m} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$.

Podemos escribir lo anterior en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} [f(x_1)-(-1)E] & [f(x_1)-(-1)E]x_1 & \dots & [f(x_1)-(-1)E]x_1^n & -1 & -x_1 & \dots & -x_1^m \\ [f(x_2)-(-1)^2E] & [f(x_2)-(-1)^2E]x_2 & \dots & [f(x_2)-(-1)^2E]x_2^n & -1 & -x_2 & \dots & -x_2^m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [f(x_N)-(-1)^NE] & [f(x_N)-(-1)^NE]x_N & \dots & [f(x_N)-(-1)^NE]x_N^n & -1 & -x_N & \dots & -x_N^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$

Las incógnitas de (2.1.5) son los coeficientes a_k del polinomio numerador con $k = 0, \dots, m$, los del polinomio denominador b_k con $k = 0, \dots, n$ y el valor de E . En total se deben hallar $m + n + 3$ incógnitas. Este sistema presenta soluciones no triviales únicamente cuando es nulo el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} [f(x_1)-(-1)E] & [f(x_1)-(-1)E]x_1 & \dots & [f(x_1)-(-1)E]x_1^n & -1 & -x_1 & \dots & -x_1^m \\ [f(x_2)-(-1)^2E] & [f(x_2)-(-1)^2E]x_2 & \dots & [f(x_2)-(-1)^2E]x_2^n & -1 & -x_2 & \dots & -x_2^m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [f(x_N)-(-1)^NE] & [f(x_N)-(-1)^NE]x_N & \dots & [f(x_N)-(-1)^NE]x_N^n & -1 & -x_N & \dots & -x_N^m \end{bmatrix}.$$

- Hallar las raíces* del polinomio $\det A$, el cual es un polinomio de grado $n + 1$ en la variable E .

Observación: Bajo las condiciones expresadas en el Teorema de convergencia que se mostrará más adelante, se garantiza que este polinomio tiene $n + 1$ raíces reales distintas E_1, \dots, E_{n+1} .

- Sustituir cada E_i en el sistema (2.1.5) y resolverlo para los coeficientes $\{a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n\}$.

- Establecer $r_i(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}$ para cada E_i .

- Seleccionar de entre las r_i aquella que no tenga polos[†] en $[a, b]$.

Observación: En general, existe a lo más una racional de entre las r_i que no presenta polos en $[a, b]$ (ver [18]). Sin embargo, bajo las condiciones del Teorema de convergencia se garantiza la existencia de dicha racional. ([16])

- Tomar un punto $\tau \in [a, b]$ tal que $|(f - r)(x)| = \|f - r\|$.

Observación: Esto es posible, pues $f - r \in C[a, b]$.

- Intercambiar el punto τ por alguno de los $x_i^{(0)}$ para generar un nuevo conjunto de referencia $X_1 = \{x_1^{(1)} < \dots < x_N^{(1)}\}$ que cumpla

$$\operatorname{sgn}[(f - r)(x_i^{(1)})] = -\operatorname{sgn}[(f - r)(x_{i+1}^{(1)})] \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

$$\text{donde } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

*Sea f una función real ó compleja, x es una raíz o cero de f si y sólo si $x \in \operatorname{Dom} f$ y $f(x) = 0$.

†Dada una función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q(x_0) = 0$, entonces x_0 es un polo de p/q .

Observación: Se cumple que $x_i < \tau < x_{i+1}$ para algún $1 \leq i \leq N$ (salvo que $a \leq \tau < x_1$ ó $x_N < \tau \leq b$). Por lo que la función $f - r$ en τ debe tener el mismo signo que tiene en x_i ó el que tiene en x_{i+1} . Para generar la referencia X_1 intercambiamos τ por x_i ó x_{i+1} de forma que $f - r$ conserve el mismo signo. Y mantenemos los otros puntos de la referencia X_0 en su correspondiente orden al generar X_1 .

- Si $a \leq \tau < x_1$, entonces si $f - r$ tiene el mismo signo en x_1 y τ , se intercambia τ por x_1 , si no es así, la nueva referencia es $X_1 = \{\tau < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1}\}$.
- Si $x_N < \tau \leq b$, entonces si $f - r$ tiene el mismo signo en x_N y τ , se intercambia τ por x_N , si no es así, la nueva referencia es $X_1 = \{x_2 < x_3 < \dots < x_N < \tau\}$.

10. Repetir de nuevo sucesivamente desde el paso 3 con la referencia X_1 .

11. Detener cuando la diferencia entre dos valores sucesivos de E sea tan pequeña como se desee. Como consecuencia, la última racional se consideraría una buena estimación de $T_{(m,n)}(f)$.

El anterior procedimiento presenta varios escollos que se deben esquivar:

- Garantizar previamente la (m, n) -normalidad de la función que se desea aproximar.
- La no linealidad del sistema (2.1.4).
- Garantizar la existencia de la racional que se solicita en el paso 7.

Además, la elección de los puntos iniciales $X_0 \subset [a, b]$ no puede ser arbitraria, pues el procedimiento anteriormente descrito podría no converger.

A continuación, mostraremos un teorema que nos da condiciones bajo las cuales el procedimiento del algoritmo de intercambio unipuntual de Remez converge a la racional de mejor aproximación.

Teorema 2.1 ([16, Theorem 3]) Sea $f \in C[a, b]$ y $r^*(x) = T_{(m,n)}(f)$ tales que la respectiva función error $f - r^*$ tiene exactamente $m + n + 2$ puntos alternantes en $[a, b]$. Sea $r_0 \in R(m, n)$ una función racional inicial tal que $f(x) - r_0(x)$ tiene exactamente $m + n + 2$ puntos extremos que alternen de signo en $[a, b]$ y el de la abscisa menor, tiene el mismo signo que el primer extremo de la función $f(x) - r^*(x)$. Sea $X_0 = \{x_i^{(0)}\}$ las abscisas de los $m + n + 2$ puntos extremos, i.e.

$$a \leq x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \dots < x_{m+n+2}^{(0)} \leq b$$

de $f(x) - r_0(x)$. Denotemos $E_{\min} = \min\{|f(x_i^{(0)}) - r_0(x_i^{(0)})| \mid i = 1, \dots, m + n + 2\}$. Finalmente denotamos

$$X^* = \{x_i^*\}$$

las abscisas de los $m + n + 2$ puntos extremos de la función error, i.e.

$$a \leq x_1^{(*)} < x_2^{(*)} < \dots < x_{m+n+2}^{(*)} \leq b$$

de $f(x) - r^*(x)$.

Luego, existe $\epsilon > 0$ y $\eta > 0$ tal que si

$$|x_i^{(0)} - x_i^*| < \epsilon \quad i = 1, \dots, m + n + 2,$$

$$E - E_{min} < \eta$$

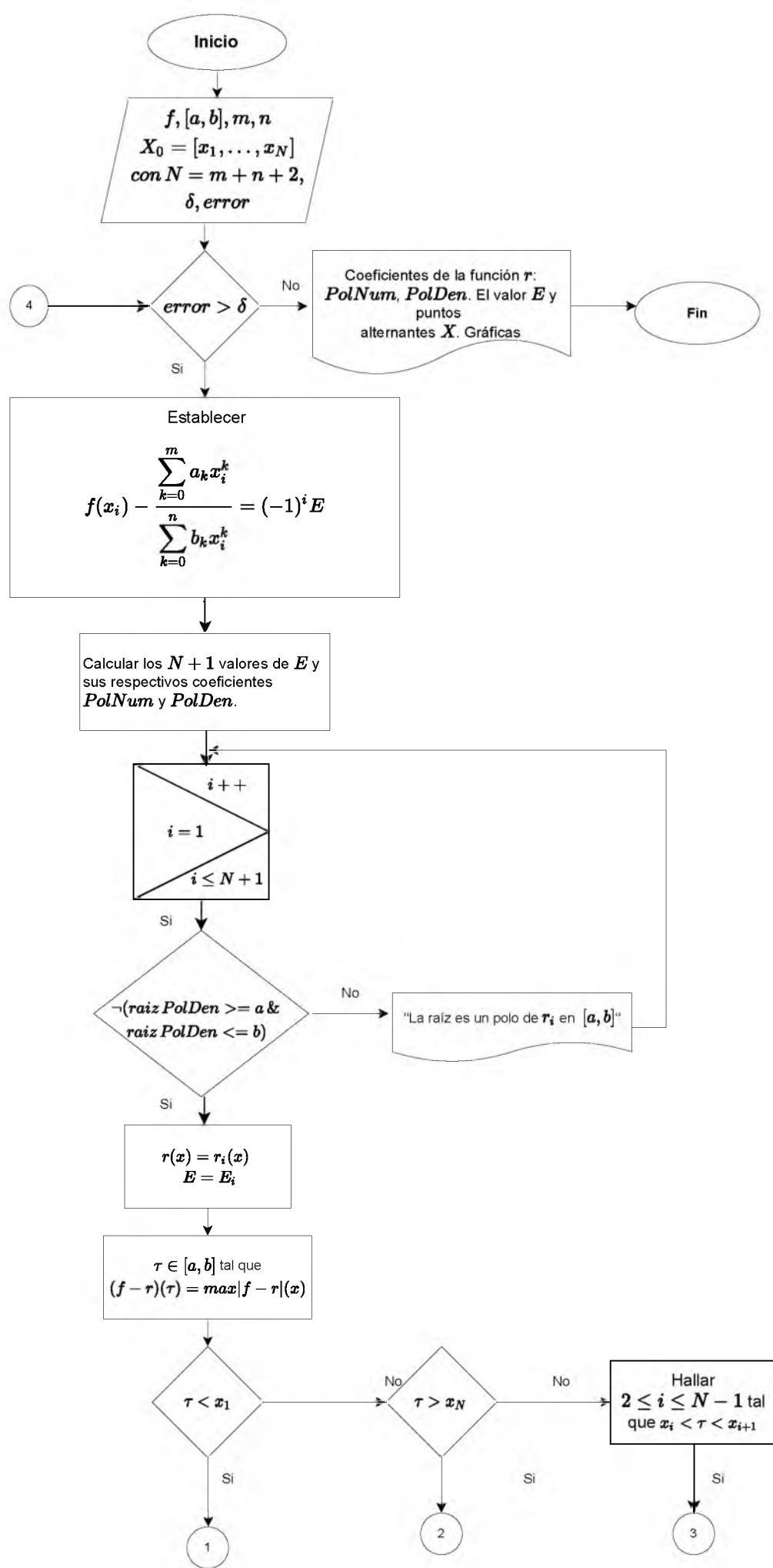
donde $E = \|f - r^*\|$, entonces usando la técnica adecuada para resolver (2.1.1) (ó equivalentemente resolver (2.1.2) ó bien (2.1.3)), el algoritmo de intercambio unipuntual que empiece con la referencia inicial X_0 podrá realizar cada uno de los pasos antes descritos y convergerá a la racional de mejor aproximación.

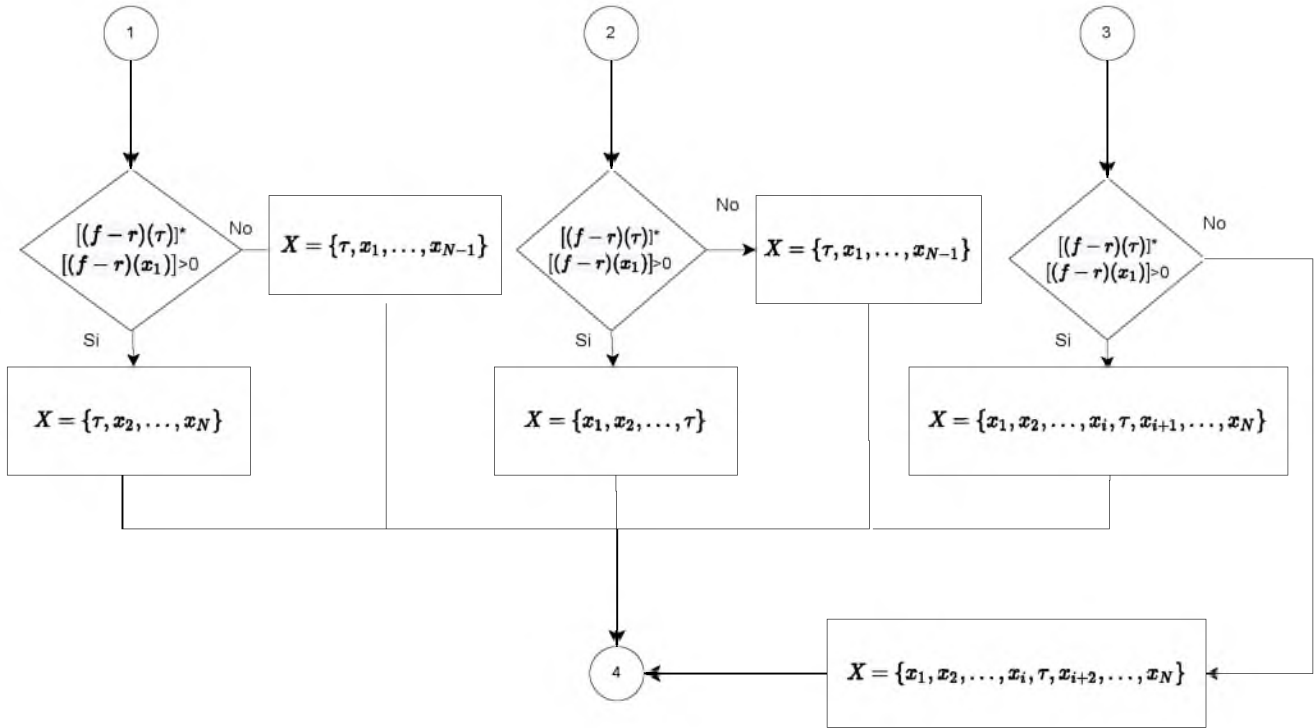
La presunción de la existencia de la racional r_0 que cumpla las condiciones del teorema previo es difícil de satisfacer para un caso específico. Heurísticamente se ha verificado que la elección de la referencia X_0 como los ceros del polinomio de Chebyshev de grado $m + n + 2$ es una buena opción como referencia inicial (ver [18], [15] y [17]).

Aunado a lo anterior, por definición, la (m, n) -normalidad de una función es una característica que se verifica cuando se conoce su respectiva racional de mejor aproximación. Criterios para deducir la normalidad (e inclusive la hipernormalidad) de una función continua pueden hallarse en [9].

Diagrama de flujo

A continuación mostraremos el diagrama de flujo del algoritmo tipo Remez que fue descrito anteriormente.



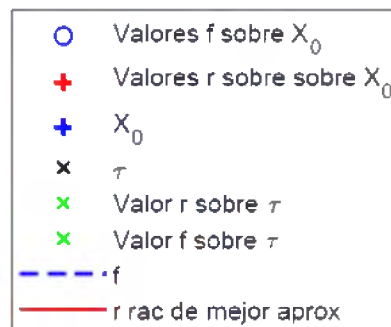


2.2. Ejemplo

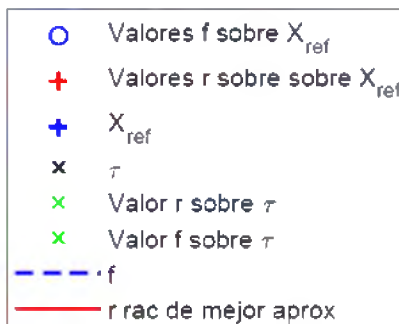
Mostraremos un ejemplo gráfico utilizando el algoritmo tipo Remez elaborado en MATLAB. Denotaremos por $PolNum = [a_m, \dots, a_0]$ el vector de coeficientes del polinomio numerador de grado a lo más m y $PolDen = [b_n, \dots, b_0]$ el vector de coeficientes del polinomio denominador de grado a lo más n .

Ejemplo 2.2.1 Consideremos la función $f(x) = e^x$ definida sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Proponemos hallar la función r^* como la mejor aproximación racional de $R(1, 1)$ a f .

Se muestra cada una de las iteraciones de los resultados obtenidos por el programa del algoritmo tipo Remez. En el conjunto referencia inicial X_0 se seleccionan los ceros del polinomio de Chebyshev de grado $m + n + 2 = 1 + 1 + 2$. La gráfica de los valores y las funciones corresponden de la siguiente manera en la primera iteración:



De manera análoga, a partir de la segunda iteración en adelante, las gráficas de los valores y las funciones corresponden así:



```
Iteración 1
Referencia Inicial Xref_0=[-0.923880 -0.382683 0.382683 0.923880]
PolNum=[1.000000 2.005230]
PolDen=[-0.900220 1.988276]
E = 0.013514526

||f-r||= 0.043736158
El valor de tau es: 1.000000
```

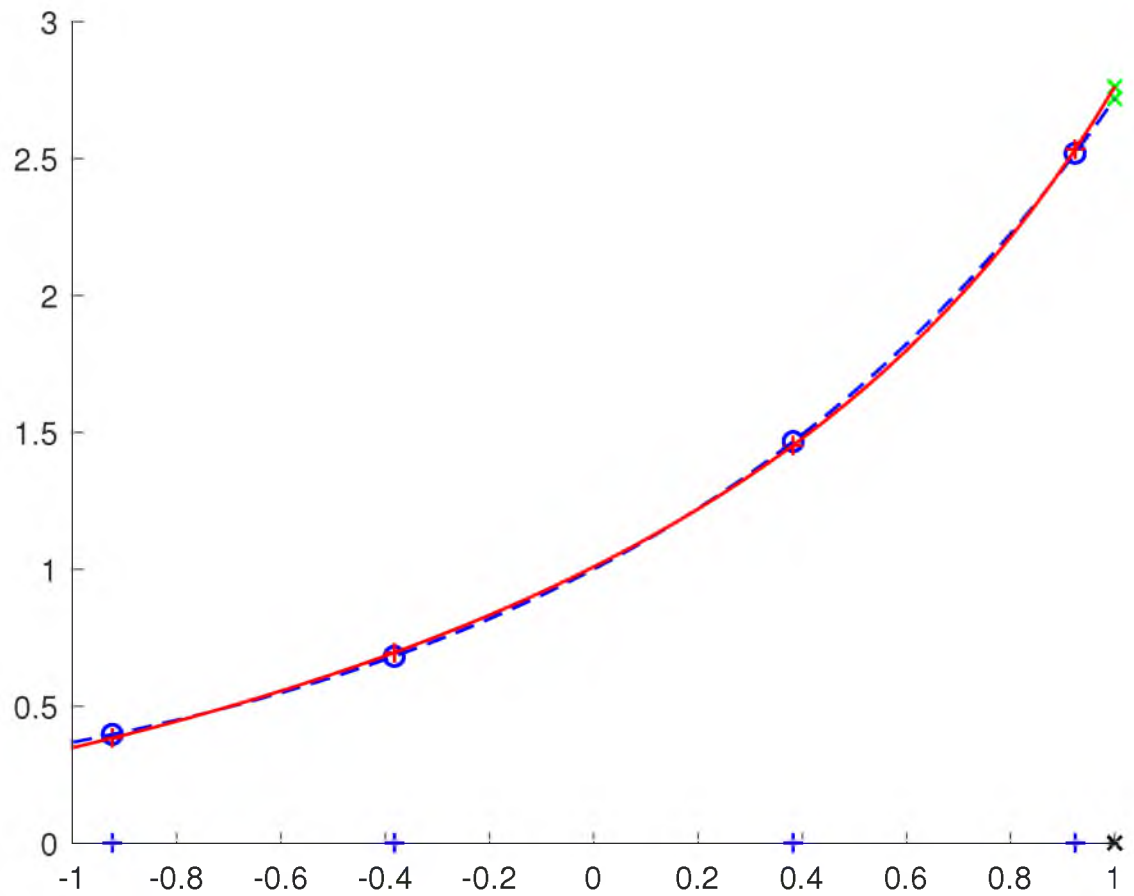


Figura 2.1: Primera iteración con una referencia inicial X_0

Iteración 2

```
Nueva Xref=[ -0.382683 0.382683 0.923880 1.000000 ]  
PolNum=[1.000000 1.689917]  
PolDen=[-0.682034 1.669788]  
E = 0.004983224
```

```
||f-r||= 0.074525207  
El valor de tau es: -1.000000
```

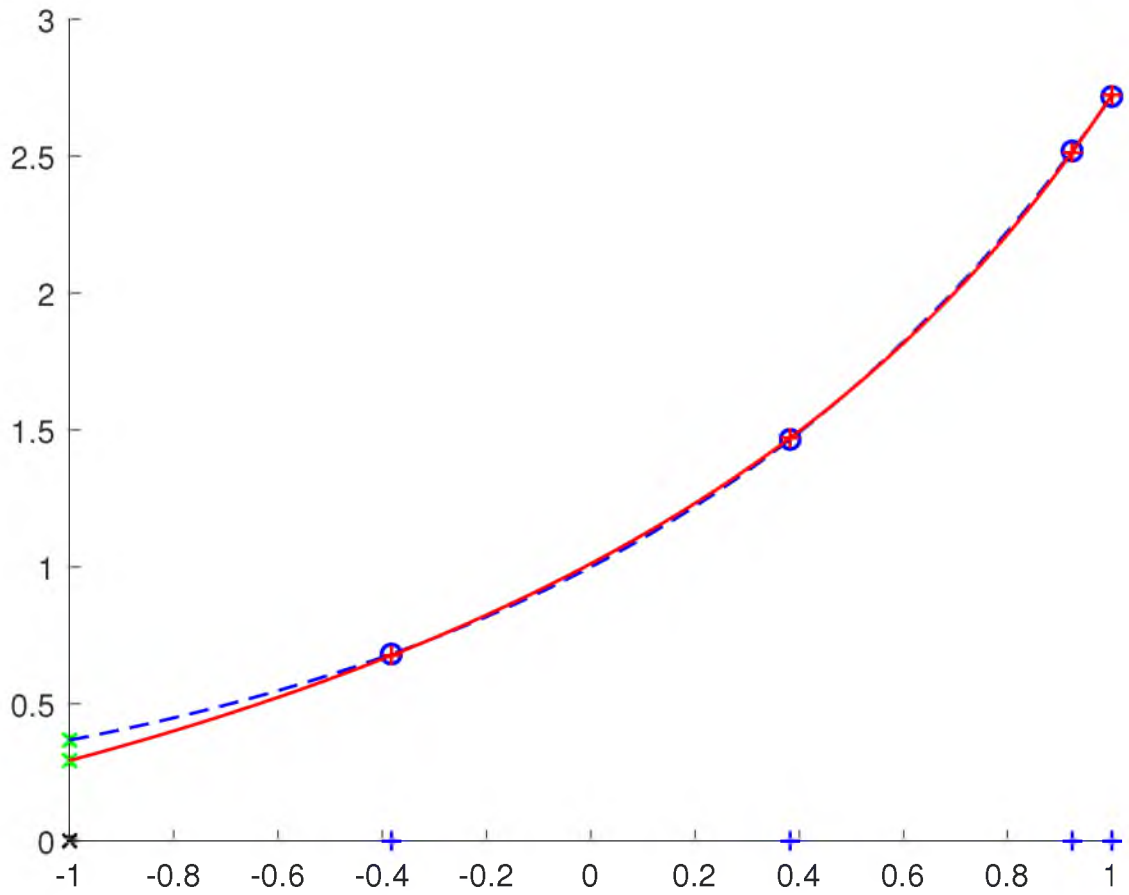


Figura 2.2: Segunda iteración

Iteración 3

Nueva Xref=[-1.000000 0.382683 0.923880 1.000000]

PolNum=[1.000000 1.998158]

PolDen=[-0.835174 1.935073]

E = 0.007565913

$||f-r|| = 0.036705215$

El valor de tau es: -0.220000

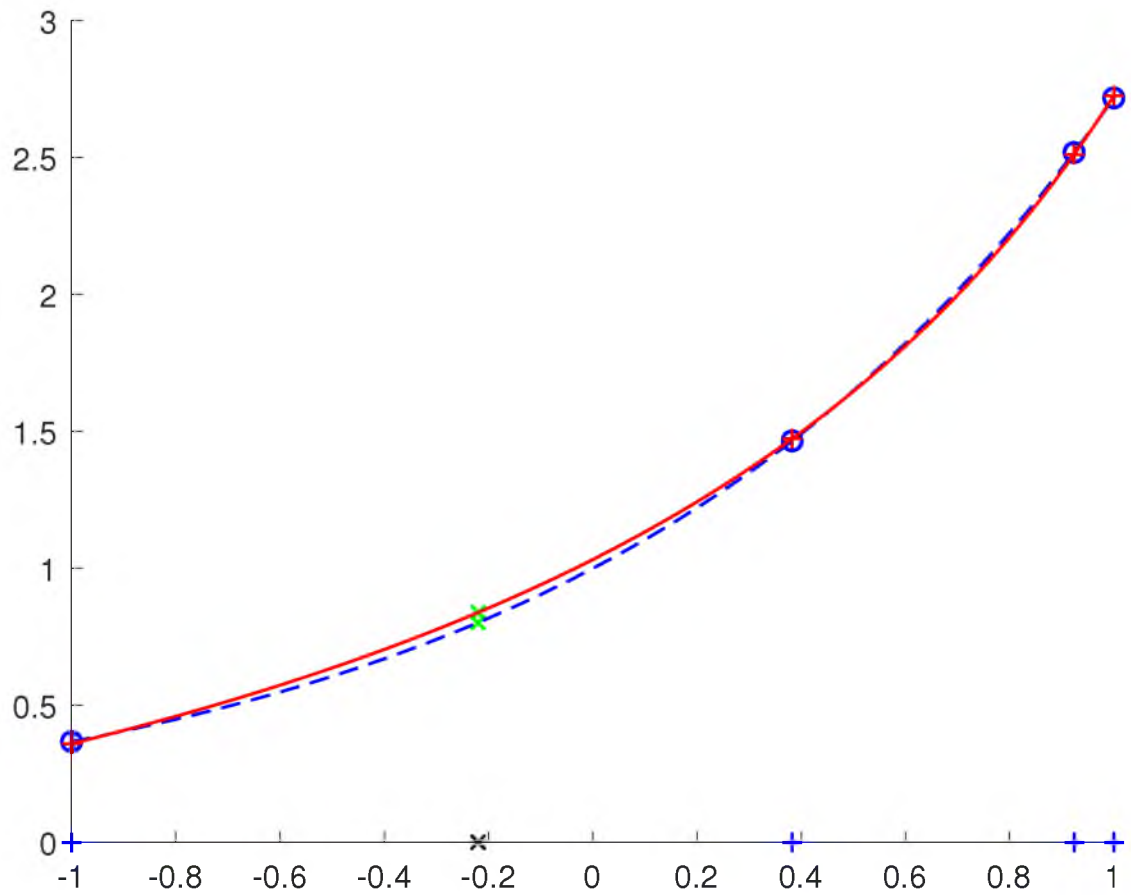


Figura 2.3: Tercera iteración

Iteración 4

```
Nueva Xref=[ -1.000000 -0.220000 0.923880 1.000000 ]  
PolNum=[1.000000 2.051328]  
PolDen=[-0.924241 2.041271]  
E = 0.013361293  
||f-r||= 0.040587532  
El valor de tau es: 0.680000
```

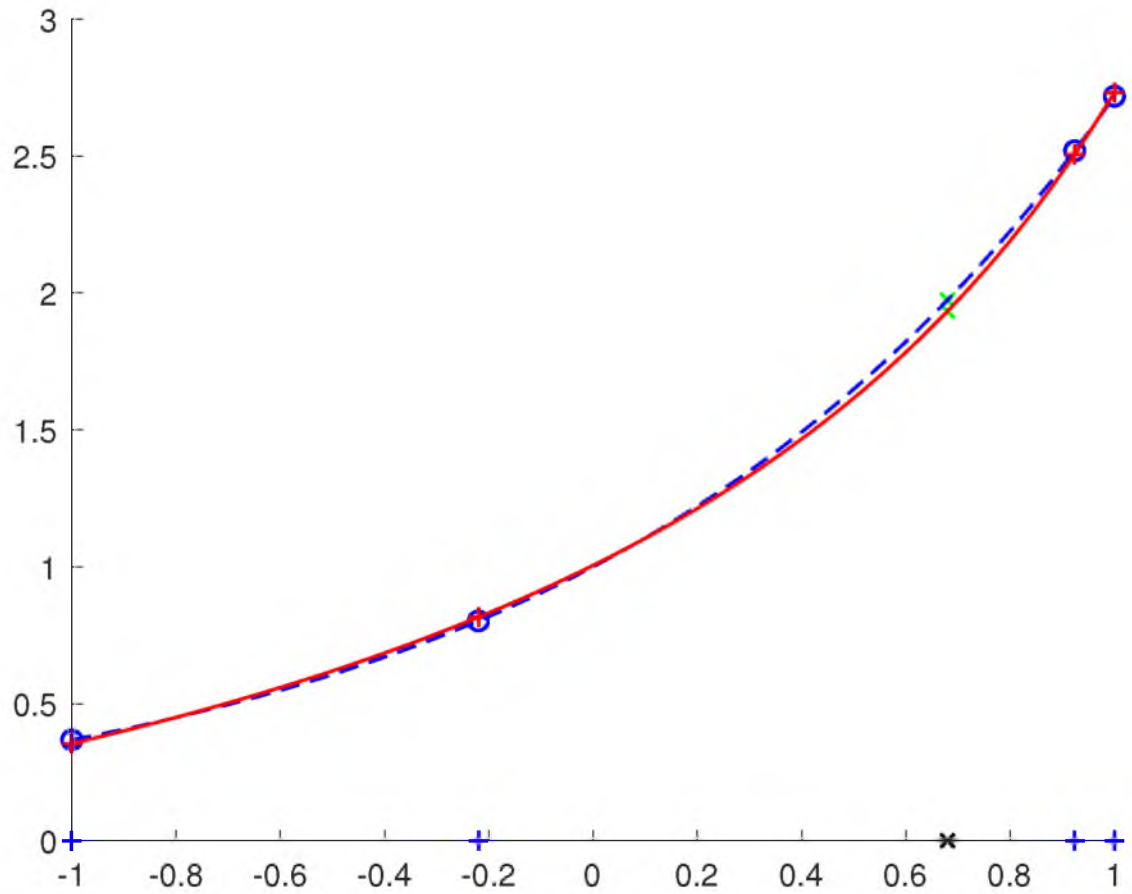


Figura 2.4: Cuarta iteración

Iteración 5

Nueva Xref=[-1.000000 -0.220000 0.680000 1.000000]

PolNum=[1.000000 1.965387]

PolDen=[-0.850010 1.932575]

E = 0.020940785

$||f-r|| = 0.021041835$

El valor de tau es: 0.700000

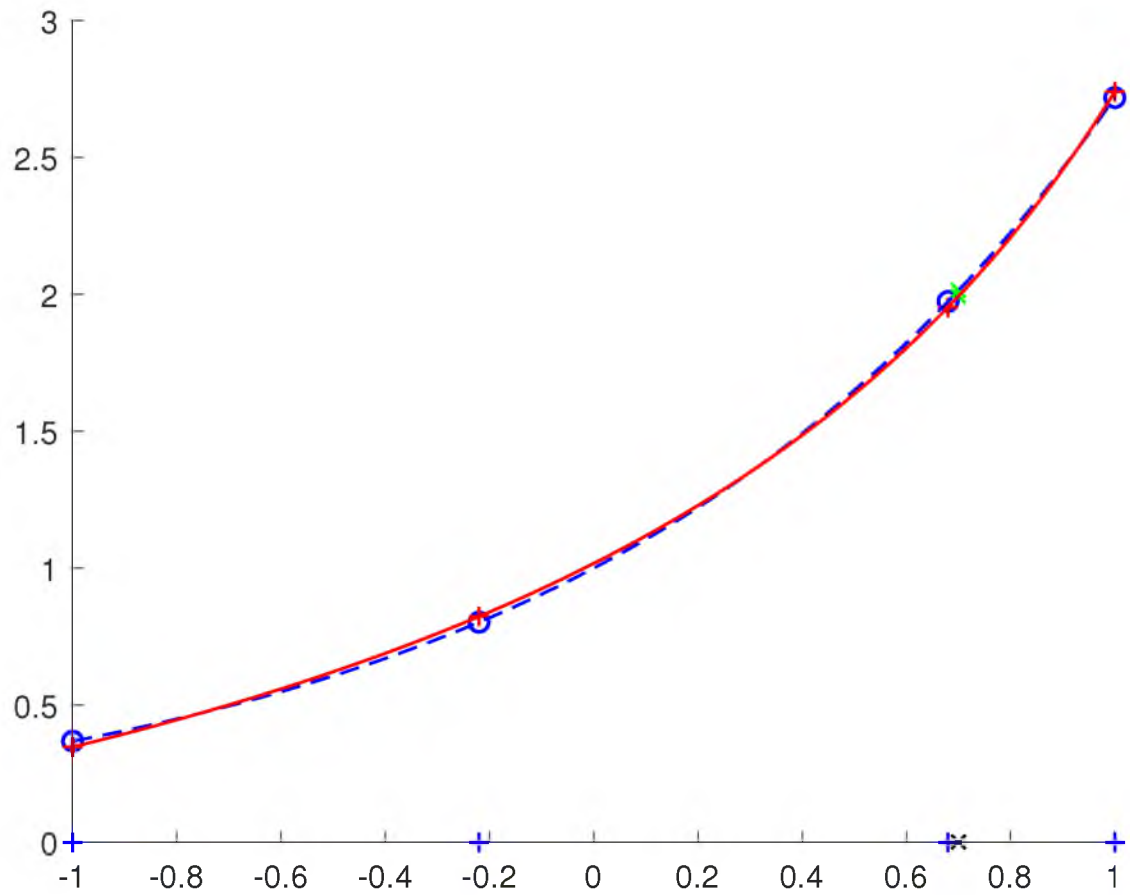


Figura 2.5: Quinta iteración

Iteración 6

```
Nueva Xref=[ -1.000000 -0.220000 0.700000 1.000000 ]  
PolNum=[1.000000 1.965082]  
PolDen=[-0.849747 1.932190]  
E = 0.020969401
```

```
||f-r|| = 0.020969401  
El valor de tau es: -1.000000
```

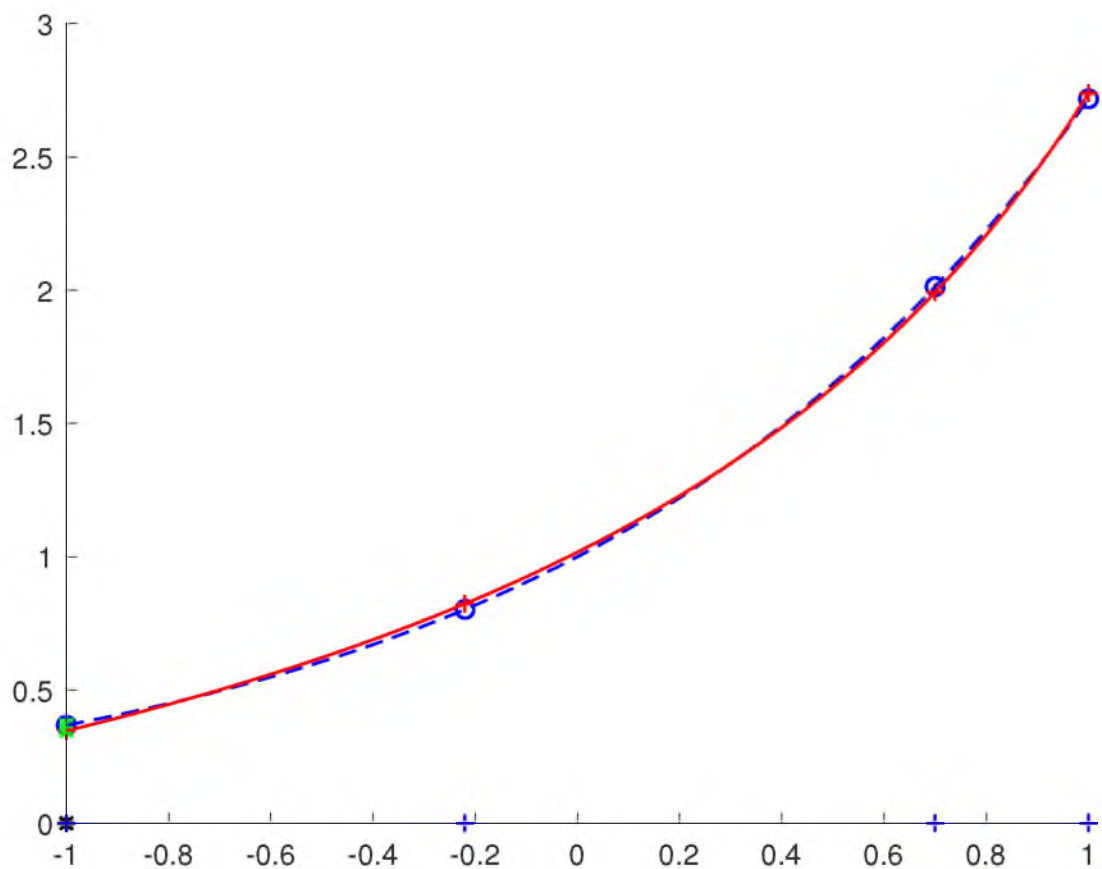


Figura 2.6: Sexta iteración

La ejecución del programa de este algoritmo, se detuvo en la iteración 6 debido a que E y $\|f - r\|$ coinciden. El ejemplo escogido corresponde a una función f que es $(1, 1)$ -normal y estrictamente positiva. Por lo que f es una buena función para aplicar el algoritmo tipo Remez, cumpliendo las hipótesis del Teorema 2.1.

Capítulo 3

Aproximación de grado total

En el presente capítulo nos dedicaremos al estudio de la aproximación racional de grado total, analizaremos su definición así como los teoremas que sustentan esta teoría. Estudiaremos el conocido algoritmo de grado total y su convergencia que nos conduce a encontrar la aproximación racional de grado total para una función establecida y comparar entre la aproximación racional uniforme y la de grado total. Mostraremos los resultados obtenidos después de aplicar el anterior algoritmo a diversos ejemplos.

Para cualquier función definida sobre un conjunto finito de puntos, existe una racional que es de mejor aproximación de grado total. El algoritmo basado en esta teoría nos conduce, siempre que se cumplan ciertos criterios, a dicha función racional.

Esa función, a diferencia del algoritmo de la sección anterior, depende de una cantidad fija de parámetros que nosotros podemos establecer. Los algoritmos que surgen de manera natural de la equioscilación de la función error racional no siempre son convergentes. Por lo que el análisis que nos ofrece la aproximación racional de grado total es un recurso apreciable.

3.1. Análisis de la degeneración de la aproximación racional discreta

En esta sección, presentamos los resultados básicos de la degeneración de la aproximación racional discreta.

Sea $X = \{x_0 < \dots < x_{N+1}\}$ un conjunto ordenado de $N + 2$ números reales con $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea f una función continua definida sobre X . Sean $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $m + n = N$. Trabajaremos con las clases de funciones racionales $R(m, n)_X$.

Teorema 3.1 ([7, Theorem 1]) (Teorema de degeneración) Si $\frac{p}{q}$ es la racional de mejor aproximación a f de la clase $R(m, n)_X$ con (m, n) -deficiencia d , entonces $\frac{p}{q} \in R(m - d, n - d)_X$,

pero $\frac{p}{q} \notin R(m-d-1, n-d-1)_X$.

Como consecuencia de lo anterior, podemos asegurar lo siguiente:

Corolario 3.1 ([7, Corollary 1]) *Una función f no puede ser degenerada para las clases $R(m, 0)_X$ y $R(0, n)_X$.*

Corolario 3.2 ([7, Corollary 2]) *Si $m \geq n$, entonces para f siempre existe una racional de mejor aproximación de cada una de las clases $R(m, n)_X$ cuya respectiva (m, n) -deficiencia $d = 0, 1, \dots$, o n .*

Corolario 3.3 ([7, Corollary 3]) *Si $m < n$, entonces dada una función f ó bien ésta tiene racional de mejor aproximación en la clase $R(m, n)_X$ con su respectiva (m, n) -deficiencia $d = 0, 1, 2, \dots$, o m , ó bien, carece de dicha racional.*

Corolario 3.4 ([7, Corollary 4]) *Sea $R(m_1, n_1)_X \subset R(m_2, n_2)_X$, E_1 y E_2 respectivamente los errores de aproximación de f en dichas clases, entonces $E_1 \geq E_2$.*

Una vez que tenemos los resultados previos, se muestra la siguiente pirámide de degeneración para clases $R(m, n)$ con $m + n \leq 8$.

$d = 4$										$R(0, 0)$
$d = 3$				$R(2, 0)$	$R(1, 1)$	$R(0, 2)$				
$d = 2$			$R(4, 0)$	$R(3, 1)$	$R(2, 2)$	$R(1, 3)$	$R(0, 4)$			
$d = 1$		$R(6, 0)$	$R(5, 1)$	$R(4, 2)$	$R(3, 3)$	$R(2, 4)$	$R(1, 5)$	$R(0, 6)$		
$d = 0$	$R(8, 0)$	$R(7, 1)$	$R(6, 2)$	$R(5, 3)$	$R(4, 4)$	$R(3, 5)$	$R(2, 6)$	$R(1, 7)$	$R(0, 8)$	



Pirámide de degeneración para clases $R(m, n)$ con $m + n \leq 8$

En el lado izquierdo de la pirámide, hay garantía de la existencia de la mejor aproximación. En la clase $R(8, 0)_X$ (i.e. polinomios algebraicos de grado a lo más 8) la aproximación solamente puede ser normal (i.e. $d = 0$). En la clase $R(7, 1)_X$, la máxima deficiencia de la racional de mejor aproximación es igual a 1, lo cual ocurre cuando dicha racional pertenece a la clase $R(6, 0)_X$. Análogamente, los valores de las máximas deficiencias de las racionales de mejor aproximación de las clases $R(6, 2)_X$, $R(5, 3)_X$ y $R(4, 4)_X$ son respectivamente 2, 3 y 4.

Por otro lado, en el lado derecho de la pirámide, no hay garantía de la existencia de la mejor aproximación. En caso de existir, ocurriría de manera análoga como en el lado izquierdo de la pirámide.

3.2. Aproximación racional de grado total

La aproximación racional de grado total N a una función f definida en X , consiste en ampliar la búsqueda de la racional $\frac{p}{q}$, considerando todas las clases $R(m, n)_X$ cuyos grados sumen un valor fijo, es decir $m + n = N$, éstas serían $R(m + n, 0)_X$, $R(m + n - 1, 1)_X$, $R(m + n - 2, 2)_X$, $R(m + n - 3, 3)_X$, ..., $R(m, n)_X$, ..., $R(1, m + n - 1)_X$, $R(0, m + n)_X$, pero descartando las clases en las que f carezca de mejor aproximación o es (m, n) -deficiente.

Si bien puede existir una racional r cuya distancia a f sobre X sea menor que el error de aproximación de la racional de grado total, esto ocurre cuando r pertenece a una clase racional de las descartadas en la definición. Enunciaremos a continuación un teorema que se puede encontrar en [7] que nos permite justificar la definición del párrafo anterior.

Teorema 3.2 ([7, Theorem 2]) (Teorema de grado total) *Si cada clase en la base de una pirámide de degeneración tiene una referencia X_{ref} libre de polos (i.e, $0 \notin q(\text{conv}(X_{ref}))$), donde $\frac{p}{q}$ es la mejor aproximación racional a f de esa clase) con un error de equioscilación (i.e $E(m, n, f, X_{ref})$) mayor que el menor error de aproximación (i.e $E(m, n, f, X)$) encontrado en todas las clases $R(m, n)_X$ de la base, entonces la racional $\frac{p}{q}$ a la cual le corresponda el menor error de aproximación de la base, también tendrá el menor error de aproximación de todos los que se puedan hallar en las clases de la pirámide.*

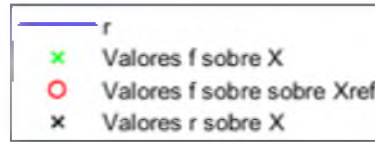
Encontrar la aproximación de grado total en un pequeño problema es fácil, pero en general, el número de aproximaciones de grado total N es

$$N+2C_{\text{card}(X)}.$$

Esto se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1 *Sea f una función definida sobre $X = \{0, 1, 8, 9\}$ como $f(0) = 1.01$, $f(1) = 0.49$, $f(8) = 0$, $f(9) = 0.1$. Proponemos hallar la función r como la mejor aproximación racional de grado total 1 a f . Utilizando un procedimiento similar al usado en el Ejemplo 2.2.1, hallaremos buenas estimaciones de la mejor aproximación racional de $R(1, 0)_X$ a f y de la mejor aproximación racional (si es que existe) de $R(0, 1)_X$ a f . Después tomaremos como mejor aproximación racional de grado total 1, aquella con menor error de aproximación.*

La gráfica de los valores y las funciones correspondientes son las siguientes:

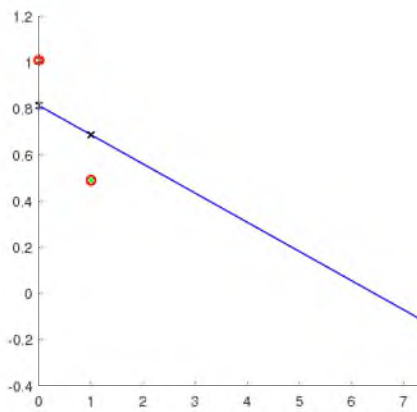


```
X=[0 1 8 9]
Xref=[0 1 8]
E= -0.1968750
||f-r||= 0.4231250
```

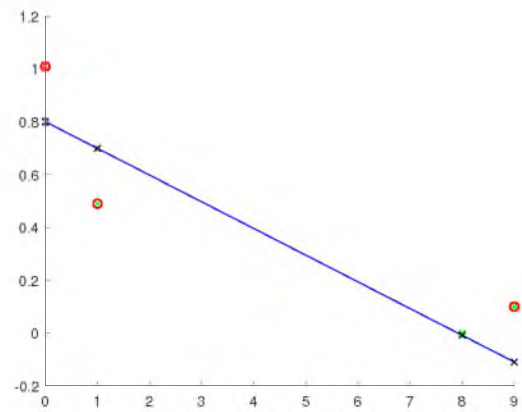
(a)

```
X=[0 1 8 9]
Xref=[0 1 9]
E= -0.2094444
||f-r||= 0.0083333
```

(b)



(c)



(d)

Entonces

$$r_1^* = \frac{x - 7.9175}{-9.89}$$

es una buena estimación de la mejor aproximación a f (Ejemplo 3.1.1, parte (b),(d)) con respecto a la clase $R(1,0)_X$ con un error de aproximación de 0.008 y

$$r_2^* = \frac{1}{1.503x + 0.9197}$$

es una buena estimación de la mejor aproximación a f (Ejemplo 3.1.1, parte (j),(l)) con respecto a la clase $R(0,1)_X$ con un error de aproximación de 0.03.

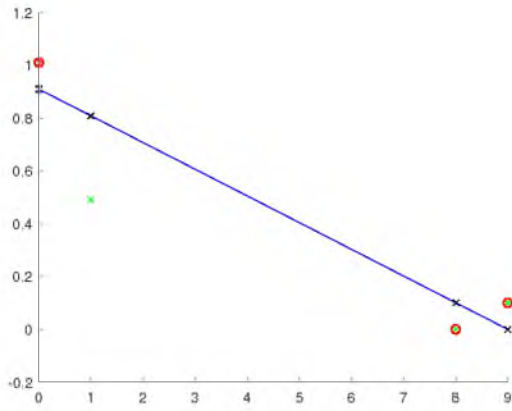
Por lo que r_1^* es una estimación de la aproximación racional de grado total 1 a f sobre X .

```

X=[0 1 8 9]
Xref=[0 8 9]
E= -0.1005556
||f-r||= 0.3183333

```

(e)



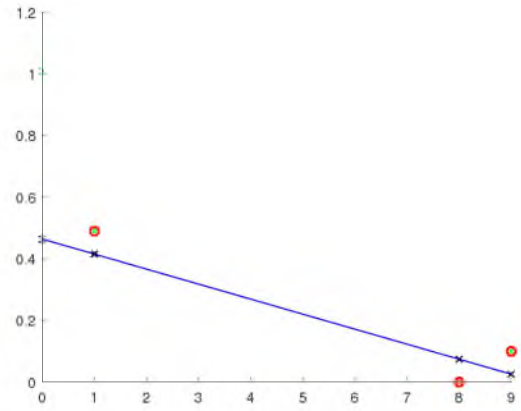
(g)

```

X=[0 1 8 9]
Xref=[1 8 9]
E= -0.0743750
||f-r||= 0.5456250

```

(f)



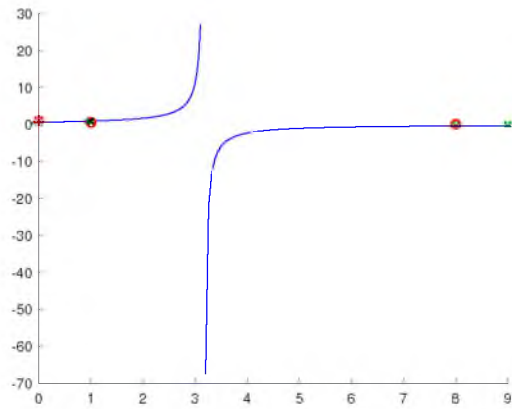
(h)

```

X=[0 1 8 9]
Xref=[0 1 8]
E1= -0.4003798
Polo: 3.171325
||f-r||= 0.4316884

```

(i)



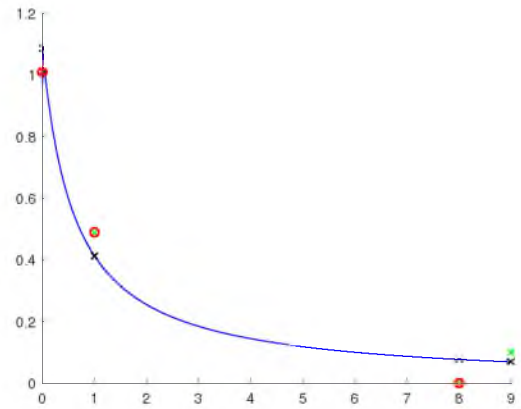
(k)

```

X=[0 1 8 9]
Xref=[0 1 8]
E2= 0.0772548
||f-r||= 0.0307826

```

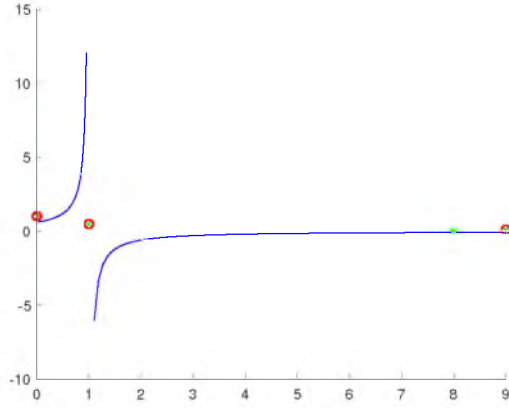
(j)



(l)

$X=[0 \ 1 \ 8 \ 9]$
 $X_{ref}=[0 \ 1 \ 9]$
 $E1= 0.4075429$
 $Polo: 1.000000$
 $||f-r||= 0.0860653$

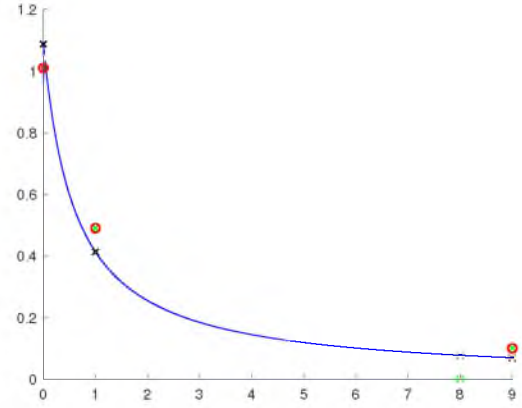
(m)



(ñ)

$X=[0 \ 1 \ 8 \ 9]$
 $X_{ref}=[0 \ 1 \ 9]$
 $E2= 0.0030126$
 $||f-r||= 0.0772548$

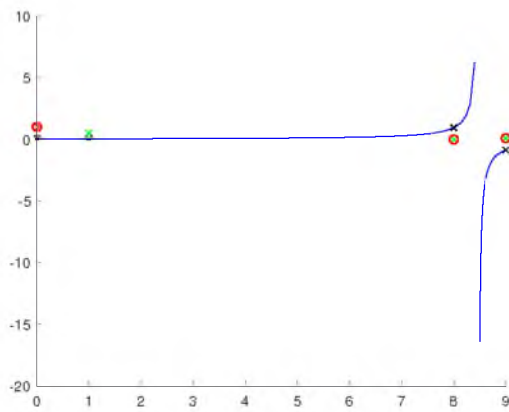
(n)



(o)

$X=[0 \ 1 \ 8 \ 9]$
 $X_{ref}=[0 \ 8 \ 9]$
 $E1= 0.9566564$
 $Polo: 8.472426$
 $||f-r||= 0.4295177$

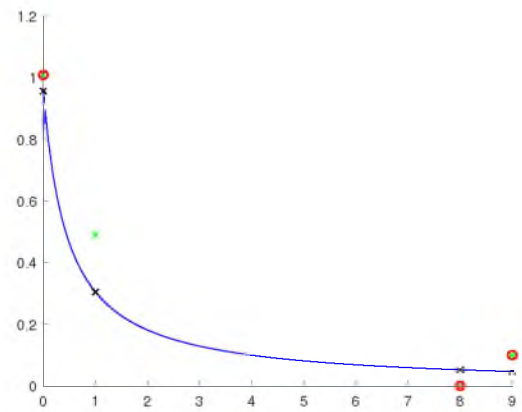
(p)



(r)

$X=[0 \ 1 \ 8 \ 9]$
 $X_{ref}=[0 \ 8 \ 9]$
 $E2= 0.0527880$
 $||f-r||= 0.1853147$

(q)



(s)

```

X=[0 1 8 9]
Xref=[1 8 9]
E1= 0.4626717
Polo: 8.439419
||f-r||= 0.9859099

```

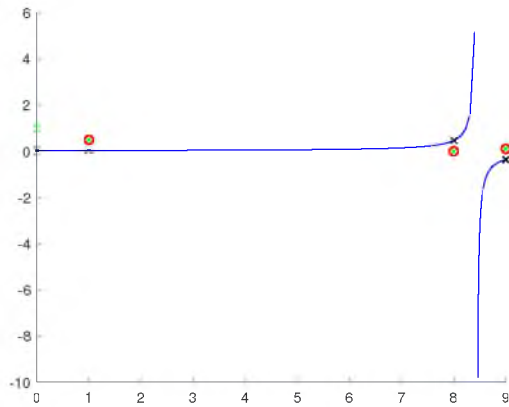
(t)

```

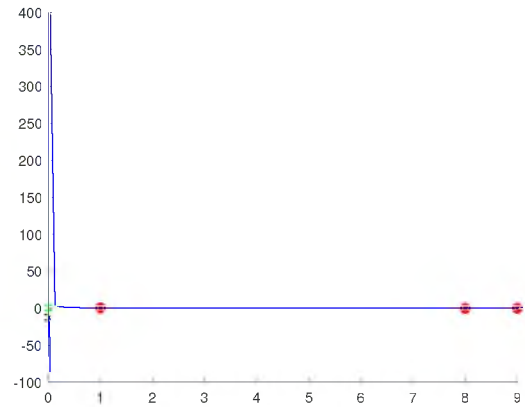
X=[0 1 8 9]
Xref=[1 8 9]
E2= 0.0529533
Polo: 0.034940
||f-r||= 13.0815086

```

(u)



(v)



(w)

Para evitar resolver todas las aproximaciones en un ejemplo concreto, se ha desarrollado el algoritmo de grado total, cuyo procedimiento puede verse en la siguiente sección.

3.3. Algoritmo de grado total

Sea f una función definida sobre un conjunto finito de puntos $X \subset \mathbb{R}$ con $\text{card}(X) \geq N + 2$ donde $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el algoritmo de grado total encuentra una estimación de los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$ de la función racional de mejor aproximación de grado total N a la función f y una estimación del error de aproximación $E(f, N, X)$. El procedimiento del mismo se detalla a continuación:

1. Tomar una referencia X_{ref} de $N + 2$ puntos.
2. Calcular el error equioscilante en X_{ref} para cada una de las clases de grado total N .
3. Escoger la clase $R(m, n)$ que tenga el menor error equioscilante de entre aquellos cuyos errores sean a su vez mayores que el obtenido hasta el momento.
4. Use esta función racional para encontrar dos puntos en $X - X_{ref}$, aquel en el cual la función error alcanza su máximo valor absoluto y el punto en el cual dicha función alcanza el menor

de los valores mayores al error de equioscilación.

5. Cambie sucesivamente cada punto de X_{ref} con el primero de los puntos anteriores hasta que aparezca una nueva referencia con un error de equioscilación mayor que el obtenido hasta el momento.
6. En la referencia obtenida en el paso anterior cambiar cada uno de los puntos por el segundo de los puntos obtenidos en el paso 4, de nuevo hasta obtener una nueva referencia con un error de equioscilación mayor que el obtenido hasta el momento.
7. Dejar fija la columna de la clase $R(m, n)$ si el error de equioscilación alcanzó el valor del error máximo.
8. Repetir a partir del paso 3 hasta que en todas las columnas de las clases $R(m, n)$ se iguale el error de equioscilación con el error máximo, ó bien, en la última etapa de ese ciclo no haya habido aumento del error de equioscilación.

3.4. Detalles del proceso para llevar a cabo el algoritmo.

3.4.1. Polinomios ortogonales

Al realizar el paso 2 del procedimiento del algoritmo de grado total, debemos resolver el sistema de ecuaciones (2.2.1) en una referencia X_{ref} de $N + 2$ puntos. El cual es un sistema mal condicionado, por lo que Pelios ([14]), transforma el anterior problema en uno equivalente con ayuda de polinomios ortogonales. Detallamos a continuación dicha transformación.

Empecemos reescribiendo (2.2.1) de la siguiente forma

$$q(f - s\lambda) - p = 0 \quad \text{sobre } X_{ref}, \quad (3.4.1)$$

donde

$$s(x_i) = (-1)^{(N+1)-i},$$

$$\lambda = E_{X_{ref}}.$$

Por otro lado, generamos un producto interno $C[(X_{ref})]$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \sum_{X_{ref}} \omega f g \\ &= \sum_{i=0}^{N+1} \omega(x_i) f(x_i) g(x_i)\end{aligned}$$

donde se define la función $\omega(x_i)$ como la función peso de forma que

$$\begin{aligned}\omega(x_i) &= s(x_i) \prod_{j=0, j \neq i}^{N+1} \left(\frac{1}{x_i - x_j} \right) \\ &= s(x_i) \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \cdots (x_i - x_{N+1})} > 0.\end{aligned}$$

Los polinomios ortogonales T_i^* serán establecidos con ayuda del anterior producto interno, es decir, cumpliendo las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\langle T_i^*, T_j^* \rangle = \delta_{ij} \gamma_i,$$

donde γ_i es una constante positiva. Podemos deducirlos usando una regla de recurrencia de tres términos

$$T_{i+1}^* = (x - \alpha_i)T_i^* - \beta_i T_{i-1}^*$$

con las condiciones iniciales $T_0^* = 1$, $T_1^* = (x - \alpha_0)T_0^*$, $\alpha_0 = \langle xT_0^*, T_0^* \rangle / \langle T_0^*, T_0^* \rangle$. Luego normalizamos los polinomios ortogonales T_i^* multiplicándolos por el siguiente factor

$$\frac{1}{\sqrt{\langle T_i^*, T_i^* \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_i}}$$

y obtenemos los $N + 2$ polinomios ortonormales T_i que van a tener la ventaja de que el producto interno cumpla $\langle T_i, T_j \rangle = \delta_{ij}$. Generamos una base del espacio de polinomios de grado a lo más $N + 1$, es decir, P_{N+1} compuesta por los polinomios T_i con $i = 0, \dots, N + 1$.

Resolver el sistema (3.4.1) consiste en hallar una función racional de la clase $R(m, n)_{X_{ref}}$ con $m + n = N$.

$$r(x) = \frac{\sum_{k=0}^m a^k T_k}{\sum_{j=0}^n b^j T_j}$$

donde $p = \sum_{k=0}^m a^k T_k$ y $q = \sum_{j=0}^n b^j T_j$, que satisfaga el sistema

$$\left(\sum_{j=0}^n b^j T_j \right) [f - s\lambda] - \left(\sum_{k=0}^m a^k T_k \right) = 0 \text{ sobre } X_{ref}.$$

Para resolver el sistema (3.4.1), el cual es un *Problema de aproximación racional discreta*, lo convertiremos a un *Problema de eigenvalores simétricos múltiples*.

Primero, usando el anterior producto interno, multiplicamos (3.4.1) por sT_i , con $i = 0, 1, \dots, n$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle sT_i, 0 \rangle = \langle sT_i, qf - qs\lambda - p \rangle = \langle sT_i, qf \rangle - \lambda \langle sT_i, sq \rangle - \langle sT_i, p \rangle \\ &= \left\langle sT_i, \sum_{j=0}^n b^j T_j f \right\rangle - \lambda \left\langle T_i, \sum_{j=0}^n b^j \right\rangle - \left\langle sT_i, \sum_{k=0}^m a^k T_k \right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^n b^j \langle sT_i, fT_j \rangle - \lambda \sum_{j=0}^n b^j \langle T_i, T_j \rangle - \sum_{k=0}^m a^k \langle sT_i, T_k \rangle \\ &= \sum_{j=0}^n b^j \Delta^{N+1}(fT_i T_j) - \lambda b_i - \sum_{k=0}^m a^k \langle T_{N+1} - i, T_k \rangle \\ &= \sum_{j=0}^n b^j \Delta^{N+1}(fT_i T_j) - \lambda b_i. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

El sistema (3.4.2) se transforma en

$$Sb = \lambda b,$$

donde S es una matriz cuadrada y simétrica de tamaño $n + 1$ cuyas entradas son

$$s_{ij} = \Delta^{N+1}(fT_i T_j)$$

con Δ^{N+1} es la diferencia dividida de orden $N + 1$ de f relativo a X_{ref} , la cual puede ser calculada de manera recursiva (ver [15, pág. 49]) y b es el vector de coeficientes $[b_0, b_1, \dots, b_n]^t$.

Cualquier solución a la ecuación (3.4.1) debe de ser también solución para la ecuación (3.4.2).

Por otro lado, multiplicando por T_i con $i = 0, 1, \dots, m$, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle T_i, fq \rangle - \langle T_i, s\lambda q \rangle - \langle T_i, p \rangle \\
&= \left\langle T_i, f \sum_{j=0}^n b^j T_j \right\rangle - \lambda \left\langle T_i, \sum_{j=0}^n s b^j T_j \right\rangle - \left\langle T_i, \sum_{k=0}^m a^k T_k \right\rangle \\
&= \sum_{j=0}^n b^j \langle T_i, f T_j \rangle - \lambda \sum_{j=0}^n b^j \langle T_i, T_{N+1-j} \rangle - \sum_{k=0}^m a^k \langle T_i, T_k \rangle \\
&= \sum_{j=0}^n b^j \langle T_i, f T_j \rangle - a_i \\
&= \sum_{j=0}^n b^j \Delta^{N+1}(s f T_i T_j) - a_i.
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

El sistema (3.4.3) se transforma en

$$Mb = a, \tag{3.4.4}$$

donde M es una matriz de tamaño $(m+1) \times (n+1)$ cuyas entradas son

$$m_{ij} = \Delta^{N+1}(s f T_i T_j)$$

y a es un vector columna de coeficientes del polinomio numerador p de tamaño $(m+1) \times 1$.

El error de equioscilación λ en (3.4.2) es un eigenvalor de S y b es un eigenvector de dicho eigenvalor. Como consecuencia de que S es una matriz simétrica, tiene $n+1$ eigenvalores reales y podemos hallar $n+1$ eigenvectores ortogonales.

A continuación daremos algunas propiedades de la matriz S que nos servirá para determinarla más cómodamente durante el proceso de nuestro algoritmo.

Teorema 3.3 ([6, Theorem 4]) *Sea S_k con $0 \leq k \leq N$, la matriz simétrica de tamaño $(k+1) \times (k+1)$ correspondiente al problema asociado con la clase racional $R(N-k, k)$. Se cumple que $S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_N \subset S_{N+1}$, donde la inclusión se entiende en el sentido de que cada matriz es la máxima submatriz principal de la siguiente y además $S_{N+1} = S$.*

Otro teorema importante es el siguiente.

Teorema 3.4 ([6, Theorem 5]) La matriz S_{N+1} es persimétrica* y sus respectivos $N + 2$ eigenvalores son

$$s(x_i)f(x_i) \quad \text{con } i = 0, \dots, N + 1.$$

Además a cada eigenvalor le corresponde un eigenvector

$$b_i = \left[\sqrt{\omega(x_i)T_0(x_i)}, \sqrt{\omega(x_i)T_1(x_i)}, \dots, \sqrt{\omega(x_i)T_{N+1}(x_i)} \right]^t.$$

Ordenamos los $N + 2$ eigenvalores de S_{N+1} como

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N+1}.$$

Corolario 3.5 ([6, Corollary 6]) Sea S_k con $0 \leq k \leq N$ la matriz correspondiente al problema de eigenvalores simétricos de la clase $R(N - k, k)$. Entonces se cumple

1. *Entrelazamiento de eigenvalores:* Los eigenvalores de S_{k-1} están entrelazados con los eigenvalores de S_k donde $1 \leq k \leq N + 1$. En particular, los eigenvalores de S_N entrelazan la secuencia ordenada $\{s(x_i)f(x_i) : i = 0, \dots, N + 1\}$.
2. Los eigenvalores de S_k , $0 \leq k \leq N$, van a estar acotados inferiormente por $\lambda_0 = \min\{s(x)f(x) : x \in X_{ref}\}$ y acotados superiormente por $\lambda_N = \max\{s(x)f(x) : x \in X_{ref}\}$.

Para entender estos últimos teoremas, empezamos con una matriz cuando el grado del polinomio denominador $n = 0$, la matriz va ser de tamaño 1×1 y terminamos con una matriz de tamaño $(N + 1) \times (N + 1)$ cuando $n = N$. La ecuación (3.4.1) en realidad se refiere a $N + 1$ problemas diferentes, sin embargo, las respectivas matrices S_k satisfacen el Teorema 3.3, por lo que todas son simétricas si bien sólo S_{N+1} es persimétrica.

Observación: Los índices de la columna y de la fila inician en 0.

Ejemplo 3.4.1 ■ Cuando $n = 0$ y $m = N$

$$S_0 = \begin{bmatrix} s_{00} \end{bmatrix},$$

tiene 1 eigenvalor $\lambda_{00} = s_{00}$ y además $\lambda_0 \leq \lambda_{00} \leq \lambda_{N+1}$.

*Una matriz simétrica $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que es persimétrica cuando es simétrica también respecto a la diagonal de noreste-suroeste, es decir, $B_{ij} = B_{n-j+1, n-i+1}$ para todo i, j .

- La siguiente matriz cuando $n = 1$, $m = N - 1$

$$S_1 = \begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} \\ s_{10} & s_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 & s_{01} \\ s_{10} & s_{11} \end{bmatrix},$$

tiene 2 eigenvalores $\lambda_{10} \leq \lambda_{11}$ y además $\lambda_0 \leq \lambda_{10} \leq \lambda_{11} \leq \lambda_{N+1}$.

Después cuando $n = 3$, $m = N - 2$

$$S_2 = \begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} \\ s_{20} & s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & S_1 & s_{02} \\ & & s_{12} \\ s_{20} & s_{22} & s_{21} \end{bmatrix}$$

tiene 3 eigenvalores $\lambda_{20} \leq \lambda_{21} \leq \lambda_{22}$ y además $\lambda_0 \leq \lambda_{20} \leq \lambda_{21} \leq \lambda_{22} \leq \lambda_{N+1}$.

Y así sucesivamente, hasta que $n = N$, $m = 0$

$$S_N = \begin{bmatrix} & & & & s_{0N} \\ & S_{N-1} & & & s_{1N} \\ & & & & \vdots \\ s_{N0} & s_{N1} & \dots & & s_{NN} \end{bmatrix}$$

tiene $N + 1$ eigenvalores $\lambda_{N0} \leq \lambda_{N1} \leq \dots \leq \lambda_{NN}$ y además $\lambda_0 \leq \lambda_{N0} \leq \lambda_1 \leq \lambda_{N1} \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N \leq \lambda_{NN} \leq \lambda_{N+1}$.

Como S_{N+1} es persimétrica, entonces $s_{ij} = s_{N+1-i, N+1-j}$, $i, j = 0, \dots, N + 1$.

En la Figura 3.1, se muestra un ejemplo de una matriz persimétrica de $N + 1 = 4$.

$$S_{N+1} = \begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} & s_{03} & s_{04} \\ s_{01} & s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{03} \\ s_{02} & s_{12} & s_{22} & s_{12} & s_{02} \\ s_{03} & s_{13} & s_{12} & s_{11} & s_{01} \\ s_{04} & s_{03} & s_{02} & s_{01} & s_{00} \end{bmatrix}$$

Figura 3.1: Matriz persimétrica S_{N+1} para $N + 1 = 4$. Para rellenarla únicamente hace falta conocer 9 valores (indicados en azul).

3.4.2. Procedimiento Lo-Hi

Una vez establecida la matriz S_{N+1} , generamos otra matriz Λ de tamaño $(N + 3) \times (N + 2)$ de la siguiente forma:

1. En el primer renglón, colocamos el menor de los eigenvalores de S_{N+1} , es decir, λ_0 , repitiendo el mismo valor en toda la fila.
2. En la última columna, acomodamos de manera descendente todos los eigenvalores de S_{N+1} conforme crece, empezando a partir de la segunda fila.
3. Comenzando en la tercera fila, primera columna, colocamos el mayor de los eigenvalores λ_{N+1} , repitiendo el mismo en diagonal descendente. Se forma un borde alrededor de una región triangular y fuera de ese borde, se rellena con ceros.
4. La k -ésima columna, se rellena con los respectivos eigenvalores λ 's de cada submatriz S_k con $0 \leq k \leq N$, ordenados descendientemente conforme su valor crece.
5. Para hallar los $k + 1$ eigenvalores λ 's y sus respectivos eigenvectores b 's de la matriz S_k se realiza de la siguiente manera:

I. Hallaremos el primer eigenvalor y el primer eigenvector, λ_{k0} y $b_{k0} = [b_{k0_0}, b_{k0_1}, \dots, b_{k0_k}]^t$. Obsérvese $\lambda_0 \leq \lambda_{k0} \leq \lambda_{k-1,0}$.

- i. Tomamos un primer intento para el eigenvalor λ_{k0} tal que $\lambda_{k0}^0 \in [\lambda_0, \lambda_{k-1,0}]$.
- ii. Generamos $b_{k0}^0 = [b_{k0_0}^0, b_{k0_1}^0, \dots, b_{k0_k}^0]^t$ (i.e. el eigenvector que le corresponde a λ_{k0}^0). Su último componente es igual a 1, i.e. $b_{k0_k}^0 = 1$.
- iii. Resolver el sistema

$$(S_k - \lambda_{k0}^0) b_{k0}^0 = 0$$

- iv. Aplicar iteración inversa y cociente de Rayleigh

$$b_{k0}^i = (S_k - \lambda_{k0}^i I) b_{k0}^{i+1}$$

$$\lambda_{k0}^{i+1} = \frac{(b_{k0}^{i+1})^t S_k b_{k0}^{i+1}}{(b_{k0}^{i+1})^t b_{k0}^{i+1}}$$

Repetir hasta que $\left| 1 - \frac{\lambda_{k0}^i}{\lambda_{k0}^{i+1}} \right| < 10^{-11}$.

II. Hallaremos λ_{kl} y $b_{kl} = [b_{kl_0}, b_{kl_1}, \dots, b_{kl_k}]^t$ con $0 \leq l \leq k$. Obsérvese que $\lambda_{k-1,l} \leq \lambda_{kl} \leq \lambda_{k-1,l+1}$.

- i. Tomamos un primer intento para el eigenvalor λ_{kl} tal que $\lambda_{kl}^0 \in [\lambda_{k-1,l}, \lambda_{k-1,l+1}]$.
- ii. Generamos $b_{kl}^0 = [b_{kl_0}^0, b_{kl_1}^0, \dots, b_{kl_k}^0]^t$ (i.e. el vector que le corresponde a λ_{kl}^0). Su último componente es igual a 1, i.e. $b_{kl_k}^0 = 1$.
- iii. Resolver el sistema

$$(b_{kl}^0)^t b_{jl} = 0 \quad \text{para } 0 \leq j \leq l-1$$

$$(S'_l - \lambda_{kl}^0) = 0$$

donde S'_l es una submatriz de S_{N+1} de tamaño $(k-l) \times (k+1)$.

iv. Aplicar iteración inversa y cociente de Rayleigh

$$b_{kl}^i = (S_k - \lambda_{kl}^i I) b_{kl}^{i+1}$$

$$\lambda_{kl}^{i+1} = \frac{(b_{kl}^{i+1})^t S_k b_{kl}^{i+1}}{(b_{kl}^{i+1})^t b_{kl}^{i+1}}$$

Repetir hasta que $\left| 1 - \frac{\lambda_{kl}^i}{\lambda_{kl}^{i+1}} \right| < 10^{-11}$.

III. Hallaremos el último eigenvalor λ_{kk} y eigenvector $b_{kk} = [b_{kk_0}, b_{kk_1}, \dots, b_{kk_k}]^t$. Obsérvese $\lambda_{k-1,k-1} \leq \lambda_{kk} \leq \lambda_{N+1}$.

i. Hallaremos un primer intento para el eigenvalor λ_{kk} , es decir, $\lambda_{kk}^0 \in [\lambda_{k-1,k-1}, \lambda_{N+1}]$.

ii. Generamos $b_{kk} = [b_{kk_0}^0, b_{kk_1}^0, \dots, b_{kk_k}^0]^t$ (i.e el eigenvector que le corresponde a λ_{kk}^0). Su último componente es igual a 1, i.e $b_{kk_k}^0 = 1$.

iii. Resolver el sistema

$$(b_{kk}^0)^t b_{jk} = 0 \quad \text{para } 0 \leq j \leq k-1$$

iv. Aplicar iteración inversa y cociente de Rayleigh

$$b_{kk}^i = (S_k - \lambda_{kk}^i I) b_{kk}^{i+1}$$

$$\lambda_{kk}^{i+1} = \frac{(b_{kk}^{i+1})^t S_k b_{kk}^{i+1}}{(b_{kk}^{i+1})^t b_{kk}^{i+1}}$$

Repetir hasta que $\left| 1 - \frac{\lambda_{kk}^i}{\lambda_{kk}^{i+1}} \right| < 10^{-11}$.

Una vez concluida esta etapa, se obtiene una matriz Λ como se muestra en Figura 3.2.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_0 \\ s_{00} & \lambda_{10} & \lambda_{20} & \lambda_{30} & \lambda_0 \\ \lambda_4 & \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_4 & \lambda_{22} & \lambda_{32} & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_{33} & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

Figura 3.2: Matriz Λ de eigenvalores para $N + 1 = 4$.

Al mismo tiempo obtenemos los coeficientes b 's de cada uno de los polinomios denominadores q como un eigenvector correspondiente a sus respectivos eigenvalores λ 's. Generamos una matriz de tamaño $(N + 1) \times \frac{(N + 1)(N + 2)}{2}$ la cual la llamamos A , escribiendo en la primer columna los coeficientes del polinomio correspondiente a λ_{00} y después los correspondientes al polinomio numerador

obtenido al resolver (3.4.4). Hacemos lo mismo para cada columna con respecto a los otros eigenvalores λ 's. En la última fila, se coloca el número de ceros de cada polinomio denominador q en $\text{conv}(X)$.

Después de ordenar los coeficientes de cada polinomio denominador, calculamos la cantidad de ceros de dicho polinomio con el siguiente método.

3.4.3. Prueba de Sturm

Como habíamos enunciado anteriormente, tenemos $q = \sum_{j=0}^k b^j T_j$ con $k = 0, 1, \dots, n$, queremos hallar los ceros de cada polinomio denominador en el intervalo $\text{conv}(X) = [x_0, x_{N+1}]$. Desafortunadamente, la prueba de Sturm trabaja con la base estándar de los polinomios, entonces debemos representar q en términos de monomios, es decir,

$$Q(x) = \sum_{i=0}^k d_i x^i.$$

Generamos los $k+1$ polinomios $C_k, C_{k-1}, \dots, C_1, C_0$ de grado estrictamente decreciente ($\deg C_k > \deg C_{k-1}$) definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_k &= Q \\ C_{k-1} &= Q' \\ C_i &= PC_{i-1} - C_{i-2}, \quad 0 \leq i \leq k-2 \end{aligned}$$

donde P es un polinomio que cumple $\deg(PC_{i-1}) = \deg(C_i)$.

Observación: $C_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}x + c_{i,2}x^2 + \dots + c_{i,i}x^i$ con $0 \leq i \leq k$.

Lo anterior nos conduce a un proceso recursivo, en el cual calculamos los coeficientes de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_{k,j} &= d_j, \quad 0 \leq j \leq k \\ c_{k-1,j} &= (j+1)d_{k-1+j}, \quad 0 \leq j \leq k-1 \\ \alpha_i &= \frac{c_{i,i}}{c_{i-1,i-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, i-1 \\ \beta_i &= \frac{(c_{i,i-1} - \alpha_i c_{i-1,i-2})}{c_{i-1,i-1}}, \quad i = k, k-1, \dots, 2 \\ c_{i-2,i-j} &= \alpha_i c_{i-1,i-j-1} + \beta_i c_{i-1,i-j} - c_{i,i-j} \\ c_{i-2,i-j} &= \beta_i c_{i-1,i-j} - c_{i,i-j}, \quad j = i. \end{aligned}$$

La cantidad de ceros reales del polinomio Q en el intervalo $[a, b]$ es

$$V(a) - V(b)$$

donde la función $V(x)$ cuenta la cantidad de cambios de signo en la sucesión $C_j(x)$ (ver [19]).

Como se observa en la Figura 3.3 se muestra un ejemplo de una matriz A de $N = 3$.

$$A = \begin{matrix} & s_{00} & \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{20} & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{30} & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \\ \begin{matrix} b_{000} \\ a_{000} \\ a_{100} \\ a_{200} \\ a_{300} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} b_{010} \\ b_{110} \\ a_{010} \\ a_{110} \\ a_{210} \\ n_{10} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{011} \\ b_{111} \\ a_{011} \\ a_{111} \\ a_{211} \\ n_{11} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{020} \\ b_{120} \\ b_{220} \\ a_{020} \\ a_{120} \\ n_{20} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{021} \\ b_{121} \\ b_{221} \\ a_{021} \\ a_{121} \\ n_{21} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{022} \\ b_{122} \\ b_{222} \\ a_{022} \\ a_{122} \\ n_{22} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{030} \\ b_{130} \\ b_{230} \\ b_{330} \\ a_{030} \\ n_{30} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{031} \\ b_{131} \\ b_{231} \\ b_{331} \\ a_{031} \\ n_{31} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{032} \\ b_{132} \\ b_{232} \\ b_{332} \\ a_{032} \\ n_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{033} \\ b_{133} \\ b_{233} \\ b_{333} \\ a_{033} \\ n_{33} \end{matrix} \end{matrix}$$

Figura 3.3: Matriz A para $N = 3$. n_{ij} son los ceros del polinomio $b_{0ij} + b_{1ij}x + \dots + b_{ijj}x^i$ (indicados en rojo).

3.5. Convergencia del algoritmo de grado total

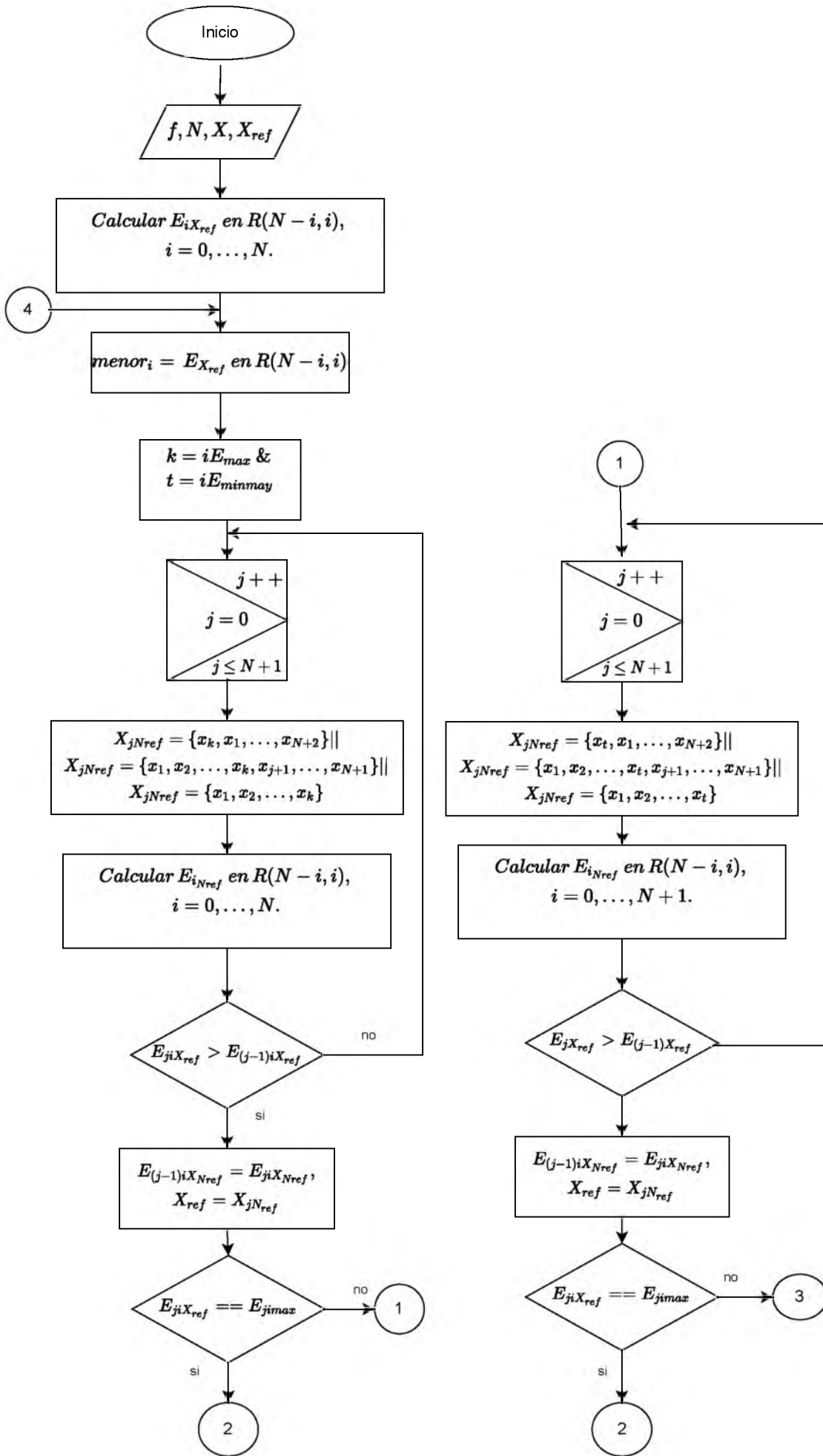
Hasta este punto nuestro desarrollo ha estado restringido a una única referencia de $m + n + 2$ puntos. El algoritmo de intercambio de grado total funciona de manera similar que el algoritmo de intercambio unipuntual de Remez cuando los grados m y n se fijan de manera separada excepto que ahora en cada etapa el algoritmo selecciona la función racional de menor error de entre las $m + n + 1$ clases racionales de grado total N sobre todos los puntos del dominio X . Así, el algoritmo ya no está restringido a una sola clase racional. Como en el caso del intercambio unipuntual, se crea una nueva referencia introduciendo un punto nuevo de X en el cual la actual función racional de mejor aproximación alcanza su error máximo. La cercanía a la función por aproximar de las sucesivas funciones racionales se determina sobre el conjunto total de puntos X , hasta obtener una buena estimación que cumpla con criterio de paro.

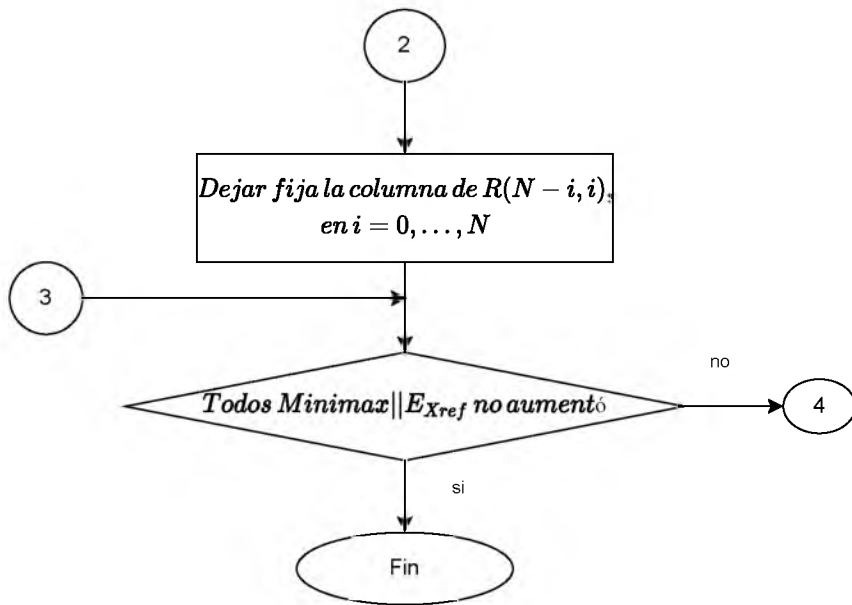
Enunciaremos a continuación el siguiente teorema que prueba la convergencia del algoritmo de grado total.

Teorema 3.5 (*[6, Theorem 9]*) (*Teorema de convergencia*) *El algoritmo de intercambio unipuntual de Remez de grado total converge a la aproximación racional minimax de grado total N .*

3.6. Diagrama de flujo

A continuación mostraremos el diagrama de flujo del algoritmo de grado total que fue descrito anteriormente.





3.7. Ejemplos

Ejemplo 3.7.1 Consideremos la función $f(x) = \log(x+1)$ definida sobre el intervalo cerrado $[0, 1]$. Esta función es continua y estrictamente positiva en el intervalo mencionado. Proponemos hallar r , la mejor aproximación racional de grado total 4 sobre el conjunto de 51 puntos equidistantes dentro del intervalo $[0, 1]$.

En el primer ejemplo mostraremos los resultados obtenidos por el programa del algoritmo de grado total en MATLAB.

Empezamos con el algoritmo con una referencia arbitraria de 6 puntos con $N = 4$.

$$X_{ref} = [-0.96, -0.92, -0.88, -0.84, -0.8, -0.86, -0.76],$$

cuyos índices son 2, 3, 4, 5, 6 y 7, respectivamente.

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)	
1.715E-09	1.071E-10	4.756E-11	2.222E-10	0.000757	Error equioscilante de una referencia libre de polos
51	51	51	51	51	Índice donde se alcanza el error máximo
0.0578012	0.001554	0.0005084	0.0041156	0.6931459	Error máximo
8	8	8	8	1	Índice del mínimo error mayor al equioscilante
1.032E-07	6.132E-09	2.688E-09	1.273E-08	0.0102646	Valor del error mínimo mayor al equioscilante
2	2	2	2	2	
3	3	3	3	3	
4	4	4	4	4	
5	5	5	5	5	
6	6	6	6	6	
7	7	7	7	7	

Índices de X_{ref}

Etapa 1

1					2				
R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)	R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.769E-08	1.276E-09	5.99E-10	2.453E-09	0.000757	2.863E-08	2.045E-09	9.566E-10	3.946E-09	0.000757
41	40	39	40	51	41	40	39	40	51
0.0027892	0.0001049	3.956E-05	0.0002419	0.6931459	0.0029325	0.0001096	4.129E-05	0.0002537	0.6931459
8	8	8	8	1	3	3	3	3	1
4.982E-07	3.423E-08	1.583E-08	6.639E-08	0.0102646	1.541E-07	1.149E-08	5.45E-09	2.196E-08	0.0102646
3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
4	4	4	4	3	4	4	4	4	3
5	5	5	5	4	5	5	5	5	4
6	6	6	6	5	6	6	6	6	5
7	7	7	7	6	7	7	7	7	6
51	51	51	51	7	51	51	51	51	7

3					4				
R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)	R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
4.865E-08	3.474E-09	1.625E-09	6.71E-09	0.000757	5.048E-08	3.687E-09	1.737E-09	7.077E-09	0.000757
41	40	39	40	51	41	40	39	40	51
0.0030387	0.0001132	4.264E-05	0.0002626	0.6931459	0.0030392	0.0001133	4.266E-05	0.0002627	0.6931459
4	4	4	4	1	8	8	8	8	1
5.414E-08	4.157E-09	1.992E-09	7.812E-09	0.0102646	8.541E-07	5.865E-08	2.712E-08	1.141E-07	0.0102646
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
6	6	6	6	5	6	6	6	6	5
7	7	7	7	6	7	7	7	7	6
51	51	51	51	7	51	51	51	51	7

5					6				
R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)	R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
5.048E-08	3.687E-09	1.737E-09	7.077E-09	0.000757	5.048E-08	3.687E-09	1.737E-09	7.077E-09	0.000757
41	40	39	40	51	41	40	39	40	51
0.0030392	0.0001133	4.266E-05	0.0002627	0.6931459	0.0030392	0.0001133	4.266E-05	0.0002627	0.6931459
8	8	8	8	1	8	8	8	8	1
8.541E-07	5.865E-08	2.712E-08	1.141E-07	0.0102646	8.541E-07	5.865E-08	2.712E-08	1.141E-07	0.0102646
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
6	6	6	6	5	6	6	6	6	5
7	7	7	7	6	7	7	7	7	6
51	51	51	51	7	51	51	51	51	7

Cambio de índice del mínimo error mayor al equioscilante: 8

7					8				
R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)	R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
5.048E-08	3.687E-09	1.737E-09	7.077E-09	0.000757	6.361E-08	4.471E-09	2.081E-09	8.654E-09	0.000757
41	40	39	40	51	41	40	39	40	51
0.0030392	0.0001133	4.266E-05	0.0002627	0.6931459	0.0026996	0.0001017	3.839E-05	0.0002344	0.6931459
8	8	8	8	1	5	5	5	5	1
8.541E-07	5.865E-08	2.712E-08	1.141E-07	0.0102646	9.986E-08	7.389E-09	3.497E-09	1.405E-08	0.0102646
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	4	4	4	4	3
4	4	4	4	4	6	6	6	6	4
6	6	6	6	5	7	7	7	7	5
7	7	7	7	6	8	8	8	8	6
51	51	51	51	7	51	51	51	51	7

9

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
8.529E-08	6.006E-09	2.796E-09	1.163E-08	0.000757
41	40	39	40	51
0.0027884	0.0001048	3.954E-05	0.0002419	0.6931459
4	4	4	4	1
1.063E-07	8.549E-09	4.152E-09	1.581E-08	0.0102646
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
6	6	6	6	4
7	7	7	7	5
8	8	8	8	6
51	51	51	51	7

10

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
9.184E-08	6.762E-09	3.193E-09	1.293E-08	0.000757
41	40	39	40	51
0.0027897	0.000105	3.96E-05	0.0002421	0.6931459
5	5	5	5	1
1.861E-07	1.293E-08	5.983E-09	2.523E-08	0.0102646
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
7	7	7	7	5
8	8	8	8	6
51	51	51	51	7

11

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
9.184E-08	6.762E-09	3.193E-09	1.293E-08	0.000757
41	40	39	40	51
0.0027897	0.000105	3.96E-05	0.0002421	0.6931459
5	5	5	5	1
1.861E-07	1.293E-08	5.983E-09	2.523E-08	0.0102646
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
7	7	7	7	5
8	8	8	8	6
51	51	51	51	7

12

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
9.184E-08	6.762E-09	3.193E-09	1.293E-08	0.0012785
41	40	39	40	51
0.0027897	0.000105	3.96E-05	0.0002421	0.6931445
5	5	5	5	1
1.861E-07	1.293E-08	5.983E-09	2.523E-08	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
7	7	7	7	6
8	8	8	8	7
51	51	51	51	8

Etapa 2

1

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
9.341E-07	7.494E-08	3.64E-08	1.368E-07	0.0012785
27	26	26	26	51
0.0003587	1.938E-05	8.301E-06	3.92E-05	0.6931445
9	9	9	9	1
5.618E-06	4.323E-07	2.073E-07	7.965E-07	0.0113418
3	3	3	3	2
4	4	4	4	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

2

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.478E-06	1.165E-07	5.626E-08	2.139E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003911	2.1E-05	8.983E-06	4.265E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.745E-06	1.447E-07	7.101E-08	2.616E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
4	4	4	4	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

3

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.575E-06	1.263E-07	6.135E-08	2.31E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003945	2.124E-05	9.092E-06	4.311E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.985E-06	1.703E-07	8.44E-08	3.051E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

4

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.575E-06	1.263E-07	6.135E-08	2.31E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003945	2.124E-05	9.092E-06	4.311E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.985E-06	1.703E-07	8.44E-08	3.051E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

5

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.575E-06	1.263E-07	6.135E-08	2.31E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003945	2.124E-05	9.092E-06	4.311E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.985E-06	1.703E-07	8.44E-08	3.051E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

6

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.575E-06	1.263E-07	6.135E-08	2.31E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003945	2.124E-05	9.092E-06	4.311E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.985E-06	1.703E-07	8.44E-08	3.051E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

Cambio de índice del mínimo error mayor al equioscilante: 5

7

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.575E-06	1.263E-07	6.135E-08	2.31E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003945	2.124E-05	9.092E-06	4.311E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.985E-06	1.703E-07	8.44E-08	3.051E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

8

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.575E-06	1.263E-07	6.135E-08	2.31E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003945	2.124E-05	9.092E-06	4.311E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.985E-06	1.703E-07	8.44E-08	3.051E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

9

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.575E-06	1.263E-07	6.135E-08	2.31E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003945	2.124E-05	9.092E-06	4.311E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.985E-06	1.703E-07	8.44E-08	3.051E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

10

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.575E-06	1.263E-07	6.135E-08	2.31E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003945	2.124E-05	9.092E-06	4.311E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.985E-06	1.703E-07	8.44E-08	3.051E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

11

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.575E-06	1.263E-07	6.135E-08	2.31E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003945	2.124E-05	9.092E-06	4.311E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.985E-06	1.703E-07	8.44E-08	3.051E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

12

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.575E-06	1.263E-07	6.135E-08	2.31E-07	0.0012785
27	26	25	26	51
0.0003945	2.124E-05	9.092E-06	4.311E-05	0.6931445
6	6	6	6	1
1.985E-06	1.703E-07	8.44E-08	3.051E-07	0.0113418
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
7	7	7	7	4
8	8	8	8	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

Etapa 3

36

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
1.333E-05	1.084E-06	5.249E-07	1.957E-06	0.0012785
46	15	14	15	51
0.0001146	5.848E-06	2.663E-06	1.112E-05	0.6931445
23	50	22	50	1
1.564E-05	1.217E-06	5.901E-07	2.911E-06	0.0113418
2	2	2	2	2
6	6	6	6	3
8	8	8	8	4
25	25	25	25	6
39	39	39	39	7
51	51	51	51	8

60

Etapa 5

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
4.164E-05	2.88E-06	1.319E-06	5.445E-06	0.0305681
45	45	44	45	46
0.0001359	6.493E-06	2.646E-06	1.354E-05	1.6982884
4	32	3	49	11
4.284E-05	3.084E-06	1.322E-06	5.875E-06	0.0324203
1	1	1	1	1
6	6	6	6	6
15	14	14	15	15
25	25	25	25	25
39	39	39	39	39
51	51	51	51	51

84

Etapa 7

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
5.534E-05	3.688E-06	1.639E-06	7.075E-06	0.0383793
17	5	5	5	47
6.766E-05	4.221E-06	1.932E-06	7.925E-06	0.0775675
35	31	15	32	8
5.764E-05	3.706E-06	1.674E-06	7.185E-06	0.041353
1	1	1	1	1
6	6	6	6	14
14	14	14	14	25
30	30	30	30	39
45	45	45	45	44
51	51	51	51	51

108

Etapa 9

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
5.937E-05	3.84E-06	1.7E-06	7.389E-06	0.0383793
17	51	4	31	47
6.512E-05	3.844E-06	1.713E-06	7.526E-06	0.0775675
19	4	16	16	8
5.938E-05	1.713E-06	7.416E-06	7.42E-06	0.041353
1	1	1	1	1
5	5	5	5	14
15	15	15	15	25
32	30	30	30	39
46	45	45	45	44
51	51	51	51	51

Etapa 4

48

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
3.455E-05	2.494E-06	1.152E-06	4.666E-06	0.0241855
46	1	1	1	46
0.0001242	7.257E-06	3.481E-06	1.32E-05	0.8395392
17	49	15	16	22
3.588E-05	2.505E-06	1.153E-06	4.69E-06	0.0325657
2	2	2	2	2
6	6	6	6	8
14	14	14	14	14
25	25	25	25	25
39	39	39	39	39
51	51	51	51	51

72

Etapa 6

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
4.64E-05	3.266E-06	1.49E-06	6.158E-06	0.0383793
32	30	30	31	47
0.0001056	5.315E-06	2.198E-06	1.091E-05	0.0775675
4	15	45	47	8
4.682E-05	3.297E-06	1.548E-06	6.303E-06	0.041353
1	1	1	1	1
6	6	6	6	14
14	14	14	14	25
25	25	25	25	39
44	44	44	44	44
51	51	51	51	51

96

Etapa 8

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
5.798E-05	3.84E-06	1.7E-06	7.389E-06	0.0383793
32	51	4	31	47
6.532E-05	3.844E-06	1.713E-06	7.526E-06	0.0775675
46	4	16	16	8
6.002E-05	1.713E-06	7.416E-06	7.42E-06	0.041353
1	1	1	1	1
5	5	5	5	14
15	15	15	15	25
30	30	30	30	39
45	45	45	45	44
51	51	51	51	51

120

Etapa 10

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
6.057E-05	3.84E-06	1.7E-06	7.389E-06	0.0400873
51	51	4	31	11
6.057E-05	3.844E-06	1.713E-06	7.526E-06	0.0504318
51	4	16	16	23
6.057E-05	1.713E-06	7.416E-06	7.42E-06	0.0408586
1	1	1	1	1
5	5	5	5	8
17	15	15	15	25
32	30	30	30	39
46	45	45	45	47
51	51	51	51	51

Etapa 11

132

R(4,0)	R(3,1)	R(2,2)	R(1,3)	R(0,4)
6.057E-05	3.84E-06	1.7E-06	7.389E-06	0.0422942
51	51	4	31	37
6.057E-05	3.844E-06	1.71E-06	7.526E-06	0.0477811
51	4	16	16	35
6.057E-05	1.713E-06	7.416E-06	7.42E-06	0.0436468
1	1	1	1	1
5	5	5	5	11
17	15	15	15	25
32	30	30	30	39
46	45	45	45	47
51	51	51	51	51

Resolvemos el paso 2 del algoritmo (llevando el proceso de la Sección 3.3) y se cumple con éxito el Teorema 3.2. Determinamos el error equioscilante para la clase $R(4, 0)$, vemos que el algoritmo estima que el error equioscilante es de $1.715E - 09$ y el error máximo es de 0.0578012 , el cual se alcanza en el punto con índice 51. Para la clase $R(3, 1)$, el algoritmo estima como error equioscilante el valor de $1.071E - 10$ y como error máximo el valor es de 0.001554 . Las estimaciones para la clase $R(2, 2)$, son que tiene un error equioscilante de $4.756E - 11$ y un error máximo de 0.0005084 . Las clases $R(1, 3)$ y $R(0, 4)$ tienen un error equioscilante estimado de $2.222E - 10$ y con error máximo estimado 0.000757 . Con un error máximo estimado de 0.0041156 y 0.6931459 , respectivamente.

Como el menor de los cinco errores equioscilaentes estimados es de $4.756E - 11$ de la clase $R(2, 2)$, vamos a introducir el punto con índice 51 en la nueva referencia.

Iniciamos la etapa 1, intercambiando el punto con índice 51 con el punto con índice 2 en cada una de las clases. Para la clase $R(4, 0)$, resolvemos el proceso para la Tabla 1 con los puntos con índices 3, 4, 5, 6, 7, 51. Vemos que el error equioscilante estimado es de $1.769E - 0.8$, aumentó con respecto a la Tabla de inicio y el error máximo estimado es de 0.0027892 (ver la Tabla 1), por el momento, no es la aproximación minimax. De manera análoga, se resuelve para las clases restantes. En la clase $R(0, 4)$, su error equioscilante estimado no aumentó, entonces se conservan los valores de esa columna.

Ahora tenemos que introducir el punto con índice 51 en lugar del índice 3. Notamos nuevamente que el error equioscilante estimado en cada una de las clases aumenta excepto en la clase $R(0, 4)$ (ver la Tabla 2) de modo que los valores de dicha clase se siguen conservando. Sin embargo, no coinciden el error equioscilante estimado y el error máximo estimado. Trabajamos en la Tabla 3 para los puntos con índices 2, 3, 5, 6, 7, 51 y en la Tabla 4 para los puntos 2, 3, 4, 6, 7, 51, el error equioscilante sigue aumentando en cada una de las clases, excepto en la clase $R(0, 4)$. Intentamos introducir el punto con índice 51 en los puntos con índice 6 y 7 (ver la Tabla 5 y Tabla 6) pero no existe mejoría en ninguna de las clases.

Por el momento, los estimados de los errores equioscilante y máximo no coinciden en ninguna clase. Es necesario realizar el intercambio del punto con índice de mínimo error mayor al equioscilante 8 en cada punto de X_{ref} con el primero de los puntos anteriores hasta que aparezca una nueva referencia con un error de equioscilación estimado mayor que el obtenido de la Tabla 6.

Observemos que termina la etapa 1 y se repite el procedimiento a partir del paso 3 del algoritmo de grado total.

A partir de la etapa 8, encontramos los primeros errores minimax en las clases $R(3, 1)$, $R(2, 2)$ (rectángulo amarillo en la Tabla 96). En las etapas 10 y 11, se encuentran los errores minimax en $R(4, 0)$ y $R(0, 4)$, respectivamente. Se detiene el algoritmo, pues el error estimado de la clase $R(1, 3)$ no mejoró.

Seleccionamos entre todas las clases la que tiene el menor error equioscilante estimado que corresponde a $R(2, 2)$ con el valor de $1.7E - 06$.

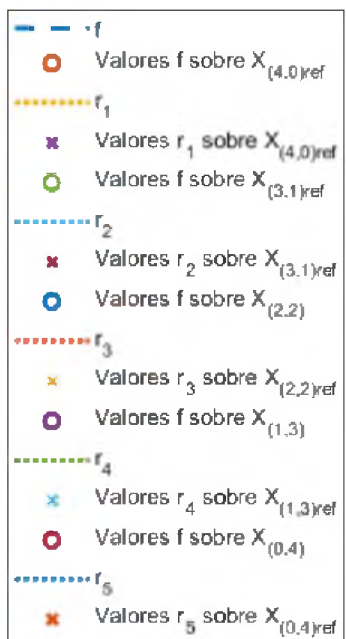
Como el menor error es el que corresponde a la clase $R(2, 2)$, entonces una buena estimación de aproximación de grado total 4 a la función f es de $1.7E - 06$.

Por lo tanto, la función racional r_3 definida como

$$\frac{44666763017124818569 \times 10^{20}x^2 + 11560499546419315514 \times 10^{21}x + 19605457193739611049 \times 10^{15}}{1328656244446097706 \times 10^{21}x^2 + 10231846311245795767 \times 10^{21}x + 11561909565123509007 \times 10^{21}}$$

es una estimación suficientemente buena a la racional de mejor aproximación a f con respecto a la clase $R(2, 2)$ y también a la racional de mejor aproximación de grado total 4.

La gráfica de los valores y las funciones corresponden de la siguiente manera :



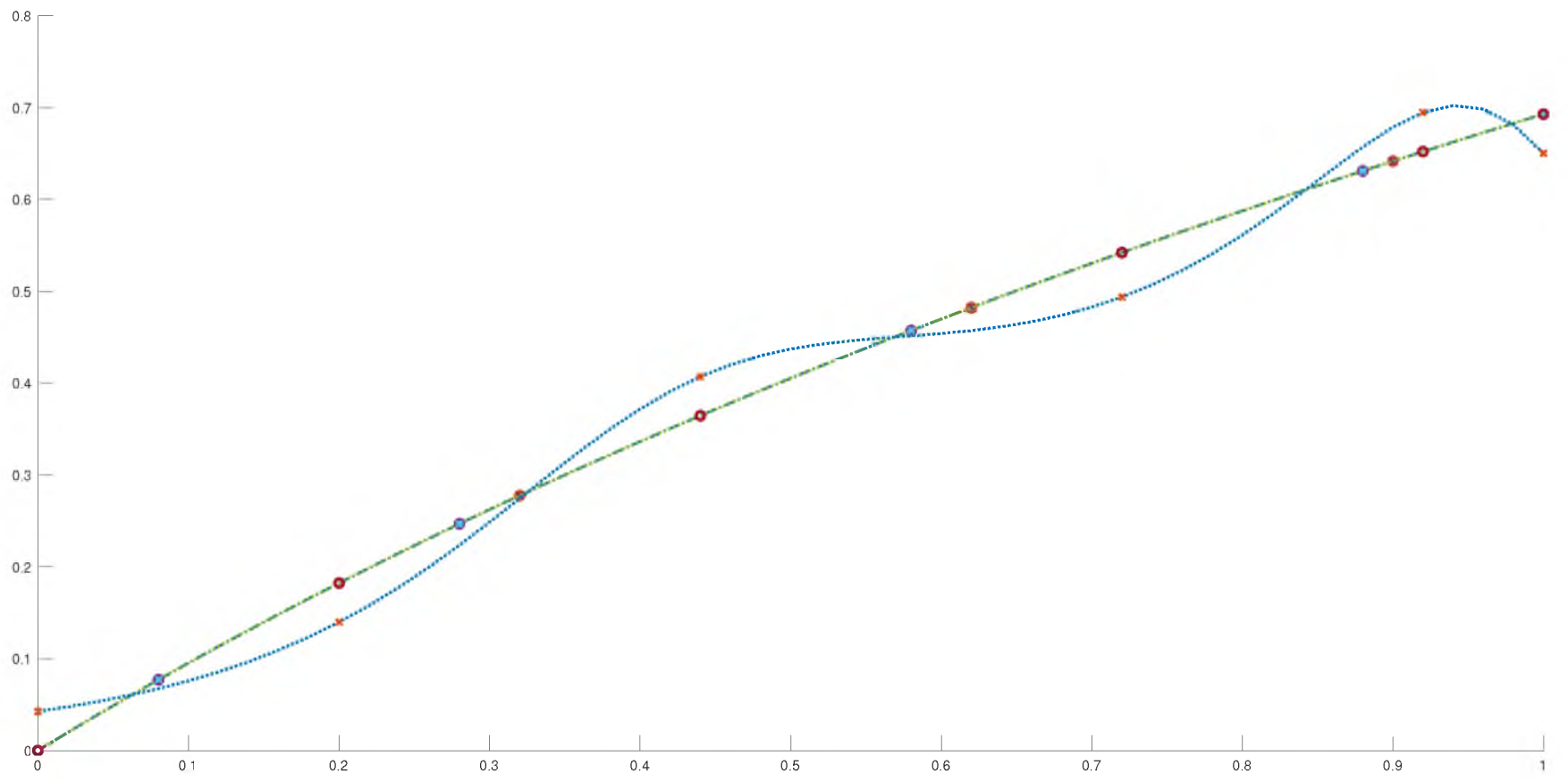


Figura 3.4: Gráfica de las funciones racionales de mejor aproximación de grado total 4 para la función $f(x)=\log(x+1)$

Ejemplo 3.7.2 Consideramos la función $\exp(x)$ definida sobre el intervalo $[-1, 1]$. Proponemos hallar r , la mejor aproximación racional de grado total 2 sobre el conjunto de 51 puntos equidistantes dentro del intervalo $[-1, 1]$.

Tabla de Inicio

R(2,0)	R(1,1)	R(0,2)
0.03027048	0.01875887	0.03479128
15	21	51
0.07184411	0.02408245	0.03479161
6	43	51
0.03072808	0.01913038	0.03479161
1	1	1
27	27	27
45	45	45
51	51	51

12

R(2,0)	R(1,1)	R(0,2)
0.04092862	0.02093224	0.03479128
15	51	51
0.04940518	0.02093256	0.03479161
38	51	51
0.04259455	0.02093256	0.03479161
1	1	1
20	20	27
43	43	45
51	51	51

13

R(2,0)	R(1,1)	R(0,2)
0.04306916	0.02093224	0.03479128
40	51	51
0.04849454	0.02093256	0.03479161
37	51	51
0.04453623	0.02093256	0.03479161
1	1	1
15	20	27
43	43	45
51	51	51

14

R(2,0)	R(1,1)	R(0,2)
0.04306916	0.02093224	0.03479128
40	51	51
0.04849454	0.02093256	0.03479161
37	51	51
0.04453623	0.02093256	0.03479161
1	1	1
15	20	27
43	43	45
51	51	51

15

R(2,0)	R(1,1)	R(0,2)
0.04306916	0.02093224	0.03479128
40	51	51
0.04849454	0.02093256	0.03479161
37	0	51
0.04453623	0	0.03479161
1	1	1
15	20	27
43	43	45
51	51	51

16

R(2,0)	R(1,1)	R(0,2)
0.04306916	0.02093224	0.03479128
40	51	51
0.04849454	0.02093256	0.03479161
37	0	51
0.04453623	0	0.03479161
1	1	1
15	20	27
43	43	45
51	51	51

Etapa 3

23

R(2,0)	R(1,1)	R(0,2)
0.04434652	0.02093224	0.03479128
40	51	51
0.04621355	0.02093256	0.03479161
41	51	51
0.04565347	0.02093256	0.03479161
1	1	1
15	20	27
38	43	45
51	51	51

Observación: En este ejemplo, el algoritmo se detuvo debido a que se encontró estimaciones suficientemente buenas a los errores minimax en las tres clases.

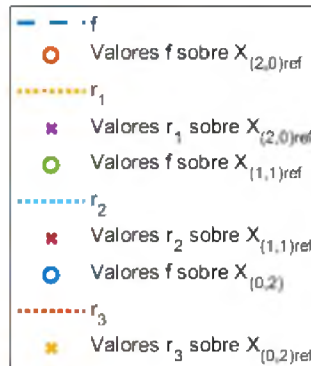
Como la menor de las tres es la que corresponde a la clase $R(1, 1)$ entonces la aproximación de grado total 2 a la función f es aproximadamente es 0.020932.

Por lo tanto,

$$r_2 = -\frac{34297951396919224x + 67409372943755816}{29152052038069044x - 66282261793875504}$$

es una suficientemente buena estimación de la mejor aproximación racional de grado total 2 a f con respecto a la clase $R(1, 1)$ sobre el conjunto de 51 puntos equidistantes dentro del intervalo $[-1, 1]$.

La gráfica de los valores y las funciones corresponden de la siguiente manera :



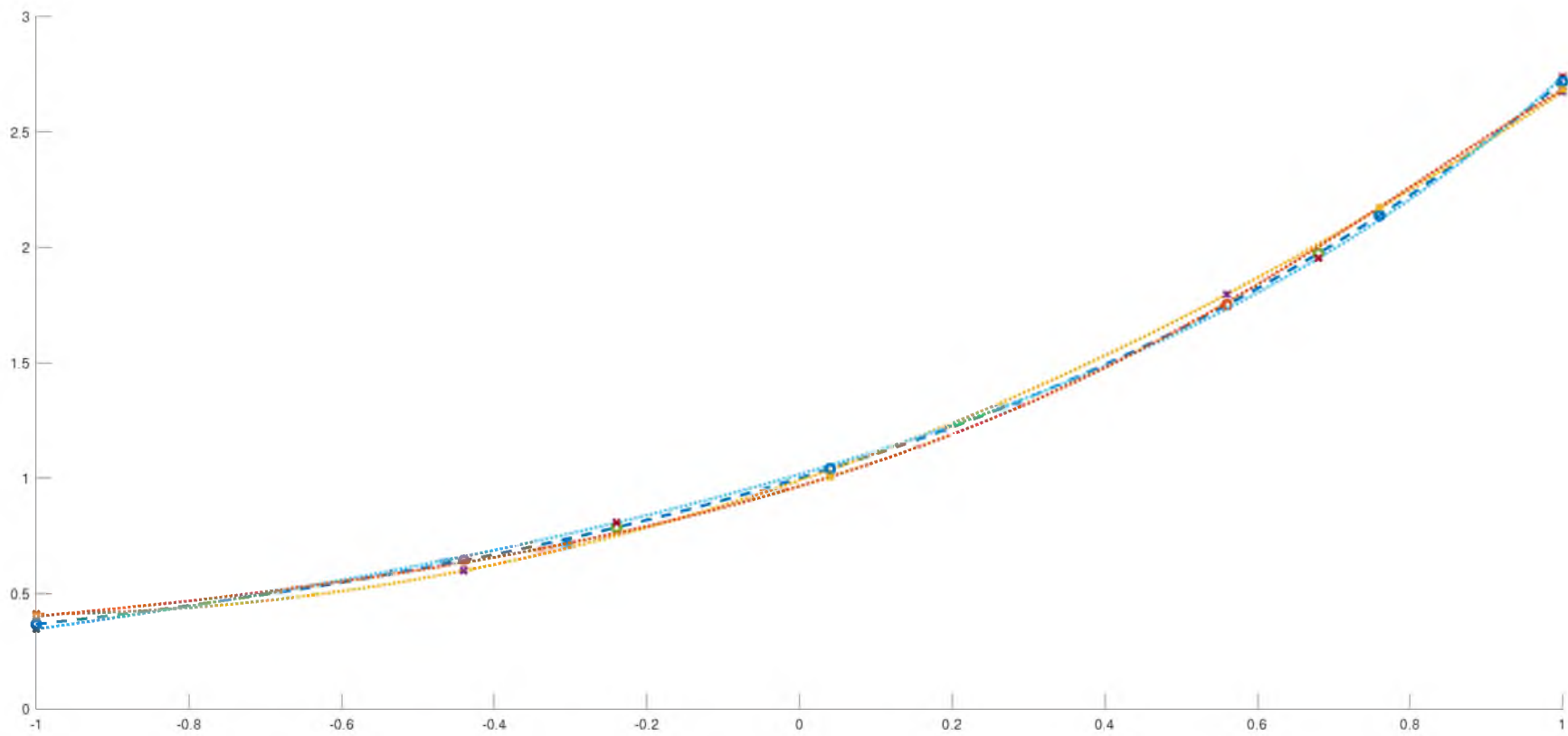


Figura 3.5: Gráfica de las funciones racionales de mejor aproximación de grado total 2 para la función $f(x)=\exp(x)$

Conclusiones

El objetivo principal de la tesis fue estudiar la aproximación de grado total y su algoritmo, con el fin de desarrollar un programa para aplicarlo a funciones conocidas.

Para poder realizar este trabajo de tesis, se necesitaron conocer los conceptos, teoremas y algunos ejemplos de la aproximación racional minimax y la aproximación racional discreta. De la misma manera, fue necesario estudiar el algoritmo unipuntual de Remez y realizar el programa para entender el funcionamiento de dicho algoritmo que permite calcular una función racional de la mejor aproximación. Se presenta un ejemplo programado en MATLAB. Por otro lado, debido a que el algoritmo de grado total se basa a su vez en el algoritmo unipuntual de Remez, aprovecha la alternancia de la mejor aproximación en cada una de las clases $R(m, n)$ y utiliza su convergencia.

La aproximación racional de grado total fue establecida por Kemp. Una de las ventajas que presenta la misma es que la existencia está garantizada. Por otro lado, como la degeneración no se toma en cuenta, entonces no se calcula sobre referencias degeneradas, solamente se realiza la búsqueda sobre el conjunto de referencia de $N + 2$ puntos.

El algoritmo de grado total (a diferencia del algoritmo de intercambio unipuntual de Remez) no sólo encuentra la mejor aproximación de grado total de una clase, sino que la encuentra de entre todas las clases cuya suma sea menor ó igual que N , por lo que el error de aproximación hallado con el primero es menor ó igual que el hallado con el segundo.

Para cualquier función definida sobre un conjunto de puntos, el algoritmo de grado total siempre converge a una función racional que aproxime suficientemente bien a la función establecida. El grado de los coeficientes de la función racional depende de la cantidad de puntos del dominio X . El análisis que nos ofrece la aproximación racional de grado total es un recurso apreciable.

En el Capítulo 3 se muestran ejemplos con sus resultados obtenidos por el programa en MATLAB del algoritmo de grado total. En el Ejemplo 3.3.2, se muestran completas la etapa 1 y etapa 2. A partir de la etapa 3 en adelante, se muestra la última tabla de cada etapa. En total son 11 etapas. En el Ejemplo 3.3.3, donde se busca la aproximación de grado total 2, el algoritmo se detuvo en la etapa 3 porque se encontró el error minimax en las tres clases aproximantes. Queda pendiente el mejoramiento y la estabilidad del algoritmo.

Bibliografía

- [1] R. L. BURDEN, J. D. FAIRES AND P. SOLORIO GÓMEZ, *Análisis numérico*, Cengage Learning, México, 2011.
- [2] E. W. CHENEY, *Introduction to approximation theory*, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1966. MR0222517
- [3] C. B. DUNHAM, *Alternating Chebyshev approximation*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 95-109. MR318736
- [4] R. ESCALANTE, *Notas de Aproximación de Funciones*, Technical Report ND 2002-12, Depto. de Computación, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.
- [5] C. V. JARILLO, *Origen y desarrollo del teorema de aproximación de Weierstrass*, Miscelánea matemática, **25** (1997), 47-58.
- [6] L. F. KEMP, *Non-degenerate rational approximation*, In: Chui, C., Schumaker, L., Stöckler, J. (eds.) *Approximation Theory X*, Vanderbilt University Press, Nashville, TN, (2002), 246-266.
- [7] L. F. KEMP, *On Nondegenerate Rational Approximation*, In *Approximation Theory XIV: San Antonio 2013*, Springer, Cham, 2014, 273-282.
- [8] E. KREYSZIG, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [9] H. L. LOEB, *Approximation by generalized rationals*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **3** (1996), no. 1, 134-55.
- [10] I. L. MARTÍNEZ CORTÉS, *Aproximación polinomial mediante bandas de amplitudes variantes* Tesis doctoral, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2009.
- [11] J. N. MÉNDEZ ALCOCER, *Aproximación polinomial y racional asimétrica*, Tesis doctoral. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2017.
- [12] D. G. MOURSUND AND G. D. TAYLOR, *Uniform rational approximation using a generalized weight function*. SIAM Journal on Numerical Analysis, **5** (1968), no. 4, 882-889.
- [13] I. NINOMIYA, *Generalized rational Chebyshev approximation*, Mathematics of Computation, **24** (1970), no. 109, 159-169.

- [14] A. PELIOS, *Rational function approximation as a well-conditioned matrix eigenvalue problem*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **4** (1967), no. 4, 542-547.
- [15] M.J.D. POWELL, *Approximation theory and methods*, Cambridge University Press, 1981.
- [16] A. RALSTON, *Rational Chebyshev approximation by Remes' algorithms*, Numerische Mathematik, **7** (1965), no. 4, 322-330.
- [17] A. RALSTON AND P. RABINOWITZ, *A first course in numerical analysis*, Courier Corporation, New York, 2001.
- [18] T. J. RIVLIN, *An Introduction to the Approximation of Functions*, Courier Corporation, New York, 1981.
- [19] J. V. USPENSKY, *Theory of equations*, Tata McGraw-Hill Education, New York, 1948.

