

“Espejos Sonoros”

Una aproximación geométrica a la teoría matemática de la música

*Eréndira Munguía Villanueva; Iraís Téllez Montalvo;
Ariel López Rodríguez*

La ciencia no es esa materia aburrida llena de fórmulas de la que queremos escapar, en sus distintas disciplinas como la matemática y la física la ciencia se aparece incluso en tu música favorita. A continuación te presentamos cómo esto es posible esperando que esta lectura de divulgación te resulte amena.

Un poco de física y bisutería

El sonido es una vibración que se propaga por el aire, llega nuestros oídos y se procesa en nuestro cerebro. En una guitarra escuchamos el sonido producido al vibrar sus cuerdas, en un tambor el vibrar de su cuero. Estas vibraciones mueven las moléculas de aire en forma ordenada y repetitiva creando una onda que es amplificada por la caja de resonancia, permitiendo que llegue hasta los huesecillos de nuestros oídos. El complejo sistema del oído humano envía esta información a nuestro cerebro el cual analiza y obtiene datos como intensidad, altura (grave o agudo), posición, timbre, etc. Pero nuestro cerebro también asocia a este fenómeno recuerdos, emociones, sentimientos; dicha asociación depende fuertemente de nuestra cultura. Lo que para algunos puede sonar triste para otros es un himno a la alegría. Este complejo proceso de escucha que involucra tanto fenómenos físicos como biológicos y culturales es parte del universo musical.

Una manera de medir las vibraciones que producen sonido es midiendo su frecuencia en Hertz (Hz). Mientras más hertz más agudo el sonido, mientras menos hertz más grave. El oído humano puede escuchar sonidos que van desde los 16 Hz hasta los 20,000 Hz, pero ningún instrumento es capaz de producir tal rango. La nota más grave que da un violín es de 196 Hz y la más aguda de 2637 Hz. En teoría un violinista habilidoso podría tocar cualquier frecuencia intermedia, pero esto no es posible para todos los instrumentos. En un teclado podrá sonar solamente un número limitado de frecuencias, aquellas que correspondan a cada tecla, en una flauta aquellas que correspondan cada orificio y sus posibles combinaciones. Esto comienza a ser un problema a la hora de formar ensambles u orquestas, hay que ponerse de acuerdo acerca de exactamente qué sonidos queremos y construir los instrumentos para que todos los involucrados del ensamble sean capaces de producirlos. Distintas culturas han resuelto este problema de distintas maneras. Por ejemplo, en el mundo occidental, después de siglos, se ha llegado a considerar un cierto número de sonidos fijos que la mayoría de sus instrumentos modernos comerciales pueden producir.

El conjunto de sonidos, su orden y función en la composición de piezas musicales, es lo que solemos llamar “escalas” musicales (concepto formado a partir de una abstracción occidental). Podemos encontrar tantas escalas y maneras de usarlas como culturas en el mundo. La música es un

lenguaje para comunicar ideas, sensaciones, sentimientos de una manera tan inconsciente que usualmente no reparamos en lo profundo de su abstracción. Si nos parece tan natural es solo porque ha sido desde siempre un medio de comunicación que nos acompaña casi desde nacimiento o incluso antes y que atraviesa todas las culturas del mundo. Las melodías de las canciones de cuna, de duelo, de celebración acompañan a toda persona que viva en sociedad, y junto con la letra de las canciones son una muestra importantísima de su cultura y cosmovisión.

Por ejemplo, estudios antropológicos parecen indicar que el cerebro humano es capaz de reconocer combinaciones específicas de notas como la octava y la quinta justa (nombres occidentales). Acústicamente hablando, dos notas están en octava si sus frecuencias correspondientes están en relación 2:1, por ejemplo, las notas a 880 Hz (La 5) y 440 Hz (La 4) formarían una octava. De manera similar, la quinta justa está formada acústicamente por dos frecuencias en relación 3:2, por ejemplo 660 Hz (Mi 5) y 440 Hz (La 4) formarían una quinta justa. Estas relaciones tienen fundamento acústico, pues en realidad la naturaleza no produce sonidos “puros” de una sola frecuencia, sino más bien combinados con sus armónicos, entre los cuales se encuentran sus octavas y quintas justas.

Parece ser que el cerebro humano distingue estas octavas y quintas entre otras combinaciones de sonidos aleatorios, pero no es claro que todas las personas de todas las culturas prefieran estas combinaciones específicas sobre otras. Es decir, que les guste más escuchar una octava que cualquier otra combinación, las preferencias sonoras son algo que tiene que ver más con la cultura y cosmovisión que con los principios físicos del sonido. Cabe resaltar que son muchos los marcos culturales de composición musical que hacen uso de octavas y quintas justas. Por ejemplo, la afinación por quintas se practica en China desde hace más de 5,000 años. Pero el hecho es que “consonancia y disonancia” son términos tan subjetivos, el efecto que en el cuerpo y mente humanas produce el sonido es tan difícil de modelar matemáticamente, que incluso el diseño de experimentos en este sentido es un debate abierto en la física, matemática, música, psicología y antropología. No obstante, la música se crea e incluso se usa y se usa muy bien (por ejemplo, para fines de mercadotecnia) y por eso es claro que algo del proceso musical entendemos de manera correcta, aunque nuestro entendimiento esté confinado a una cultura y/o subculturas.

Lo que sigue de este texto rescata algo de estos entendimientos para la música occidental, y las distintas variantes que en términos musicales quedaron ligadas a ella por procesos de colonización o de otro tipo. Esto no es con el afán de poner estas estructuras por encima de otras, de decir que la manera occidental es mejor ni mucho menos, sino con el fin de hacer notar que esta estructura es muy “estudiable” justo por su simpleza (aunque no por simple deja de ser sumamente rica), y muy “abstraible”. Con esto último queremos decir que la estructura de la música occidental puede resaltarse para después, si se quiere, “vaciarla” de contenido y utilizarse esquemas y transformaciones similares (o inspiradas en) para estudiar o incluso crear otros tipos distintos de marcos musicales. Dicho esto: ¡música y matemáticas!

Representación gráfica de la escala igualmente temperada

La manera en que en occidente se resolvió la elección de notas para construir teclados fue dividir la octava en 12 “pedazos iguales” que se llamaron semitonos, esto lo podemos ver en cualquier teclado. De una tecla a su consecutiva, sin contar si es negra o blanca, existe un “semitono de distancia”. Recordemos visualmente un teclado y los nombres de las notas. Esto se llama “afinación igualmente temperada” y el conjunto de notas “escala cromática”.



Figura 1. En occidente, una octava está dividida en doce notas que corresponden a doce teclas de un piano. Sin tomar en cuenta los colores, entre una tecla y la que está al lado hay un semitono de diferencia.

Si en una recta numérica ubicamos aquellos números que corresponden a las frecuencias a las que toca un teclado igualmente temperado veríamos algo como la Figura 2.

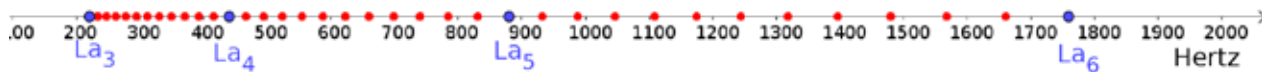


Figura 2. Representación de los valores en Hz de las notas que da un teclado en una recta lineal.

En azul están marcadas las frecuencias correspondientes a cuatro La's consecutivos, y entre cada La hay doce puntos que corresponden a las frecuencias de las doce notas de la escala cromática temperada, es decir las doce teclas entre La y La en un teclado contando tanto negras como blancas. Así que entre dos puntos azules consecutivos hay una octava y entre dos puntos consecutivos ya sea rojos o azules hay un semitono ¿Por qué si la distancia entre los puntos evidentemente aumenta a medida que avanzamos a la derecha, en el teclado se siguen considerando todos los semitonos iguales? La respuesta es compleja pero una primera aproximación es la siguiente: La humanidad escucha en logaritmo en base 2.

Es una simplificación que nos ayuda a entender ciertos aspectos musicales. Si en lugar de graficar las frecuencias de las notas calculamos el logaritmo en base dos de cada una ellas (se puede hacer con una calculadora científica) y ubicamos los resultados en otra recta numérica obtenemos la Figura 3.

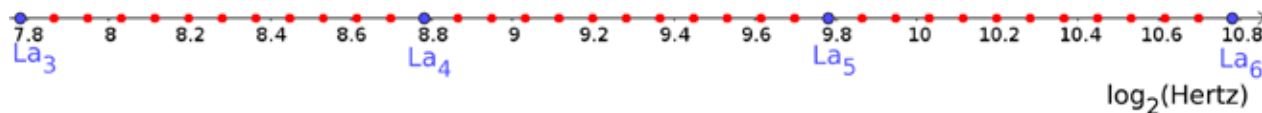


Figura 3. Representación de los valores en Hz de las notas que da un teclado en una recta logarítmica.

Ahora sí cada semitono se ve como una unidad de distancia sin importar si aumentamos la altura de los sonidos. Por esto decimos que si queremos “ver” lo que nuestro oído escucha tenemos que ponernos los lentes del logaritmo base 2. Ahora haremos un truco clásico en matemáticas. Para efectos de lo que sigue imaginemos que queremos guardar las notas musicales en una caja con 12 compartimentos etiquetados con los doce nombres disponibles, para no revolver las notas

pondremos todos los Do's en el compartimento con la etiqueta "Do", en el que tiene la etiqueta "Do#" todos los Do#'s, etc. Mas aun, esta caja es circular y los compartimentos están ordenados y espaciados de tal forma que se respeten las distancias antes descritas.

Otra manera de ver esto es pensar que la recta que dibujamos antes fuese un hilo con cuentas, y cada cuenta estuviese marcada con el nombre de la nota al que corresponde; la caja estaría diseñada para que, sin romper el hilo, pudiésemos ir depositando en cada compartimento las cuentas marcadas con el mismo nombre que la etiqueta del compartimento. Si hiciéramos esto físicamente lo que estaría pasando es que estaríamos enrollando el hilo sobre la caja formando una especie de collar circular, como se muestra en el lado izquierdo de la Figura 4, el lado derecho corresponde a la vista desde arriba.

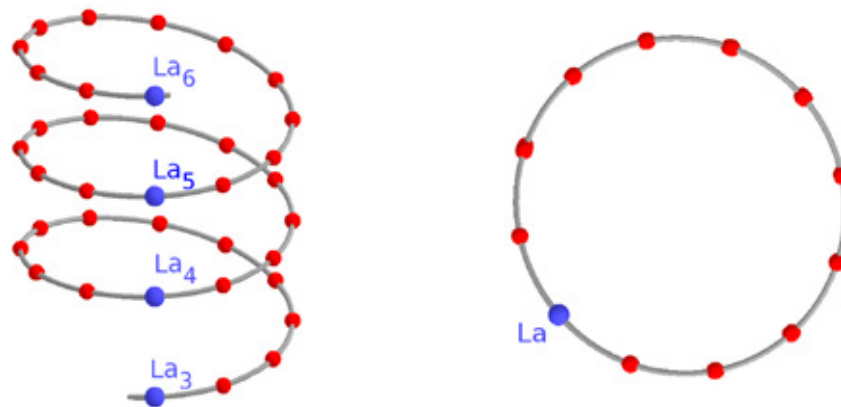


Figura 4. Representación gráfica del espacio de clases de equivalencia de las notas musicales, dos notas están relacionadas si tienen el mismo nombre, es decir, si sus frecuencias son un múltiplo de la otra por un factor que es una potencia de dos.

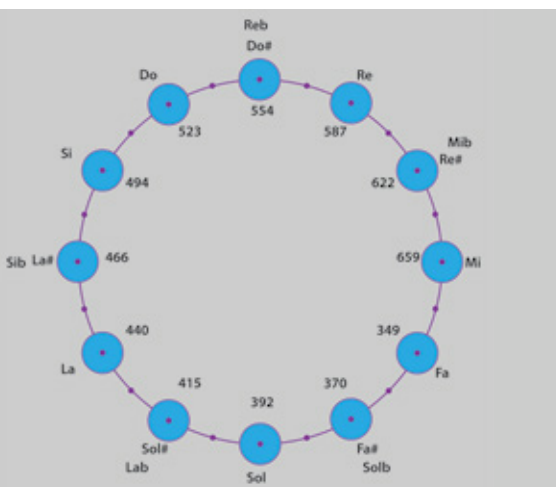


Figura 5. Cada círculo azul corresponde a una tecla del piano, hemos borrado la distinción negras / blancas. Cada círculo representa una tecla y todas aquellas que se relacionan con ella mediante octavas.

Este objeto, Figura 5, la caja circular con doce compartimentos, donde cada uno de ellos guarda todas las notas cuyo nombre es el mismo que el del compartimento, será el objeto base sobre el cual trabajaremos

De aquí en adelante por "nota" entenderemos alguno de los compartimentos. Por ejemplo por "la nota Sol" nos estaremos refiriendo a la caja que está que tiene el nombre "Sol", aunque como sabemos, ahí están contenidos todos los Soles, desde los más graves hasta los más agudos.

Objetos geométrico musicales

La gran mayoría de música que escuchamos está basada en los principios que describimos anteriormente. Conceptos fundamentales que se aprenden en una clase de teoría musical como intervalo o escala están definidos en términos de semitonos, y como vimos un semitono se puede ver como una unidad de medida (de distancia) si utilizamos el logaritmo en base dos.

Lo que queremos resaltar es que conceptos como semitono, octava, quinta justa, tercera disminuida, etc. se pueden definir en términos de distancias ¿cuáles distancias? Las que vemos en la Figura 5. Y la rama que estudia los objetos que se definen en términos de distancias y las relaciones entre éstos es la geometría.

Si de las 12 notas que tenemos disponibles en una octava quisiéramos escoger 3 distintas para tocarlas al mismo tiempo ¿De cuántas maneras distintas podríamos hacerlo? Si le echamos cuentas encontraríamos que hay 220 formas de hacer esto, algunas de ellas sonarán lindo y otras no ¡Son muchas para probarlas una por una a ver cuáles nos gustan a la hora de componer una canción! Existen ciertas reglas que envuelven razones (culturales) que nos permiten predecir cuándo nuestra combinación será agradable al oído y cuándo no, pero aun siguiendo estas reglas la complejidad de componer una pieza usando las 12 notas sigue siendo muy alta. Una manera de resolver eso es no considerarlas todas.

Escala Mayor

Una vez fijado el conjunto de frecuencias que consideraremos, una escala es un subconjunto (o subcolección) ordenado de este conjunto. Esto es, de los sonidos que ya tenemos nos quedamos sólo con algunos y los ordenaremos por ejemplo de más grave a más agudo sin perder de vista el primero. Por ejemplo, la escala de Do Mayor es quedarnos solo con do, re, mi, fa, sol, la, si (quedarnos sólo con las teclas blancas del piano). Es escala de Do porque empieza en un Do. El carácter de Mayor se lo da las distancias que hay entre las notas. La escala de Do Mayor queda representada por el polígono de la Figura 6.

1. Entre la primera nota y la segunda hay una distancia de 2 semitonos,
2. entre la segunda nota y la tercera hay una distancia de 2 semitonos,
3. entre la tercera nota y la cuarta hay una distancia de 1 semitonos,
4. entre la cuarta nota y la quinta hay una distancia de 2 semitonos,
5. entre la quinta nota y la sexta hay una distancia de 2 semitonos,
6. entre la sexta nota y la séptima hay una distancia de 2 semitonos,
7. entre la séptima nota y la octava (que en realidad es la misma que la primera) hay una distancia de 1 semitono.

Que una melodía “esté en Do Mayor” significa, entre otras cosas, que las 7 notas que están en las esquinas del polígono DoMayor tienen mucha más probabilidad de aparecer en la melodía. La línea que cruza el círculo por su centro es simplemente para hacer notar que esta figura tiene un eje de simetría.

Acorde Mayor

Volvamos a la pregunta ¿cuántas maneras distintas tenemos de escoger tres notas? Pero ahora consideremos a nuestra disposición las notas de la escala de Do mayor. Ahora el número de opciones se reduce a 35, que son menos pero aún muchas. La cultura occidental ha dado preferencia a la combinación Do, Mi, Sol, quienes estamos acostumbrados a la manera occidental de componer música esta combinación es un clásico de clásicos, es precisamente el

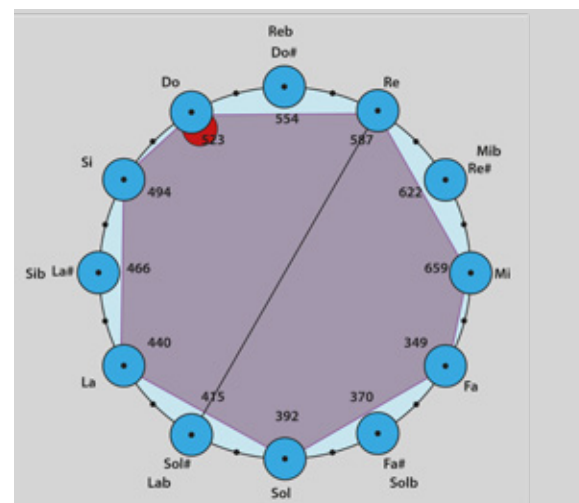


Figura 6. Escala de Do Mayor, la línea indica la existencia de un eje de simetría.

Acorde de Do Mayor. A esta combinación se le suelen asociar sentimientos de “reposo”, en contraposición a la “tensión”. Esta combinación contiene una quinta justa y una tercera mayor, podríamos justificar estas combinaciones diciendo que provienen de los armónicos de la nota principal, en este caso Do, pero nuevamente lo más seguro es que la sensación de reposo que nos produce este acorde se deba a nuestro pasado sonoro más que a cuestiones físico-acústicas. Si tienes a la mano una guitarra, jarana o teclado vale la pena escuchar esta combinación y sentirla ¿A ti qué sensación te produce? Geométricamente el acorde de Do Mayor queda representado por el triángulo de la Figura 7.

Como podemos observar:

1. Entre la primera nota y la segunda hay una distancia de 4 semitonos,
2. entre la segunda nota y la tercera hay una distancia de 3 semitonos,
3. entre la tercera nota y la primera hay una distancia de 5 semitonos.

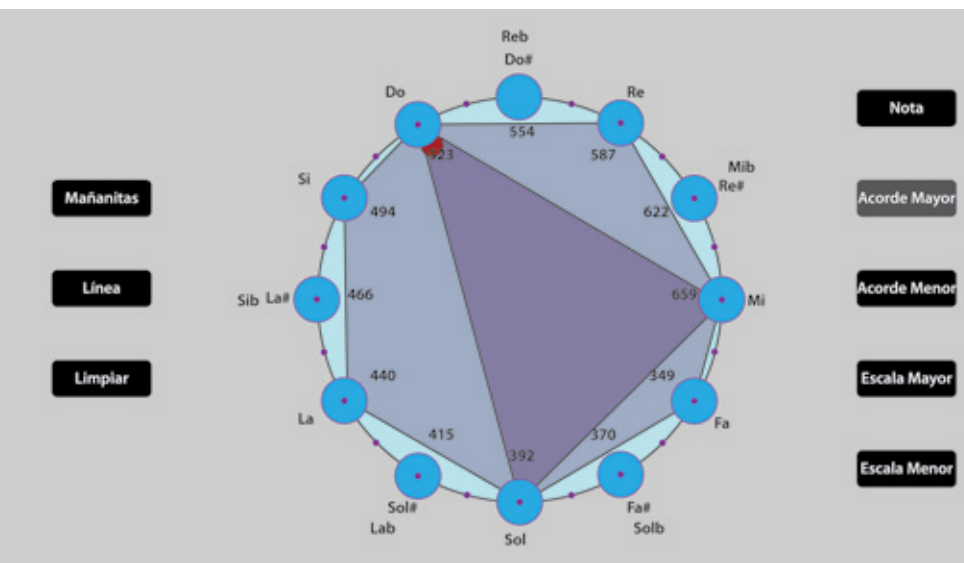


Figura 7. Escala y Acorde de Do Mayor.

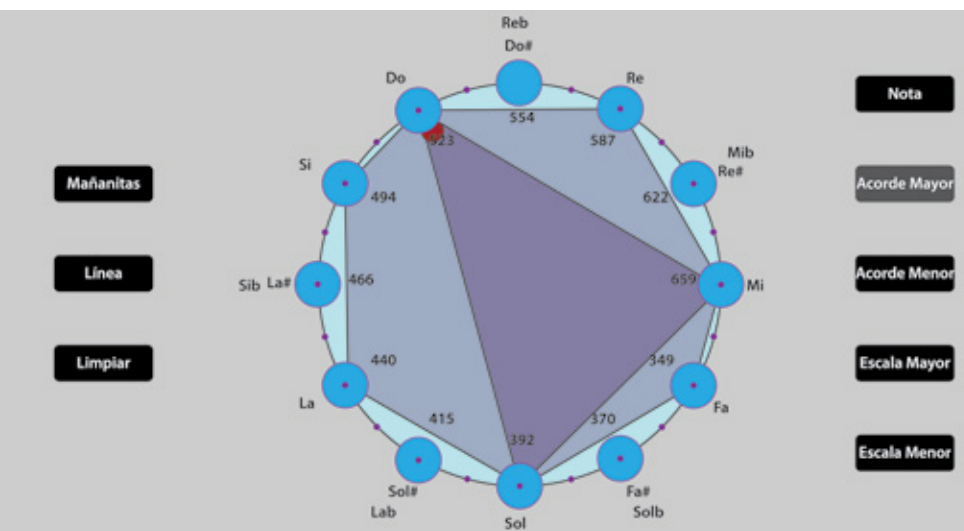


Figura 8. Escala de Do Mayor y Acorde de Re Mayor. El Acorde contiene una nota que NO pertenece a la escala.

Cualquier subconjunto que cumpla los 3 puntos anteriores será un Acorde Mayor ¿Cuántos acordes mayores podremos formar usando las notas de la escala de Do Mayor? La respuesta la podemos obtener dibujando, observemos qué ocurre si tomamos el acorde de Re Mayor (Figura 8). Ahí observamos que el acorde de Do Mayor contiene sólo notas que están en la escala de Do Mayor. Por el contrario, si vemos el acorde de Re Mayor contiene Fa# que NO es una nota de la escala de Do Mayor. Entonces para propósitos de nuestra pregunta retenemos el acorde mayor de Do y descartamos el de Re.

Continuando de esta manera vemos que los acordes mayores que podemos formar con la escala de Do Mayor son los acordes: Do Mayor, Fa Mayor, Sol Mayor. Este combo es muy utilizado para formar la armonía que acompaña a una melodía en Do Mayor (Figura 9).

Podemos hacer lo mismo sobre cualquier nota para averiguar cuál es la escala mayor y cuáles los acordes mayores que podemos formar con ella. Por ejemplo, para Re Mayor bastaría con rotar 60° todos los dibujos que hicimos para Do Mayor. La respuesta será siempre que los acordes mayores sobre la primera, cuarta y quinta nota de la escala mayor son los únicos que “no se salen” de la escala mayor. Existe una manera de escribir estos acordes bastante intuitiva: I, IV, V.

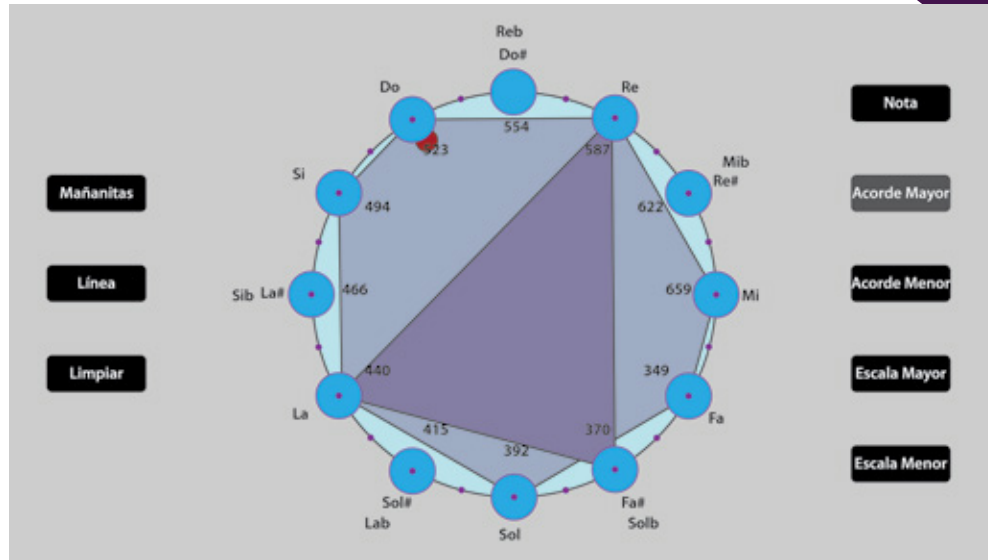


Figura 9. Los Acordes Mayores que quedan contenidos en la escala de Do Mayor son: Do Mayor, Fa Mayor y Sol Mayor.

Escala menor

Para formar La escala de do menor consideramos sólo las notas do, re, mi bemol, fa, sol, la bemol, si bemol. Es escala de Do porque empieza en un Do. El carácter de menor se lo da las distancias que hay entre las notas:

1. Entre la primera nota y la segunda hay una distancia de 2 semitonos,
2. entre la segunda nota y la tercera hay una distancia de 1 semitono,
3. entre la tercera nota y la cuarta hay una distancia de 2 semitonos,
4. entre la cuarta nota y la quinta hay una distancia de 2 semitonos,
5. entre la quinta nota y la sexta hay una distancia de 1 semitono,
6. entre la sexta nota y la séptima hay una distancia de 2 semitonos,
7. entre la séptima nota y la octava (que es igual a la primera) hay una distancia de 2 semitonos.

La escala de do menor queda representada por el polígono de la Figura 10.

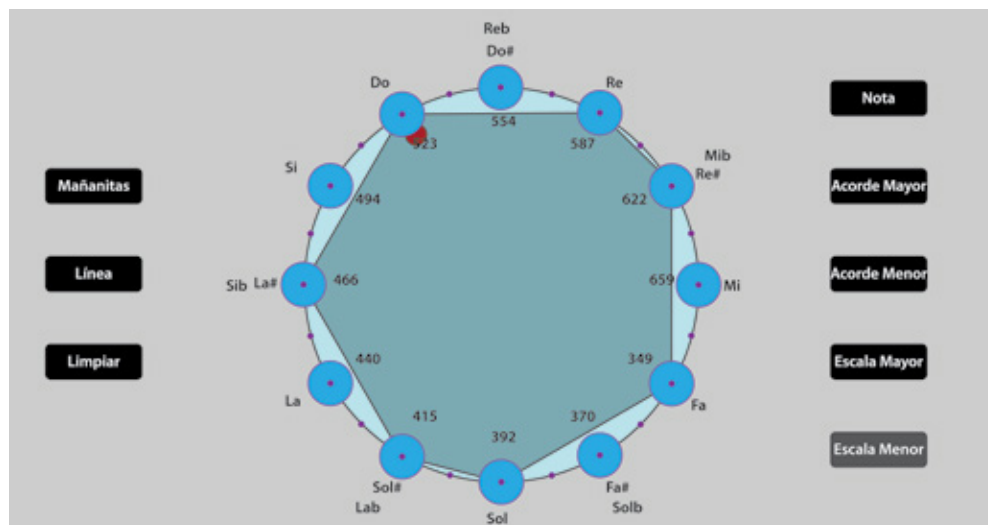


Figura 10. Escala menor de do.

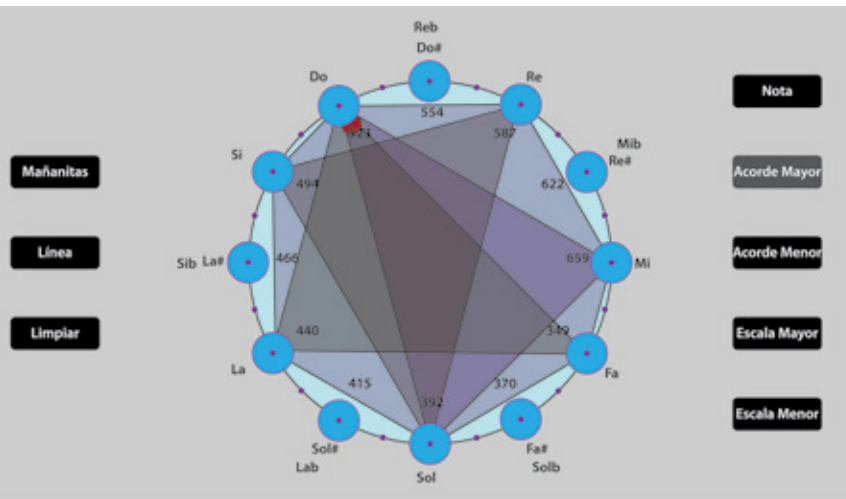


Figura 11. Escala y acorde menor de do.

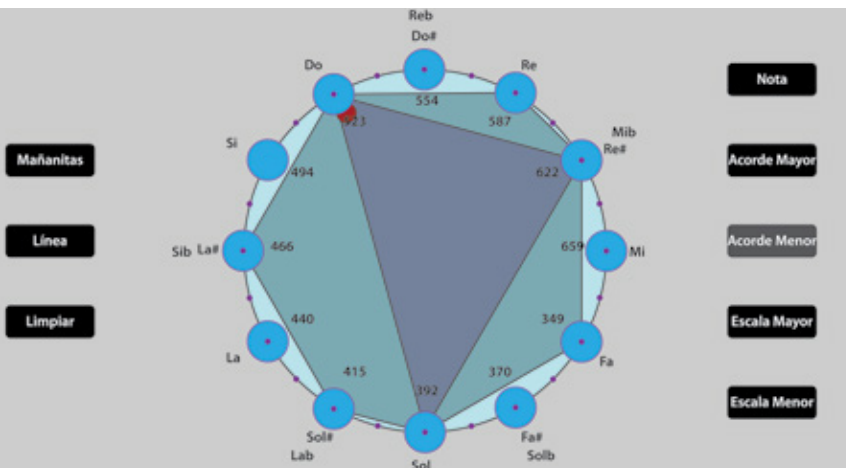


Figura 12. Escala y acorde menor de re.

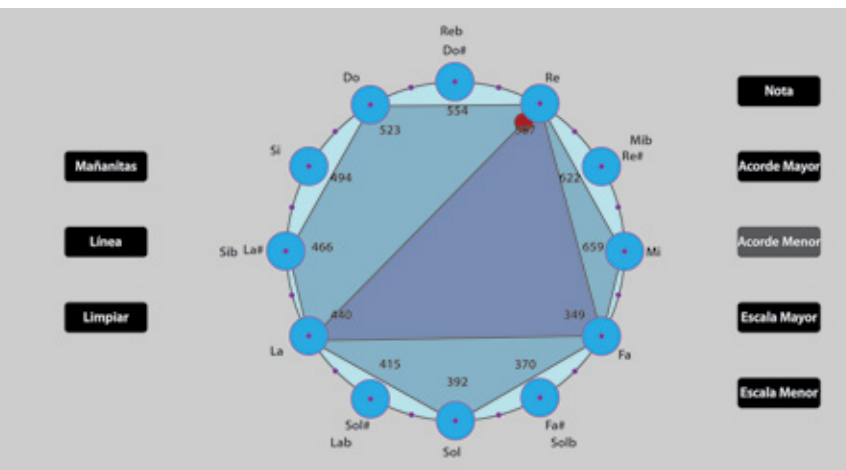


Figura 13. Acordes menores contenidos en la Escala de Do Mayor: re menor, mi menor y la menor.

La combinación de tres notas privilegiada para esta escala es el acorde menor (Figura 11) que se define nuevamente por sus distancias:

1. Entre la primera nota y la segunda hay una distancia de 3 semitonos,
2. entre la segunda nota y la tercera hay una distancia de 4 semitonos,
3. entre la tercera nota y la primera hay una distancia de 5 semitonos.

Como dijimos, para obtener el análogo para re rotando 60° en sentido de las manecillas del reloj. Si hacemos esto obtenemos la Figura 12, que corresponde a la escala de re menor y el acorde de re menor.

Regresemos a Do Mayor y encontremos dibujando los acordes menores que se pueden formar con las notas de Do Mayor: re menor, mi menor, la menor. Son los acordes menores sobre la segunda, tercera y sexta nota de la escala: ii, iii, vi. Figura 13.

En resumen, con las notas de Do mayor se pueden formar los acordes de: Do Mayor (I), re menor (ii), mi menor (iii), Fa Mayor (IV), Sol Mayor (V), la menor (iv). Ni el acorde de Si Mayor ni si menor caben en la escala de Do Mayor. Muchísimas canciones en modo Mayor usan estos acordes para el acompañamiento: I, ii, iii, IV, V, vi. Por mencionar algunas: *Let it be* de los Beatles, I, IV, V, vi; *Despacito de Fonsi*, vi, IV, I, V. La vasta mayoría de la música tradicional como por ejemplo el son jarocho usa acompañamientos similares. Incluso podemos añadir “sorpresas musicales” al

usar estos esquemas por omisión y salirnos del molde, por poner un ejemplo en el himno feminista “*Canción sin miedo*” de Vivir Quintana. Ella usa la progresión vi, V, I, V, IV, III, vi. Al elegir el acorde Mayor en el tercer grado III en lugar del menor iii se sale del molde del modo mayor o menor, y es así como la elección de un acorde da una sensación de fuerza rebelde a la armonía.

¿Y los espejos?

Las escalas mayores y menores, así como sus modos (conservar el polígono, pero mover el punto rojo, es decir, comenzar en otra nota) son una de las herramientas más comunes en la música que nos rodea, pero otras culturas han descubierto y explotado otras selecciones de sonidos para formar tanto sus escalas como sus armonías. En occidente se tiende a asociar emociones alegres a la música en tonos mayores, y tristes para los tonos menores, pero esto es producto de la exposición que hemos tenido a este tipo de combinaciones y el contexto en el que nos fueron presentadas. Alguien de algún lugar que utilice otras escalas y otra armonización podría “sentir” lo inverso o simplemente no reaccionar ante la diferencia. ¿Qué pasa si dibujamos juntas la escala mayor y la menor con sus acordes correspondientes? Para Do el dibujo queda como la Figura 14.

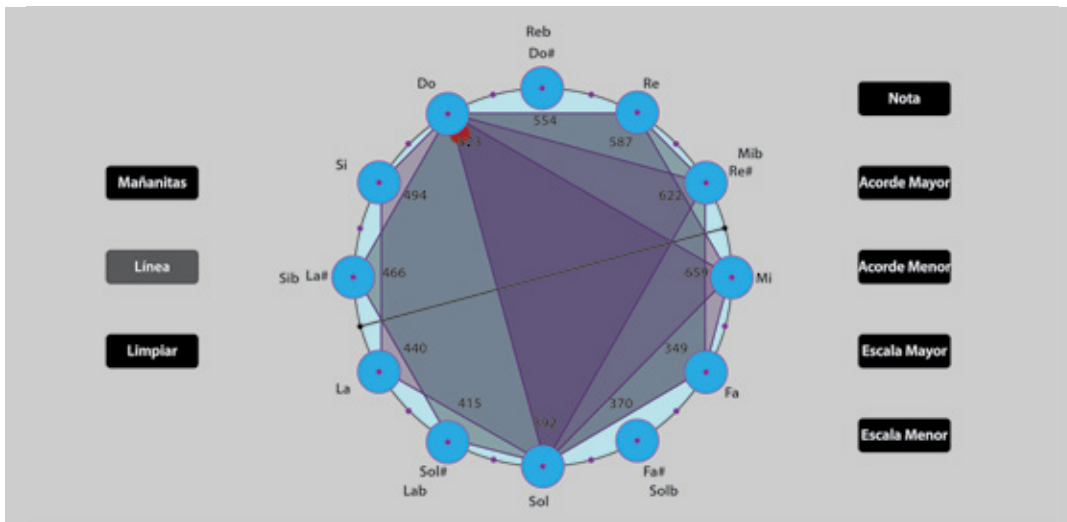


Figura 14. Escalas de Do Mayor y do menor junto con sus acordes correspondientes superpuestas. Observa que una es el reflejo de la otra sobre eje de reflexión marcado.

¡La escala y acorde menor se obtienen reflejando la escala y acorde mayor en un espejo en la posición de la línea señalada! Cada que rotemos un objeto geométrico musical obtendremos otro de la misma naturaleza mayor o menor, pero si reflejamos en un espejo, lo menor pasa a ser mayor y viceversa. Esta reflexión podría sonarnos como pasar de algo alegre a algo melancólico.

Si tienes un instrumento armónico a la mano experimenta estos cambios por tu propio oído ¿Qué pasa si reflejamos sobre otras rectas? Si reflejamos Do Mayor sobre su eje de simetría obtendremos una escala menor (Figura 16), pero cuyo polígono coincide con el original pues es simétrico, las notas serán las mismas pero codificadas en la escala de la menor y su función en la composición será distinta. Es decir, reflejar una escala mayor sobre su eje de simetría es equivale a obtener su relativa menor, y viceversa (Figura 15).

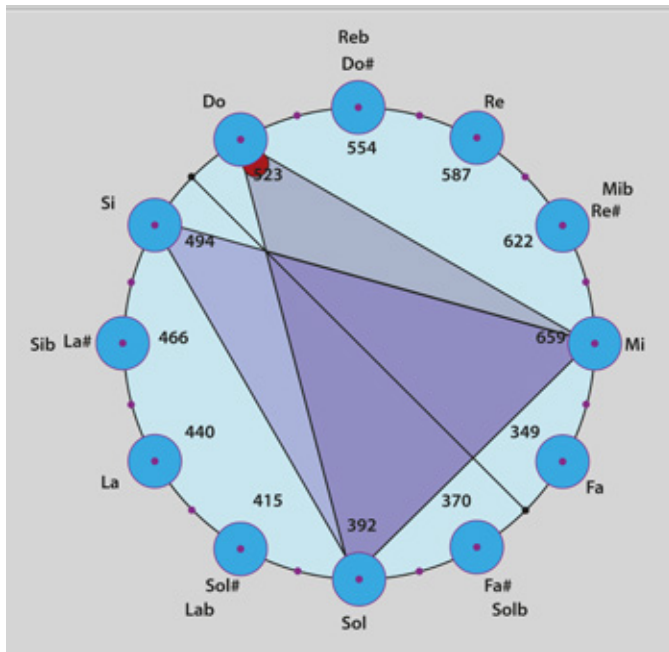


Figura 15. Al reflejar el Acorde de Do Mayor en la recta marcada obtenemos el acorde de mi menor.

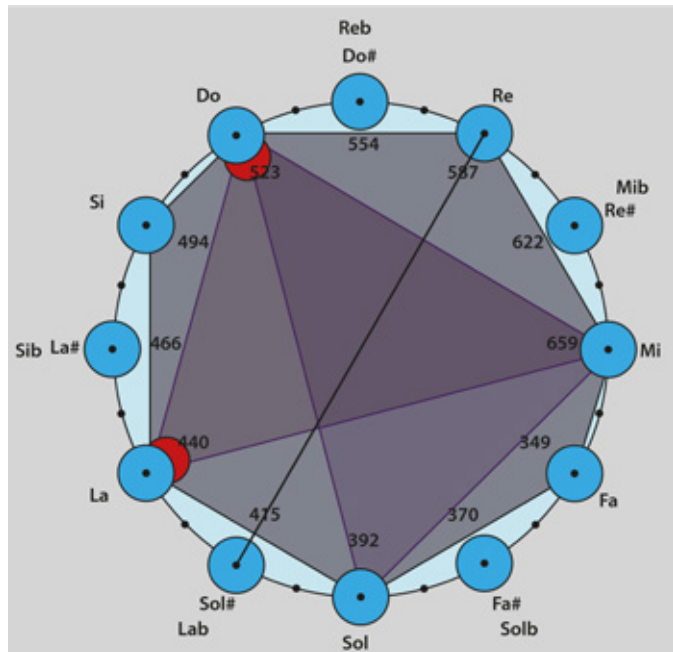


Figura 16. Al reflejar el Acorde de Do Mayor en el eje de simetría de la Escala de Do Mayor, obtenemos la menor.

¿Es esta dualidad Mayor/menor, Alegría/melancolía parte de la cosmovisión occidental Cielo/infierno? De qué nuevas formas podemos dividir el espectro sonoro, qué nuevas estructuras y transformaciones se pueden lograr con los instrumentos actuales, incluyendo la amplia gama de sintetizadores.

Qué cosmovisiones se pueden musicalizar con estas herramientas. Como es natural las respuestas están en nuestra imaginación, oído y maestría musical. Te invitamos a explorarlas. Los dibujos de este artículo fueron generados usando la aplicación en Java “Espejos Sonoros” desarrollada por quienes escribimos este texto, la cual esperamos esté pronto a disposición del público como herramienta para la experimentación sonora.

Bibliografía

- Investigación y Ciencia, revista digital, *¿La preferencia musical hacia la consonancia es innata o cultural?*
- García de Mendoza, Adalberto, *Enciclopedia Musical*, Palibrio, Bloomington EE. UU. 2015
- Altozano, Jaime, *¿Qué emociones producen las 7 escalas musicales?* Video en YouTube, 2019
- Agustín Aquino, Octavio; du Plessis, Janine; Lluís Puebla, Emilio; Montiel, Mariana, *Una introducción a la Teoría de Grupos con Aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música*, Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana. Serie Textos Vol. 10, 2009.