

UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

CAMPUS LOMA BONITA

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

**MODELADO POR ELEMENTO FINITO Y
MANUFACTURA DE UNA PLATAFORMA
EXPERIMENTAL ROTOR TIPO JEFFCOTT CON
MODULACIÓN DE LA VELOCIDAD ANGULAR**

Tesis profesional para obtener el título de

INGENIERO EN MECATRÓNICA

Presenta:

C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO

Director de tesis:

Dr. Álvaro Cabrera Amado


LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO, 2018





UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
Campus Loma Bonita


INGENIERÍA EN MECATRÓNICA


LA PRESENTE TESIS TITULADA “MODELADO POR ELEMENTO FINITO Y MANUFACTURA DE UNA PLATAFORMA EXPERIMENTAL ROTOR TIPO JEFFCOTT CON MODULACIÓN DE LA VELOCIDAD ANGULAR”, PRESENTADA POR EL SUSTENTANTE DE LICENCIATURA C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO BAJO LA DIRECCIÓN DEL DR. ÁLVARO CABRERA AMADO, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITÉ EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO EN MECATRÓNICA.


M. en C. José Luis Nájera Sánchez
Jefe de la Carrera de Ingeniería en Mecatrónica


Dr. Alvaro Cabrera Amado
Director de Tesis


Dr. Hiram Netzahualcoyotl García Lozano
Presidente


M. en C. Esteban Chávez Conde
Secretario


UNPA
terra uberrima, mens ape
Bon La-tamá, chí jí jí
OAXACA
LICENCIATURA CARRERA
INGENIERIA EN
MECATRONICA


Dr. Alvaro Cabrera Amado
Vocal

Loma Bonita, Oaxaca, México. Junio 2018.



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

CAMPUS LOMA BONITA

INSTITUTO DE AGROINGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

Modelado por Elemento Finito y Manufactura
de una Plataforma Experimental Rotor tipo Jeffcott
con Modulación de la Velocidad Angular

Tesis que presenta el

C. José Luis Jaime Ocampo

Para obtener el título de Licenciatura
en la especialidad de

Ingeniero en Mecatrónica

Director de Tesis:
Dr. Álvaro Cabrera Amado

Loma Bonita, Oaxaca, México. Junio del 2018.

Dedicatoria

A mis padres, porque ellos son el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional apoyo, ya que sin ellos no hubiese logrado llegar a estas instancias. Todo este trabajo ha sido posible gracias a ellos.

Agradecimientos

A Dios.

Por darme la oportunidad de tener unos padres que siempre me han brindado su incondicional apoyo, y gracias a ellos puedo culminar otra etapa de formación profesional en mi vida.

A mis hermanos

León, Rebeca y María, que a pesar de la distancia siempre me han brindado todo su apoyo.

¡Gracias a ustedes!

A mis maestros.

A todos los profesores que me impartieron clases y que siempre estuvieron ahí para resolver y atender mis dudas.

¡Muchas gracias!

A mis amigos.

Que nos apoyamos mutuamente, algunos en nuestra formación profesional y otros fuera de la universidad estando fuera de nuestros hogares, me llevo una gran enseñanza, ya que a lo largo de este tiempo he aprendido que fuera de casa también se puede tener una familia, Iván chungu", Luis çe", Silvano "Títtere", Martín çhirris", Rojas, Manu çriterio", Bhasilio "pato", Mateo "wifi", Donaldo Çhotin", Heriberto, Itza, Belem .el vato", Filio, don Raúl y doña Laura.

¡De corazón muchas gracias!

A itamar.

Por poyarme y estar conmigo es esta etapa de mi vida.

¡Muchas gracias!

A mi asesor.

Dr Álvaro Cabrera Amado, por brindarme su tiempo y apoyo para poder realizar este trabajo.

¡Muchas gracias!

Resumen

El desbalance representa un problema típico en la maquinaria rotatoria, el cual ocurre cuando el eje principal de inercia no coincide con el eje geométrico del rotor. En general, esto se debe al resultado de imperfecciones en la manufactura y en el ensamblado de rotores. Estos tipos de efectos pueden causar altos niveles de vibraciones, ruido, desgaste, y pueden causar fallas y pérdidas de la máquina.

Las vibraciones causadas por el desbalance son estudiadas para un sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott. En la tesis se detalla el análisis del modelo matemático dinámico, mediante el método de elementos finito (FEM), el cual considera una flecha flexible, un disco rígido y dos chumaceras no-isotrópicas.

El diseño conceptual y la manufactura de una plataforma experimental son propuestas para el estudio de la respuesta al desbalance. Una parte importante se relaciona con la concepción de diseño, construcción mecánica de dos chumaceras con rodamientos de bola, un disco inercial acoplado a la flecha por dos bridas de bronce, una estructura para el motor, una plataforma de acero con perforaciones, y la integración de un motor de CD a la plataforma.

El desplazamiento radial del disco inercial, es reducido mediante la modulación de la aceleración angular, cuando el rotor pasa por la primera resonancia. Un algoritmo de control PI, es usado para planificar la trayectoria de la velocidad angular en un rotor tipo Jeffcott. Por último, la respuesta numérica al desbalance y el control de velocidad para diferentes tasas de aceleración, son calculados en el software de Matlab-Simulink.

Abstract

Unbalance represents a typical problem in rotating machinery, which occurs when the principal axis of inertia does not agree with its geometric axis of the rotor. In general, this is the result of imperfections in manufacturing and assembly of rotors. These kind of defects can cause high levels of vibrations, noise and wear, and they may lead to failures or lost of the machine.

The vibrations caused for the unbalance are studied for a Jeffcott like rotor-bearing system. In the thesis is shown the analysis of the the dynamic mathematical model by means of finite element methods (FEM), by which one considers a flexible shaft, one rigid disk and two non-isotropic journal bearing.

The conceptual design and manufacture of a experimental platform is proposed to study the unbalance response. An important part is related with the conception of design, mechanical construction of two supports with ball bearing, an inertial disk fixed to the shaft by two bronze bridles, a structure for the motor, one steel platform with drillings and the integration of a CD motor to the platform.

The radial displacement of the inertial disk, is reduced by means of angular accelerattion schedulling, when the rotor pass through to first resonance. A PI control algorithm, is used to trajectory tracking of the angular speed profile in a Jeffcott like rotor. Finally, the numerical unbalance response and the speed control for differents angular accelerattion rates, are computed in the Matlab-Simulink software.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	3
1.2. Planteamiento del problema	7
1.3. Justificación	8
1.4. Objetivos	8
1.4.1. Objetivo general	8
1.4.2. Objetivos específicos	8
2. Modelado matemático y propiedades del rotor	11
2.1. Modelo de elemento finito tipo viga de Euler	12
2.2. Modelo matemático del rotor tipo Jeffcott	15
2.3. Fuerza de desbalance y dinámica de rotación	20
2.4. Modelo global del sistema rotor-chumacera	23
2.5. Frecuencia natural y modos de vibración	25
3. Esquema de Control y Simulación del sistema	29
3.1. Sintonía de controladores PID	29
3.1.1. Control PID	29
3.1.2. Reglas Ziegler y Nichols	30
3.2. Resultados numéricos del sistema	32
3.3. Control por modulación de la tasa de aceleración	34
4. Manufactura de una plataforma experimental	41
4.1. Máquinas y herramientas de corte	42
4.2. Descripción de la plataforma experimental	42
4.2.1. Base con perforaciones	43
4.2.2. Base para el servomotor	44
4.2.3. Servomotor	44
4.2.4. Tarjeta de adquisición de datos	47
4.2.5. Coples rígidos y Cople flexible	49
4.2.6. Chumacera y Rodamiento	52
4.2.7. Flecha, brida y disco inercial	55
4.3. Integración de la plataforma experimental	56

5. Conclusiones	61
5.1. Algunas perspectivas	61
Bibliografía	62
Apéndices	65
A. Programas y bloques de simulación	
B. Hojas de datos de dispositivos	
C. Dibujos técnicos	

Capítulo 1

Introducción

La rotodinámica es el estudio de fenómenos dinámicos en maquinaria rotatoria y juega un papel muy importante en la industria moderna. La maquinaria rotatoria se utiliza en muchas aplicaciones tales como: turbomaquinaria, generadores de energía, automóviles, máquinas-herramientas, aplicaciones espaciales, propulsión marina, equipo médico, etc.

La presencia del ruido y las vibraciones indeseables en la maquinaria rotatoria es común en numerosas aplicaciones industriales. Las vibraciones son consideradas normalmente como indeseables, ya que producen deterioro mecánico, grietas, desgaste, ruido, etc. (ver, e.g., Wowk [15], Childs [6], Vance [28]).

Actualmente, en la industria se requiere que la maquinaria rotatoria opere a velocidades cada vez más altas (arriba de la primera velocidad crítica). La necesidad de operar a velocidades altas, ocasiona que la maquinaria trabaje en rangos de operación donde se presenta la llamada inestabilidad umbral. Por desgracia, al operar una máquina demasiado lejos del umbral, cualquier perturbación (desbalance, desalineamiento, fracturas, excitaciones externas, etc.) es capaz de empujar al sistema hacia un comportamiento no lineal inestable.

La interacción de estas máquinas en su ambiente tiene gran importancia, puesto que una condición de desbalance produce vibraciones y esfuerzos que pueden llegar a dañar al rotor y sus soportes. Además, si las máquinas no se operan en los rangos de velocidades adecuadas, entonces podrían ocurrir vibraciones que ocasionarían fallas catastróficas para el equipo rotatorio. Las fallas que ocurren en aplicaciones como turbomaquinaria, máquinas aéreas, etc. provocan grandes costos de reparación y lo que es más importante la pérdida de vidas humanas.

Para el estudio de rotores las vibraciones son consideradas como indeseables ya que producen fatiga, deterioro mecánico, grietas, desgaste, ruido, etc. Vance [28]. Las fuentes más comunes de vibraciones en maquinaria rotatoria son las interacciones dinámicas entre componentes estacionarios y rotatorios y el desbalance residual. La definición formal de desbalance es aquella condición que existe en un rotor, cuando las fuerzas vibratorias son transmitidas a sus soportes como resultado de las fuerzas centrífugas Wowk [15]. Si el centro de masa del disco o de la flecha no está en el eje de rotación, se generan órbitas y fuerzas centrífugas alrededor del eje, las cuales son transmitidas a las chumaceras y a la estructura de soporte. Cuando la frecuencia de la fuerza, es la misma que la rotación de la flecha, se

considera que la estructura presenta vibración síncrona. Aún si el centro de masa está sobre el eje de rotación, un desalineamiento del eje principal de inercia producirá un par rotatorio, que provocará vibraciones síncronas en la estructura de la máquina. En la práctica, un rotor nunca puede ser perfectamente balanceado debido a los errores en las mediciones de la manufactura y porque los cuerpos en rotación no son totalmente rígidos, sin embargo, altos niveles de vibraciones síncronas casi siempre pueden ser reducidas significativamente mediante el balanceo.

Las tres fuentes principales de vibraciones en maquinaria rotatoria son producidas por desbalance, desalineamiento y resonancias, abarcando hasta el 90% de los problemas de vibración. El *desbalance* es una condición donde el centro de masa C_m no coincide con el centro de masa C_g y se produce por una masa pequeña m , la cual genera una fuerza centrífuga que reacciona principalmente en las chumaceras (ver Fig. 1.1).

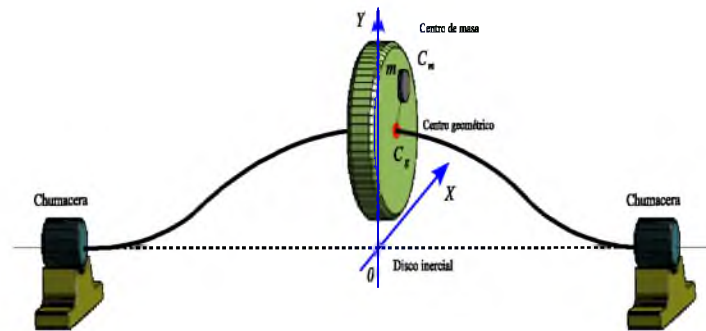


Figura 1.1: Rotor desbalanceado.

Las causas más comunes del desbalance son: densidad del material no uniforme, errores de maquinado y tolerancias en el proceso de manufactura, porosidad en piezas de fundición, desgaste irregular durante la operación de la máquina, cambio de componentes del rotor durante operaciones de mantenimiento, depósitos de material acumulados durante la operación de la máquina, tolerancias de ajuste en el ensamblado de componentes tales como discos de alabes, impulsores, turbinas, entre otros.

El *desalineamiento* es una condición donde los ejes de la flecha del rotor y motor (flecha impulsora) no coinciden sobre la misma línea de rotación. Esta condición puede ser paralelo o angular, como se muestra en la Fig. 1.2. La condición más común, es una combinación de ambas, y en las dos direcciones radiales (vertical y horizontal).

La *resonancia* es una condición que se presenta, cuando la frecuencia de la fuerza de excitación, es cercana a la frecuencia natural de la estructura mecánica. Esto provoca que se generen fuerzas con grandes amplitudes vibración, causando fallas en el sistema. Por lo tanto, es necesario evitar, tanto como sea posible, que una máquina opere en una frecuencia de trabajo cercana a las frecuencias naturales.

Los sistemas rotatorios, que contienen flechas, tienen masa y fuerza elástica distribuida, en lugar de tener masas concentradas separadas por resortes. A sistemas con estas características

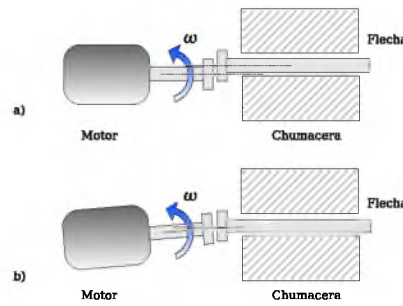


Figura 1.2: Desalineamiento: a) paralelo y b) angular.

son llamadas *sistemas de vibraciones por los medios continuos*. Estos constan de un número infinito de grados de libertad y, por lo tanto, requieren igual cantidad de coordenadas para describir su movimiento, poseen un número infinito de frecuencias y de modos de vibración.

En general, las vibraciones en medios continuos, están gobernadas por ecuaciones diferenciales parciales y para su análisis se supone que todos los materiales son homogéneos e isotrópicos y obedecen a la ley de Hooke para deformaciones pequeñas. En el diseño de máquinas rotatorias y la predicción del comportamiento dinámico en flexión y torsión, se utiliza un número finito de coordenadas. Las energías cinética, potencial y las funciones de disipación, son consideradas para obtener modelos dinámicos simplificados, haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange, o a partir de un análisis de fuerzas basado en la segunda ley de Newton.

El rotor Jeffcott, es uno de los modelos más simple, usado para estudiar y predecir el comportamiento dinámico de un rotor simétrico. Este tiene un disco colocado a la mitad de la longitud de la flecha, con chumaceras isotrópicas de rigidez y amortiguamiento idénticos en ambas direcciones radiales. La flecha se puede considerar rígida con chumaceras flexibles o flecha flexible con chumaceras rígidas, ambos modelos son equivalentes Vance [28].

1.1. Estado del arte

En la maquinaria rotatoria se ha aplicado el control pasivo, semiactivo y activo, para atenuar las amplitudes de vibración. En el *control pasivo* el sistema rotatorio es modificado en alguno o todos sus parámetros de diseño, es decir, se modifica su masa, rigidez y amortiguamiento. Este control el sistema rotatorio se modifica estando el rotor fuera de línea, es decir, el rotor se detiene para realizar el ajuste de alguno o todos sus parámetros. En el *control semiactivo*, que ha surgido más recientemente, se basa en la modificación de los parámetros del sistema rotatorio, estando en operación. Este tipo de control modifica principalmente las propiedades de amortiguamiento y rigidez de la chumacera, mediante un análisis previo de la respuesta en lazo abierto.

Por otra parte, en el *control activo* de vibraciones se aplican fuerzas al rotor, posiblemente incorporando más grados de libertad al sistema. Ver, e.g., Zhou y Shi [29] y Van Brussel [9].

En este esquema se utilizan dispositivos para aplicar fuerzas, los cuales son retroalimentados y/o prealimentados con la información de los estados del sistema, obtenida mediante sensores.

Un esquema de control semiactivo es propuesto por Silva y Cabrera [2] en el 2007. Abordan el problema de la atenuación de vibraciones en maquinaria rotatoria, ocasionadas por el desbalance residual. Utilizan dos amortiguadores magnetoreológicos o de fricción controlable tipo pistón para compensar las vibraciones. La prueba se realiza durante el arranque o paro del sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott, tanto a nivel simulación como experimental. La aplicación del control semiactivo se realizaron en baja y alta velocidad de rotación. En baja frecuencia, las vibraciones se reducen cerca del 80 %, respecto de las pruebas en lazo abierto. En alta frecuencia los resultados no son favorables debido a las limitaciones físicas de los amortiguadores en magnitud de fuerza y frecuencia de trabajo.

Ríos y Silva [26], estudian un esquema de control pasivo, se trata de un sistema mecánico masa-resorte-amortiguador de 3 grados de libertad. El sistema se compone de dos absorbedores pasivos de vibración, uno de tipo masa-resorte y un absorbedor tipo viga en cantilever. El esquema de control por retroalimentación positiva de la posición (PPF), es usado para atenuar las vibraciones en la resonancia, causadas por perturbaciones armónicas. El sistema se hace activo con la adición de una fuerza de control externa, entonces la dinámica en lazo abierto es propiamente modificada por el esquema PPF, mejora las propiedades de robustez. Algunas características del esquema modal es su fácil aplicación, ya que no requiere parámetros del sistema, solo se basa en la respuesta frecuencial y requiere de muy poco esfuerzo de control, cuando pasa a través de varias frecuencias naturales.

En 2004, Blanco [4] propone un rotor tipo Jeffcott soportado por dos chumaceras, una de ellas puede ser desplazada horizontalmente por medio de algunos servomecanismos en orden para compensar la respuesta del sistema. El movimiento asimétrico del disco, debido al desplazamiento de uno de los apoyos, conduce a un modelo no-lineal y acoplado. La metodología propuesta para el control de la rigidez dinámica del transitorio en el arranque del rotor consiste de dos controladores: la primera de ellas, es un controlador para la planificación de la trayectoria de velocidad, y la segunda, es un controlador para el cambio suave en la posición de la chumacera móvil. Esta técnica permite reducir y estabilizar la respuesta al desbalance mientras el rotor pasa por la primera velocidad crítica.

Existen tres formas para disminuir las amplitudes de vibraciones síncronas:

- Balanceo del rotor.
- Cambiar la velocidad de operación de la máquina rotatoria (alejado de las velocidades críticas resonantes).
- Agregar un valor de amortiguamiento óptimo.

El desbalance puede ser corregido agregando masas al rotor, de tal forma que la fuerza centrífuga producida por las masas de balanceo neutralice a la fuerza centrífuga producida por el desbalance original. Esta acción correctiva es comúnmente conocida como balanceo. Estos dos últimos puntos, van ligados, puesto que las características rotodinámicas de una turbomaquinaria están fuertemente influenciadas por las chumaceras en las que el rotor está

soportado. Esto se debe a que la rigidez del sistema rotor-chumacera está principalmente determinada por la rigidez de los soportes de la chumacera, que actúan en serie con la rigidez de la flecha, y el amortiguamiento del sistema se debe principalmente a las propiedades de amortiguamiento en la chumacera. Por otro lado, mediante el diseño del sistema rotor-chumacera se puede cambiar la velocidad de operación.

En los sistemas rotatorios, por lo general, la velocidad de operación se encuentra arriba de la primera velocidad crítica, especialmente en maquinarias grandes, tales como: turbinas de gas y vapor, turbocompresores, etc. En este caso, el rotor tiene que pasar a través de la velocidad crítica cuando el rotor se acelera desde el reposo hasta la velocidad de operación. Cuando el rotor pasa por la velocidad crítica la amplitud de vibración se verá incrementada. Esta se ve reducida, dependiendo del amortiguamiento que posea la máquina rotatoria. Para evitar que las amplitudes de vibración alcancen valores muy grandes, es necesario hacer pasar la máquina por la velocidad crítica tan rápido como sea posible. Esto se logra acelerando la máquina desde su reposo hasta la velocidad de operación (generalmente por encima de la velocidad crítica) en un tiempo muy corto, de esta manera se evitará el incremento de la amplitud vibratoria.

El esquema de control activo de vibraciones basado en la modulación de la tasa de aceleración de la velocidad fue propuesta por Millsaps y Reed [25], quienes en 1998 presentaron un método para reducir las vibraciones laterales causadas por el desbalance en un rotor, cuando pasa a través de su primera velocidad crítica durante la fase de aceleración y de desaceleración. Ellos determinaron que la energía vibratoria total puede ser reducida significativamente usando una aceleración variable, esto es, reduciendo la aceleración después de que se pasa por la primera velocidad crítica. Este resultado fue verificado experimentalmente en un rotor simple de un disco.

Realizando una revisión bibliográfica de los trabajos reportados en artículos, se muestra el empeño por obtener un modelo, y desarrollo de plataformas experimentales, que describa en forma clara el comportamiento dinámico de un sistema. Los equipos o plataformas experimentales con propósitos de investigación, así como los dispositivos usados para absorber las vibraciones se encuentran en la actualidad, aún en proceso de estudio tanto en el diseño mecánico como en el modelo matemático. Existen compañías como *Bently Nevada*[®] que se dedican al diseño y construcción de plataformas experimentales del tipo rotor-chumacera, su manufactura está hecha para una sola configuración con soportes rígidos, por lo que no es posible realizar distintas pruebas de control. En su mayoría se ven en la necesidad de diseñar y modificar algunas partes de esta plataforma comercial, principalmente los soportes, usando configuraciones de soportes con actuadores o sistemas de suspensión como: chumaceras móviles, chumaceras presurizadas, chumaceras con actuadores magnéticos, con fluidos magnetoreológico, entre otras configuraciones con el objeto de aplicar estrategias de control de desbalance. En la Fig. 1.3, se muestra una de las plataforma comerciales de *Bently Nevada modelo Rotor-Kit ASSEMBLY B336485* (*Bently Nevada, General Electric [17]*).

El desarrollo de plataformas experimentales es esencial para los estudios de control de vibraciones en maquinaria rotatoria, no existen plataformas comerciales con configuraciones específicas en cuestión de investigación. Cada instituto de trabajo desarrolla sus propias plataformas, como en el trabajo de tesis desarrollado por Andrés Ramírez [5] en el 2013 de la



Figura 1.3: Rotor Kit de *Bently Nevada, General Electric* [17].

Universidad Tecnológica de la Mixteca, presenta su proyecto titulado: *Diseño, construcción e instrumentación de un sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott para el análisis de vibraciones*. En este trabajo se presenta el estudio de un sistema tipo Jeffcott, se realiza el análisis del modelo, el diseño y la manufactura de una plataforma experimental (ver Fig. 1.4). En la tesis se muestran resultados experimentales realizando un barrido frecuencial de la máquina, por encima de la primer frecuencia resonante.



Figura 1.4: Plataforma experimental desarrollada por Andrés R. [5].

Silva y F. Medina en el 2010, [14] realizan investigaciones sobre el control de vibraciones en un rotor-chumacera tipo Jeffcott, para ello modifican uno de los soportes por una configuración con soporte sobre guías lineales. El soporte se posiciona a una distancia específica a lo largo de la flecha, con el fin de modificar las propiedades elásticas del rotor. En el trabajo se realiza el análisis del modelo de dos grados de libertad y se implementa una estrategia de control semiactivo, basado en la modificación de la rigidez para reducir el desbalance en el sistema. Cabe mencionar que en este trabajo se desarrolló una plataforma experimental, mostrada en la Fig 1.5.

Stefan Heidel [10] en marzo de 2016 del Instituto de Mecatrónica de la Universidad de Darmstadt, Alemania, realizan estudios sobre la eliminación de vibraciones debidas al desbalance en la maquinaria rotatoria. En las pruebas de control de vibraciones usan un rotor experimental tipo Jeffcott, compuesta de una chumacera con resortes lineales de compresión

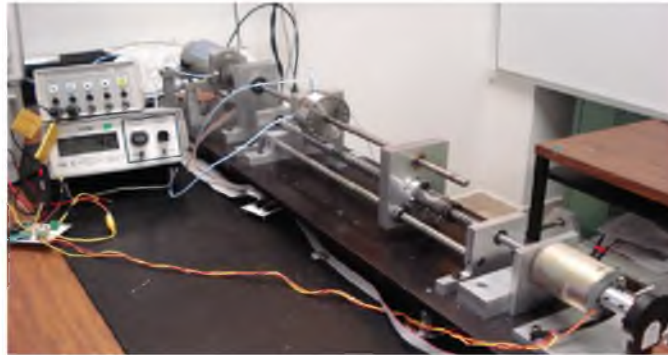


Figura 1.5: Plataforma del sistema rotor-chumacera con soporte móvil, Silva y F. Medina [14].

y actuadores electromagnéticos Fig. 1.6. El soporte con actuadores inyecta energía al sistema, para modificar la respuesta al desbalance.



Figura 1.6: Rotor con chumacera activa, compuesta por elementos elásticos y actuadores electromagnéticos Stefan H. [10].

1.2. Planteamiento del problema

La presencia de ruido y de vibraciones indeseables en la maquinaria rotatoria, es bastante común en numerosas aplicaciones industriales. Estas son consideradas normalmente como indeseables debido a que producen sobrecarga, deterioro mecánico, grietas, desgaste, ruido, fatiga, etc. Conforme avanza la tecnología mecánica la maquinaria rotatoria trabaja a mayores velocidades de operación, situación que conlleva mayores problemas rotodinámicos asociados a desbalance, desalineamiento y el cruce inevitable por una o varias frecuencias resonantes.

La universidad del papaloapan (UNPA) campus loma bonita, cuenta con el Instituto de agroingeniería, en la que está adscrita la carrera de Ingeniería en Mecatrónica. Los catedráticos pertenecientes al Instituto desarrollan proyectos de investigación relacionadas al área

de control de máquinas, modelado de sistemas dinámicos, instrumentación y desarrollo de plataformas experimentales. Los proyectos dan respaldo a los cursos que se imparten dentro de la carrera de Mecatrónica.

El laboratorio de Mecatrónica es un espacio habilitado para realizar proyectos y prácticas de las áreas de Control y Mecánica, no cuenta con una plataforma especializada en máquinas rotatorias. Por tal razón, se desarrolló una plataforma de un sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott para llevar a cabo pruebas experimentales con propósitos de investigación y al mismo tiempo para fortalecer la formación académica del estudiante. El tema de tesis, también aborda problema del modelado matemático mediante el método de elemento finito (FEM), ya que las flechas son vigas rotatorias, de tal manera que se trata de sistemas continuos, con infinitos modos de vibración y un número infinito de frecuencias naturales. También se usa un esquema de control para reducir las vibraciones debidas al desbalance, basado en el cambio de la tasa de aceleración del rotor.

1.3. Justificación

En la carrera de Ingeniería en Mecatrónica de la UNPA, los catedráticos imparten asignaturas del área de Control, Sistemas dinámicos y otras relacionadas a la automatización. Los grupos de trabajo, conformados por catedráticos de la misma carrera, trabajan en varios proyectos de investigación, una de ellas, está enfocada al control de vibraciones en maquinaria rotatoria. Los estudiantes participan en los proyectos propuestos, de esta manera se fortalece la formación académica teórico-experimental.

En las investigaciones de sistemas rotatorio, y el fortalecimiento en el desarrollo académico de la Universidad del Papaloapan, se requieren de pruebas sobre una plataforma experimental. Por lo tanto, en este tema de tesis se propone abordar el estudio de las dinámicas que describen una máquina rotatoria, y la manufactura de una plataforma experimental de un rotor-chumacera tipo Jeffcott.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Desarrollar una plataforma experimental de un sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott y aplicar una estrategia basada en la modulación de la tasa de aceleración en el modelo FEM, para reducir los niveles de vibración debidas al desbalance.

1.4.2. Objetivos específicos

- Diseñar en el software de SolidWork las partes mecánicas del sistema.
- Manufacturar las piezas que conforman la plataforma experimental.
- Ensamblar las diferentes piezas e incluir un motor de CD.

- Obtener el modelo matemático del sistema mediante el método de elementos finitos.
- Obtener resultados numéricos del modelo matemático, por medio del software de *Matlab – Simulink*.
- Regular la tasa de aceleración del rotor, usando un control PI, como estrategia para reducir las vibraciones debidas al desbalance.

Capítulo 2

Modelado matemático y propiedades del rotor

En la actualidad el estudio de la rotodinámica es un campo de investigación muy activa. Para estos tipos sistema los fenómenos básicos han sido ampliamente estudiados y comprendidos, pero existen aún muchos aspectos que requieren de trabajos teóricos para construir modelos más complejos que representen con mayor precisión el comportamiento dinámico de las máquinas. Las limitaciones en la rotodinámica clásica se deben principalmente a la introducción de dinámicas no lineales, la consideración de no isotropía en los elementos rotatorios y no rotatorios, así como las condiciones de trabajo no estacionarias.

La necesidad de lograr avances en el campo de la rotodinámica se puede observar en varios campos de la tecnología en donde se requieren máquinas cada vez más ligeras, con mayores velocidades de operación y más eficientes, los cuales requieren de análisis más complejos y que abarcan aspectos más allá de la rotodinámica clásica. En dichas aplicaciones, el análisis rotodinámico se realiza con modelos numéricos cada vez más complejos. Estos modelos complejos son necesarios para obtener una predicción precisa del comportamiento de los rotores y realizar experimentos numéricos inclusive antes de que la máquina sea manufacturada.

Recientemente en la rotodinámica los métodos de elementos finitos (FEM) han adquirido mucha atención debido a que existen muchos aspectos en estas áreas que aún necesitan trabajos teóricos para obtener modelos matemáticos realistas que describan el comportamiento dinámico real de la máquina. Los métodos (FEM) se usan para proporcionar aproximaciones discretas de un sistema continuo. Esta técnica es una aplicación del método de Rayleigh-Ritz con sistemas continuos fraccionados en un número finito de elementos discretos (ver, Rao [19], Kelly [16] y Genta [13]).

La creciente complejidad en los sistemas y el avance tecnológico de las computadoras digitales han sido las razones principales para el desarrollo de nuevos métodos de análisis, particularmente del método de elemento finito [27]. Los avances en materia de computación, en la actualidad permiten construir modelos con miles de grados de libertad o nodos y usarlos para obtener las respuestas del sistema tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo. Los nuevos sistemas de cómputo permiten realizar prácticas experimentales virtuales con máquinas que no se han construido, esto es importante porque pueden

introducirse cambios en el diseño de una máquina antes de ser elaborados, sin embargo, el resultado final dependerá del uso y la aplicación que se le dé a dicha herramienta.

En este capítulo se presenta un modelo matemático de rotor tipo Jeffcott usando los métodos de elementos finitos. Modelar matemáticamente este sistema por este tipo de método tiene consigo una gran ventaja, ya que para el caso de un rotor que se requiera modelar con varios discos inerciales o cuando se tienen cambios en la sección transversal de la flecha, el modelado por Newton/Euler-Lagrange se ven limitados y es muy difícil obtener su modelo, en cambio usando las técnicas de modelado por elemento finito se facilita su análisis y se puede modelar no solo los rotores de varios discos, sino también realizar modelos que incluyan las dinámicas de las chumaceras, efectos giroscópicos del disco, dinámicas de flexión en la flecha, cambios en la sección transversal, secciones de distinto material, torsión, etc.

2.1. Modelo de elemento finito tipo viga de Euler

El enfoque de elemento finito inicialmente para el análisis de vibraciones en vigas y fue aplicado por primera vez a rotores por Ruhl y Booker (1972) con subsecuentes contribuciones de Nelson y McVaugh (1976) y Nelson (1980) Genta [13].

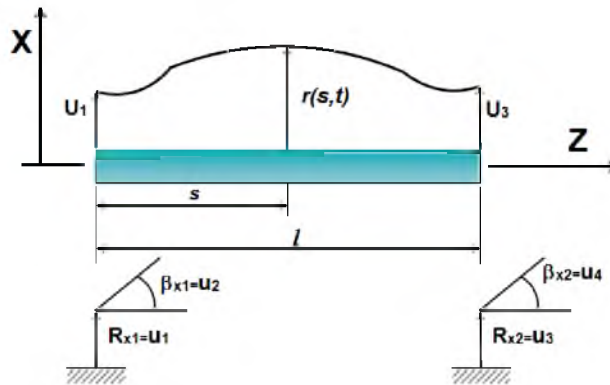


Figura 2.1: Segmento de una viga uniforme

En la Fig. 2.1, se ilustra un segmento de viga uniforme con propiedades inerciales y de rigidez distribuidas. La ecuación diferencial parcial que rige el movimiento de la viga

$$m \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 r}{\partial s^4} = f(s, t) \quad (2.1)$$

donde $m = \rho A$, es la masa por unidad de longitud de la viga, está relacionada con los parámetros densidad del material ρ , la sección transversal de la flecha $A = \frac{\pi \phi^2}{4}$, la longitud l de cada elemento finito de la viga, E es una propiedad mecánica del material llamada módulo de young o módulo de elasticidad, $I = \frac{\pi \phi^4}{64}$ es la inercia de área de la flecha, ϕ es el diámetro de la flecha y $f(s, t)$ es la fuerza distribuida no conservativa en el elemento viga.

Se propone desarrollar una solución por separación de variables a partir de la ecuación:

$$r(s, t) \simeq \sum_{i=1}^4 \psi_i(s) u_i(t) \quad (2.2)$$

donde $\psi_i(s)$ son referencias como las funciones de forma y se requieren para satisfacer la versión homogénea estática de la formula diferencial. Las funciones de tiempo $u_i(t)$ son identificadas como:

$$u_1 = R_{X1}, u_2 = \beta_{Y1}, u_3 = R_{X2}, u_4 = \beta_{Y2}$$

donde R_{X1} y R_{X2} son los desplazamientos verticales en los extremos de la viga y β_{Y1} , β_{Y2} , son los movimientos angulares en los extremos de la viga o flecha.

De las ecuaciones, la función de forma $\psi_i(s)$ tiene las siguientes condiciones de frontera para el elemento viga,

$$\begin{aligned} \psi_1(0) = 1 & \quad \psi_2(0) = 0 & \quad \psi_3(0) = 0 & \quad \psi_4(0) = 0 \\ \frac{d\psi_1(0)}{ds} = 0 & \quad \frac{d\psi_2(0)}{ds} = 1 & \quad \frac{d\psi_3(0)}{ds} = 0 & \quad \frac{d\psi_4(0)}{ds} = 0 \\ \psi_1(l) = 0 & \quad \psi_2(l) = 0 & \quad \psi_3(l) = 1 & \quad \psi_4(l) = 0 \\ \frac{d\psi_1(l)}{ds} = 0 & \quad \frac{d\psi_2(l)}{ds} = 0 & \quad \frac{d\psi_3(l)}{ds} = 0 & \quad \frac{d\psi_4(l)}{ds} = 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde las derivadas respecto a s corresponde a los grados de deflexión angular. La solución de la ec. (2.2) es propuesta como un polinomio de tercer orden, dado por

$$r = c_4 + c_3 s + \frac{c_2 s^2}{2} + \frac{c_1 s^3}{3} \quad (2.4)$$

La solución propuesta ec. (2.4), satisface la ecuación homogénea estática, mostrada por la ecuación diferencial,

$$\frac{d^4 r}{ds^4} = 0$$

De tal manera que las funciones de forma de la ec. (2.2) y basado en las condiciones de frontera mostrada en la ec. (2.3) quedan definidas como:

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= 1 - \frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3} \\ \psi_2(s) &= s - \frac{2s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \\ \psi_3(s) &= \frac{3s^2}{l^2} - \frac{2s^3}{l^3} \\ \psi_4(s) &= -\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

- **Nota:** Las soluciones de la función de forma ψ_i se obtienen basado en las condiciones de frontera. Presentamos el caso para ψ_i $i = 1$,

$$\begin{aligned} 1 &= c_4 + c_3(0) + \frac{c_2(0)^2}{2} + \frac{c_1^3(0)}{3} & \psi_1(0) &= 1 \\ 0 &= c_3 + c_2(0) + c_1(0)^2 & \frac{d\psi_1(0)}{ds} &= 0 \\ 0 &= c_4 + c_3 l + \frac{c_2 l^2}{2} + \frac{c_1 l^3}{3} & \psi_1(l) &= 0 \\ 0 &= c_3 + c_2 l + c_1 l^2 & \frac{d\psi_1(l)}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

simplificando las ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= c_4 \\ 0 &= c_3 \\ 0 &= 1 + \frac{c_2 l^2}{2} + \frac{c_1 l^3}{3} \\ 0 &= c_2 l + c_1 l^2 \end{aligned}$$

resolviendo las ecuaciones, las constantes del polinomio $r(s, t)$ son calculadas como: $c_4 = 1$, $c_3 = 0$, $c_2 = -\frac{6}{l^2}$, y $c_1 = \frac{6}{l^3}$.

La solución aproximada de la ecuación $r(s, t)$ se establece por la siguiente expresión:

$$r(s, t) = \left(1 - \frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3}\right) u_1 + \left(s - \frac{2s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2}\right) u_2 + \left(\frac{3s^2}{l^2} - \frac{2s^3}{l^3}\right) u_3 + \left(-\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) u_4 \quad (2.6)$$

Esta solución aproximada tiene cuatro coordenadas generalizadas $u_i(t)$ y se propone derivar las ecuaciones de movimiento de Lagrange para estas variables. Primero, se define la energía cinética como

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial r(s, t)}{\partial t} \right)^2 ds \quad (2.7)$$

Sustituyendo la ecuación (2.6) en la ecuación de energía 2.7, la definición es llevada a la forma cuadrática

$$T = (\dot{u})^T [M] (\dot{u})$$

donde M es la matriz elemental de masa del elemento finito, y es escrita:

$$M = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Similarmente, sustituyendo la ecuación en la función de energía potencial:

$$V = \int_0^l EI r^2(s, t) ds$$

conduce a la forma cuadrática:

$$V = \frac{1}{2} (u)^T [K] (u)$$

donde K es la matriz de rigidez del elemento finito, dado por la expresión:

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Las matrices M y K de las ecuaciones 2.8, y 2.9 representan la masa y rigidez distribuida de un elemento finito, como el que se muestra en la Fig. 2.1, este segmento de viga es una porción elemental de una viga continua que posee 2 grados de libertad por cada nodo, describen el movimiento radial y angular del elemento..

2.2. Modelo matemático del rotor tipo Jeffcott

El sistema rotor tipo Jeffcott es un sistema que considera el disco soportado por dos apoyos rígidos con chumaceras de bola y cuyo disco es montado en el centro de la longitud de la flecha (ver Vance [28]). Con base a esta configuración se puede obtener un modelo matemático simplificado del sistema, mostrada en la Fig. 2.2.

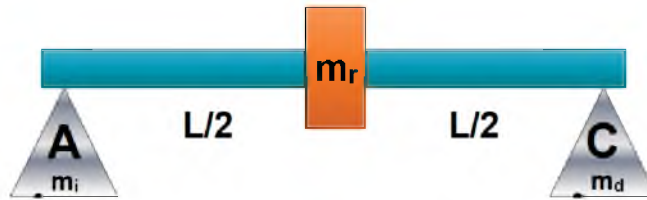


Figura 2.2: Rotor tipo Jeffcott.

El modelo del rotor-chumacera se obtiene mediante el método de elemento finito (FEM), el cual ofrece una mayor aproximación del comportamiento dinámico del sistema físico. Para construir un modelo discreto del rotor, se considera dos elementos finitos de longitudes idénticas $l = L/2$ (L longitud total), tres nodos una en cada soporte y la última ubicada en el disco. Cada nodo tiene cuatro grados de libertad, dos movimientos radiales (x, y) y dos movimientos angulares ($\beta_q, q = x, y$), por lo que el modelo completo consta de 12 grados de libertad, seis grados por cada plano de movimiento (ver Fig. 2.3) y se asume que no existe acoplamiento elástico entre los planos de movimientos. Para este modelo no se consideran los efectos giroscópicos en el disco y se consideran soportes no-isotrópicos con propiedades mecánicas diferentes. Cada soporte se representa por una constante de rigidez radial y es aproximada por k_{iq} en la izquierda y por la derecha k_{dq} ($q = x, y$).

Los elementos finitos tienen una longitud de $l = L/2$, la densidad del material es uniforme ρ a lo largo de toda la flecha, sección transversal constante A , inercia I y propiedades mecánicas como módulo de Young E es la misma en cada elemento. La masa del soporte izquierdo m_i se considera concentrada en el nodo, toda la masa del disco y sus elementos de fijación a la flecha tienen una masa m_r y el soporte derecho tiene una masa m_d .

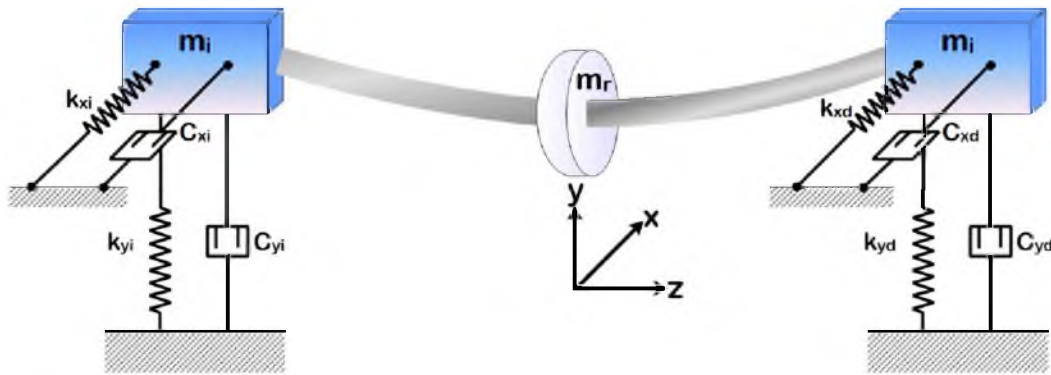


Figura 2.3: Diagrama representativo de los elementos del sistema y ejes de referencia.

El modelo discretizado del rotor, está formada por dos elementos finitos $EF1$ y $EF2$ (ver Fig. 2.4). Contiene 3 nodos, un nodo ubicado en cada soporte y un nodo en el disco inercial. Cada elemento finito contiene las mismas propiedades geométricas y mecánicas, esto indica que el nodo 2 comparte propiedades con los dos elementos, mostrada en la Fig. 2.4.

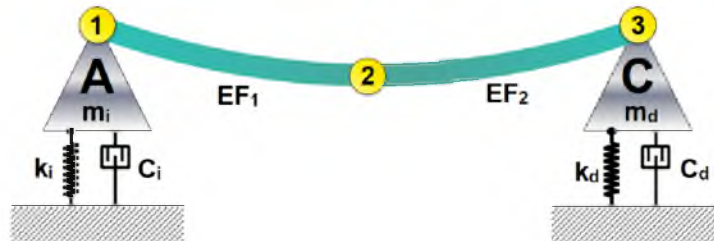


Figura 2.4: Número de nodos y elementos finitos a considerar en el modelo matemático.

La flecha es particionada en dos elementos finitos, cada elemento tiene igual longitud, se asume que cada soporte tiene grados de flexibilidad. La Figura 2.5, muestra los grados de libertad de la viga, se considera dos grados por cada nodo en un plano de movimiento. Para un plano de movimiento Y el nodo 1 experimenta movimiento radial y_i y deflexión angular β_i , las variables de movimiento en el nodo 2 (y_r, β_r) y las variables de movimiento en el nodo 3 se representan por (y_d, β_d).

Para construir las matrices de masa M_y y rigidez K_y del sistema, se construyen matrices cuadradas de $n \times n$, con $n = 6$ número de grados de libertad de rotor para un plano de movimiento ($y_i, \beta_{yi}, y_r, \beta_{yr}, y_d, \beta_{yd}$). Los grados de libertad de la viga se distribuyen en un

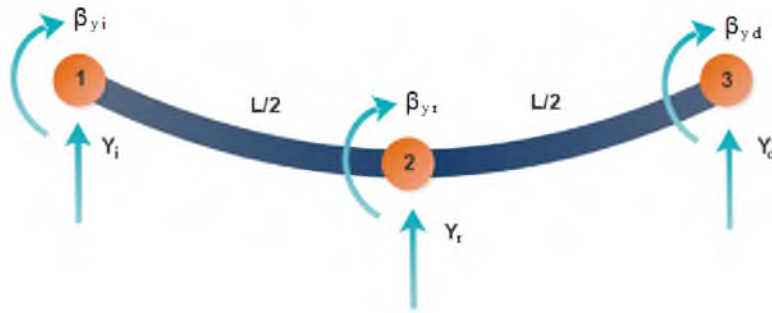


Figura 2.5: Representación de los grados de libertad en cada nodo.

arreglo matricial dado por la ec. (2.10).

$$\begin{matrix}
 y_i & \beta_{yi} & y_r & \beta_{yr} & y_d & \beta_{yd} \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
 \end{array} \right] & \begin{matrix}
 y_i \\
 \beta_{yi} \\
 y_r \\
 \beta_{yr} \\
 y_d \\
 \beta_{yd}
 \end{matrix}
 \end{matrix} \quad (2.10)$$

- Para el elemento finito 1:

El primer elemento finito (EF_1), es descrito por las variables $(y_i, \beta_{yi}, y_r, \beta_{yr})$, que corresponden al nodo 1 y nodo 2. La matriz de masa M_{y1} , está dada de la siguiente manera:

$$M_{y1} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix}
 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 \\
 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\
 54 & 13l & 156 & -22l & 0 & 0 \\
 -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez K_{y1} representa la rigidez del elemento finito 1 y es descrito por las variables $(y_i, \beta_{yi}, y_r, \beta_{yr})$. Los coeficientes de rigidez se distribuyen en el siguiente arreglo matricial.

$$K_{y1} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 12 & -6l & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para el elemento finito 2 :

La sección de la viga dada entre el nodo 2 y 3, corresponde al segundo elemento finito (EF_2). Las variables que describe el segundo elemento son $(y_r, \beta_{yr}, y_d, \beta_{yd})$. Los coeficientes de la matriz de masa M_{y2} se distribuyen de la siguiente manera:

$$M_{y2} = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 156 & 22l & 54 & -13l \\ 0 & 0 & 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 156 & -22l \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

y los coeficientes de rigidez del segundo elemento se distribuyen en la siguiente matriz K_{y2} ,

$$K_{y2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6l & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

La matriz general de masa \hat{M}_y y de rigidez \hat{K}_y , está compuesta por los coeficientes dinámicos de los elementos finitos $EF1$ y $EF2$. El arreglo matricial describe los movimientos radiales (y_i, y_r, y_d) y angulares $(\beta_{yi}, \beta_{yr}, \beta_{yd})$ del rotor, solo para el plano de movimiento vertical (ecs. 2.11 y 2.12).

$$\hat{M}_y = M_{y1} + M_{y2}$$

$$\hat{M}_y = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 156 & -22l \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\hat{K}_y = K_{y1} + K_{y2}$$

$$\hat{K}_y = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

En la matriz general de masa M_y (plano y , ec. 2.13), se agrega la masa del soporte izquierdo m_i , la masa del disco m_r y la masa del soporte derecho m_d . El modelo propuesto solamente describe el movimiento radial del rotor (x , y), por tanto las masas se agregan en los grados de movimiento y_i , y_r , y y_d , sin considerar los efectos giroscópicos.

$$M_y = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 + \frac{420}{\rho Al} \mathbf{m}_i & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & 312 + \frac{420}{\rho Al} \mathbf{m}_r & 0 & 54 & -13l \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 156 + \frac{420}{\rho Al} \mathbf{m}_d & -22l \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

En la matriz general de rigidez K_y , se agrega la propiedad elástica del soporte izquierdo k_{iy} y la rigidez del soporte derecho k_{dy} . Las constantes mecánicas de los apoyos son de gran magnitud, impiden que el rotor tenga movimiento radiales en los extremos (y_i , y_d).

$$K_y = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 + \frac{l^3}{EI} \mathbf{k}_{iy} & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 + \frac{l^3}{EI} \mathbf{k}_{dy} & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La matriz general de amortiguamiento, es calculada por la relación lineal entre la matriz de masa y rigidez, (ver, Kelly [16] y Genta [13]) expresada por:

$$C_y = \alpha_y M_y + \beta_y K_y \quad (2.15)$$

donde α_y , β_y son las constantes de proporcionalidad entre las matrices.

Las matrices generales de masa y rigidez para el movimiento horizontal x , son obtenidas siguiendo el mismo procedimiento.

2.3. Fuerza de desbalance y dinámica de rotación

La siguiente sección muestra el análisis del movimiento del disco inercial en la configuración simplificada del rotor Jeffcott, cuyo objeto es identificar la fuerza de vibración provocada por el desbalance en el disco de masa m_r , así como obtener la dinámica de rotación.

El rotor considera que el disco está montado a la mitad de la longitud l de flecha y soportado en sus extremos, por un apoyo rígido con alojamiento de chumaceras (Fig. 2.6). El desbalance en el sistema rotatorio se debe principalmente a que el centro de masa del disco C_m no se encuentra ubicado en el centro geométrico del disco C_g , donde la distancia que existe entre los puntos C_m y C_g se representa por la excentricidad e . Esta diferencia ocasiona vibraciones en el sistema, debidas a la fuerza centrífuga causada por la masa del disco que tiene una rotación $\omega = \dot{\theta}(t)$.

Para el análisis del movimiento se considera que el disco es montado en una flecha cuya rigidez efectiva es representada por los resortes en el plano horizontal k_x y vertical k_y .

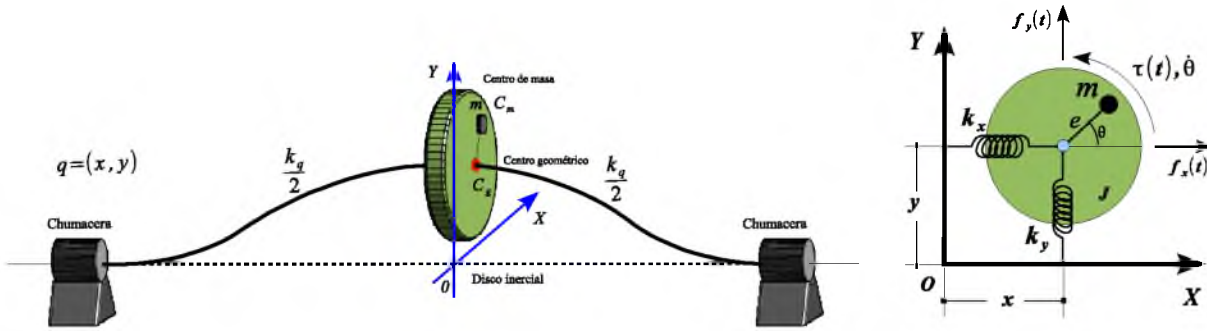


Figura 2.6: Diagrama representativo del rotor Jeffcott.

Para obtener las ecuaciones de movimiento usaremos la ecuación de Euler-Lagrange 2.16, basada en las energías cinética y potencial del sistema (Wells [30]).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q \quad (2.16)$$

$$q = [x \ y \ \theta]^T \quad (2.17)$$

La función de Lagrange \mathcal{L} , está basada en la energía cinética E_{ci} y en la energía potencial E_{pj} presente en todo el sistema, es dada por la expresión de Lagrange \mathcal{L} ,

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{i=n} E_{ci} - \sum_{j=1}^{j=m} E_{pj}$$

donde q es el vector de coordena generalizada del sistema, la i -ésima coordenada generalizada, Q es la fuerza exogena al sistema correspondiente.

Asumimos que la velocidad angular del rotor ω es una función del tiempo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, por lo tanto se considera $q_1 = x$, $q_2 = y$ y $q_3 = \theta$ como las coordenadas generalizadas.

$$E_{c1} = \frac{1}{2}J_r\dot{\theta}^2$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2}m_r v^2, \quad v^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2$$

$$E_{p1} = \frac{1}{2}k_x x^2, \quad E_{p2} = \frac{1}{2}k_y y^2$$

La posición del centro del centro de masa (c_m) mostrada en la Fig. 2.6, está definida por las siguientes coordenadas:

$$x_m = x + e \cos \theta$$

$$y_m = y + e \sin \theta$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + e^2\dot{\theta}^2 + 2e\dot{y}\dot{\theta} \cos \theta - 2e\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta$$

La función de Lagrange \mathcal{L} del sistema ec. (2.18), basada en las energías es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}J_r\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_r(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + e^2\dot{\theta}^2 + 2e\dot{\theta}(\dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta)) - \frac{1}{2}k_x x^2 - \frac{1}{2}k_y y^2 \quad (2.18)$$

La fricción viscosa presente en las chumaceras del rotor es denotada por c y fricción en el movimiento radial del disco (c_x, c_y). La función de disipación de Rayleigh que describe las energías de disipación son:

$$D = \frac{1}{2}c\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}c_x\dot{x}^2 + \frac{1}{2}c_y\dot{y}^2$$

Una vez obtenido el Lagrangiano del sistema, podemos obtener las ecuaciones que corresponden a sus coordenadas generalizadas, teniendo en cuenta que estas son $q_1 = x$, $q_2 = y$ y $q_3 = \theta$.

Las ecuaciones que describen la dinámica en el eje x son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m_r \ddot{x} - em_r \dot{\theta}^2 \cos \theta - em_r \ddot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -k_x x$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c_x \dot{x}$$

Resolviendo la ecuación de Euler-Lagrange ec. (2.19), y sustituyendo las derivadas parciales, se obtiene el modelo dinámico para $x(t)$ ec. (2.20).

$$m\ddot{x} + k_x x + c_x \dot{x} = m\epsilon \dot{\theta}^2 \cos \theta + m\epsilon \ddot{\theta} \sin \theta \quad (2.20)$$

Las ecuaciones que describen la dinámica en el eje y son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} - \epsilon m \dot{\theta}^2 \sin \theta + \epsilon m \ddot{\theta} \cos \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -k_y y$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = c_y \dot{y}$$

La dinámica del movimiento vertical y , se obtiene resolviendo la ecuación de Euler ec. (2.21), cuyo modelo es expresado por la ec. (2.22).

$$m\ddot{y} + k_y y + c_y \dot{y} = m\epsilon \dot{\theta}^2 \sin \theta - m\epsilon \ddot{\theta} \cos \theta \quad (2.22)$$

Y por ultimo el modelo matemático que describe el movimiento angular $\theta(t)$ del disco inercial, se obtiene resolviendo la ec. (2.23).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \tau(t) \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = (J_r + e^2 m_r) \ddot{\theta} - \epsilon m_r \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta + \epsilon m_r \ddot{y} \cos \theta - \epsilon m_r \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta - \epsilon m_r \ddot{x} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\epsilon m_r \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta - \epsilon m_r \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = c \dot{\theta}$$

El modelo dinámico que expresa el movimiento rotacional, es dado por la ec. (2.24).

$$(J_r + e^2 m_r) \ddot{\theta} + c \dot{\theta} = \tau(t) + \epsilon m_r \ddot{x} \sin \theta - \epsilon m_r \ddot{y} \cos \theta \quad (2.24)$$

Una vez resuelta las ecuaciones para el movimiento en $x(t)$, $y(t)$ y $\theta(t)$, se puede observar que existen fuerzas endógenas que perturban al sistema, dados por medio de la aceleración

(\ddot{x}, \ddot{y}) y la velocidad $\dot{\theta}(t)$. La magnitud de la fuerza de perturbación $f_q(t)$ ($q = x, y$), se incrementan con el desbalance y la velocidad angular, tal como se muestra en las ecs. (2.25) y (2.26).

$$f_x(t) = em_r(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (2.25)$$

$$f_y(t) = em_r(-\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad (2.26)$$

La dinámica de rotación del disco inercial ec. (2.24), agrega un grado de libertad al modelo general del sistema. Su dinámica es perturbada por las aceleraciones radiales en el disco y por el desbalance $\tau_\omega(t)$.

$$\tau_\omega(t) = em_r(\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta) \quad (2.27)$$

2.4. Modelo global del sistema rotor-chumacera

Para el modelo FEM (metodo de elemento finito), se consideran matrices generales que representan las dinámicas horizontal y vertical como se muestra acontinuacion:

$$M_q \ddot{Q} + C_q \dot{Q} + K_q Q = F_q(t) \quad (2.28)$$

$$Q = [q_i \quad \beta_{qi} \quad q_r \quad \beta_{qr} \quad q_d \quad \beta_{qd}]^T, \quad q = x, y$$

$$(M_q, C_q, K_q) \in R^{6 \times 6}, \quad F_q(t) \in R^{6 \times 1}$$

donde

$$M_q = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} \frac{420}{\rho A l} m_i + 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & \frac{420}{\rho A l} m_r + 312 & 0 & 54 & -13l \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & \frac{420}{\rho A l} m_d + 156 & -22l \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$K_q = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{l^3}{EI} k_{iq} + 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & \frac{l^3}{EI} k_{dq} + 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$C_q = \alpha_q M_q + \beta_q K_q, \quad q = x, y \quad (2.31)$$

$$\alpha_x = 15, \quad \beta_x = 8 \times 10^{-6}, \quad \alpha_y = 10, \quad \beta_y = 10 \times 10^{-6}$$

$$F(t) = [0 \ 0 \ f_q(t) \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\begin{aligned} f_x(t) &= m_r e \dot{\theta}^2 \cos(\theta) + m_r e \ddot{\theta} \sin(\theta) \\ f_y(t) &= m_r e \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - m_r e \ddot{\theta} \cos(\theta) \end{aligned}$$

donde M_q es la matriz de masa, K_q es la matriz de rigidez, C_q es la matriz de amortiguamiento distribuido, Q es el vector de coordenadas generalizadas, q_i es el desplazamiento radial en el soporte izquierdo, β_{qi} el movimiento angular o doblez de la flecha en el nodo 1, q_r el desplazamiento radial en el disco, β_{qr} movimiento angular en el disco, q_d es el desplazamiento radial en el extremo derecho y su movimiento angular en el mismo nodo β_{qd} .

El rotor está afectada por fuertes vibraciones endógenas del tipo armónico causadas por el desbalance en el disco $F_q(t)$, esta se hacen notar cuando la máquina es arrancada siguiendo un perfil de velocidad por encima de la primer frecuencia resonante, el desbalance se debe a que el centro de masa del disco no coincide con el eje principal de inercia de la misma, existe una distancia entre estos puntos al que se le llama excentricidad del disco e (ver Fig. 2.6).

La ecuación matemática que describe el movimiento angular del rotor es dada por la ecuación (2.32), esta dinámica agrega un grado de libertad al modelo global del sistema rotor-chumacera. El movimiento rotatorio se ve afectada por los acoplamientos elásticos entre las chumaceras, el desbalance y disco, como se muestra en la función $\tau_\omega(t)$.

$$(J_r + e^2 m_r) \ddot{\theta} + c \dot{\theta} = \tau(t) + \tau_\omega(t), \quad \omega = \dot{\theta} \quad (2.32)$$

$$\tau_\omega(t) = m_r e [\ddot{x}_r \sin(\theta) - \ddot{y}_r \cos(\theta)]$$

donde $\omega = \dot{\theta}$ es la velocidad de rotación de la máquina, $\tau(t)$ es el par aplicado por el motor, J_r es la inercia con respecto al eje de rotación, e la excentricidad del disco, c coeficiente de fricción presente en las chumaceras, y $\tau_\omega(t)$ son los acoplamientos elásticos entre las chumaceras y discos que perturban la dinámica de rotación. Los parámetros medidos del sistema rotor-chumacera ec. (2.28) son dados en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros del Rotor-chumacera Jeffcott.		
Soporte izquierdo	masa $m_i = 0,5 \text{ kg}$	Rigidez $k_{ix} = 60 \times 10^6 \text{ N/m}$ $k_{iy} = 30 \times 10^6 \text{ N/m}$
Soporte derecho	masa $m_d = 0,5 \text{ kg}$	Rigidez $k_{dx} = 60 \times 10^6 \text{ N/m}$ $k_{dy} = 30 \times 10^6 \text{ N/m}$
Disco Inercial	masa $m_r = 1,9 \text{ kg}$	Momento Polar de Inercia $J_r = 0,049 \text{ kg m}^2$
Excentricidad del disco	$e = 120 \mu \text{ m}$	
Fricción viscosa en las chumaceras	$c = 1,2 \times 10^{-2} \text{ N ms/rad}$	
Flecha	Longitud $L = 0,6 \text{ m} (l = L/2)$	Diámetro $\phi = 12 \text{ mm}$
	Módulo de Young $E = 200 \text{ G N/m}^2$	Densidad del material $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
Propiedades Geométricas	Sección Transversal $A = \frac{\pi \phi^2}{4} = 1.13 \times 10^{-4} \text{ m}^2$	Inercia de área $I = \frac{\pi \phi^4}{64} = 1.017 \times 10^{-9} \text{ m}^4$

Nota: La masa de la flecha se considera como una masa distribuida y está incluida en cada tramo de viga por la expresión $m = \rho Al$.

2.5. Frecuencia natural y modos de vibración

La resonancia es la tendencia de un sistema a oscilar con amplitudes grandes en algunas frecuencias particulares que en otros. Estas son conocidas como frecuencias resonantes del sistema. En estas frecuencias, las fuerzas varían en un periodo pequeño produciendo oscilaciones de grandes amplitudes, debido a que el sistema almacena energía de vibración.

La resonancia ocurre cuando un sistema puede almacenar y transferir energía fácilmente entre dos o más modos almacenables diferentes (tal como la energía cinética y potencial en el caso de un péndulo). Sin embargo hay algunas pérdidas de ciclo a ciclo, llamado amortiguamiento. Cuando el amortiguamiento es pequeño, la frecuencia resonante es aproximadamente igual a la frecuencia natural del sistema, el cual es una frecuencia de vibración libre de perturbación. Algunos sistemas tienen múltiples, distintas frecuencias resonantes De Silva [7].

Consideramos el problema de vibración del sistema conservativo ec.(2.33), para el caso de respuesta libre $F(t) = 0$.

$$M_q \ddot{Q} + K_q Q = 0, \quad q = x, y \quad (2.33)$$

donde M_q es definida positiva y tiene inversa. Premultiplicando la ecuación de movimiento ec. (2.33) por la matriz M_q^{-1} , la ecuación resultante es ecuación para la respuesta libre:

$$\ddot{Q} + M_q^{-1}K_q Q = 0 \quad (2.34)$$

El vector que resuelve la ec. (2.34), es propuesta como la exponencial del tiempo $Q(t) = \mathbf{u}e^{j\omega t}$, sustituyendo en la ecuación anterior,

$$-\omega^2 \mathbf{u} + (M_q^{-1}K_q)\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \neq 0$$

$$(M_q^{-1}K_q)\mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \neq 0 \quad (2.35)$$

$$(M_q^{-1}K_q - \omega^2 I)\mathbf{u} = 0 \quad (2.36)$$

donde el vector \mathbf{u} es distinta de cero. Esta expresión 2.35, es exactamente al problema del eigenvalor de una matriz. Las raíces del $\det(M_q^{-1}K_q - \omega^2 I) = 0$ o eigenvalor de la matriz $M_q^{-1}K_q$, nos proporciona el cuadrado de las frecuencias naturales ω_n del sistema (ec. 2.33).

Las frecuencias naturales ω_n se calculan numéricamente mediante el programa de MATLAB, editando

$$[V, E] = \mathbf{eig}(M_q^{-1}K_q), \quad q = x, y \quad (2.37)$$

En el estudio de sistemas mecánicos, los *eigenvalores*, también se les denominan *eigenfrecuencias* y son calculados por la raíz de los coeficientes de la diagonal de E ,

$$\begin{aligned} \omega_{n1} &= \sqrt{E(1,1)} \\ &\vdots \\ \omega_{n6} &= \sqrt{E(6,6)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Resolviendo de forma numérica por el comando (2.37), y calculando la raíz cuadrada de los coeficientes de E , las frecuencias naturales son:

$\omega_{n1} = 11020 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 1753,9 \text{ Hz} = 105230 \text{rpm}$	$\omega_{n2} = 10772 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 1714,4 \text{ Hz} = 102870 \text{rpm}$
$\omega_{n4} = 3527.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 561,39 \text{ Hz} = 33683 \text{rpm}$	$\omega_{n3} = 8263.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 1315,2 \text{ Hz} = 78913 \text{rpm}$
$\omega_{n5} = 1840.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 292,86 \text{ Hz} = 17572 \text{rpm}$	$\omega_{n6} = 144.72 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 23,033 \text{ Hz} = 1382 \text{rpm}$

Si sometemos un sistema de n grados de libertad a una excitación, éste responderá vibrando de determinada manera propia, exclusiva y particular del sistema. A estas vibraciones se les conoce como *modos de vibración* del sistema y a su frecuencia de vibración como la *frecuencia natural* del sistema. Cada modo de vibración posee una forma o geometría propia de movimiento. Por cada grado de libertad de una estructura, se tiene un modo de vibración y una forma modal diferente, que al vibrar lo hacen como una combinación lineal de sus modos fundamentales. El comportamiento de la estructura, es una superposición de subsistemas de un grado de libertad. Esto es, las vibraciones de un sistema de n grados de libertad, son

el resultado de una combinación lineal de la respuesta de n sistemas de un grado de libertad (ver, e.g., De Silva [7], Dimarogonas [8], Rao [19]).

Para el rotor los dos primeros modos de vibración se obtienen a partir de los valores propios o eigenvalores V , calculados de forma numérica por la expresión (2.37).

$$\begin{bmatrix} V(1,6) \\ V(2,6) \\ V(3,6) \\ V(4,6) \\ V(5,6) \\ V(6,6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,700 \text{ rad} = -40,1^0 \\ -0,139 \\ 0,000 \text{ rad} = 0^0 \\ 0,00 \\ 0,700 \text{ rad} = 40,1^0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_i \\ \beta_{y_i} \\ y_r \\ \beta_{y_r} \\ y_d \\ \beta_{y_d} \end{bmatrix} \quad \text{MODO 1 } \omega_n = 144,72 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\begin{bmatrix} V(1,5) \\ V(2,5) \\ V(3,5) \\ V(4,5) \\ V(5,5) \\ V(6,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,5770 \text{ rad} = 33^0 \\ 0,00 \\ -0,577 \text{ rad} = -33^0 \\ 0,00 \\ 0,5770 \text{ rad} = 33^0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_i \\ \beta_{y_i} \\ y_r \\ \beta_{y_r} \\ y_d \\ \beta_{y_d} \end{bmatrix} \quad \text{MODO 2 } \omega_n = 1840,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Cada columna de la matriz V , está asociado a un modo de vibración y los coeficientes del vector indican la deflexión radial (y_i, y_r, y_d) y angular de la flecha ($\beta_{y_i}, \beta_{y_r}, \beta_{y_d}$). En el nodo 1, la flecha se desplaza radialmente una cantidad y_i , y se dobla una cantidad β_{y_i} (tangente a la curva elástica), en el nodo 2 se desplaza y_r y se dobla β_{y_r} y en el tercer nodo y_d y β_{y_d} . La representación de los dos primeros modos, es mostrada en al Fig. 2.7.

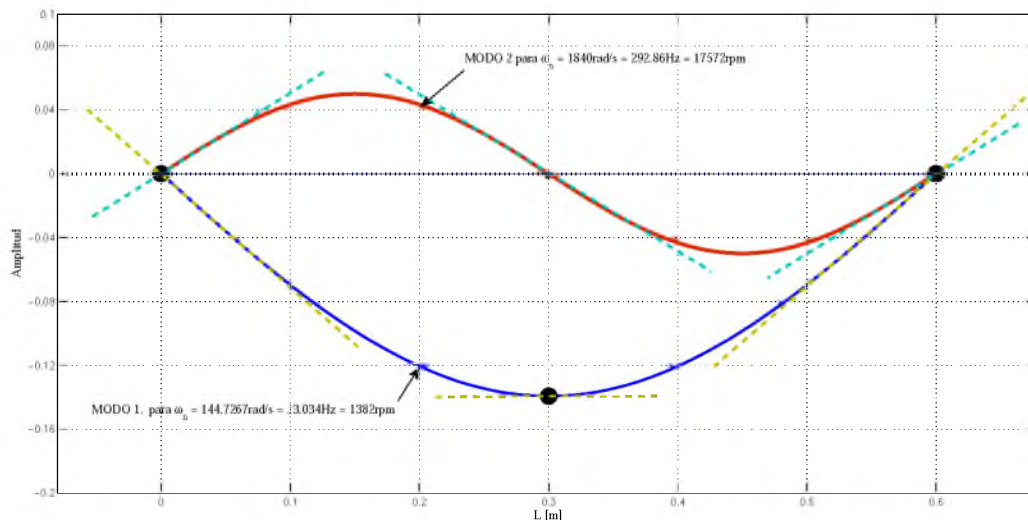


Figura 2.7: Modos de vibración asociados a las frecuencias naturales de $144 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $1840 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Capítulo 3

Esquema de Control y Simulación del sistema

El control automático desempeña una función vital en el avance de la ingeniería y la ciencia. Además de su extrema importancia en los sistemas de vehículos espaciales, robótica y similares; el control automático es una parte importante e integral de los procesos modernos industriales y de manufactura. Por ejemplo, es esencial en el control numérico de las máquinas-herramienta CNC de las industrias de manufactura, en el diseño de sistemas de pilotos automáticos en la industria, aeroespacial, y en el diseño de vehículos automáticos. También es esencial en las operaciones industriales como el control de temperatura, presión, humedad, viscosidad y flujo de líquidos en los distintos procesos industriales. Los avances en la teoría y la práctica del control automático aportan los medios necesarios para obtener un buen desempeño y mejorar la productividad Ogata [12].

Los controladores que más aplicaciones industrial poseen, son las variantes del control PID. Casi todos se ajustan en la operación, en la literatura se han propuesto diferentes reglas de sintonización, que permiten llevar a cabo una sintonización adecuada de los controladores en el sitio. Asimismo, se han desarrollado métodos automáticos de sintonización y algunos de los controladores PID poseen capacidad de sintonización automática en línea. En particular, cuando el modelo matemático de la planta o sistema no se conoce y, por lo tanto, no se pueden emplear métodos de diseño analíticos, es cuando estos controladores resultan ser más útiles Ogata [12].

3.1. Sintonía de controladores PID

3.1.1. Control PID

La combinación de una acción de control proporcional, una acción de control integral y una acción derivativa, se denomina control proporcional-integral-derivativa (PID). La ecuación del controlador es dada por la ec. 3.1 y un diagrama representativo de una planta en lazo cerrado con un esquema PID se muestra en la Fig. 3.1.

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.1)$$

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (3.2)$$

y su función de transferencia es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (3.3)$$

$$E(s) = R(s) - C(s) \quad (3.4)$$

donde $e(t)$ es la función del error, $r(t)$ es la referencia o valor deseado, $c(t)$ es la salida o valor medido, K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral y T_d es el tiempo derivativo.

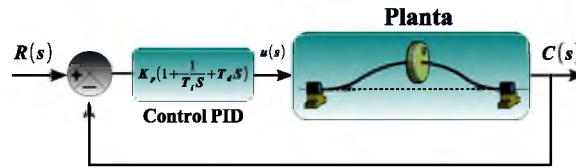


Figura 3.1: Esquema del control PID

Si se conoce el modelo matemático de la planta, se puede aplicar diversas técnicas de diseño con el fin de determinar los parámetros del controlador que cumpla las especificaciones en estado transitorio y en estado estable del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, si la planta es tan complicada que no es fácil obtener su modelo matemático, tampoco es posible un enfoque analítico para el diseño de un controlador *PID*. En este caso, debemos recurrir a los enfoques experimentales para la sintonización de los controladores *PID*.

Ziegler y Nichols propusieron unas reglas para determinar los valores de la ganancia proporcional K_p , del tiempo integral T_i y del tiempo derivativo T_d , con base en las características de respuesta transitoria de una planta específica.

3.1.2. Reglas Ziegler y Nichols

Ziegler y Nichols propusieron reglas para determinar los valores de la ganancia proporcional k_p , del tiempo integral T_i y del tiempo derivativo T_d , basándose en las características de respuesta transitoria de una planta dada. Existen dos métodos denominados reglas de sintonía de Ziegler y Nichols: el primero y el segundo método, que a continuación se hace una descripción de estos dos métodos.

■ **Primer método.**

En el primer método, la respuesta de la planta a una entrada escalón, se obtiene de manera experimental. Si la planta no contiene integradores ni polos dominantes complejos conjugados, la curva de respuesta escalón presenta una forma de S , tal como se muestra en la Fig. 3.2. Este método se puede aplicar si la respuesta muestra una curva con forma de S . Tales curvas de respuesta escalón se pueden generar experimentalmente o a partir de una simulación dinámica de la planta.



Figura 3.2: Respuesta de una planta a la prueba escalón.

La curva con forma de S se caracteriza por dos parámetros: el tiempo de retardo L y la constante de tiempo T . El tiempo de retardo y la constante de tiempo se determinan dibujando una recta tangente en el punto de inflexión de la curva con forma de S y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y con la línea $c(t) = K$, tal como se muestra en la Fig. 3.3. Las constantes L y T se usan para determinar las ganancias preliminares del control. Ziegler y Nichols sugirieron establecer los valores de k_p , T_i y T_d de acuerdo con la fórmula que se muestra en la Tabla 2.

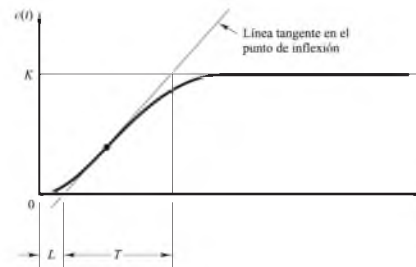


Figura 3.3: Curva con forma de s .

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0,9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$1,2\frac{T}{L}$	$2L$	$0,5L$

■ Segundo método.

En el segundo método, primero se fija $T_i = \infty$ y $T_d = 0$. Usando solo la acción proporcional, se incrementa K_p desde 0 hasta un valor crítico K_{cr} , en donde la salida presenta oscilaciones sostenidas, la acción del control es representada en la Fig. 3.4. Una vez que la salida experimente oscilaciones sostenidas, se determina el periodo P_{cr} .

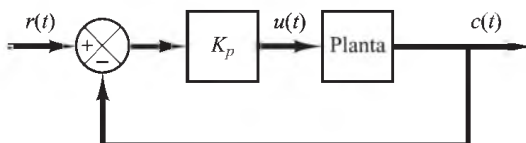


Figura 3.4: Aplicación de una ganancia proporcional K_p al sistema.

Ziegler y Nichols sugirieron que se establecieran los valores de los parámetros K_p , T_i y T_d de acuerdo a la fórmula que se muestra en la Tabla 3.

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0,5K_{cr}$	∞	0
PI	$0,45K_{cr}$	$\frac{1}{1,2}P_{cr}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$

Si el sistema tiene un modelo matemático conocido, entonces puede emplearse un método analítico para encontrar la ganancia K_{cr} y el periodo P_{cr} de las oscilaciones sostenidas.

3.2. Resultados numéricos del sistema

La respuesta numérica del sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott, se obtuvo mediante la programación del modelo en el software de Matlab-Simulink 2013. El modelo matemático del sistema es descrita por las ecs. (2.28), (2.29), (2.30) y (2.31) y las propiedades geométricos y mecánicas son proporcionadas en la Tabla 1.

En la prueba de lazo abierto el rotor es arrancado desde el reposo 0 hasta 3000 **rpm** en un tiempo de 50 s. El sistema atraviesa por la primer frecuencia resonante registrada en $\omega_n = 144,72 \text{ rad/s} = 1382 \text{ rpm}$, en esta frecuencia alcanza una amplitud total de 3 mm. Los desplazamientos radiales $(x_r(t), y_r(t))$ y la orbita del disco $(x - y)$, se muestran en la Fig. 3.5. Las amplitudes de vibración difieren debido a que los soportes tienen distintas propiedades mecánicas (rigidez y amortiguamiento).

En la Fig. 3.6, se muestra la respuesta al desbalance $R(t) = \sqrt{x_r^2 + y_r^2}$ que presenta el disco y la respuesta frecuencial () del desplazamiento radial (x_r, y_r) . La resonancia se presenta cuando la respuesta del sistema, alcanza gran amplitud de oscilación.

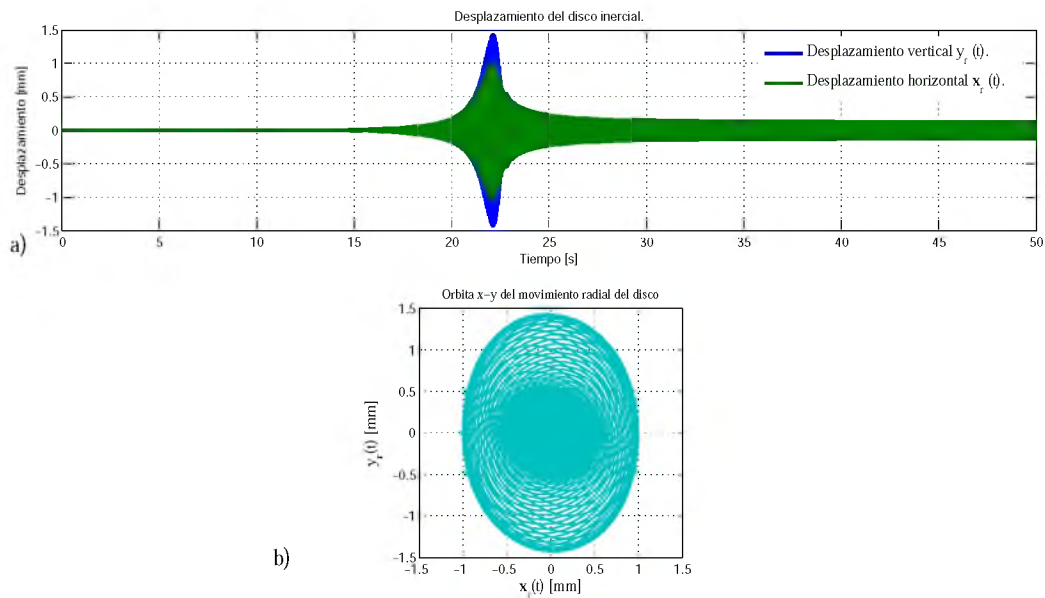


Figura 3.5: a) Desplazamiento radial del disco inercial ($x_r(t)$, $y_r(t)$), b) Orbits $x - y$ de movimiento del disco inercial.

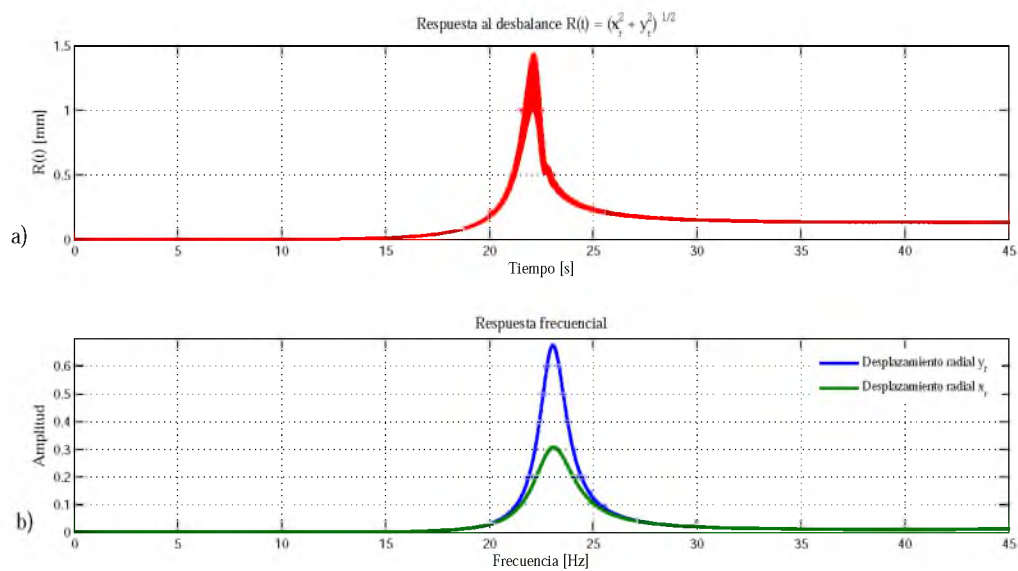


Figura 3.6: a) Respuesta al desbalance $R(t)$, b) Respuesta en frecuencia FFT de (x_r, y_r) .

En la prueba de lazo abierto, la velocidad angular del rotor $\omega(t)$ es controlada por $\tau(t)$. Un esquema de control PI, es usado para el seguimiento de un perfil de velocidad angular ω_d , cuyo algoritmo es descrito de la forma:

$$\begin{aligned}\tau(t) &= K_p e(t) + K_i \int e(t) dt \\ e(t) &= \omega_d(t) - \omega(t), K_p = 10, K_i = 1,5\end{aligned}\quad (3.5)$$

donde $e(t)$ es la función del error, $\omega_d(t)$ es el perfil de velocidad angular planificado por la curva de Bezier y $\omega(t)$ es la velocidad angular medida.

La planificación del perfil de velocidad se realizó por medio del polinomio de Bézier de decimo orden, bajo la siguiente ecuación:

$$\omega_d = \omega_0 + (\omega_f - \omega_0) \left(\frac{t - t_0}{t_f - t_0} \right)^5 \left[\sum_{i=0}^{i=5} (-1)^i \gamma_i \left(\frac{t - t_0}{t_f - t_0} \right)^i \right] \quad (3.6)$$

donde ω_d es la velocidad planificada, ω_0 es la velocidad inicial, ω_f es la velocidad final, t_0 es el tiempo de inicio, t_f es el tiempo final en que se alcanza la velocidad final. Los coeficientes del polinomio son: $\omega_0 = 0$, $\omega_f = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3000 \text{rpm}$, $t_0 = 0 \text{ s}$, $t_f = 50 \text{ s}$, $\gamma_0 = 552$, $\gamma_1 = 1050$, $\gamma_2 = 1800$, $\gamma_3 = 1575$, $\gamma_4 = 700$, $\gamma_5 = 126$.

El perfil de velocidad medido $\omega(t)$ en comparación con el perfil deseado $\omega_d(t)$, así como el error $e(t)$ son mostrados en la Fig. 3.7. Se considera que el rotor parte desde el reposo hasta $3000 \text{rpm} = 314 \text{ rad/s}$ en un tiempo de 50 s.

El torque $\tau(t)$ aplicado para seguir el perfil de velocidad se aprecia en la Fig. 3.8. La perturbación debida al desbalance causa efecto en la dinámica de rotación, esto se logra apreciar en el esfuerzo de control $\tau(t)$ justamente cuando la máquina cruza la primer frecuencia resonante en $\omega_n = 144,72 \text{ rad/s} = 1382 \text{rpm}$ (ver Fig. 3.8). Como se observa el esfuerzo de control está dentro del rango de operación del servomotor *Electrocraft RPP23M-45*. contemplado en este trabajo, entrega un torque máximo de 0,69 N m (ver Apéndice B).

3.3. Control por modulación de la tasa de aceleración

Cuando el sistema atraviesa la velocidad crítica (resonante) la amplitud de vibración en el disco se ve incrementada. Esta se reduce, dependiendo del amortiguamiento presente en los cojinetes o en los materiales que posea la máquina rotatoria. Para evitar que las oscilaciones alcancen valores muy grandes, es necesario hacer pasar la máquina por la velocidad crítica tan rápido como sea posible. Esto se logra si se acelera la máquina desde el reposo 0 hasta la velocidad de operación ω_f , que generalmente esta por encima de la frecuencia resonante en un tiempo muy corto, así se reduce la amplitud de vibración Millsaps y Reed [25].

Se crearon 6 perfiles de velocidad mediante el polinomio de Bezier, con el mismo tiempo de simulación (110 s), pero cambiando el tiempo final (t_f), es decir cambiando el tiempo en el que se alcanza la velocidad deseada $\omega_f = 314,16 \text{ rad/s} = 3000 \text{rpm}$. Los perfiles de velocidad y el esfuerzo de control $\tau(t)$ aplicado para el seguimiento de trayectoria son mostrados en

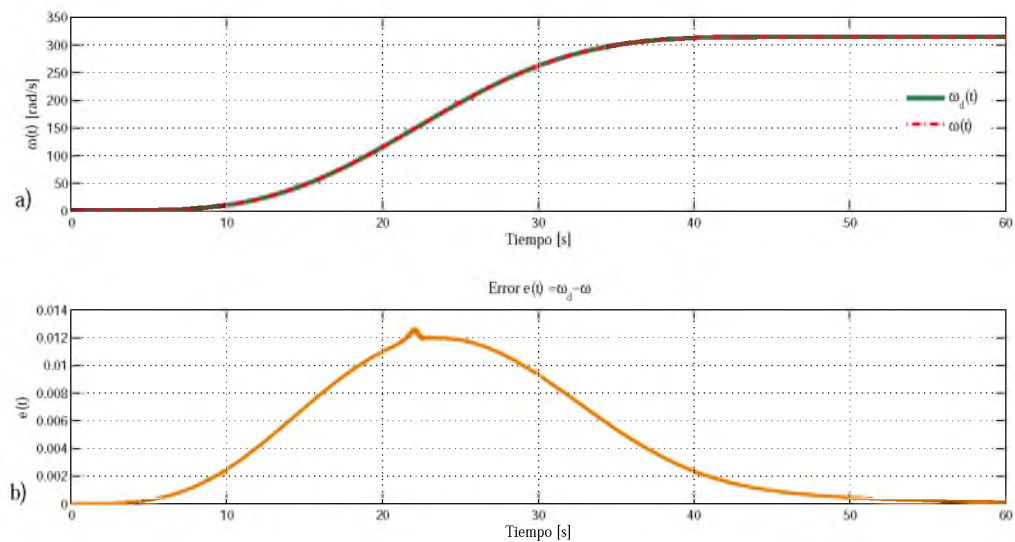


Figura 3.7: a) Seguimiento de la trayectoria planificada $\omega_d(t)$, b) Función de error $e(t)$ en el control.

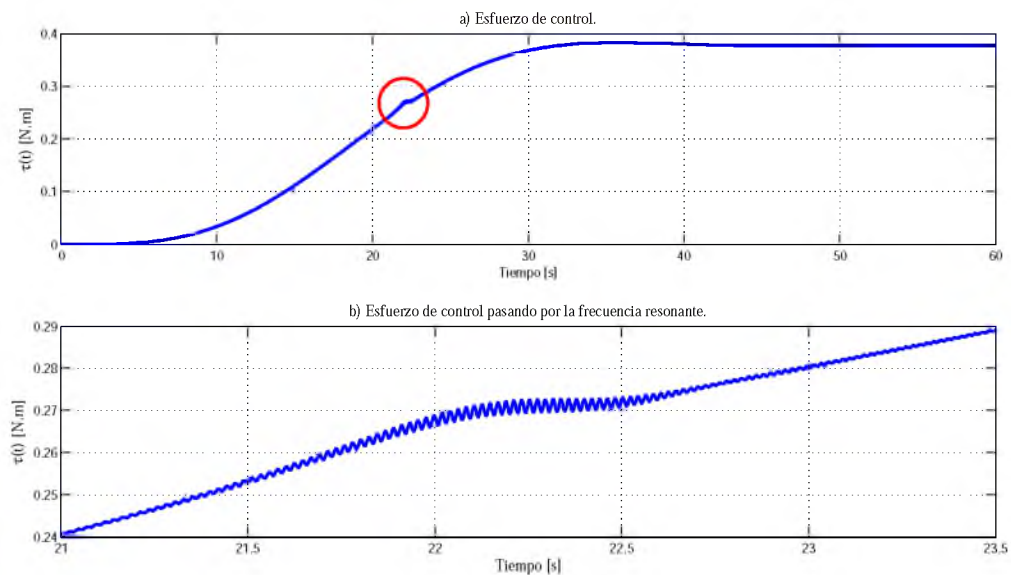


Figura 3.8: Torque $\tau(t)$ requerido para el seguimiento de la trayectoria de velocidad angular.

la Fig. 3.9. También se puede observar que todos tienen diferentes tiempos de cruce por la frecuencia resonante del sistema.

En la Fig. 3.10, se muestra el desplazamiento radial $y_r(t)$ para los distintos perfiles de velocidad angular. La amplitud de vibración disminuye significativamente, cuando se cruza rápidamente por la frecuencia resonante del sistema. El esfuerzo de control τ es cada vez más elevado, si se reduce el tiempo final t_f en que se alcanza la velocidad ω_f de la máquina (ver Fig. 3.9).

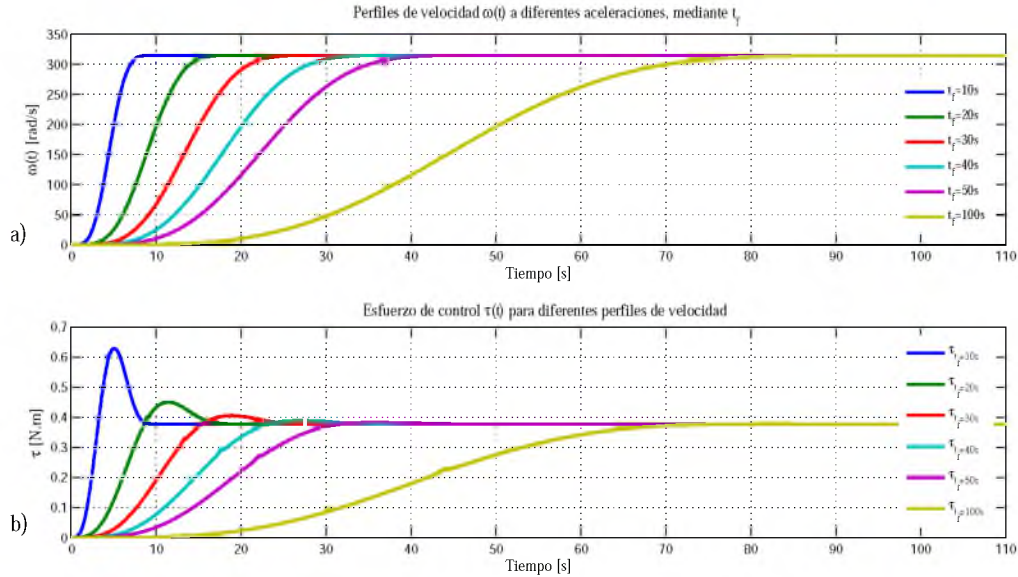


Figura 3.9: a) Perfiles de velocidad $\omega(t)$ para $t_f = \{10, 20, 30, 40, 50, 100\}$ s, b) Esfuerzo de control $\tau(t)$ para distintos perfiles de velocidad.

La respuesta frecuencial del sistema FFT muestra que aunque se cruce la frecuencia resonante con una tasa de aceleración elevada (modificando t_f), no se modifica las propiedades mecánicas del sistema, su frecuencia natural ω_n tendrá el mismo valor (ver Fig. 3.10 b). Es importante notar que el tiempo de permanencia en la resonancia es cada vez más corto, mientras se reduzca el tiempo t_f , es decir si se cruza rápidamente la frecuencia resonante. En la Fig.3.10a se muestra que para un tiempo $t_f = 10$ s, las oscilaciones en la resonancia transcurren en un tiempo bastante corto, aproximadamente de 0.45 s en comparación con el perfil de $t_f = 100$ s las oscilaciones permanecen casi 5 s.

Basado en las respuestas anteriores, para atenuar las amplitudes de vibración mientras el rotor es acelerado desde el reposo hasta una velocidad de operación, se utiliza un esquema que consiste en acelerar el rotor con una tasa de aceleración grande α_H , seguida por una tasa de aceleración reducida α_L . El punto donde se tiene que realizar el cambio de aceleraciones corresponde al punto de cruce (ω_c, t_c), de las respuestas del rotor para las aceleraciones máxima y mínima Millsaps [25].

Se realizaron dos pruebas considerando una tasa de aceleración alta $\alpha_H = 1500$ rad/s², y

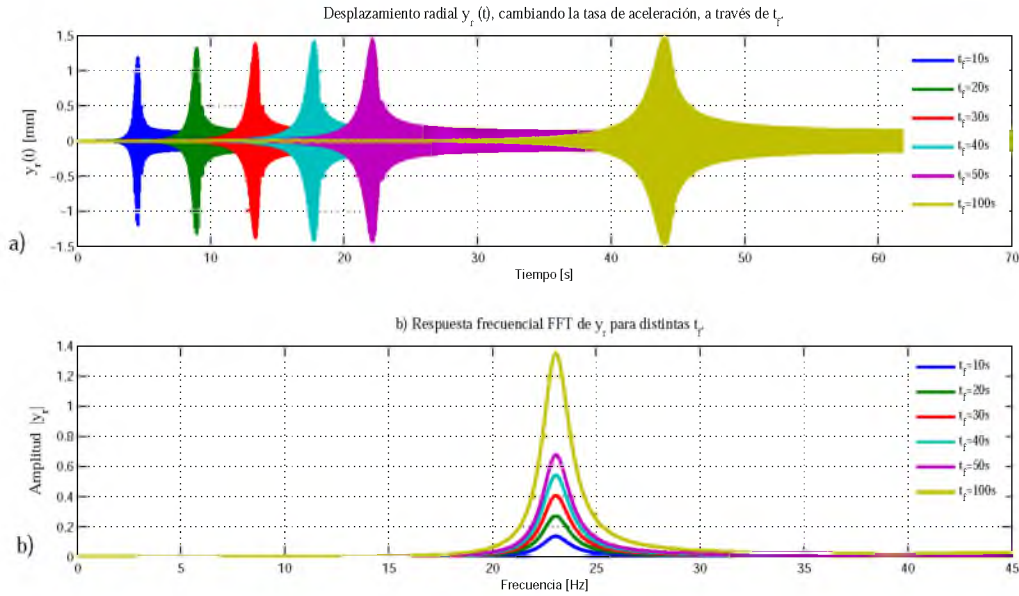


Figura 3.10: a) Desplazamiento en el eje y a diferentes perfiles de velocidad, b) Respuesta frecuencial FFT con distintos perfiles de velocidad.

una tasa de aceleración baja $\alpha_L = 5 \text{ rad/s}^2$. El rotor es arrancado desde el reposo con una tasa de aceleración constante y proporcional al tiempo $\omega(t) = \alpha_j t$ ($j = H, L$). La respuesta al desbalance $R(t) = \sqrt{x_r^2 + y_r^2}$ con distintas tasa de aceleración, es mostrado en la Fig. 3.11 (a).

Para una baja aceleración el rotor alcanza grandes amplitudes de vibración y para una alta aceleración se reduce en el transitorio. Interpolando las respuestas $R(t)$ al desbalance se determina que la frecuencia de cruce es $\omega_c = 174,7 \text{ rad/s}$ y el tiempo en que se presenta el cruce es $t_c = 0.117 \text{ s}$. Entonces para reducir las vibraciones en la resonancia, primero se arranca el rotor con una tasa de aceleración alta α_H y justamente en la frecuencia ω_c se realiza el cambio a una tasa de aceleración baja α_L . Si el cambio de aceleraciones fuera instantaneo α_{HL} se tendría una respuesta al desbalance $R_{HL}(t)$ ideal, como el que se muestra en la Fig. 3.11 (b).

Se aplicó un control PI para la velocidad angular basado en la modulación de la tasa de aceleración $\alpha(t)$, mediante esta estrategia de control se reduce la respuesta al desbalance en la resonancia. La tasa de aceleración es constante en el arranque y el cambio de aceleración de alta α_H a baja α_L , es planificada mediante la curva de Bezier, es descrita en la ec. 3.7.

$$\alpha(t) = \left\{ \begin{array}{ll} = \alpha_H & 0 \leq t \leq t_c \quad t_c = 0,117 \text{ s} \\ = \alpha_H + (\alpha_L - \alpha_H) \left(\frac{t-t_c}{t_f-t_c} \right)^5 \left[\sum_{i=0}^{i=5} (-1)^i \gamma_i \left(\frac{t-t_c}{t_f-t_c} \right)^i \right] & t_c \leq t \leq t_f \\ = \alpha_L & t \geq t_f, \quad t_f = t_c + \delta, \quad \delta = 0.02 \text{ s} \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

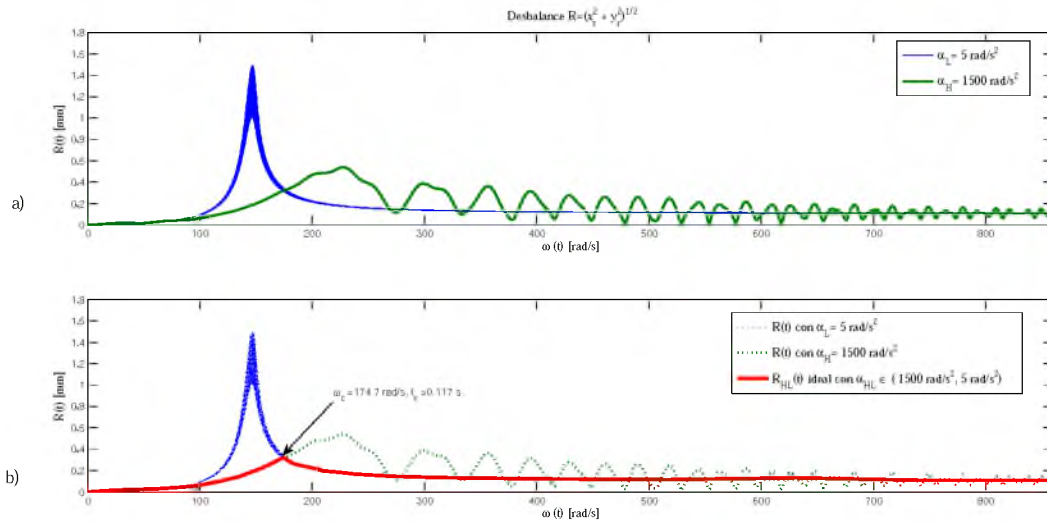


Figura 3.11: a) Respuesta al desbalance $R(t)$ con 2 tasas de aceleración, y b) Identificación de la frecuencia de cruce ω_c .

Nota: Las ganancias del control PI y los parámetros de la curva de Bezier se mantienen igual a las pruebas anteriores ecs.(3.5) y (3.6).

La respuesta al desbalance $R_{HL}(t)$ basado en la modulación de la tasa de aceleración es mostrada en la Fig. 3.12 (a). El cambio en la tasa de aceleración reduce la amplitud de vibración en la resonancia cerca del 40%. El perfil de aceleración $\alpha(t)$ cambia de manera suave en el tiempo de cruce t_c y la velocidad angular $\omega(t) = \int \alpha(t).dt$ crece de forma lineal por encima de la frecuencia resonante, sus respuesta son mostradas en la Fig. 3.12 (b). Una estrategia de control basado en la modulación de la tasa de aceleración requiere de un alto par de control $\tau(t)$ y subido en el arranque del motor Fig. 3.12 (c). El esfuerzo de control ocurre en una fracción de segundos 0.11 s, esto se debe a la alta tasa de aceleración en el arranque.

Nota: Los códigos de programas y bloques de simulación en MATLAB-Simulink, se muestran en el Apéndice A.

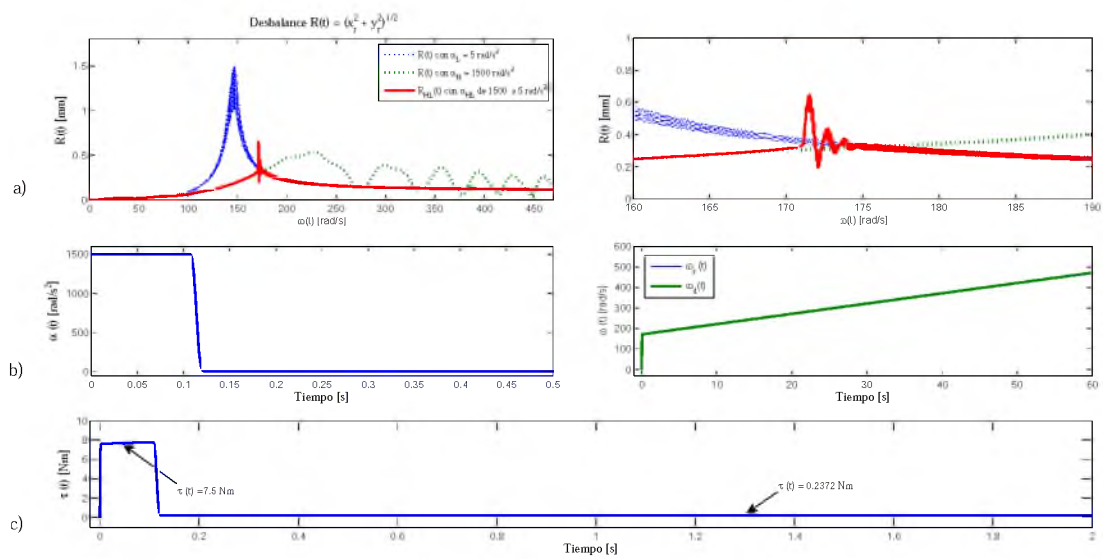


Figura 3.12: a) Respuesta al desbalance $R(t)$, con modulación de aceleración, b) Tasa de aceleración $\alpha(t)$ planificada y perfil de velocidad y c) Esfuerzo de control $\tau(t)$.

Capítulo 4

Manufactura de una plataforma experimental

El siguiente capítulo describe el diseño conceptual y manufactura de la plataforma experimental de un sistema rotor-chumacera tipo Jeffcott con dos soportes no-isotrópicos (propiedades de rigidez y amortiguamiento son diferentes) y se hace una breve descripción de las máquinas herramientas usados para fabricar piezas, actuadores y sensores que integran la plataforma experimental. La plataforma de trabajo es un modelo de una maquinaria rotatoria diseñada y creada en el laboratorio de mecatrónica aplicada y haciendo uso del taller de máquinas herramientas de la Universidad UNPA para fabricar partes de la plataforma. En la plataforma experimental propuesta se podrá experimentar varios tipos de vibraciones por cambios diversos en la operación como:

- Velocidad de operación del rotor.
- Flexión estática y rigidez del rotor.
- Doblez o desalineamiento de la flecha.
- Tipo y magnitud del desbalance.
- Diferentes tipos de chumaceras (rígida, de rodamientos, móvil, con actuadores, etc.).
- Desgaste o juego entre la flecha y chumacera.

Uno de los objetivos principales del proyecto es el diseño conceptual y la manufactura de partes mecánicas de la plataforma, tal que en trabajos futuros se realice la etapa de instrumentación. La plataforma tiene como objeto realizar prácticas y validación de esquemas de control que resuelvan el problema de vibración debidas al desbalance.

Nota: Las hojas de datos de los dispositivos y dibujos de taller de las piezas mecánicas se muestran en el Apéndice B y C.

4.1. Máquinas y herramientas de corte

La Universidad del Papalopan cuenta con un taller de maquinas-herramientas para realizar la manufactura de la plataforma. Se utilizaron máquinas de control numérico CNC Fresadora CNC *3VS/S – 1250 (X6330A)*, mostrada en la Fig. 4.1 y un torno de operación manual *JET BD – 920W* (Fig. 4.2). La fresadora es de 3 ejes, cuenta con movimiento horizontal, vertical y oblicuo, este último, como resultado de la combinación de movimientos entre mesa, ménsula y husillo. Tienen un control sobre el movimiento relativo existente entre la máquina herramienta y la pieza, en cada uno de los tres ejes del sistema cartesiano.



Figura 4.1: Fresadora CNC *3VS/S – 1250 (X6330A)*.



Figura 4.2: Torno convencional *JET BD – 920W*.

4.2. Descripción de la plataforma experimental

Uno de los principales objetivos de la tesis fue diseñar y construir este tipo de plataforma experimental para poder verificar de manera práctica y experimental los resultados obtenidos en simulaciones, en las distintas asignaturas que se imparten en el área de control y mecánica de la carrera de Ingeniería Mecatrónica en la UNPA. Una vez manufacturado todo el prototipo, se pueden asignar futuros trabajos de investigación que también estén enfocados a aprovechar la utilidad de la plataforma experimental, dichos trabajos pueden

ser como: absorción de vibraciones, control de desbalance, doblez o desalineamiento de la flecha, diferentes tipos de chumaceras, flexión estática y rigidez del rotor.

Como primer punto se diseñó un prototipo CAD (Dibujo Asistido por Computadora), el cual sirvió como guía, para tener una mejor visualización de cómo quedará conformada la plataforma experimental, el cual se dividió en 5 partes principales como se muestra en la Fig. 4.3.

1. Base con perforaciones.
2. Base para el servomotor y servomotor.
3. Coples rígidos y cople flexible.
4. Chumacera y rodamiento.
5. Flecha rígida, disco inercial y bridas.

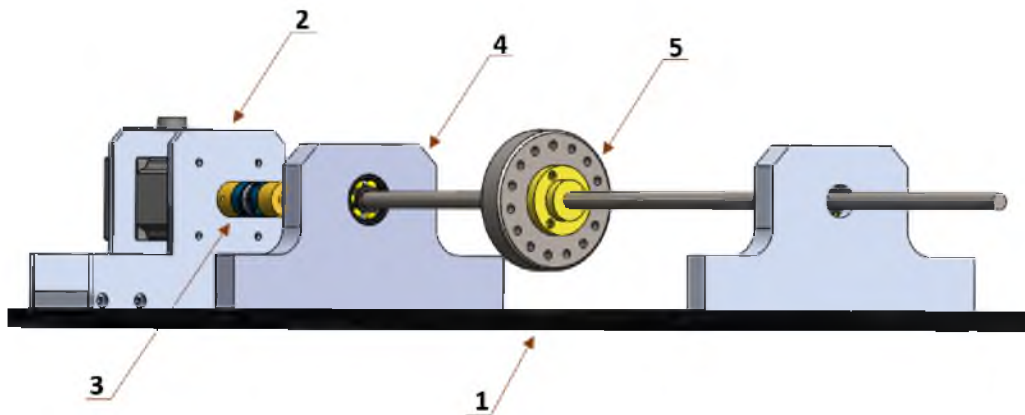


Figura 4.3: Prototipo en CAD de la plataforma experimental rotor-chumacera.

4.2.1. Base con perforaciones

Esta base es donde estarán fijos todos los componentes que conformarán la plataforma experimental rotor-chumacera, está fabricada por una placa de acero al carbón con densidad $\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, la placa maquinada cuenta con tres orificios de $\frac{1}{2} \text{in}$ de diámetro a lo largo del centro de su cuerpo, orificios que no se observan en el modelo del CAD y que se realizaron debido a que la carrera de la bancada que tiene la fresadora CNC con la que se cuenta en el taller de máquinas herramientas de la UNPA es muy corta para perforar toda la placa en una sola operación, la perforación para los roscados internos se realizó en 2 operaciones, utilizando estos orificios para sujetar la placa a la bancada, obteniendo así una mejor rigidez para su maquinado.

El espesor de la placa es de $\frac{1}{2}$ in, lo cual otorga gran estabilidad mecánica. Tiene dos hileras de perforaciones con rosca interna de $\frac{5}{16}$ pulgadas, sirven para atornillar los soportes rígidos (chumaceras), y poder cambiar la distancia entre estas, para poder obtener diferentes comportamientos del sistema en el modelo matemático obtenido. La base metálica es para darle soporte y rigidez al sistema, es importante que la base sea suficientemente rígida y de gran peso, esto con el fin de que las deformaciones que se produzcan sean en el rotor y no en la base. En la Fig. 4.4, se muestra la base de acero mecanizada con perforaciones.



Figura 4.4: Base con perforaciones manufacturada.

4.2.2. Base para el servomotor

Para conformar la base donde estará montado el Servomotor, se eligió placa de $\frac{1}{4}$ in y $\frac{3}{8}$ in de aluminio 6061, el cual tiene una densidad $\rho = 2700 \frac{kg}{cm^3}$, y que presenta propiedades como: excelente resistencia mecánica superior a otras aleaciones como la 6063, excelente resistencia a la corrosión, y sobre todo una buena maquinabilidad, lo que se adapta perfectamente a las necesidades requeridas para esta plataforma.

Para la sujeción de las placas de aluminio de $\frac{1}{4}$ in con las placas de $\frac{3}{8}$ in se utilizaron tornillos Stándar *DIN - M5* de $\frac{1}{2}$ in, y las placas de $\frac{3}{8}$ in tienen orificios encajonados para los tornillos de cabeza Allen $\frac{5}{16}$ in. En la Fig. 4.5, se muestra una representación en CAD de cómo quedarán ensambladas las distintas piezas que conforman la base para el servomotor.

En la Fig. 4.6, se muestran manufacturadas y pulidas las piezas que conformarán la base el servomotor.

4.2.3. Servomotor

Un servomotor o servo es un tipo especial de motor con características especiales de control de posición, al hablar de un servo se hace referencia a un sistema compuesto por componentes electromecánicos y electrónicos que son: caja de engranes (parte mecánica), motor (parte eléctrica) y controlador (parte electrónica).

El servomotor de CD que contiene un codificador óptico incremental de la marca Electro-Craft modelo RPP23M, se acopla a una caja de engranes para potenciar el torque del motor y permitir mantener la velocidad y posición de la flecha de salida. El circuito electrónico es el encargado de manejar el movimiento y la posición del motor. Se debe resaltar que dentro de

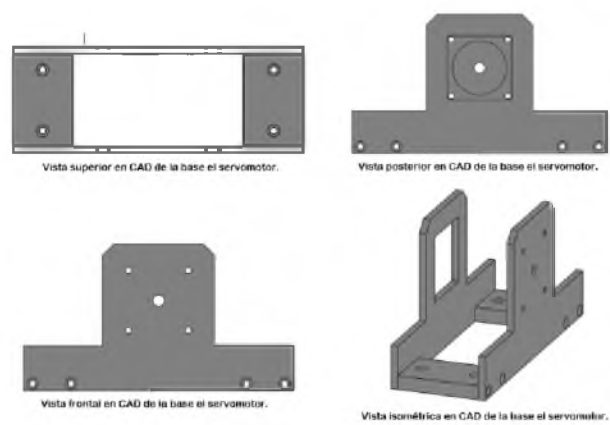


Figura 4.5: Vistas superior, posterior, frontal e isométrica en CAD de la base el servomotor.

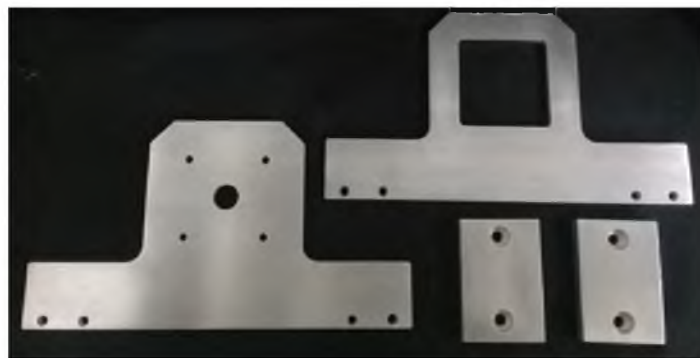


Figura 4.6: Piezas manufacturadas que conforman la base del servomotor.

los diferentes tipos de servomotores que existen, se pueden clasificar según sus características de rotación:

- Servomotores de rango de giro limitado: son el tipo más común de servomotor, permiten una rotación de 180 grados, por lo cual son incapaces de completar una vuelta completa.
- Servomotores de rotación continua: se caracterizan por ser capaces de girar 360 grados, esto quiere decir que podemos controlar su posición y velocidad de giro en un momento dado.

En la UNPA, en el laboratorio de control, se cuenta con equipo de apoyo didáctico para prácticas y experimentos, por lo que se tiene un Servomotor *Electrocrafft RPP23M – 45*, el cual es un servo de rotación continua, sin escobillas y con alto rendimiento para aplicaciones de mayor precisión, el cual, de acuerdo con su hoja de especificaciones, cumple con los requerimientos necesarios para la plataforma experimental rotor-chumacera. En la Fig. 4.6, se puede observar el servomotor *Electrocrafft RPP23M – 45*.



Figura 4.7: Servomotor *Electrocrafft RPP23M – 45*.

En la Tabla 4 se muestran las características mecánicas y eléctricas del servomotor *ElectrocrafftRPP23M-45*.

Tabla 4. Características del Servomotor ElectrocraftRPP23M-45.	
Datos Características	
Voltaje	48 V
Voltaje constante	12.4 V/ <i>krpm</i>
Torque constante	11.8 N cm/ A
Par nominal	56 N cm
Velocidad nominal	3000RPM
Corriente constante máxima	5.6 A
Corriente Pico	3.2 A
Constante de par de torsión	69 N cm
Torsión Pico	211 N cm
Inercia	106 g cm ²
Peso del motor	1.2 kg
Polos	8

En la Fig. 4.8, se muestra el servomotor y los componentes de la base del servomotor, la base también servirá para dar altura a lo que es el centro de la flecha del motor y permitir un mejor acomodo de los demás elementos mecánicos que conforman la plataforma experimental.

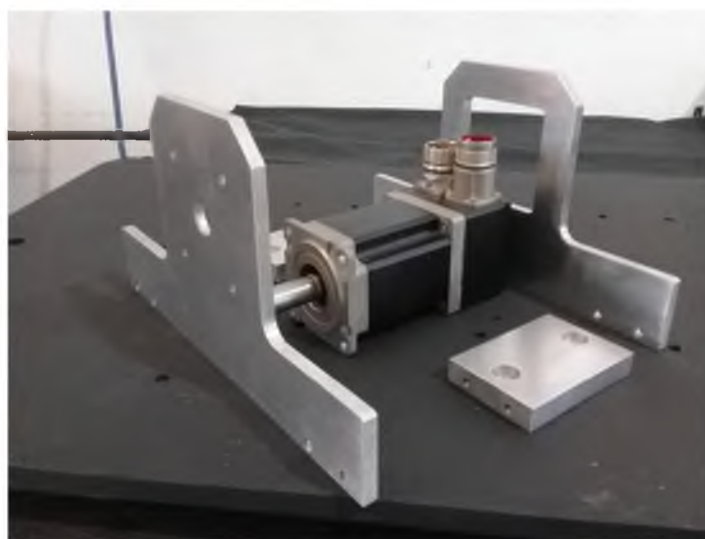


Figura 4.8: Servomotor y piezas de la base del servomotor.

En la Fig. 4.9, se muestran las vistas superior, posterior, frontal e isométrica del el ensamble del servomotor en su base, para lo cual se utilizaron tornillos de cabeza de gota de 5 mm de diámetro y de $\frac{1}{2}$ in de largo, sujetos con sus respectivas tuercas.

4.2.4. Tarjeta de adquisición de datos

La Sensoray[®] modelo 626 es una tarjeta PCI utilizada para la adquisición y salida de datos. Cuenta con 16 entradas analógicas diferenciales, cada canal puede ser configurado

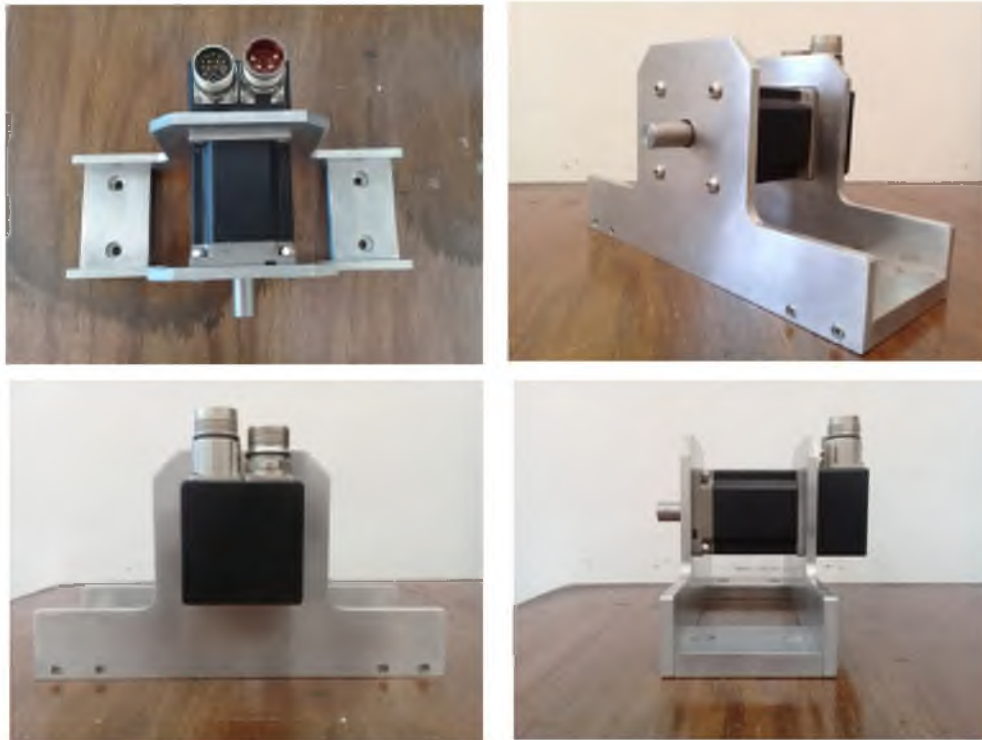


Figura 4.9: Vistas superior, lateral y ensamble del servomotor con su base.

para $\pm 5\text{ V}$ y $\pm 10\text{ V}$. También cuenta con 4 salidas analógicas, configuradas para tener un voltaje de salida $\pm 10\text{ V}$. La interfaz usada para la comunicación con los dispositivos externos es Matlab/Simulink[®] (ver Fig. 4.10).



Figura 4.10: Tarjeta de adquisición de datos Sensoray[®] modelo 626.

4.2.5. Coples rígidos y Cople flexible

Los coples o acoplamientos mecánicos son elementos de una máquina que sirven para prolongar líneas de transmisión de ejes o conectar tramos de ejes con distintos diámetros. Los coples pueden tener muchas funciones, pero su propósito principal es el de conectar los ejes de las unidades que fueron manufacturadas por separado y que ejercen un movimiento giratorio, sin embargo, permiten un cierto movimiento final o desalineación para la flexibilidad de movimientos y también proporcionan una fácil desconexión de los dos dispositivos independientes para reparaciones o modificaciones posteriores dependiendo los requerimientos que sean necesarios. Además, reducen el choque que se transmite de un eje a otro, protegen contra las sobrecargas y pueden disminuir la cantidad de vibraciones que experimenta una unidad giratoria.

Básicamente los acoplamientos se clasifican en dos tipos, los rígidos y los flexibles.

Coples rígidos o extensiones

En la Fig. 4.11, se muestran el diseño en CAD de 2 extensiones de bronce para el cople flexible. El cople flexible disponible en la plataforma tiene un diámetro interior distintos a la flecha, es por ellos que se usan las extensiones para adaptarse a la flecha del motor. Ambos coples tienen mecanizado dos perforaciones de 3 mm, para poder alojar prisioneros y mantenerse unida con la flecha.

Cople flexible

Los coples flexibles son diseñados de tal manera que sean capaces de transmitir torque con suavidad, en tanto permiten cierta desalineación axial, radial o angular. Para la plataforma experimental rotor-chumacera se utilizó un cople flexible de doble disco modelo *DCDK16 – 8 – 8 – A RULAND Manufacturing Co., Inc.*

El cual tiene cero retrocesos y un diseño equilibrado para reducir vibración a altas velocidades. El diseño de doble disco está compuesto por dos cubos de aluminio, dos juegos de

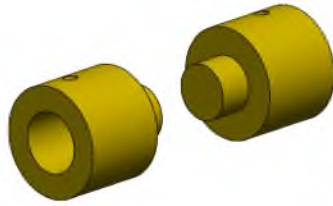


Figura 4.11: Coples rígidos en CAD.

resortes de disco de acero inoxidable delgados y un espaciador central que permite que cada disco se doble individualmente y se adapte a todos los tipos de desalineación.

Es un cople liviano y de baja inercia lo que lo hace ideal para aplicaciones con velocidades de hasta 10,000 **rpm**. Es torsionalmente rígido y contiene un ajuste excelente para aplicaciones de servomotores de posicionamiento preciso. En la figura 4.12, se muestra el dibujo CAD del cople flexible *DCDK16 – 8 – 8 – A*.



Figura 4.12: CAD del cople flexible *Ruland DCDK16 – 8 – 8 – A*.

En la figura 4.13, se muestra el cople flexible *DCDK16 – 8 – 8 – A* y un diagrama con designación de parámetros geométricos y especificaciones de algunas propiedades mecánicas descritas en la Tabla 5.

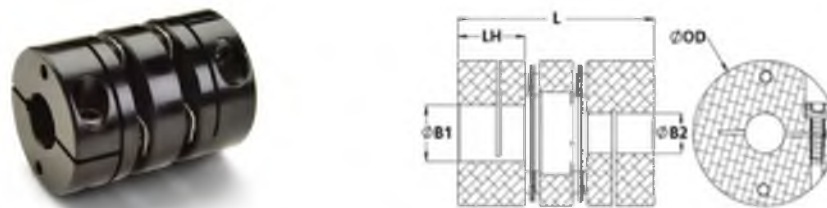


Figura 4.13: Dimensiones geométricas del cople flexible *Ruland DCDK16 – 8 – 8 – A*.

Tabla 5. Dimensiones del cople flexible Ruland DCDK16 – 8 – 8 – A.	
Número de parte	DCDK16 – 8 – 8 – A
$\varnothing B1$ (in)	0.500
$\varnothing B2$ (in)	0.500
$\varnothing OD$ (in)	1
L (in)	1.374
LH (in)	0.467
Torque estático (<i>lb – in</i>)	50
Rigidez torsional (<i>lb – in/Deg</i>)	62
Desalineamiento angular (<i>Deg</i>)	2
Desalineamiento paralelo (in)	0.006
Desalineamiento axial (in)	0.012

En la Fig. 4.14, se muestra la unión en CAD de las extensiones rígidas con el cople flexible *Ruland DCDK16 – 8 – 8 – A*.



Figura 4.14: Ensamble en CAD de los coples rígidos con el cople flexible *Ruland*.

En la Fig. 4.15, se muestran los coples rígidos manufacturados y el cople flexible *Ruland DCDK16 – 8 – 8 – A*, así como su ensamble entre los mismos.



Figura 4.15: Ensamble de coples rígidos de bronce con el cople flexible *Ruland DCDK16 – 8 – 8 – A*.

4.2.6. Chumacera y Rodamiento

Chumacera

Este componente es el encargado de darle apoyo al rotor, es decir todo el peso del rotor y fuerzas centrifugas que esta pueda generar debido a el par rotacional que ejerce el servomotor, es transmitido en los soportes rígidos. Los soportes no reciben la carga de forma directa, antes pasa a través de rodamientos.

Las características rotodinámicas de una maquinaria rotatoria están fuertemente influenciadas por las chumaceras en las que el rotor está soportado, esto se debe a que la rigidez del sistema rotor-chumacera es determinada por la rigidez de los soportes de la chumacera que actúan en serie con la rigidez de la flecha. Además, el amortiguamiento del sistema es proporcionado principalmente por las propiedades de amortiguamiento de la chumacera. El propósito fundamental de una chumacera es proporcionar soporte. Por el tipo de soporte que proporcionan las chumaceras pueden clasificarse en axiales y radiales. Las chumaceras que evitan el movimiento longitudinal a lo largo del eje y proporcionan soporte axial se conocen como chumaceras de empuje y las chumaceras que proporcionan soporte radial se les denominara simplemente como chumaceras.

Para el desarrollo de la plataforma se mecanizaron 2 soportes de aluminio para soporte radial, la cual se diseñó en CAD y se muestra en la Fig. 4.16.

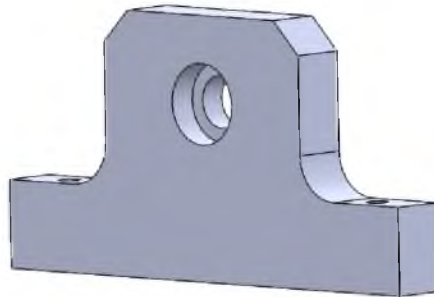


Figura 4.16: Base de aluminio en CAD, para alojamiento de baleros.

Para determinar la carga radial estática que se ejerce en los apoyos, se realiza, un análisis de fuerza y se obtiene que las reacciones en los soportes son para vigas simplemente apoyadas.

Rodamiento

El rodamiento o cojinete de rodadura es un elemento mecánico que se sitúa entre dos componentes de una máquina, con un eje de rotación común, de forma que un componente puede girar respecto al otro. Se utiliza en las máquinas rotativas como apoyo o soporte de los elementos portadores. Para la configuración de chumaceras rígidas se utilizaron rodamientos rígidos de bolas. Estos rodamientos, de disposición sencilla, muy resistentes durante el funcionamiento y fáciles de mantener, están disponibles con una o dos hileras y obturados o abiertos. Debido a la alta calidad técnica de los procesos de fabricación, los rodamientos

abiertos pueden tener ranuras en el anillo exterior para los discos de protección o para los obturadores. Debido a su reducido momento de rozamiento, los rodamientos rígidos a bolas son idóneos para elevadas velocidades de giro. Para la plataforma se utilizaron 2 rodamientos *SKF* 6301, el cual se observa en la Fig. 4.17.



Figura 4.17: CAD del rodamiento *SKF* 6301.

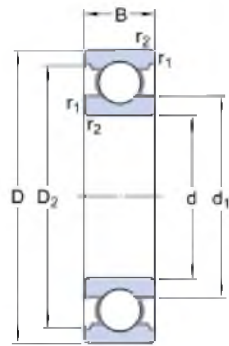


Figura 4.18: Diagrama de dimensiones del rodamiento *SKF* 6301.

En la Tabla 6 se proporcionan algunas características geométricas del rodamiento *SKF* 6301,

Tabla 6. Dimensiones del rodamiento <i>SKF</i> 6301.					
d (mm)	D (mm)	B (mm)	d_1 (mm)	D_2 (mm)	$r_{1,2}$ (mm)
12	37	12	19,51	31,48	1

Y en la Tabla 7, se muestran las propiedades mecánicas del rodamiento, la carga dinámica y la velocidad límite de operación.

Tabla 7. Propiedades mecánicas del rodamiento <i>SKF</i> 6301.	
Capacidad de carga dinámica (C)	10,1 <i>kN</i>
Capacidad de carga estática (C_0)	4,15 <i>kN</i>
Carga límite de fatiga (P_u)	0,176 <i>kN</i>
Velocidad de referencia	45,000 rpm
Velocidad límite	28,000 rpm
Factor de cálculo (k_r)	0,13
Factor de cálculo (f_0)	11
Masa	0,059 kg

La base de aluminio es maquinada para ensamblar el rodamiento, esta se ajusta en el centro de la base. En la Fig. 4.19, se muestra el ensamble en CAD del rodamiento con la chumacera.

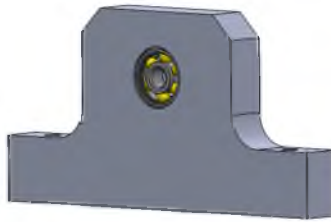


Figura 4.19: Ensamble en CAD del rodamiento y la chumacera.

En la Fig. 4.20, se muestra el rodamiento ya montado en la chumacera maquinada.

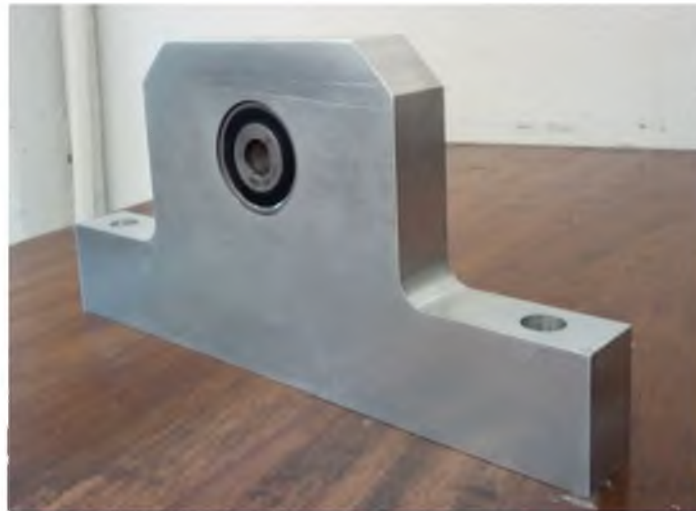


Figura 4.20: Rodamiento *SKF* 6301 montado en la chumacera manufacturada.

4.2.7. Flecha, brida y disco inercial

Flecha

La maquinaria rotatoria está dotada de flechas de transmisión o simplemente flechas. Estas se pueden considerar como una viga simplemente apoyada, en voladizo o apoyadas en voladizo, esto depende de la máquina a la que se encuentre acoplada. Algunas características son, cuenta con una sección transversal circular de masa despreciable, flexible con rigidez k y de longitud L . El material de la flecha seleccionado es de acero SAE 4140, con una densidad de material $\rho = 7850 \frac{kg}{m^3}$, y sus dimensiones son: diámetro $\phi = 12$ mm y longitud $L = 800$ mm, coeficiente de elasticidad $E = 200$ G Pa. La masa de la flecha se calcula mediante la formula $m_v = \rho \frac{\pi \phi^2 L}{4}$, sustituyendo los valores resulta de un peso,

$$m_v = \left(7850 \frac{kg}{m^3} \right) \frac{(\pi) (0,012m^2) (1m)}{4}$$

$$\therefore m_v \approx 0.890kg$$



Figura 4.21: Flecha de acero de longitud total $0.8m$ y diámetro de $\phi = 12$ mm.

Brida

La Brida es el elemento que une dos componentes de un mecanismo de alguna máquina, permitiendo ser desmontado sin operaciones destructivas, gracias a una circunferencia de agujeros en las que se colocan pernos de unión. Para la plataforma experimental se diseñaron 2 bridas en CAD, mostradas en la Fig. 4.22. Estas fueron mecanizadas en Latón, tiene una densidad de material de $\rho = 8500 \frac{kg}{cm^3}$, y es usado para unir el disco inercial con la flecha.



Figura 4.22: CAD de las bridas.

Disco inercial

El disco inercial es la parte rotatoria de la máquina, es una carga dinámica que soportar la flecha, gran parte de las vibraciones son causadas por la masa de desbalance del mismo. El desbalance se puede reducir significativamente, mediante el balanceo estático; pero esto no elimina las vibraciones en su totalidad, ya que la fuerza de vibración aumenta con la velocidad. Para realizar el balanceo estático se practicaron agujeros roscados de 1/8 pulgadas cerca de la periferia del disco, esto es, para colocar pequeñas masas que balanceen el disco. En la Fig. 4.23, se muestra el CAD del disco inercial. Las dimensiones del disco son de diámetro $D_e = 0.1016$ m, $D_i = 0.012$ m y espesor de $b = 25.4$ mm, y el material con el que esta maquinado es acero cold roll con densidad $\rho = 7870 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, se tiene que la masa promedio del disco está dado por: $m = \rho \frac{\pi(D_e^2 - D_i^2)b}{4}$, donde ρ es la densidad del material, D_e es el diámetro exterior del disco, D_i el diámetro interior del disco y b corresponde a el espesor del disco. Sustituyendo los valores en la formula obtenemos que,

$$m_r = (7870) \frac{\pi (0,1016^2 - 0,012^2) 0,0254}{4}$$

$$\therefore m_r \approx 1.6 \text{ kg}$$

Este resultado es un valor promedio, no se considera el peso de las bridas y tornillos (0,3 kg) que unen el disco inercial, cuyo peso real total es de 1.9 kg.



Figura 4.23: CAD del disco inercial.

En la Fig. 4.24, se muestra el disco inercial de acero y las bridas de latón, fabricadas en el taller de maquinas-herramientas.

Las bridas de latón son ensambladas con el disco inercial, a través de tres tornillo de acero, y colocados simétricamente en la periferia. En la Fig. 4.25, se muestra en ensamble y acoplamiento con la flecha de acero. Las bridas cuentan con dos perforaciones roscadas de 3 mm, en la que se colocan elementos de fijación, llamados prisioneros y esta quede unida a la flecha.

4.3. Integración de la plataforma experimental

En la Fig. 4.26 se muestra el ensamble de las partes mecánicas de la plataforma experimental. El equipo consta de un servomotor, un cople flexible que transmite el movimiento

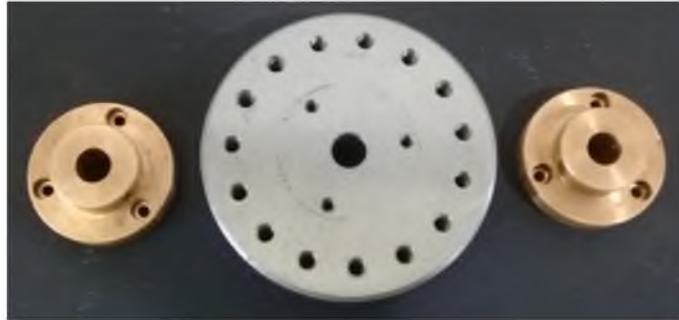


Figura 4.24: Bridas y disco inercial manufacturados.



Figura 4.25: Unión de las bridas con el disco inercial y la flecha rígida.

al rotor, un disco inercial de 1.9 kg, el rotor se encuentra apoyado en los extremos por 2 soportes de aluminio. Todas las partes mecánicas y ensamble del rotor son colocadas sobre una base de acero de 45 cm x 135 cm, esto es para darle mayor rigidez y soporte al sistema.



Figura 4.26: Ensamble de las distintas partes mecánicas que conforman la plataforma experimental.

El diseño integral de una plataforma experimental, está compuesta por cuatro subsistemas principales: el sistema mecánico, sensores-actuadores y etapa de potencia, sistema de adquisición de datos, y el software para la interfaz mediante una computadora (Fig. 4.27).

El primer subsistema consiste de un rotor-chumacera tipo Jeffcott apoyado por 2 soportes de aluminio no-isotrópicos con baleros de bola, un disco inercial con bridas colocado a la mitad de la flecha, una base para el servomotor Electrocraft y un cople flexible entre el motor y la flecha de acero. El segundo subsistema está formado por los sensores de desplazamiento, encoder que mide la velocidad rotacional y un servoamplificador como etapa de potencia del servomotor Electrocraft. El tercer subsistema es una tarjeta de adquisición de datos Sensoray Model 626, usado para procesar las señales analógicas y digitales de los sensores. El sistema de adquisición ejecuta leyes de control con altas frecuencias de muestreo, lo que permite implementar modelos tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. Además, cuenta con 4 convertidores Digital/Analógico (DAC) que permiten medir señales en tiempo real. Cabe mencionar que el valor mínimo del periodo de muestreo al cual puede trabajar la tarjeta es de 1 ms.

Por último, el cuarto subsistema corresponde al programa que proporcionan la interfaz gráfica con el usuario y el equipo experimental, mismos que funcionan bajo la plataforma de *Windows 7*. De esta manera, el usuario puede especificar las trayectorias, adquirir y procesar los datos obtenidos experimentalmente, así como también observar el desempeño de las leyes de control implementadas. La interfaz con la computadora se realiza con el software de *Matlab-Simulink*[®], utilizando el Real-Time Windows Target (RTWT[®]).

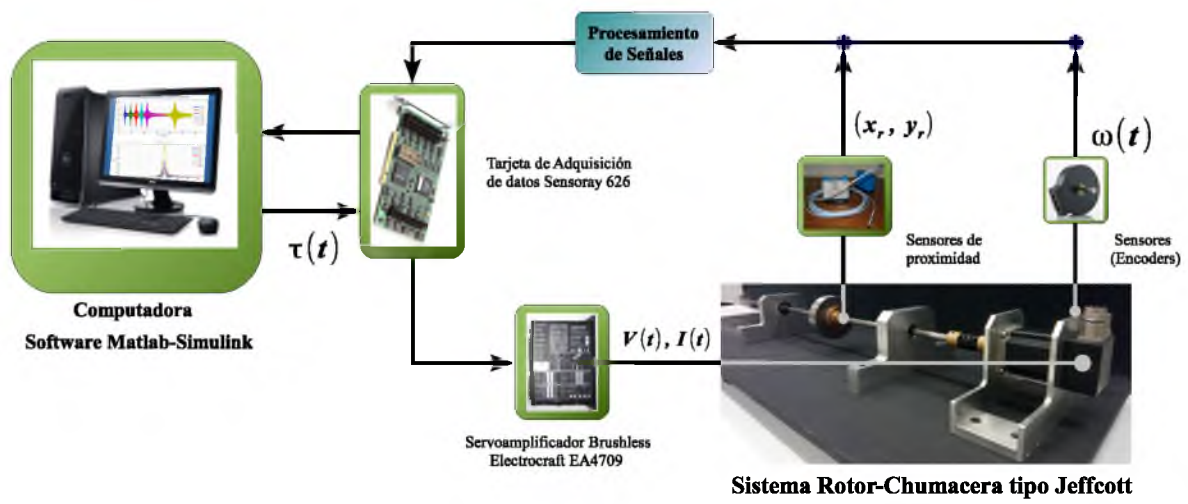


Figura 4.27: Integración de la plataforma experimental rotor-chumacera tipo Jeffcott.

Capítulo 5

Conclusiones

Las vibraciones en las máquinas, es un problema común en numerosas aplicaciones de la ingeniería. Se ha convertido en un tema de investigación para muchas disciplinas. Están presentes en todas partes, tales como en la industria automotriz, estructuras civiles como puentes y edificios, la industria aeroespacial, entre otras.

En este trabajo se abordó el problema del desarrollo de un modelo matemático, basado en el método de elemento finito, para describir la dinámica del sistema rotor-chumacera e incluir propiedades mecánicas de los soportes. El modelo describe claramente el primer modo de vibración causado por el desbalance en el disco inercial.

El análisis de modelo propuesto no incluye los efectos giroscópicos, sin embargo, nos permite representar claramente el comportamiento dinámico del sistema para los propósitos de caracterización y control de los efectos dinámicos atribuidos al desbalance. Ciertamente, con este método pueden modelarse rotores más complejos de escala industrial (e.g., rotores con diámetros diferentes en la flecha, de varios discos, distintos materiales, dinámicas acopladas) y permitir controlar vibraciones por encima de la primer velocidad crítica y en más de un modo de vibración.

Otro objetivo importante que se abordó en el proyecto, es el diseño y construcción de una plataforma experimental. Esta nos permitirá realizar diversos experimentos de análisis de vibraciones y balanceo de rotores, así como la aplicación de distintos esquemas de control aplicados a rotores.

Mediante la realización de este trabajo de tesis fue posible adquirir un panorama del problema de vibraciones presentes en sistemas rotatorios causadas por el desbalance. A pesar de algunas limitaciones de equipos y herramientas se logró cumplir con el objetivo principal, en desarrollar una plataforma de un sistema roto-chumacera tipo Jeffcott.

5.1. Algunas perspectivas

El problema de atenuación de vibraciones por desbalance en sistemas rotor-chumacera, utilizando el esquema de modulación de la tasa de aceleración presenta aún varios objetivos por resolver.

Algunos de estos problemas propuestos son:

1. Realizar experimentos utilizando la plataforma en una configuración que permita observar con mayor detalle la frecuencia resonante principal del sistema, de manera que se trabaje dentro del rango de operación de la máquina. De este modo, sería posible identificar y observar el comportamiento de absorción de vibraciones, cuando se cruza por la primera velocidad crítica y, posiblemente, hasta la segunda velocidad crítica.
2. Realizar la integración de los sensores para medir los desplazamientos radiales del disco, el uso de actuadores para el control de la velocidad, y desarrollar las etapas de potencia para el sistema eléctrico de la plataforma.
3. Modificar el arreglo mecánico de uno de los soportes, tal que se obtenga una configuración con soportes actuados que permitan modificar propiedades del sistema o inyectar una fuerza de control.
4. La identificación de parámetros experimentales del modelo matemático del sistema para rangos de operación por encima de la primer frecuencia resonante.
5. Utilizar técnicas de indentificación algebraica para estimar el valor del desbalance en el disco inercial.
6. Un proyecto de investigación es colocar sensores y actuadores en los soportes, esto conlleva a modificar uno o los dos soportes. La propuesta es realizar un soporte móvil, una chumacera magnética y un soporte con un absorbedor pasivo.

Bibliografía

- [1] Cia. General de Aceros S.A. SAE 1020 y SAE 1045. Aceros Ingeniería al carbon. Bogotá.
- [2] G. Silva-Navarro and A. Cabrera-Amado. Semiactive Sliding-Mode Control of the Unbalance Response in a Rotor-Bearing System Supported on MR Dampers, Proc. IEEE Conference on Decision and Control, pp. 4513-4518, New Orleans, USA, 2007.
- [3] A. Blanco Ortega, Control del desbalance en sistemas rotor-chumacera utilizando chumacera móvil y presurizada, *Tesis de Doctorado, CINVESTAV, Sección de Mecatrónica*, México D.F, Noviembre 2004.
- [4] A. Blanco-Ortega, G. Silva-Navarro and J.C. Gómez-Mancilla, Dynamic Stiffness Control and Acceleration Scheduling for the Active Balancing Control of a Jeffcott-Like Rotor System, Proc. The tenth International Congress on Sound and Vibration, pp. 227-234, Stockholm, July 2003.
- [5] Andrés Ramírez M., Diseño, construcción e instrumentación de un sistema rotor - chumaceras basado en el modelo Jeffcott para el análisis de vibraciones, Tesis de Licenciatura, UTM, Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Huajuapán de León, Oaxaca, México, Julio 2013
- [6] D.W. Childs, Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis, 1993.
- [7] C.W. De Silva, *Vibration: Fundamentals and Practice*, CRC Press, Boca Raton, FL 2000.
- [8] A.D. Dimarogonas, *Vibration for Engineers*, Prentice Hall, 2a ed., New York, 1995.
- [9] H. van Brussel, P. Sas, W. Dehandschutter, P. Van den Braembussche and Indrawanto. New Methods for Active and Semi-Active Vibration Control in Machines. *Dept. of Mech. Eng., Katholieke Universiteit Leuven*, Belgium.
- [10] Stefal Heindel, Fabian Becker, Stephan RinderKnecht, Unbalance and Resonance Elimination with active bearings on a Jeffcott Rotor, Mechanical Systems and Signal Processing, 2017.
- [11] Joseph E. Shigley and Charles R. Mischke, Diseño en Ingeniería Mecánica. 6ª edición Mc-Graw Hill, 2002.

- [12] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*. 4ª edición, Prentice Hall, México, 2003.
- [13] G. Genta, *Dynamics of Rotating Systems*, Springer-Verlag, NY, 2005.
- [14] G. Silva-Navarro, F. Lopez-Medina and A. Cabrera-Amado, Unbalance compensation in a rotor-bearing system by dynamic stiffness control and acceleration scheduling, IS-MA2010 International Conference on Noise and Vibration Engineering, Katholieke Universiteit Leuven (Belgium), September 2010.
- [15] V. Wowk. *Machinery vibration: Balancing*, Mc-Graw Hill, 1995.
- [16] S. Graham Kelly, *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*. Mc Graw-Hill, NY, 1996.
- [17] <https://www.gemeasurement.com/>
- [18] G. Silva-Navarro and A. Cabrera-Amado. Semiactive Sliding-Mode Control of the Unbalance Response in a Rotor-Bearing System Supported on MR Dampers, Proc. IEEE Conference on Decision and Control, pp. 4513-4518, New Orleans, USA, 2007.
- [19] S.S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Addison-Wesley, 3rd edition, NY, 1995.
- [20] Roy R. Craig, Jr. 2002. *Mecánica de Materiales*. Continental México.
- [21] Robert L. Mott. 2006. *Diseño de elementos de máquina*. McGraw-Hill. México.
- [22] Katsuhiko Ogata. 2010. *Ingeniería en Control Moderna*. Pearson Madrid.
- [23] *Catalogo de Rodamientos SKF*.
- [24] R.L. Norton, *Diseño de máquinas*. Prentice Hall, México, 1999.
- [25] K.T. Millsaps and G.L. Reed, Reducing lateral vibrations of a rotor passing through critical speeds by acceleration scheduling, *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 120, No. 3, pp. 615-620, July 1998.
- [26] M. Rios-Gutierrez, G. Silva-Navarro, Vibration Absorption in a Multi-Mass Mechanical System Using Positive Position Feedback, *Proceedings of the 5th International Conference Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2008)*, Mexico city, D.F., November 12-14, 2008.
- [27] L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, Mc Graw Hill, 1986.
- [28] J.M. Vance, *Rotordynamics of Turbomachinery*. John Wiley & Sons, NY, 1988.
- [29] S. Zhou and J. Shi, Active balancing and vibration control of rotating machinery: a survey, *The Shock and Vibration Digest*, 33-4, pp. 361-371, 2001.
- [30] Wells, D. A. 1967. *Lagrangiane Dynamics*. Schaum's Outlines, McGraw-Hill, USA.

Apéndice

A. Programas y bloques de simulación

15/05/18 08:32 PM C:\Users\Jaime Ocampo\Desktop\Tesis JaimeOcampo\Simulacion...\prueba.m 1 of 2

```
function salidas = prueba(p)

%% Velocidades en el eje y.
Dyi =p(1);
DByi =p(2);
Dyr =p(3);
DByr =p(4);
Dyd =p(5);
DByd =p(6);

%% Velocidades en el eje x.
Dxi =p(7);
DBxi =p(8);
Dxr =p(9);
DBxr =p(10);
Dxd =p(11);
DBxd =p(12);

%% Posiciones en el eje y.
yi =p(13);
Byi =p(14);
yr =p(15);
Byr =p(16);
yd =p(17);
Byd =p(18);

%% Posiciones en el eje x.
xi =p(19);
Bxi =p(20);
xr =p(21);
Bxr =p(22);
xd =p(23);
Bxd =p(24);

%% Posición, velocidad y aceleración angular.
phi=p(25);
Dphi=p(26);
DDphi=p(27);

%% Vectores de velocidades en el eje x e y.
Dy=[Dyi;DByi;Dyr;DByr;Dyd;DByd];
Dx=[Dxi;DBxi;Dxr;DBxr;Dxd;DBxd];

%% Vectores de posiciones en el eje x e y.
y=[yi;Byi;yr;Byr;yd;Byd];
x=[xi;Bxi;xr;Bxr;xd;Bxd];

%% Parámetros del soporte izquierdo.
mi=0.5; %masa del soporte[kg].
kyi=30e6; %rigidez del soporte en el eje y[N/m].
kxi=60e6; %rigidez del soporte en el eje x [N/m].

%% Parámetros del soporte derecho
md=0.5; %masa del soporte derecho [kg].
kyd=30e6; %rigidez del soporte en el eje y[N/m].
kxd=60e6; %rigidez del soporte en el eje x[N/m].

%% Parámetros del disco.
mr=1.9; % Masa del disco [kg].
exc=120e-6; % Excentricidad[m]

%% Parámetros de la flecha.
ro=7850; % Densidad [kg/m^3].
L=0.3; % Longitud [m].
D=0.012; % Diámetro [m].
A=(pi*D^2)/4; % Área de la sección transversal[m^2].
E=2.0e11; % Modulo de young [N/m^2].
In=(pi*D^4)/64; % Inercia [m^4].
```

```
%% Ganacias de viscosidad.
```

```
alphax=15;
bethax=8e-6;

alphay=10;
bethay=10e-6;
```

```
%% Matrices de masa.
```

```

                22*L,          54,   -13*L,          0,          0
                4*L^2,        13*L,  -3*L^2,          0,          0
                54,   13*L,  312+((420*mr)/(ro*A*L)),          0,          0
Mx=((ro*A*L)/420)*[156+((420*mi)/(ro*A*L)),          0,   8*L^2,          13*L,  -3*L^2
                22*L,          0,          54,   13*L,  156+((420*md)/(ro*A*L)),  -22*L
                0,          0,          -13*L,  -3*L^2,          -22*L,   4*L^2];
```

```
My=Mx;
```

```
%% Matrices de Rigidez.
```

```

                6*L,   -12,   6*L,          0,          0
                6*L,  4*L^2,  -6*L,  2*L^2,          0,          0
                -12,  -6*L,   24,   0,          -12,   6*L
                6*L,  2*L^2,   0,  8*L^2,          -6*L,  2*L^2
                0,   0,  -12,  -6*L,  12+((kxd*L^3)/(E*In)),  -6*L
                0,   0,   6*L,  2*L^2,          -6*L,  4*L^2];
```

```

                6*L,   -12,   6*L,          0,          0
                6*L,  4*L^2,  -6*L,  2*L^2,          0,          0
                -12,  -6*L,   24,   0,          -12,   6*L
                6*L,  2*L^2,   0,  8*L^2,          -6*L,  2*L^2
                0,   0,  -12,  -6*L,  12+((kyd*L^3)/(E*In)),  -6*L
                0,   0,   6*L,  2*L^2,          -6*L,  4*L^2];
```

```
%% Matrices de amortiguamiento.
```

```
Cx=(alphax*(Mx))+(bethax*(Kx));
Cy=(alphay*(My))+(bethay*(Ky));
```

```
%% Fuerzas endógenas.
```

```
Fx = [0;0;(mr*exc*(Dphi^2)*cos(phi))+(mr*exc*DDphi*sin(phi));0;0;0];
Fy = [0;0;(mr*exc*(Dphi^2)*sin(phi))-(mr*exc*DDphi*cos(phi));0;0;0];
```

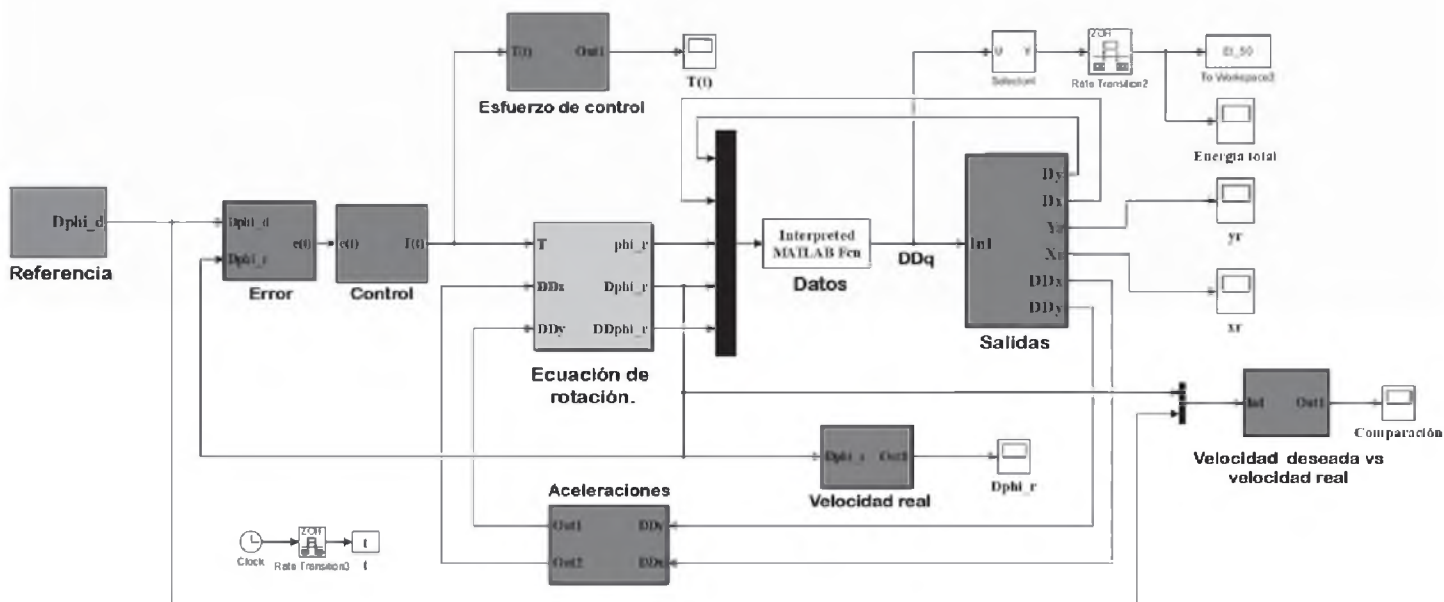
```
%% Aceleraciones.
```

```
DDx=(inv(Mx))*(Fx-(Cx*Dx)-(Kx*x));
DDy=(inv(My))*(Fy-(Cy*Dy)-(Ky*y));
```

```
%% Energía total del sistema.
```

```
Ec=(0.5)*Dy'*My*Dy;
Ep=(0.5)*y'*Ky*y;
Et=Ec+Ep;
```

```
salidas=[DDy;DDx;Et];
```



B. Hojas de datos de dispositivos

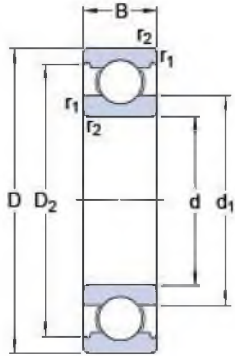
SKF



6301

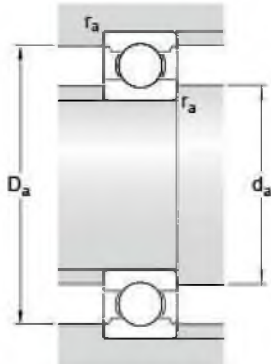
SKF Explorer

Dimensiones



d	12	mm
D	37	mm
B	12	mm
d ₁	≈ 19.51	mm
D ₂	≈ 31.48	mm
r _{1,2}	min. 1	mm

Dimensiones de los resaltes



d _a	min. 17.6	mm
D _a	max. 31.4	mm
r _a	max. 1	mm

Datos del cálculo

Capacidad de carga dinámica básica	C	10.1	kN
Capacidad de carga estática básica	C ₀	4.15	kN
Carga límite de fatiga	P _u	0.176	kN
Velocidad de referencia		45000	r/min
Velocidad límite		28000	r/min
Factor de cálculo	k _r	0.03	
Factor de cálculo	f ₀	11	

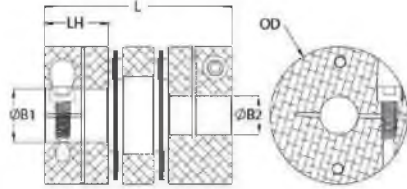
Masa

Rodamiento de masa	0.059	kg
--------------------	-------	----



DCD16-8-8-A

Ruland DCD16-8-8-A, 1/2" x 1/2" Double Disc Coupling, Aluminum, Clamp Style, 1.000" OD, 1.374" Length



Description

Ruland DCD16-8-8-A is a double disc coupling with 1/2" x 1/2" bores, 1.000" OD, and 1.374" length. It is zero-backlash and has a balanced design for reduced vibration at high speeds. The double disc design is comprised of two anodized aluminum hubs, two sets of thin stainless steel disc springs, and a center spacer allowing each disc to bend individually and accommodate all types of misalignment. DCD16-8-8-A is lightweight and has low inertia making it well suited for applications with speeds up to 10,000 RPM. Hardware is metric and tests beyond DIN 912 12.9 standards for maximum torque capabilities. Ruland manufactures DCD16-8-8-A to be torsionally rigid and an excellent fit for precise positioning stepper servo applications commonly found in semiconductor, solar, printing, machine tool, and test and measurement systems. It is machined from solid bar stock that is sourced exclusively from North American mills and RoHS2 and REACH compliant. DCD16-8-8-A is manufactured in our Marlborough, MA factory under strict controls using proprietary processes.

Product Specifications

Large Bore B1	0.500 in	Small Bore B2	0.500 in
B1 Shaft Penetration	0.467 in	B2 Shaft Penetration	0.467 in
Outer Diameter OD	1.000 in	Bore Tolerance	+ .001 in / - .000 in
Length L	1.374 in	Hub Width LH	0.467 in
Forged Clamp Screw	M3	Screw Material	Alloy Steel
Hex Wrench Size	2.5 mm	Screw Finish	Black Oxide
Seating Torque	2.1 Nm	Number of Screws	2 ea
Static Torque	50 lb-in	Angular Misalignment	2.0°
Dynamic Torque Non-Reversing	25 lb-in	Parallel Misalignment	0.006 in
Dynamic Torque Reversing	12.5 lb-in	Axial Motion	0.012 in
Torsional Stiffness	61 lb-in/Deg	Maximum Speed	10,000 RPM
Material Specification	Hubs and Center Spacer: 2024-T351 Aluminum Bar Disc Springs: Type 302 Stainless Steel	Temperature	-10°F to 200°F -23°C to 93°C
Finish Specification	Sulfuric Anodized MIL-A-8625 Type II, Class 2 and ASTM B580 Type B Black Anodize	Country of Origin	USA
Weight (lbs.)	0.0690	UPC	63452908169
Note 1	Stainless steel hubs are available upon request.		
Note 2	Torque ratings are at maximum misalignment.		
Note 3	Performance ratings are for guidance only. The user must determine suitability for a particular application.		
Note 4	Torque ratings for the couplings are based on the physical limitations/failure point of the disc springs. Under normal/typical conditions the hubs are capable of holding up to the rated torque of the disc springs. In some cases, especially when the smallest standard bores are used or where shafts are undersized, slippage on the shaft is possible below the rated torque of the disc springs. Keyways are available to provide additional torque capacity in the shaft/hub connection when required. Please consult technical support for more assistance.		

RPP23 : ElectroCraft RapidPower™ Plus | AC Servo Motor

Size	Peak Torque oz-in (Ncm)	Speeds up to RPM
NEMA 23	400 (282)	6350



High Voltage. High Performance.

The ElectroCraft RapidPower™ Plus Nema 23 is a high voltage, high performance brushless servo motor incorporating the latest electro-magnetic components creating high continuous torque with low inertia for rapid acceleration. It is available with hall-effect commutation or a variety of commutating optical encoders for higher precision applications.

To build your own motor, choose the:

1 - Frame Size
(Imperial or Metric)

2 - Torque

3 - Winding

4 - Features

a. **R P P 2 3**
Product Name Frame Size

b. **R P P 2 3 M**
Product Name Frame Size Optional Metric

Continuous Torque (oz-in) **6 4**

Continuous Torque (Ncm) **4 5**

V **1 6 0**
Voltage

0 0 1 X
Brake Front Shaft Termination Feedback

0 = Round
1 = Flat
2 = Keyway

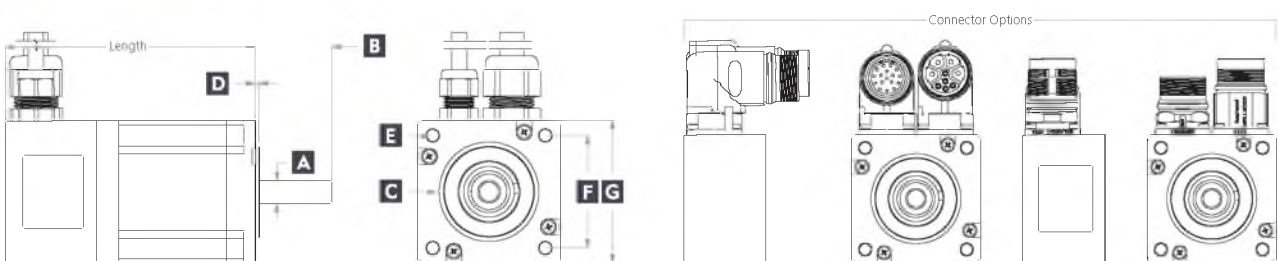
X = None
D = 1000 line
E = 2000 line

0 = No Brake
1 = 24VDC Brake

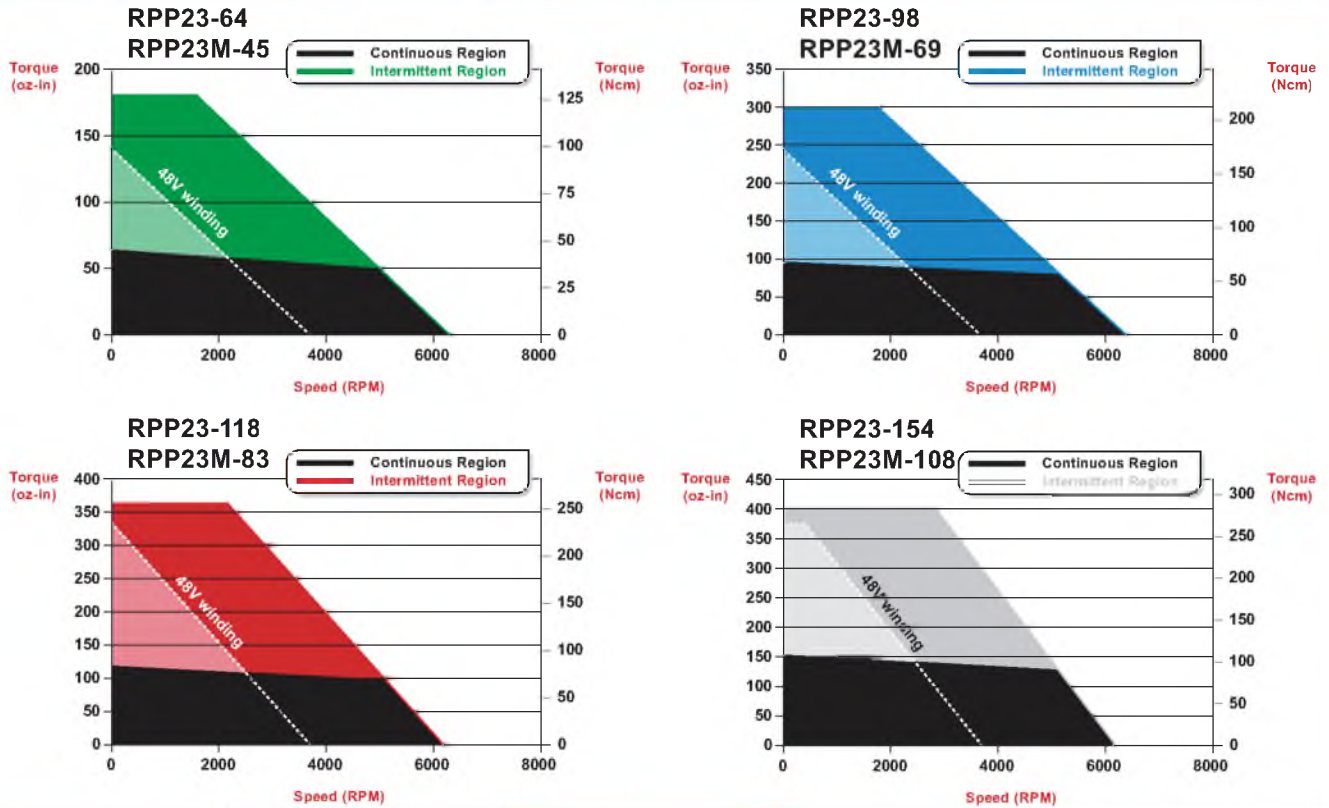
1 = Straight Connector
2 = Flying Cable
3 = Right Angle Connector
(All configuration IP65 with optional shaft seal)

Step 1: RPP23 & RPP23M Frame Size Drawing Key

Model	MAX Length (w/o Brake)	A	B	C	D	E	F	G
		Front Shaft Diameter	Front Shaft Length	Pilot Diameter	Pilot Length (Ref)	Mount Hole Callout (Ref)	Mount Hole Spacing (Ref)	Flange External Dimension (Ref)
RPP23-64	4.20 in	0.3750 in 0.3745 in	1.25 in ± 0.03	1.500 in 1.498 in	0.06 in	[4] 0.205 in ± 0.010 on 2.625 in D.B.C.	1.86 in	2.36 in
RPP23-98	4.70 in							
RPP23-118	5.20 in							
RPP23-154	5.70 in							
RPP23M-45	106.7 mm	14.000 mm 13.987 mm	30 mm ± 0.8	50.00 mm 49.95 mm	1.5 mm	[4] 5.5 mm ± 0.25 on 70 mm D.B.C.	49.5 mm	60 mm
RPP23M-69	119.4 mm							
RPP23M-83	132.1 mm							
RPP23M-108	144.8 mm							



Step 2: RPP23 Torque and Mechanical Data



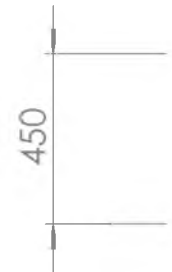
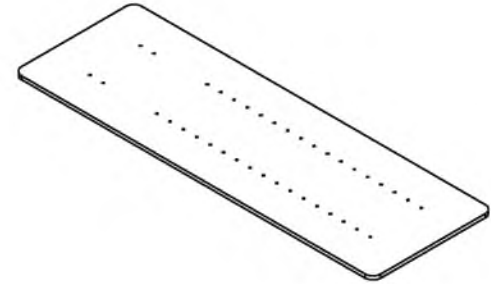
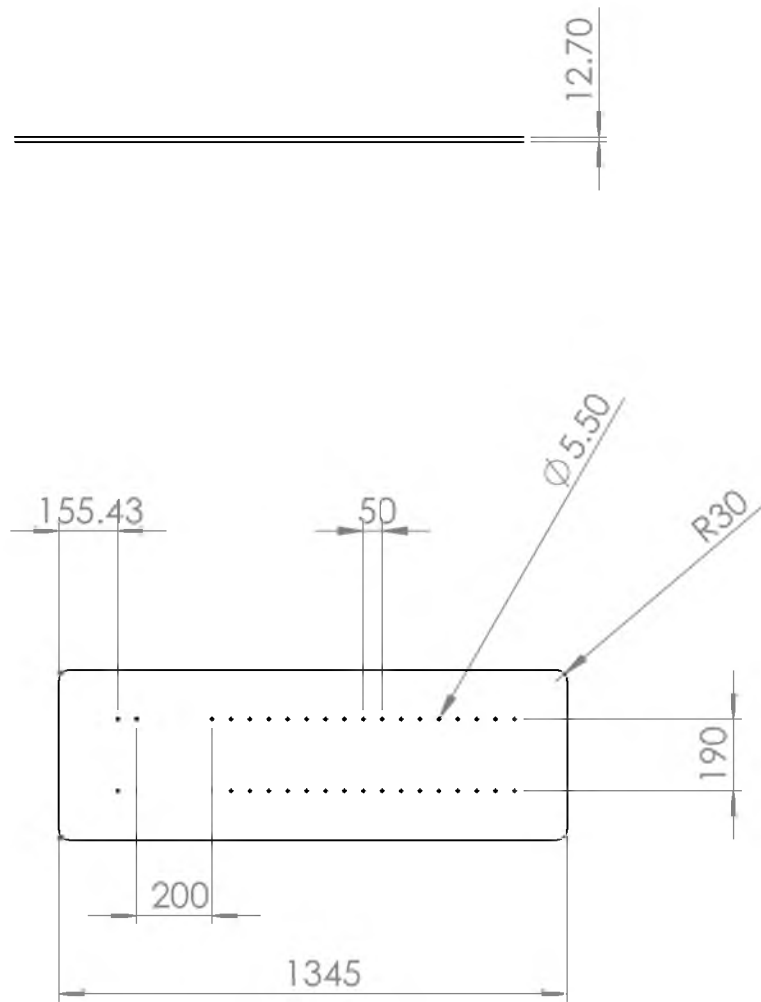
Stock Size Models	64V / 45V	98V / 69V	118V / 83V	154V / 108V
Cont Stall Torque oz-in (Ncm)	64 (45)	98 (69)	118 (83)	154 (108)
Peak Torque oz-in (Ncm)	180 (127)	300 (211)	360 (254)	400 (282)
Inertia oz-in-sec ² (g-cm ²)	.001 (70.6)	.0015 (106)	.002 (141)	.0026 (184)
Motor Weight oz (kg)	32 (.91)	41 (1.2)	48 (1.4)	53 (1.5)
Poles	8	8	8	8

Step 3: Available Windings

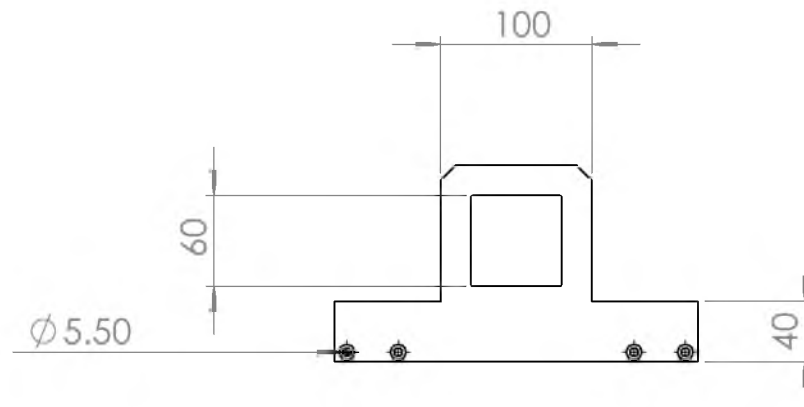
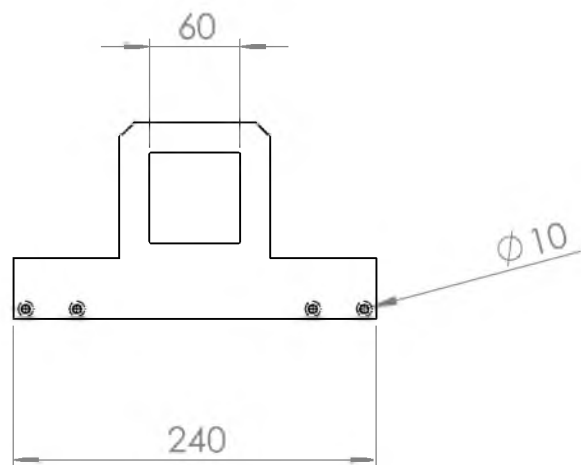
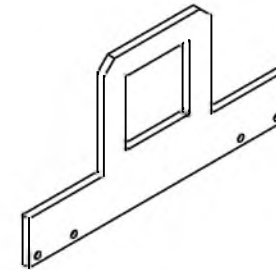
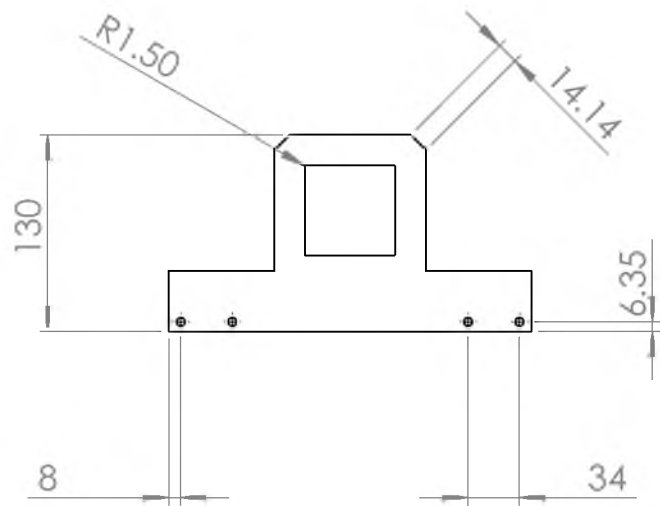
	64V48	64V160	64V325	98V48	98V160	98V325	118V48	118V160	118V325	154V48	154V160	154V325
Imperial	64V48	64V160	64V325	98V48	98V160	98V325	118V48	118V160	118V325	154V48	154V160	154V325
Metric	45V48	45V160	45V325	69V48	69V160	69V325	83V48	83V160	83V325	108V48	108V160	108V325
Voltage (Vdc)	48	160	320	48	160	320	48	160	320	48	160	320
Voltage Constant V/kRPM	12.4	23.0	45.0	12.4	25.0	58.0	12.9	25.0	51.0	12.2	29.0	59.0
Torque Constant oz-in/A (Ncm/A)	16.7 (11.8)	31 (22)	61 (43)	16.7 (11.8)	34 (24)	78 (55)	17.4 (12.3)	36 (25)	68 (48)	16.6 (11.7)	39 (28)	79 (56)
Rated Torque oz-in (Ncm)	50 (35)	50 (35)	50 (35)	80 (56)	80 (56)	80 (56)	100 (71)	100 (71)	100 (71)	130 (92)	130 (92)	130 (92)
Rated Speed RPM	3000	4800	4800	3000	4600	4600	3000	4800	4800	3000	4500	4500
Max Cont Stall Current (A)	3.8	2.2	1.1	5.6	2.70	1.30	6.8	3.2	1.6	9.3	4.00	1.95
Peak Current (A)	11.00	6.40	3.20	15.0	7.50	4.20	20.0	8.20	4.80	25.00	10.50	4.30

RPP

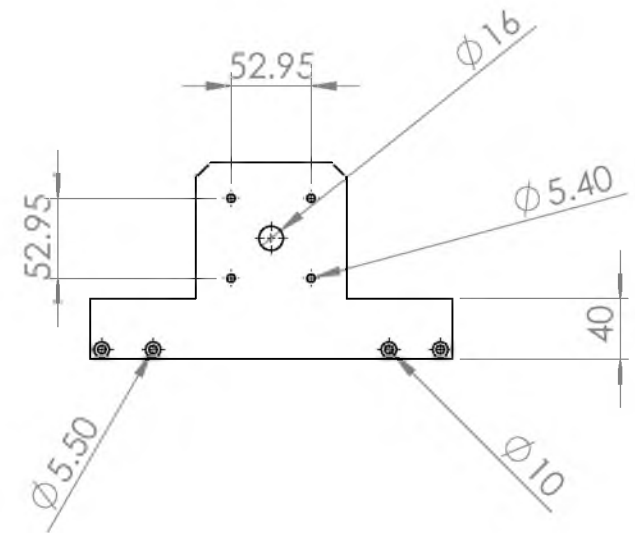
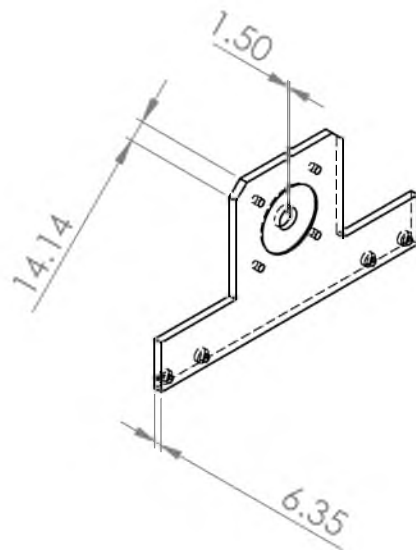
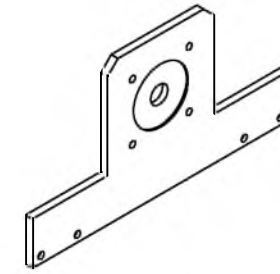
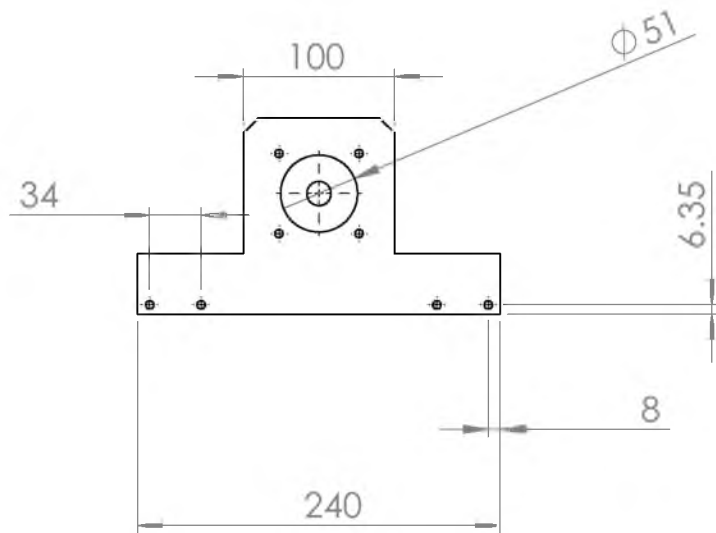
C. Dibujos técnicos



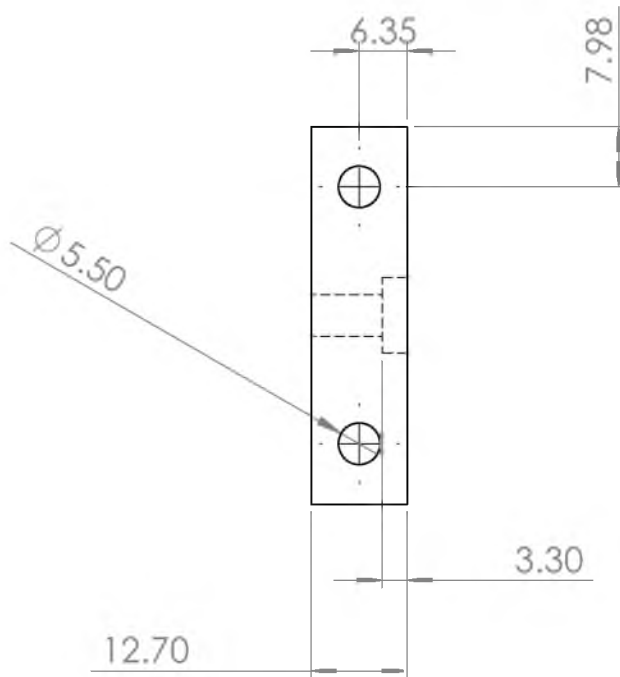
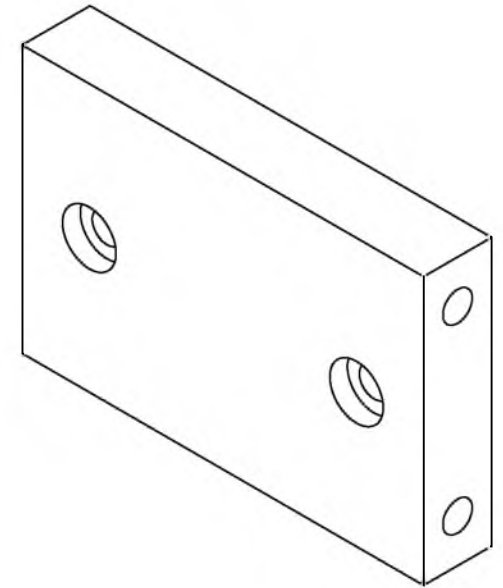
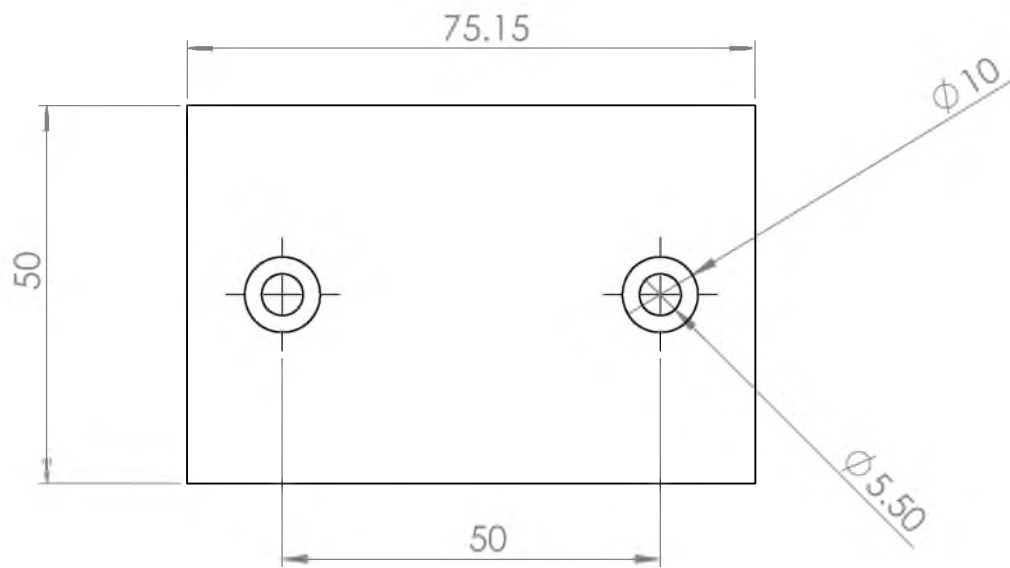
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Acero al carbón	PESO: 60 Kg
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERÍA EN MECATRÓNICA	
CONJUNTO:					
TÍTULO: BASE DE LA PLATAFORMA EXPERIMENTAL ROTOR TIPO JEFFCOTT				N.º DE DIBUJO 1	A4



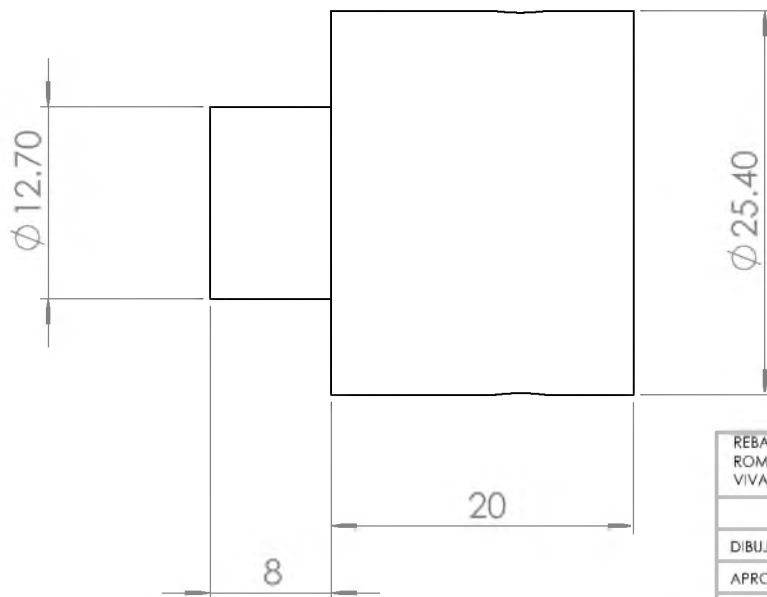
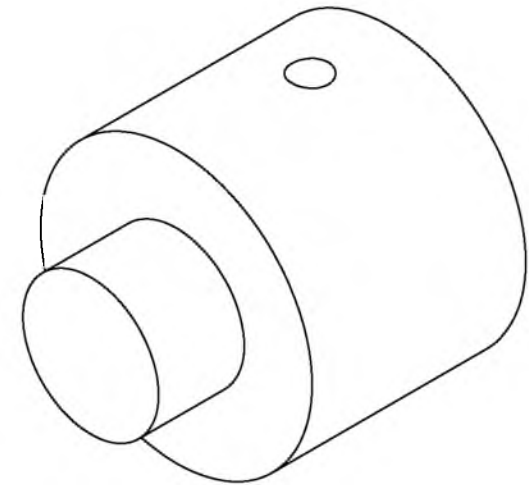
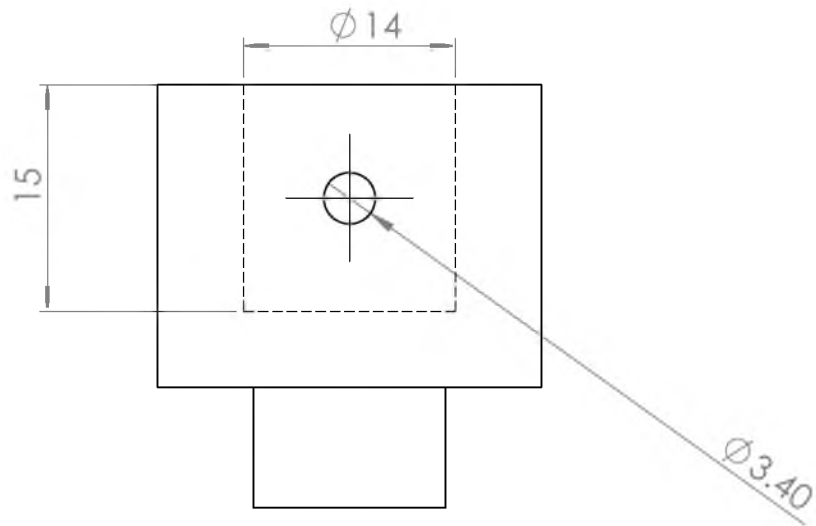
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACION Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Aluminio 6061	PESO: 252 g
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCION: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA	
CONJUNTO:					
TITULO: Parte posterior de la base del Servomotor Electrocraft RPP23M-45.				N.º DE DIBUJO 2	A4



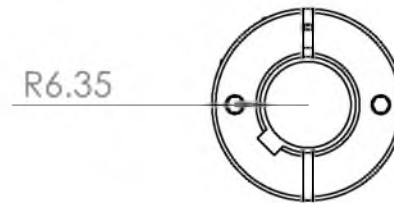
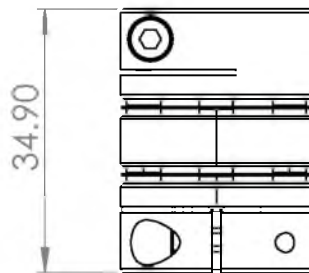
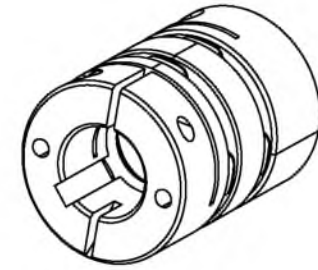
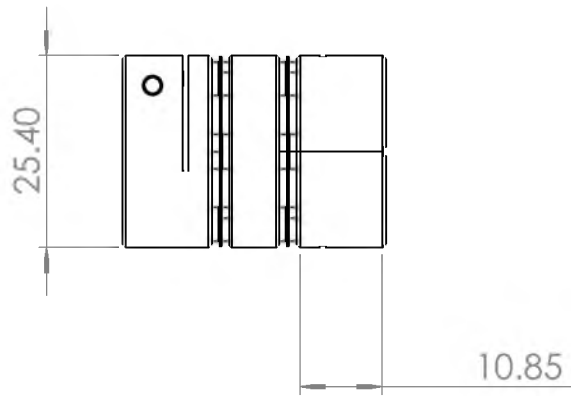
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	DESIGNACION Y OBSERVACIONES			MATERIAL: Aluminio 6061	PESO: 301 gramos
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCION: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA	
CONJUNTO:					
TÍTULO:	Parte frontal de la base para el Servomotor.			N.º DE DIBUJO	3 A4



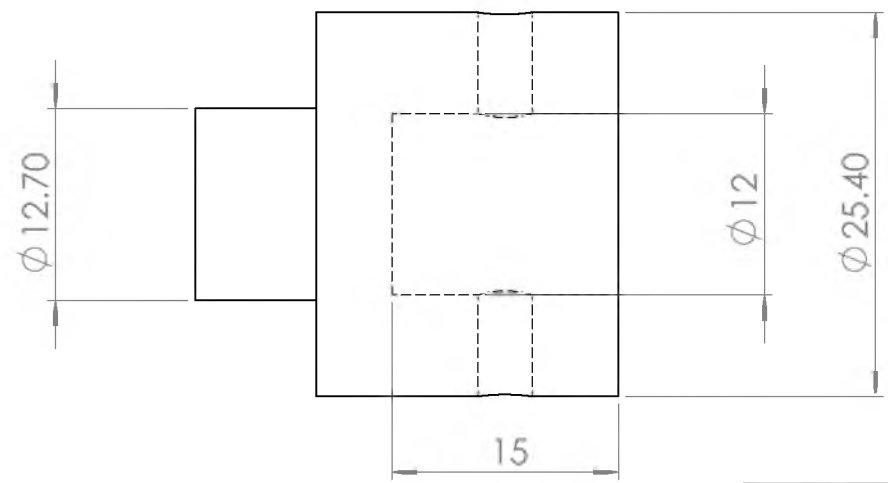
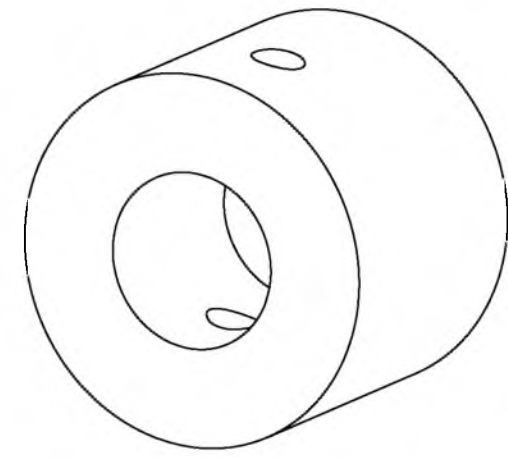
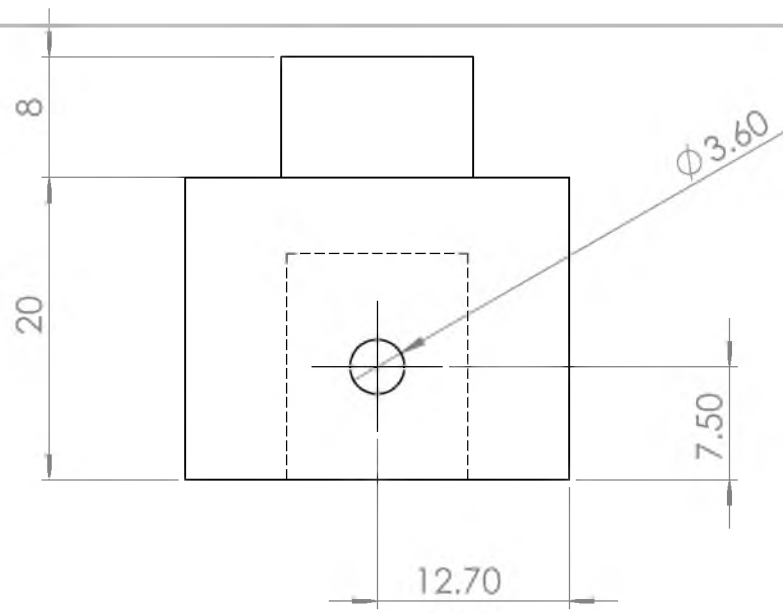
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACION Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Aluminio 6061	PESO: 117 gramos
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCION: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ÁLVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRÓNICA	
CONJUNTO:					
TÍTULO: Parte que une las partes frontal y posterior de la base del Servomotor.				N.º DE DIBUJO 4	A4



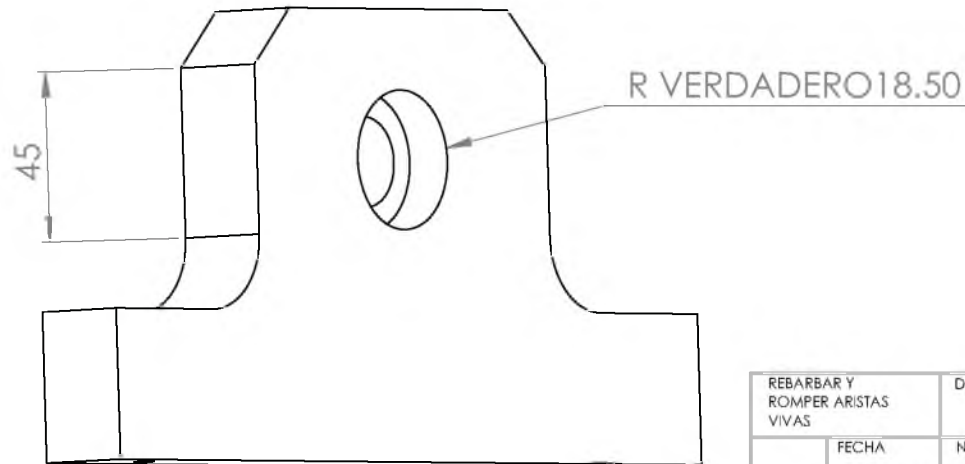
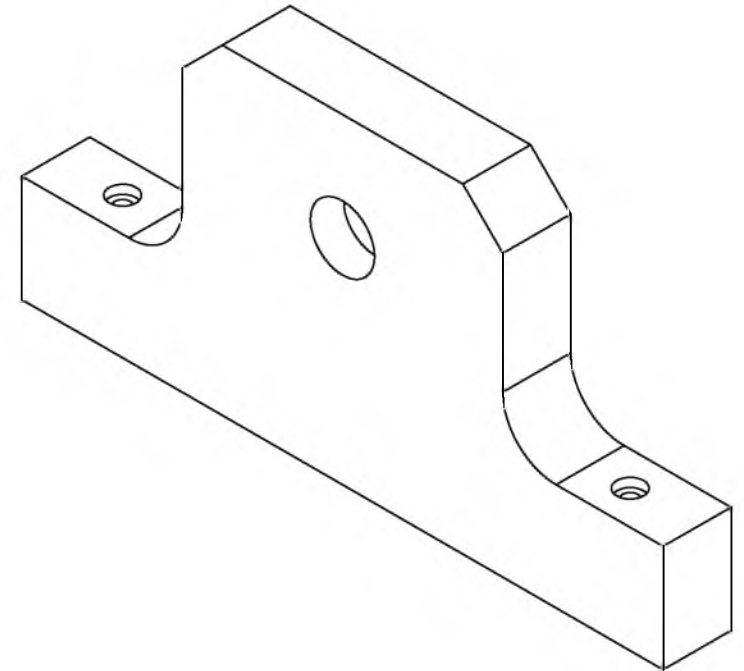
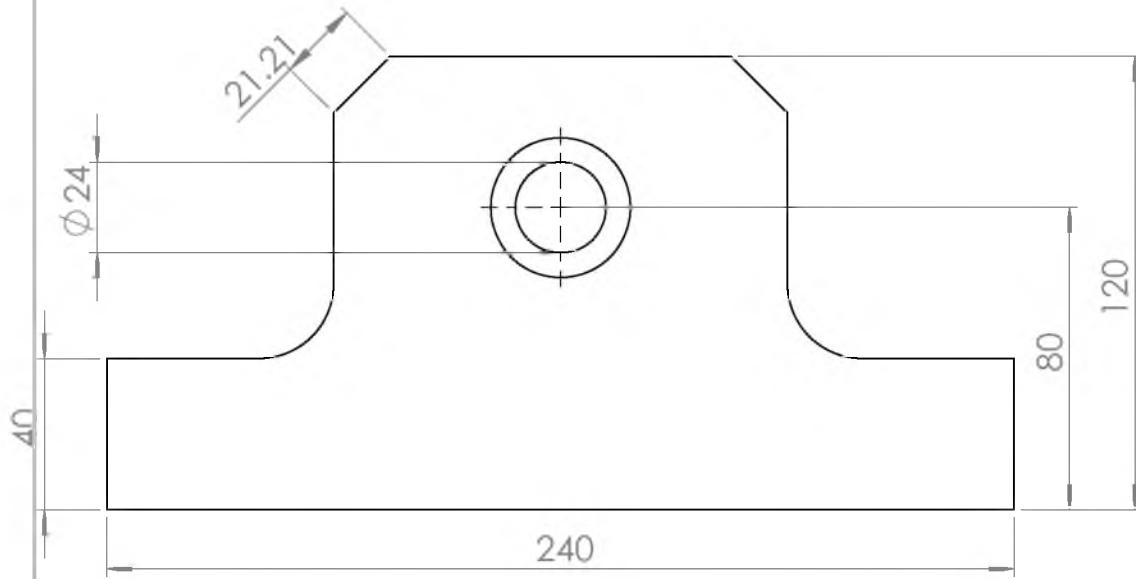
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Cobre	PESO: 78 gramos
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA	
CONJUNTO:				N.º DE DIBUJO	5
TÍTULO: Cople rígido que une la flecha del motor con el cople flexible Ruland DCDK16-8-8-A					A4



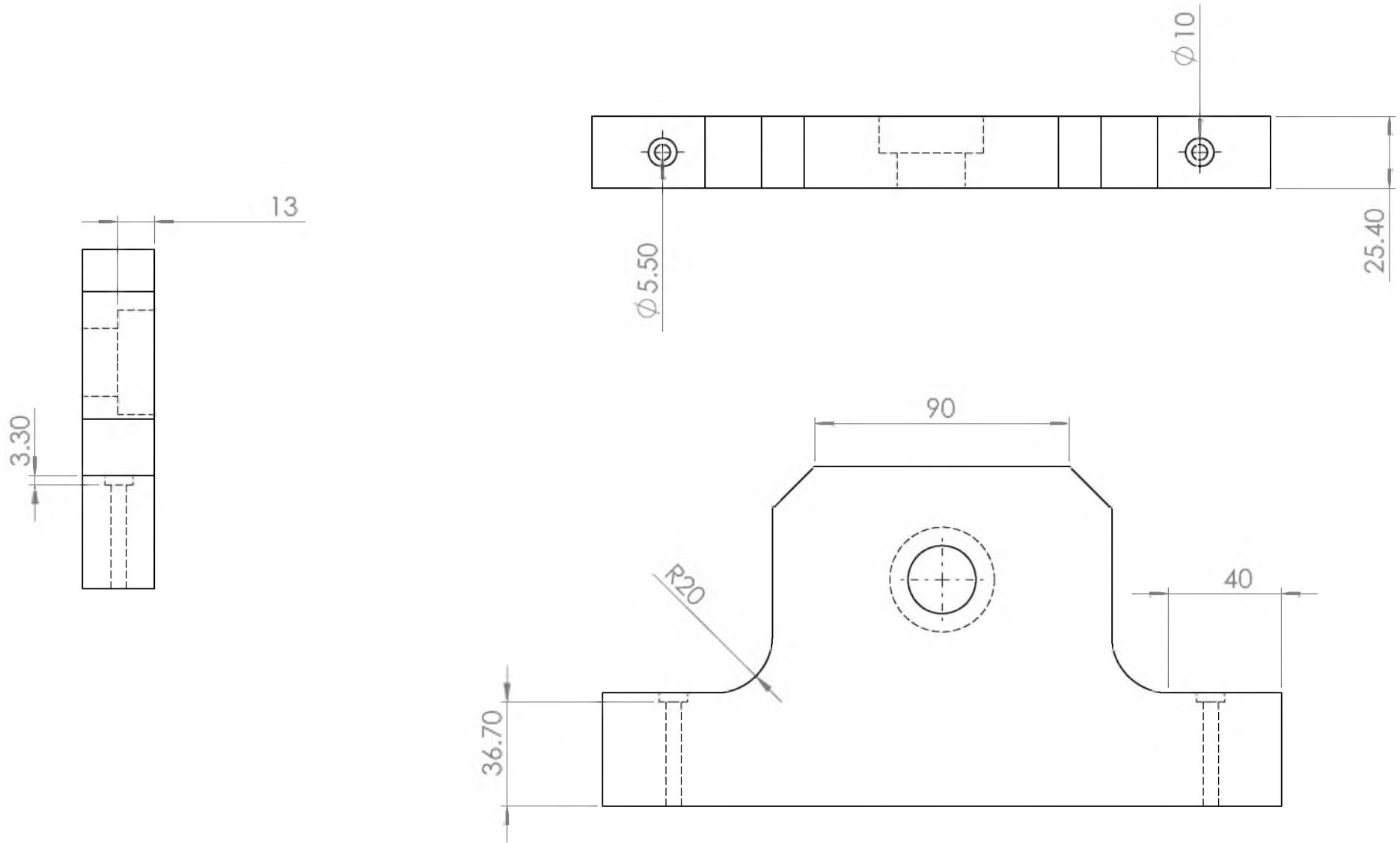
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACION Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Aluminio	PESO: 30 gramos
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCION: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRÓNICA	
CONJUNTO:				DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRÓNICA	
TÍTULO: Cople flexible Ruland DCDK16-8-8-A.				N.º DE DIBUJO 6	A4



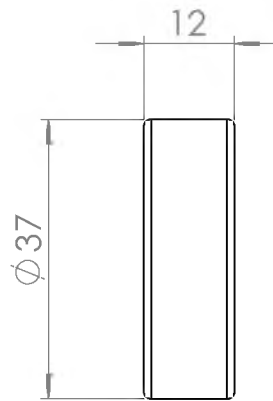
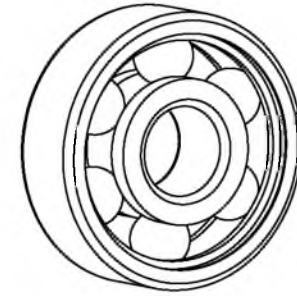
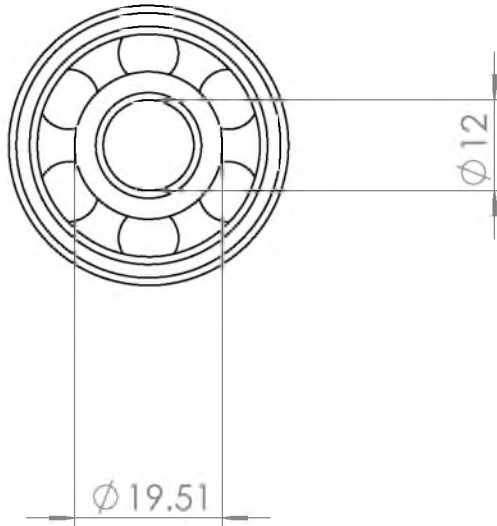
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACION Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Cobre	PESO: 83 gramos
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCION: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA	
CONJUNTO:				N.º DE DIBUJO 7	
TÍTULO: Cople rígido que une a la flecha rígida con el cople flexible.				A4	



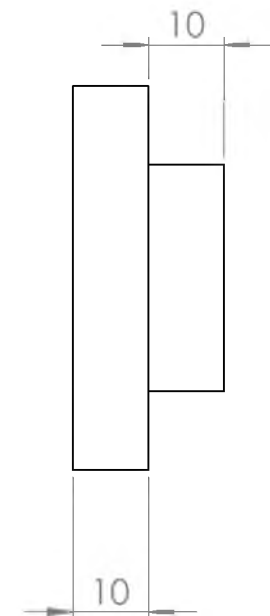
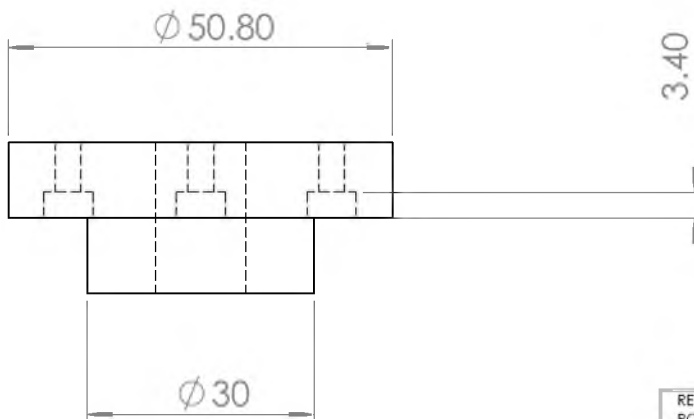
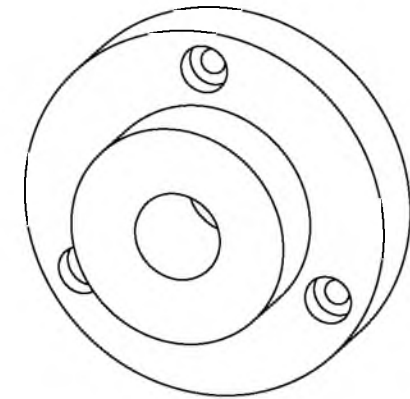
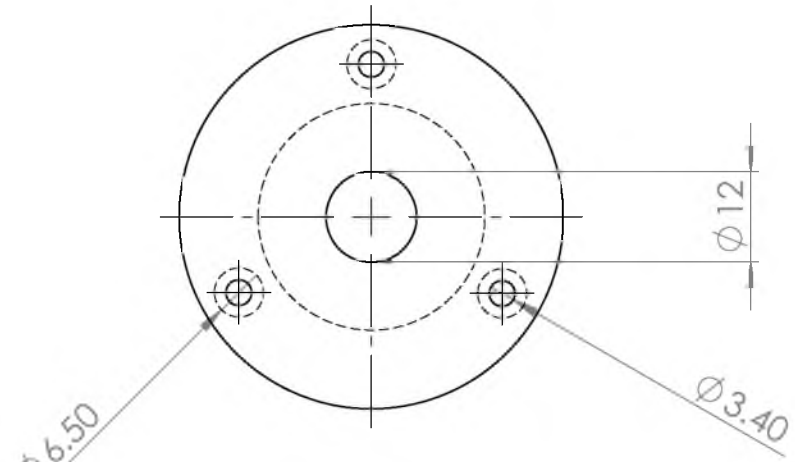
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Aluminio 6061	PESO: 1.310 kg
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 2
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERÍA EN MECATRÓNICA	
CONJUNTO:					
TÍTULO:		Chumacera		N.º DE DIBUJO	8
				A4	



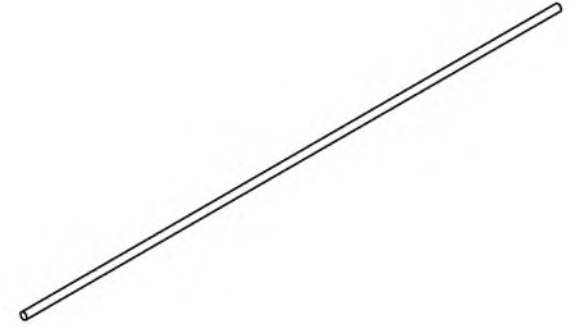
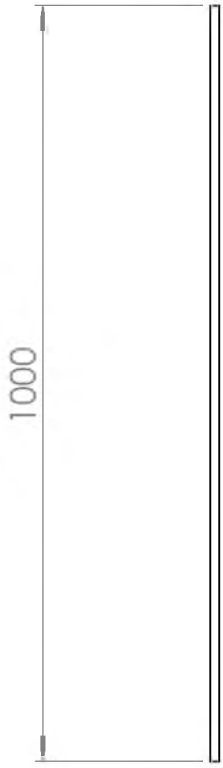
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACION Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Aluminio 6061	PESO: 1.310 kg
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 2 DE 2
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCION: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA	
CONJUNTO:				N.º DE DIBUJO 9	
TITULO: Chumacera				A4	



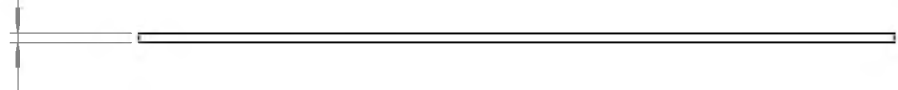
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACION Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Acero	PESO: 59 gramos
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCION: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA	
CONJUNTO:					
TITULO: Rodamiento				N.º DE DIBUJO 10	A4



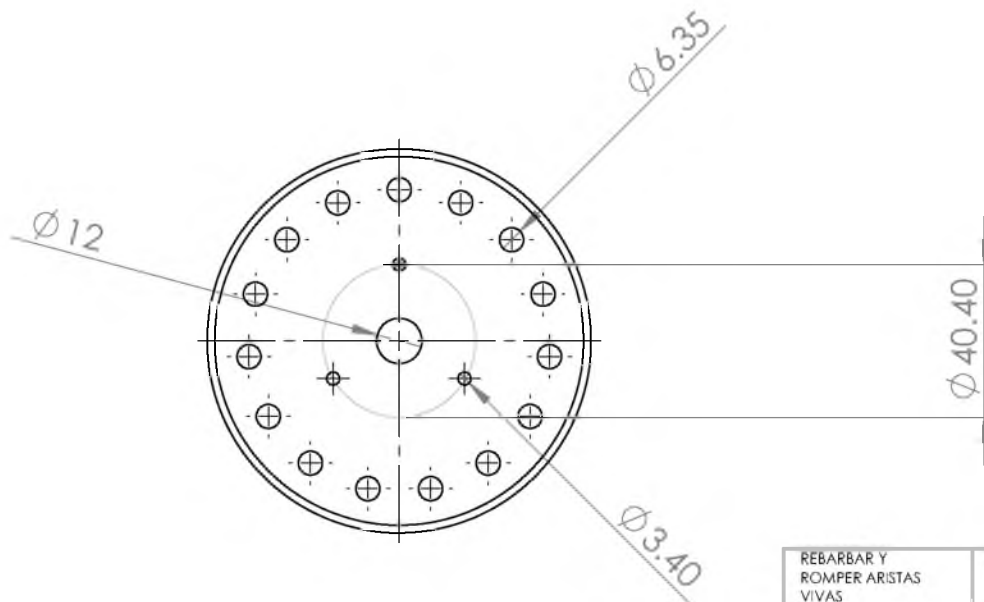
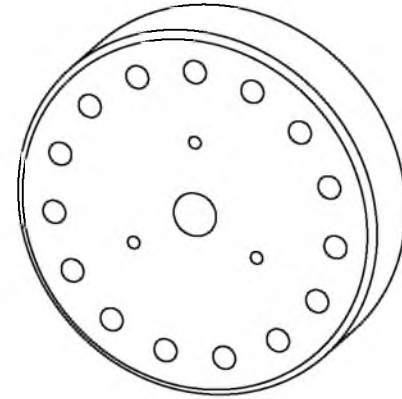
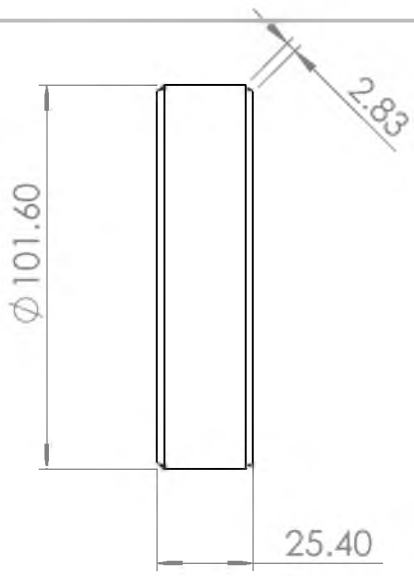
REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Latón	PESO: 206 gramos
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA	
CONJUNTO:				N.º DE DIBUJO	11
TÍTULO: Brida					A4



Ø 12



REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Acero al carbón	PESO: 900 gramos
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERIA EN MECATRONICA	
CONJUNTO:					
TÍTULO: Flecha rigida				N.º DE DIBUJO	12
				A4	



REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		DESIGNACIÓN Y OBSERVACIONES		MATERIAL: Acero Cold Roll	PESO: 1.5 Kg
				TOLERANCIAS:	DIMENSIONES: mm
	FECHA	NOMBRE	FIRMA	ESCALA: 1:1	HOJA 1 DE 1
DIBUJO	18/05/2018	C. JOSÉ LUIS JAIME OCAMPO		INSTITUCIÓN: UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA	
APROB.	18/05/2018	DR. ALVARO CABRERA AMADO		DEPARTAMENTO: INGENIERÍA EN MECATRÓNICA	
CONJUNTO:					
TÍTULO: Disco inercial				N.º DE DIBUJO 13	A4