

**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN**

Campus Loma Bonita

**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

**GRUPOS TOPOLÓGICOS DE MATRICES  
SINGULARES Y UN ANÁLISIS DE LA  
REGLA DEL ORDEN INVERSO**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADA EN MATEMÁTICAS  
APLICADAS**

**PRESENTA:**

IRERI ORTÍZ MORALES

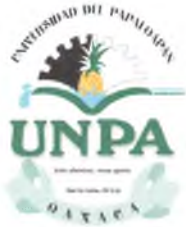
**DIRECTORA DE TESIS:**

DRA. AURA LUCINA KANTÚN MONTIEL

**CO-DIRECTOR DE TESIS:**

DR. GABRIEL KANTÚN MONTIEL

LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO, 2019



# UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

## LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

LA PRESENTE TESIS TITULADA "GRUPOS TOPOLÓGICOS DE MATRICES SINGULARES Y UN ANÁLISIS DE LA REGLA DEL ORDEN INVERSO" PRESENTADA POR LA SUSTENTANTE DE LA LICENCIATURA C. IRERI ORTÍZ MORALES BAJO LA DIRECCIÓN DE LA DRA. AURA LUCINA KANTÚN MONTIEL Y EL DR. GABRIEL KANTÚN MONTIEL, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITÉ EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS.

DRA. AURA LUCINA KANTÚN  
MONTIEL  
DIRECTORA

DR. GABRIEL KANTÚN MONTIEL  
CO-DIRECTOR

DR. VÍCTOR MANUEL  
MÉNDEZ SALINAS  
PRESIDENTE

DR. JOSÉ NOBEL  
MÉNDEZ ALCOCER  
SECRETARIO

DR. GABRIEL KANTÚN MONTIEL  
VOCAL



# Universidad del Papaloapan


FECHA:	12 de Julio del 2019
AREA:	Vice-Rectoría Académica
OFICIO NUMERO:	UNPA/VRA/188/2019
ASUNTO:	Autorización de Impresión de tesis.

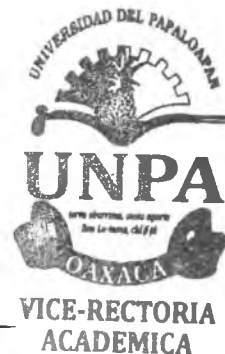
**C. Ileri Ortiz Morales**  
**PRESENTE:**

En base al artículo 120 del reglamento de alumnos, por medio de la presente se aprueba la impresión de la tesis titulada **“Grupos topológicos de matrices singulares y un análisis de la regla del orden inverso”** así como la programación del examen profesional bajo la dirección de la Dra. Aura Lucina Kantún Montiel.

Sin más por el momento aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente.  
terra ubérrima, mens aperta  
Bou Lo-tama, chi jí jú

  
\_\_\_\_\_  
MC. HÉCTOR LÓPEZ ARJONA  
Vice-Rector Académico.



C.c.p. Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas Jefe de Carrera de la Lic. En Matemáticas Aplicadas  
C.c.p. L.P. Yesenia Barrientos Arenal. Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
C.c.p. Dra. Aura Lucina Kantún Montiel. Director de Tesis.  
C.c.p. Archivo.



# UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

**Oficio No. MA051-19**  
Loma Bonita Oaxaca a 5 de julio del 2019  
Asunto: Asignación de sinodales de tesis

**M.E. Yesenia Barrientos Arenal**  
Jefa del departamento de servicios escolares

**PRESENTE**

Por este medio le informo que la Vicerrectoría Académica, ha designado a los siguientes profesores como sinodales del examen profesional de la alumna **Irerl Ortiz Morales**, quien defenderá su trabajo de tesis titulado "**Grupos topológicos de matrices singulares y un análisis de la regla del orden inverso**", para obtener el título de Licenciada en Matemáticas Aplicadas.

Titulares:

Presidente: Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas

Secretario: Dr. José Nobel Méndez Alcocer

Vocal: Dr. Gabriel Kantún Montiel

Suplentes:

M.C. Iván Guadalupe Mendoza Alonzo

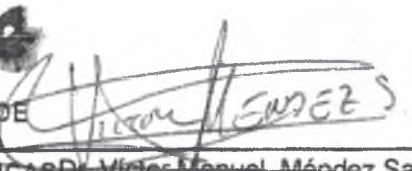
Dra. Aura Lucina Kantún Montiel

Sin otro particular me despido quedando a sus ordenes para cualquier aclaración.

ATENTAMENTE



JEFATURA DE  
CARRERA  
DE MATEMÁTICAS  
APLICADAS

  
Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas  
Jefe de carrera de la Lic. en Matemáticas Aplicadas  
Universidad del Papaloapan

  
Vo.Bo.

M.C. Hector López Arjona  
Vicerrector Académico

c.c.p. M.C. Héctor López Arjona. Vicerrector académico  
c.c.p. M.E. Yesenia Barrientos Arenal. Jefa de servicios escolares  
c.c.p. Archivo

*A mi mamá...*

*Leticia Ortiz*



# Agradecimientos

Por el amor recibido, el apoyo incondicional y la paciencia con la que cada día se preocupaban mi familia y, a mis profesores por mi desarrollo académico.

Gracias Jehová Dios porque sin él nada de esto sería posible. Gracias a mi madre por creer y confiar ciegamente en mí, por todo su apoyo y esfuerzo que pone día a día para que salgamos adelante, por todo su trabajo y ganas de vivir para que juntas logremos nuestras metas, no tengo otra forma de agradecerle sólo prometiéndole no defraudarle jamás, porque sin ella, no sería lo que soy, ni estaría en donde estoy.

Agradezco infinitamente a mis profesores, Dra. Aura Lucina Kantún Montiel y Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas por siempre apoyarme, tenerme paciencia y confiar en mí. Por transmitirme sus conocimientos y por llevar a cabo todas las actividades en este trabajo, su disponibilidad para poderme guiar. Agradezco también el haberme facilitado siempre los medios suficientes, no solamente en el desarrollo de esta tesis y en mi formación como estudiante lo largo de estos años, sino también el apoyo brindado de manera académica y personal, todo esto ha sido un aporte invaluable para mi formación.

A mi familia, mi padre y mis hermanos, Jael, José Luis y Zuleima, por ayudarme cada día a seguir adelante porque con su apoyo y aliento he logrado llegar a este punto y seguir adelante.

Gracias a mis profesores, Dra. Beatriz, Dra. Eréndira, Dr. Eduardo, Dr. Juan Manuel, Dr. Héctor Hugo, Dr. Marcelino, Mtro. Ariel, Mtro. Ignacio Alberto y Dr. Vega, cada uno de ellos por transmitirme sus conocimientos y por su motivación a desarrollarme como profesional. Al Dr. Nobel y Mtro. Iván por ser revisores y al Dr. Gabriel Kantún por aceptar dirigir la tesis.

A mis compañeros y amigos, Catalina (Qaty's), mejor amiga Marijose, a mi compañera de viaje Karen y a Aarón por los buenos momentos que hemos compartido a lo largo de todos estos años, por su apoyo en los momentos difíciles pero sobre todo por su gran amistad.

A la Universidad del Papaloapan por abrirme sus puertas. Por todo esto y mucho más, mi más profundo agradecimiento.

*Ivori Cortiz*

# Resumen

Las inversas generalizadas tienen aplicaciones en teoría de matrices y en diversos campos, por ejemplo, en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, cadenas de Markov, entre muchas más.

Esta tesis está dedicada al estudio de propiedades que poseen las inversas generalizadas de Moore-Penrose y Drazin, pero principalmente se analiza bajo qué condiciones se cumple la regla del orden inverso para los casos de Moore-Penrose y Drazin. En la inversa de Drazin se estudia un caso particular de ella, la *grupo inversa*, que posteriormente se emplea en la construcción de un grupo topológico.

El *conjunto inversoide* se construye tomando una matriz con *índice 1* y todas las potencias de ella junto con todas las potencias de su grupo inversa para, de esta manera, formar un grupo algebraico al que dotamos de una topología Hausdorff y localmente compacta, y con ayuda de los filtros se demuestra la continuidad de la multiplicación y de su inversa, por tanto el conjunto inversoide es un grupo topológico. Esto es importante ya que los ejemplos clásicos de grupos topológicos en espacios de matrices están formados por matrices invertibles, pero en esta tesis trabajamos con matrices singulares.

**Palabras clave:** Matrices invertibles, inversas generalizadas, grupo inversa, grupo topológico.

# Abstract

Generalized inverses have applications in matrix theory and in other diverse fields, for example, in the solution of systems of linear equations, Markov chains, among many others.

In this thesis we study the properties of Moore-Penrose and Drazin inverses, but mainly we will analyze the necessary conditions for the reverse order property in the Moore-Penrose and Drazin cases. For the Drazin inverse we will study a particular case, which is called the *group inverse* and later we will use it for the construction of a topological group.

The *inversoid set* will be constructed, taking a matrix with index 1 and all of its powers together with all the powers of its group inverse, in this manner we will form an algebraic group, then we will provide a locally compact Hausdorff topology, and with the help of topology tools, which are the filters, we will demonstrate the continuity of the multiplication and its inverse, therefore it will be a topological group. This is important since the classical examples of topological groups in matrix spaces are invertible matrices, but in this thesis we will work only with singular matrices.

**Keywords:** Invertible matrices, generalized inverses, group inverse, topological group.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VI</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
0.1. Antecedentes . . . . .	1
0.2. Planteamiento del problema . . . . .	3
0.3. Hipótesis . . . . .	3
0.4. Objetivos . . . . .	4
0.4.1. Objetivo general . . . . .	4
0.4.2. Objetivos específicos . . . . .	4
<b>1. Propiedades fundamentales de los operadores matriciales</b>	<b>5</b>
1.1. Escalares y vectores . . . . .	5
1.2. Álgebra de matrices . . . . .	7
1.3. Determinantes . . . . .	10
1.4. Clasificación de matrices . . . . .	11
1.5. Transformaciones Lineales . . . . .	12
1.6. Forma normal de Hermite . . . . .	17
<b>2. Inversas generalizadas</b>	<b>19</b>
2.1. La inversa de Moore-Penrose . . . . .	20
2.2. Construcción de $\{1\}$ -inversa . . . . .	23
2.3. Existencia y construcción de la $\{1,2\}$ -Inversa . . . . .	26
2.4. Existencia y construcción de $\{1, 2, 3\}$ -, $\{1, 2, 4\}$ - y $\{1, 2, 3, 4\}$ -Inversa . . . . .	27
2.5. Ejemplos de inversas generalizadas . . . . .	28
2.6. Fórmula explícita para $A^\dagger$ . . . . .	33
2.7. El índice de una matriz . . . . .	35
2.8. La grupo inversa . . . . .	36
2.9. La inversa de Drazin . . . . .	38

2.10. Algoritmo para calcular $A^D$ . . . . .	41
<b>3. Estudio de la regla del orden inverso</b>	<b>43</b>
3.1. Regla del orden inverso para la inversa de Moore-Penrose . . . . .	43
3.2. La regla del orden inverso para la inversa de Drazin . . . . .	46
<b>4. Grupo de matrices singulares</b>	<b>48</b>
4.1. Grupos topológicos . . . . .	48
4.2. Conjunto Inversoide . . . . .	53
4.3. Grupo Inversoide . . . . .	54
<b>Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>

# Introducción

Este trabajo tiene como principal propósito el estudio de la regla del orden inverso y la obtención de un grupo topológico en un espacio de matrices singulares. A continuación daremos a conocer los antecedentes, planteamiento del problema, hipótesis y objetivos que nos motivaron a realizar este trabajo de tesis.

## 0.1. Antecedentes

La combinación de la estructura algebraica de un grupo con la estructura de espacio topológico, ha dado lugar al concepto de grupo topológico, aportando al crecimiento en áreas de las matemáticas como lo son análisis y topología. En 1926 Schreier estudió por primera vez los grupos topológicos, pero fue en 1927 cuando se le dio este nombre [21].

Una característica distintiva de los grupos, es la existencia del inverso para cada uno de sus elementos. En el caso de las matrices, deseamos trabajar con aquellas que son singulares, esto es, para las que no se cumple de forma natural con la existencia del elemento inverso correspondiente bajo la multiplicación de matrices.

Dentro del área de análisis tenemos el concepto de inversa generalizada, el cual fue mencionado por primera vez en 1903 por Fredholm [1], donde dio una inversa generalizada que él llamaba *pseudoinversa* de un operador integral.

En 1920, E. H. Moore [16] definió una inversa única (llamada por él, *recíproco general*) para cada matriz finita (cuadrada o rectangular), esta inversa se incluye entre las inversas generalizadas de operadores diferenciales e integrales que anteceden a las inversas generalizadas de las matrices. La relación de la inversa de Moore con los problemas de mínimos cuadrados fue reconocida por Bjerhammar quien reavivó el interés en la inversa de Moore, y también observó la relación de inversas generalizadas con soluciones de sistemas lineales [1]. En 1955 Penrose [20] mostró que para cualquier matriz  $A$ , cuadrada o rectangular, en los campos  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ , existe una única matriz  $X$  que

satisface las siguientes cuatro ecuaciones, conocidas como ecuaciones de Penrose:

$$AXA = A \tag{1}$$

$$XAX = X \tag{2}$$

$$(AX)^* = AX \tag{3}$$

$$(XA)^* = XA \tag{4}$$

donde  $A^*$  denota la transpuesta conjugada de  $A$ . Esta inversa generalizada ya había sido previamente estudiada por Moore [15], pero su trabajo fue olvidado porque usaba una notación muy complicada. Es por eso que ahora se le conoce como la inversa de Moore-Penrose.

Esta inversa es reflexiva en el sentido de que si  $A$  es inversa generalizada de  $X$ , entonces  $X$  es inversa de  $A$ . Para saber si  $A$  es externamente invertible, se debe tener un operador  $C$  distinto de cero tal que  $C = CAC$ , entonces decimos que  $C$  es *inversa externa* para  $A$  y que  $A$  es externamente invertible. La inversa externa no es única.

Consideremos las siguientes ecuaciones:

$$A^k XA = A^k, \tag{1^k}$$

$$AX = XA, \tag{5}$$

donde  $k$  es el índice de la matriz  $A$  y se define como el entero no negativo más pequeño  $k$  para el cual se cumple  $rango(A^k) = rango(A^{k+1})$ .

La matriz  $X$  que cumple las ecuaciones  $\{1^k, 2, 5\}$  se conoce como la *inversa de Drazin* y se denota como  $A^D$ . Uno de los temas actuales relacionados con inversas generalizadas son los inversos espectrales, los cuales vienen ligados directamente con las inversas de Drazin y un caso particular es la grupo inversa que cumple las ecuaciones  $\{1, 2, 5\}$  [1]. Ésta última será la que utilizaremos para formar un grupo topológico.

De 1955 a la fecha han aparecido gran variedad de artículos relacionados con las inversas generalizadas y sus aplicaciones. Por mencionar algunos podemos referir aquellos relacionados con inversas en álgebras de Banach, anillos, semigrupos, operadores y representaciones matriciales de inversas generalizadas internas y externas, así como los relacionados con la continuidad, conmutatividad, entre otras (ver [10], [11], [12], [13], [17]).

## 0.2. Planteamiento del problema

Un grupo topológico es un conjunto que tiene una estructura algebraica y una topológica, relacionadas de manera que las operaciones de multiplicación y de inversa son continuas. Un ejemplo clásico de tales grupos es el conjunto de las matrices no singulares.

Cuando trabajamos con matrices podemos encontrar su inversa, siempre y cuando la matriz sea no singular, es decir, que su determinante sea distinto de cero. Esta inversa y la multiplicación de matrices son continuas considerando el espacio de matrices con la topología usual en  $\mathbb{R}^{n^2}$  [24].

Nos interesa saber qué ocurre cuando la matriz es singular, o incluso rectangular ya que, de los cursos de álgebra lineal, sabemos que si esto sucede, la matriz no tiene inversa. En este trabajo, construiremos un grupo topológico a partir de un conjunto de matrices singulares.

En muchos casos necesitamos garantizar la existencia de inversas para las matrices con las que trabajamos, por ejemplo para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Es por esto que en los últimos años surgió la necesidad de encontrar solución a este tipo de problemas, dando lugar a lo que se conoce como *inversa generalizada*. Es importante mencionar que la inversa generalizada coincide con la inversa usual cuando  $A$  es invertible.

Dadas dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$  no singulares, se sabe que la inversa usual cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{-1} &= A, \\ (A^t)^{-1} &= (A^{-1})^t, \\ (A^*)^{-1} &= (A^{-1})^*, \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}, \\ (AB)^t &= B^tA^t, \\ (AB)^* &= B^*A^*,\end{aligned}$$

donde  $A^t$  y  $A^*$ , denotan la transpuesta y la transpuesta conjugada de  $A$  respectivamente. Las tres últimas propiedades se conocen como la regla del orden inverso.

Se desea saber si para las inversas de Moore-Penrose y Drazin se cumple la regla del orden inverso, de no ser así, determinar qué condiciones o qué restricciones se deben imponer a las matrices  $A$  y  $B$  para que la cumplan.

A partir de lo anterior, veremos cómo obtener un grupo topológico en el que la inversa generalizada juegue el papel de elemento inverso para cada elemento en un espacio de matrices singulares.

## 0.3. Hipótesis

Para cada par de matrices singulares  $A$  y  $B$  existen las matrices  $A^\dagger$  y  $A^D$  que están asociadas a las matrices dadas.

Bajo ciertas condiciones las inversas de Moore-Penrose y Drazin cumplen la regla del orden inverso.

La grupo inversa de una matriz satisface las condiciones de elemento inverso en un grupo algebraico, a partir del conjunto de todas las potencias de la matriz dada podemos formar un grupo topológico.

## 0.4. Objetivos

### 0.4.1. Objetivo general

Estudiar las propiedades de las inversas de Moore-Penrose y Drazin y determinar en qué casos se cumple la regla del orden inverso. Además formar un grupo topológico en el espacio de matrices no invertibles en el que la grupo inversa jugará un papel fundamental.

### 0.4.2. Objetivos específicos

- Determinar las propiedades que deben cumplir las matrices  $A$  y  $B$  para que la regla del orden inverso se cumpla para el caso de la inversa de Moore-Penrose, es decir, deseamos saber bajo qué condiciones se cumple la siguiente relación:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.$$

- Dadas dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$  determinar qué propiedades deben tener para que la regla del orden inverso se cumpla para el caso de la inversa de Drazin, es decir, deseamos saber bajo qué condiciones se cumple la siguiente relación:

$$(AB)^D = B^D A^D.$$

- Comprobar la continuidad de la multiplicación y de la inversa en el espacio de matrices no invertibles, generado por la grupo inversa, para formar un grupo topológico.

# Capítulo 1

## Propiedades fundamentales de los operadores matriciales

A continuación daremos algunos conceptos básicos del álgebra lineal, entre ellos mencionaremos escalares, vectores, álgebra de matrices, transformaciones lineales, entre otros, y la notación que usaremos, así como las definiciones y los resultados conocidos sin demostración que se usarán en los siguientes capítulos. Para profundizar más en este estudio recomendamos ver [1] y [8].

### 1.1. Escalares y vectores

Un escalar es un elemento de un campo que se utiliza para definir un espacio vectorial. En el álgebra lineal, los números reales u otros elementos de un campo se denominan escalares y se relacionan con los vectores en un espacio vectorial mediante la operación multiplicación escalar, en la cual un vector se puede multiplicar por un escalar para producir otro vector.

Denotaremos los escalares con letras minúsculas (e.g.  $x, y, \lambda$ ). Utilizaremos principalmente el campo de los números complejos denotado como  $\mathbb{C}$ , el campo de los números reales como  $\mathbb{R}$  y denotaremos como  $\mathbb{F}$  algún campo arbitrario. A los vectores los denotaremos con letras en negritas (e.g.  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ).

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío  $V$ , cuyos elementos son llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por escalares. Trabajaremos con aquellos que tienen dimensión finita [8].

El espacio vectorial  $n$ -dimensional sobre un campo  $\mathbb{F}$  es denotado por  $\mathbb{F}^n$ .

Un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$  se escribirá en forma de columna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = (x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad x_i \in \mathbb{F}.$$

**Definición 1.1.1** El vector  $n$ -dimensional  $e_i$ , cuya  $j$ -ésima componente  $\epsilon_{ij}$  está dada por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

es llamado el  $i$ -ésimo vector unitario de  $\mathbb{F}^n$ .

**Definición 1.1.2** Una **base**  $\beta$  para un espacio vectorial  $V$  es un subconjunto linealmente independiente de  $V$  que genera a  $V$ . El conjunto de vectores unitarios

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

es llamado **base estándar** de  $\mathbb{F}^n$ .

**Definición 1.1.3** Un espacio vectorial  $V$  se llama **dimensionalmente finito** si tiene una base que consta de un número finito de elementos; el número de elementos en cada base  $V$  se llama **dimensión** de  $V$  y se denota  $\dim(V)$ .

**Definición 1.1.4** Un subconjunto  $L$  en un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $\mathbb{F}$  se llama **subespacio** de  $V$ , si  $L$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ , bajo las operaciones de suma y multiplicación definidas por  $V$ .

**Definición 1.1.5** La **suma** de dos subespacios  $L, M$  en  $\mathbb{C}^n$ , denotada por  $L + M$  se define como:

$$L + M = \{\mathbf{y} + \mathbf{z} : \mathbf{y} \in L, \mathbf{z} \in M\}.$$

Además el conjunto  $L + M$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^n$ .

**Definición 1.1.6** Sea  $V$  un espacio vectorial y sean  $L$  y  $M$  dos subespacios vectoriales de  $V$ , se define como **suma directa** de estos subespacios al subespacio  $L \oplus M = V$  si y sólo si  $L + M = V$  y además  $L \cap M = \{\mathbf{0}\}$ .

**Definición 1.1.7** Dos subespacios vectoriales  $L$  y  $M$  de  $\mathbb{C}^n$  son llamados **subespacios complementarios** si

$$L \oplus M = \mathbb{C}^n.$$

En este caso, cada vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  se puede expresar de forma única como una suma

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \quad (\mathbf{y} \in L, \mathbf{z} \in M).$$

Diremos que  $\mathbf{y}$  es la proyección de  $\mathbf{x}$  sobre  $L$  a lo largo de  $M$ .

**Definición 1.1.8** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $W_1$  un subespacio de  $V$ . Una función  $T : V \rightarrow V$  se llama **proyección** sobre  $W_1$  si

- existe un subespacio  $W_2$  tal que  $V = W_1 \oplus W_2$ ,
- para  $x = x_1 + x_2$  donde  $x_1 \in W_1$  y  $x_2 \in W_2$  tenemos que,  $T(x) = x_1$ .

**Definición 1.1.9** Sean  $V$  un espacio vectorial complejo. Un **producto interno** o **producto escalar** en  $V$  es una operación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfice:

- $\langle \alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$  (linealidad);
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$  (simetría Hermitiana);
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ ,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = 0$  (positividad);

para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**Definición 1.1.10** El **producto interno estándar** en  $\mathbb{C}^n$  está dado por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}. \quad (1.1.1)$$

Diremos que dos vectores  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son **ortogonales** si y sólo si su producto interno  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ .

**Definición 1.1.11** Sea  $V$  un espacio vectorial. Se define como **norma** (o **módulo**) de un vector  $\mathbf{u} \in V$  denotada por  $\|\mathbf{u}\|$ , a cualquier aplicación  $V \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ , se satisface:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ,  $\|\mathbf{x}\| = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = 0$  (positividad),
- $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$  (homogenidad positiva),
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (desigualdad del triángulo).

**Definición 1.1.12** Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto escalar en  $\mathbb{C}^n$ . La norma inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathbb{C}^n$ , es la norma definida por

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ .

**Lema 1.1.13** Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  vectores ortogonales, entonces

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

## 1.2. Álgebra de matrices

**Definición 1.2.1** Una **matriz** de  $m \times n$  con elementos en un campo  $\mathbb{F}$  es un arreglo rectangular de elementos de dicho campo con  $m$  reglones (o filas) y  $n$  columnas. Los números  $m$  y  $n$  son las dimensiones de la matriz  $A$ .

Al elemento  $a_{ij}$  que se encuentra el renglón  $i$  y la columna  $j$  se le conoce como entrada de la matriz. A continuación presentamos una matriz de tamaño  $m \times n$ ;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde cada  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) es un elemento de  $\mathbb{F}$ .

El conjunto de las matrices de  $m \times n$  con elementos en  $\mathbb{F}$  será denotado como  $\mathbb{F}^{m \times n}$ . En particular  $\mathbb{C}^{m \times n}$  ( $\mathbb{R}^{m \times n}$ ) denota el conjunto de las matrices con entradas complejas (reales).

### Operaciones básicas entre matrices

- Suma y resta

Se define la operación de suma y resta de matrices como una operación binaria

$$+ : \mathbb{F}^{m \times n} \times \mathbb{F}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{F}^{m \times n}$$

tal que

$$(A, B) \mapsto C = A \pm B$$

en el que la operación de suma en la última expresión es la operación binaria correspondiente en el campo  $\mathbb{F}$ .

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La resta es consecuencia de la estructura de espacio vectorial del conjunto de matrices.

- Multiplicación por un escalar

Sea  $A$  una matriz y  $c$  un número, definimos el múltiplo escalar  $cA$ , como la matriz que se obtiene multiplicando cada entrada de  $A$  por  $c$ . En símbolos,  $c(a_{ij}) = (ca)_{ij}$

$$c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

- Producto de dos matrices

Dadas dos matrices  $A$  y  $B$ , tales que el número de columnas de la matriz  $A$  es igual al número de filas de la matriz  $B$ ; es decir:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ y } B = (b_{ij})_{n \times p}.$$

La multiplicación de  $A$  por  $B$ , que se denota  $A \cdot B$  o simplemente  $AB$ , es una nueva matriz  $C$  :

$$C = AB = (c_{ij})_{m \times p}$$

donde cada elemento  $c_{ij}$  está definido por:  $c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir}b_{rj}$  es decir:

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}.$$

Una matriz  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  se llama *cuadrada* si  $m = n$ , o *rectangular* si  $m \neq n$ .

Las entradas de una matriz  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  se denotan como  $a_{ij}$  o  $A[ij]$ .

Una matriz  $A$  se conoce como:

- *Diagonal* si  $A[ij] = 0$  para toda  $i \neq j$ ,
- *Triangular superior* si  $A[ij] = 0$  siempre que  $i > j$  y
- *Triangular inferior* si  $A[ij] = 0$  siempre que  $i < j$ .

### Ejemplo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

Diagonal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

Triangular superior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

Triangular inferior

Siempre que  $a_{11} \neq 0, a_{12} \neq 0, a_{13} \neq 0, etc.$

Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  su

- *transpuesta* es la matriz  $A^t$  tal que  $A^t[ij] = A[ji]$  para todo  $ij$ ;
- *transpuesta conjugada* es la matriz  $A^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$  tal que  $A^*[ij] = \overline{A[ji]}$  para todo  $ij$ .

**Definición 1.2.2** Sea  $A$  una matriz cuadrada  $n \times n$ , con  $A = (a_{ij})$  donde  $a_{ij} = 1$  cuando  $i = j$ , y  $a_{ij} = 0$  cuando  $i \neq j$ , es llamada **la matriz identidad** de orden  $n$  y se denota como  $I_n$ .

**Definición 1.2.3** Sea  $A$  una matriz cuadrada  $n \times n$ , se define la **matriz permutación** a la matriz cuadrada con todos sus elementos iguales a 0, excepto uno cualquiera por cada fila y columna, el cual debe ser igual a 1.

## 1.3. Determinantes

El **determinante** de una matriz es un escalar que sólo se puede calcular si se trata de una matriz cuadrada  $n \times n$ , con elementos de un campo  $\mathbb{F}$ .

**Definición 1.3.1** Un **determinante** en  $M_{n \times n}(\mathbb{F})$  es una función alternante  $n$ -lineal,  $\det : M_{n \times n}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$  tal que  $\det(I) = 1$ .

**Teorema 1.3.2** Existe exactamente un determinante en  $M_{n \times n}(\mathbb{F})$

**Propiedades importantes de los determinantes:**

- Si  $B$  es una matriz obtenida a partir de  $A$  al multiplicar cada elemento de un mismo renglón de  $A$  por un escalar  $c$ , entonces  $\det(B) = c \cdot \det(A)$ .
- Si dos renglones de la matriz  $A$  son idénticos, entonces  $\det(A) = 0$ .
- Sea  $B$  una matriz que se obtiene a partir de intercambiar renglones de una matriz  $A$ , entonces  $\det(B) = -\det(A)$ .
- Si la matriz  $A$  tiene un renglón de ceros, entonces  $\det(A) = 0$ .
- Sea  $B$  una matriz obtenida a partir de una matriz  $A$  al sumar un múltiplo del renglón  $i$  con renglón  $j$  ( $i \neq j$ ), entonces  $\det(B) = \det(A)$ .
- $\det(I) = 1$ .
- El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal.
- Para cualquier matriz cuadrada  $A$ ,  $\det(A) = \det(A^t)$ .
- Para cualesquiera dos matrices cuadradas  $A, B$  el  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .
- Sea  $Q$  una matriz invertible, entonces  $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ .
- Una matriz  $A$  es invertible si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ .

## 1.4. Clasificación de matrices

Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , es :

- *Hermitiana (simétrica)* si  $A = A^*$  (si  $A$  es real,  $A = A^t$ ).

**Ejemplo 1.4.1** Definimos a la matriz  $A$  como:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

posteriormente obtenemos su transpuesta

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$$

y por último el conjugado de  $A^t$

$$\overline{A^t} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} = A^*.$$

Por lo que concluimos que  $A = A^*$ . Por lo tanto  $A$  es una matriz *hermitiana*.

- *Normal* si  $AA^* = A^*A$ .

**Ejemplo 1.4.2**

$$A = \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

El producto  $AA^*$  es:

$$AA^* = \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 - i^2 & -i^2 + i^2 \\ -i^2 + i^2 & -i^2 - i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i^2 & 0 \\ 0 & -2i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

posteriormente realizamos el producto de  $A^*A$

$$A^*A = \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 - i^2 & -i^2 + i^2 \\ -i^2 + i^2 & -i^2 - i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i^2 & 0 \\ 0 & -2i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto concluimos que  $AA^*$  y  $A^*A$  son iguales, es decir  $A$  es una matriz normal.

- *Unitaria (ortogonal)* si  $A^* = A^{-1}$  (si  $A$  es real  $A^t = A^{-1}$ ).

**Ejemplo 1.4.3** Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}$  y su transpuesta conjugada respectivamente

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \quad A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Realizando el producto de  $A^*A$  tenemos:

$$A^*A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = I$$

Entonces concluimos que  $A^* = A^{-1}$ . Por lo tanto  $A$  es una matriz unitaria.

**Definición 1.4.4** Dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{C}^{n \times n}$  son **similares** si

$$B = S^{-1}AS$$

para alguna matriz invertible  $S$ .

**Definición 1.4.5** Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  definimos la **traza** de  $A$  como  $\text{traza}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ .

La siguiente proposición nos ayudará a ver cuáles matrices similares coinciden en la traza.

**Proposición 1.4.6** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces la  $\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA)$ .

**Corolario 1.4.7** Si  $\text{traza}(A) = \text{traza}(B)$  entonces  $A$  es similar a  $B$ .

## 1.5. Transformaciones Lineales

**Definición 1.5.1** Dados dos espacios vectoriales  $U, V$  sobre un campo  $\mathbb{F}$  y una aplicación  $T : U \rightarrow V$ ; se dice que  $T$  es **lineal** o una **transformación lineal** si cumple

- $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T\mathbf{y}$ ,
- $T(c\mathbf{x}) = cT\mathbf{x}$ .

para cualesquiera  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$  y  $c \in \mathbb{F}$ .

El conjunto de transformaciones lineales de  $U$  en  $V$  será denotado como  $\mathcal{L}(U, V)$ , este conjunto es un espacio vectorial, sobre el campo  $\mathbb{F}$ , con las operaciones  $T_1 + T_2$  y  $\alpha T$ , con  $\alpha \in \mathbb{F}$ , definidas como

- $(T_1 + T_2)\mathbf{x} = T_1\mathbf{x} + T_2\mathbf{x}$ ,
- $(\alpha T)\mathbf{x} = \alpha(T\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in U$ .

**Definición 1.5.2** El **elemento nulo** de  $\mathcal{L}(U, V)$  es la transformación  $O$ , donde  $O\mathbf{x} = 0$  para cada  $\mathbf{x} \in U$ . La **transformación identidad**  $I_U \in \mathcal{L}(U, U)$  está definida como  $I_U\mathbf{u} = \mathbf{u}$ ,  $\forall \mathbf{u} \in U$ . Denotaremos a la transformación identidad  $I_U$  sólo como  $I$  salvo que sea necesario distinguirla.

**Definición 1.5.3** Sea  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ , llamaremos **imagen** de  $T$ , denotada por  $R(T)$  al conjunto

$$R(T) = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} = T\mathbf{u}, \text{ para algún } \mathbf{u} \in U\}.$$

El rango de  $T$  denotado como  $\text{rango}(T)$ , es la dimensión de  $R(T)$ .

En el caso de espacios vectoriales y, en particular, espacios normados, una proyección se denomina **operador**. De especial interés son los operadores que “preservan” las dos operaciones principales del espacio vectorial.

### Ejemplos de operadores

Si  $X$  y  $Y$  son espacios vectoriales, tenemos los siguientes operadores.

- **Operador identidad:** El operador de identidad  $I_X : X \rightarrow X$  está definido por  $I_X x = x$  para todas las  $x \in X$ . Escribimos simplemente  $I$  para  $I_X$ ; por lo tanto,  $Ix = x$ .
- **Operador cero:** El operador cero  $0 : X \rightarrow Y$  es definido por  $0x = 0$  para todo  $x \in X$ .
- **Operador de matrices:** Una matriz  $A = (a_{jk})$  con entradas reales, con  $r$  filas y  $n$  columnas define un operador  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$  por medio de

$$y = Ax \tag{1.5.1}$$

donde  $x = (\xi_j)$  y  $y = (\eta_j)$  son vectores de columna con  $n$  y  $r$  componentes, respectivamente, y utilizando la multiplicación de matrices, en términos de componentes, (1.5.1) se convierte en

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k \quad j = 1, \dots, r.$$

- **Diferenciación:** Sea  $X = P[a, b]$  el espacio vectorial de todos los polinomios continuos en  $[a, b]$ . Podemos definir un operador lineal  $T$  en  $X$  estableciendo

$$Tx(t) = x'(t)$$

para cada  $x \in X$ , donde el primo denota diferenciación con respecto a  $t$ . Este operador  $T$  aplica  $X$  sobre sí mismo.

- **Multiplicación por t:** Otro operador lineal de  $P[a, b]$  en sí mismo se define por

$$Tx(t) = tx(t)$$

**Definición 1.5.4** Sea  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ , para cualquier  $v \in R(T)$ , la **imagen inversa**  $T^{-1}(v)$  es el conjunto

$$T^{-1}(v) = \{u \in U : Tu = v\}.$$

**Definición 1.5.5** Sea  $T \in \mathcal{L}(U, V)$  llamaremos **espacio nulo** o **núcleo** de  $T$ , denotado como  $N(T)$ , a la imagen inversa del vector  $0 \in V$ , entonces

$$N(T) = \{u \in U : Tu = 0\} = T^{-1}(0).$$

Una relación importante entre  $R(T)$  y  $N(T)$  es conocida como el teorema de la dimensión.

**Teorema 1.5.6** Sea  $T \in \mathcal{L}(U, V)$  (donde  $V$  es de dimensión finita), entonces:

$$\dim(N(T)) + \dim(R(T)) = \dim(V).$$

**Definición 1.5.7** Una transformación lineal  $T \in \mathcal{L}(U, V)$  es **inyectiva** si para cada  $x, y \in U$  tales que  $Tx = Ty$  entonces  $x = y$ , o equivalentemente si para cada  $v \in R(T)$  la imagen inversa  $T^{-1}v$  consta de un sólo vector. A su vez,  $T$  es **sobreyectiva** si  $R(T) = V$ . Si  $T$  es inyectiva y sobreyectiva entonces tiene una inversa  $T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$  tal que

$$T^{-1}T = I_U \quad y \quad TT^{-1} = I_V$$

en este caso  $T$  es llamada **invertible** o **no singular**.

**Definición 1.5.8** Dada

- una transformación lineal  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ ; y
- dos bases  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$  y  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de  $\mathbb{C}^m$  y  $\mathbb{C}^n$  respectivamente;

la **representación matricial** de  $A$  respecto a las bases  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$ , es la matriz de  $m \times n$   $A_{\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}} = [a_{ij}]$  determinada (unívocamente) por

$$A\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}\mathbf{u}_i \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5.2)$$

Para cada par de bases  $\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}$ , el sistema de ecuaciones (1.5.2) nos da una correspondencia inyectiva entre el espacio de las transformaciones lineales  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  y el espacio de las matrices  $\mathbb{C}^{m \times n}$ , permitiéndonos el uso del símbolo  $A$  como la transformación lineal  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ , definida por el producto matricial, y como la representación matricial  $A_{\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}}$ .

Si  $A$  es una transformación lineal de  $\mathbb{C}^n$  en sí misma, y  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $\mathbb{C}^n$ , entonces la representación matricial  $A_{\{\mathcal{V}, \mathcal{V}\}}$  será denotada simplemente como  $A_{\{\mathcal{V}\}}$ , que satisface

$$A\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}\mathbf{v}_i \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Nótese que la representación matricial, respecto de las bases  $\{\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n\}$ , de la transformación lineal  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  coincide con la matriz  $A$ .

**Definición 1.5.9** Al igual que para las transformaciones lineales, para cualquier matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  definimos la **imagen** de  $A$  como:

$$R(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m : \mathbf{y} = A\mathbf{x} \text{ para algún } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n\}$$

y el **espacio nulo** de  $A$  como

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

**Proposición 1.5.10** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales, y sean  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces  $T$  es inyectiva si y sólo si  $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ .

**Definición 1.5.11** Si  $A$  es una matriz cuadrada, diremos que es **invertible** o no singular si existe una matriz, que denotaremos por  $A^{-1}$ , tal que

$$A^{-1}A = I \text{ y } AA^{-1} = I.$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

**Observación 1.5.12** La matriz inversa no siempre existe, para que exista, es suficiente la condición que el determinante de la matriz sea distinto de cero.

Dada una matriz cuadrada  $A$  no singular, la inversa usual cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{-1} &= A, \\ (A^t)^{-1} &= (A^{-1})^t, \\ (A^*)^{-1} &= (A^{-1})^*, \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}, \\ (AB)^t &= B^tA^t, \\ (AB)^* &= B^*A^*,\end{aligned}$$

donde  $A^t$  y  $A^*$ , denotan la traspuesta y la traspuesta conjugada de  $A$  respectivamente. Las tres últimas propiedades se conocen como la regla del orden inverso.

**Nota:** Para denotar una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  tal que  $\text{rango}(A) = r$  usaremos  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ .

**Proposición 1.5.13** Sea  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  y sea  $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$  tal que  $R(A) = R(AB)$ , entonces existe una matriz  $U \in \mathbb{C}^{p \times n}$  tal que  $ABU = A$ .

**Proposición 1.5.14** Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interno estándar (en  $\mathbb{C}^m$  o  $\mathbb{C}^n$ , según corresponda).

- Si  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  entonces

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle \quad \text{para cada } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m.$$

- $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es Hermitiana si y sólo si

$$\langle H\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, H\mathbf{y} \rangle, \quad \text{para cada } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n.$$

- Si  $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$  para cada  $\mathbf{x}$  entonces  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  no necesariamente es hermitiana.

**Definición 1.5.15** Sean  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^m}$ , y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$ , productos internos en  $\mathbb{C}^m$  y  $\mathbb{C}^n$ , respectivamente, y sea  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ . El **adjunto de  $A$** , denotado como  $A^*$ , es la transformación lineal  $A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$  tal que

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}^m} = \langle \mathbf{v}, A^*\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

para cada  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^m$ .

A menos de que se especifique lo contrario, usaremos el producto interno estándar, en cuyo caso la adjunta coincide con la traspuesta conjugada.

**Definición 1.5.16** Sea  $L$  un subespacio de  $\mathbb{C}^n$ , definimos el **complemento ortogonal** de  $L$  y lo denotamos por  $L^\perp$ , como

$$L^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in L\}.$$

Si  $M \subseteq L^\perp$  es un subespacio de  $\mathbb{C}^n$ , entonces  $L \oplus M$  es llamada la **suma directa ortogonal** de  $L$  y  $M$  y la denotaremos con  $L \oplus^\perp M$ . En particular  $\mathbb{C}^n$  es la suma directa de  $L$  y  $L^\perp$ ,

$$\mathbb{C}^n = L \oplus^\perp L^\perp,$$

es decir,  $L^\perp$  es un subespacio complementario a  $L$ .

**Teorema 1.5.17** Para cualquier matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  podemos tomar subespacios asociados

$$\begin{aligned} N(A), R(A^*) &\subseteq \mathbb{C}^n, \\ N(A^*), R(A) &\subseteq \mathbb{C}^m. \end{aligned}$$

Un importante resultado es que estos pares son complementos ortogonales.

**Teorema 1.5.18** Para cualquier matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} N(A) &= R(A^*)^\perp, \\ N(A^*) &= R(A)^\perp. \end{aligned}$$

**Proposición 1.5.19** Si  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , entonces

- i)  $N(A^*A) = N(A)$ ,
- ii)  $R(A^*A) = R(A^*)$ .

**Definición 1.5.20** Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$  distinto de cero, y  $\lambda \in \mathbb{C}$  es tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

entonces diremos que  $\lambda$  es un **valor propio** de  $A$  correspondiente al vector propio  $\mathbf{x}$ .

**Definición 1.5.21** El conjunto de valores propios de  $A$  es llamado **espectro** de  $A$  y se denota como  $\lambda(A)$ .

**Definición 1.5.22** Si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ , el subespacio

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

es llamado el **eigenespacio** (o **espacio propio**) de  $A$  correspondiente al valor propio  $\lambda$  denotado por  $A_\lambda$ , y su dimensión es llamada **la multiplicidad geométrica** del valor propio  $\lambda$ .

**Definición 1.5.23** Sean  $L$  y  $M$  subespacios de  $\mathbb{C}^n$  tales que  $L \oplus M = \mathbb{C}^n$ .

- Denotaremos por  $P_{L,M}$  a la transformación lineal que le asigna a cada  $x \in \mathbb{C}^n$  su proyección en  $L$  a lo largo de  $M$  y la llamaremos el **proyector en  $L$  a lo largo de  $M$** , o **proyector oblicuo**.
- Si  $M = L^\perp$ ,  $P_{L,M}$  se denotará simplemente como  $P_L$  y se llamará **proyector ortogonal**.

**Observación 1.5.24** Si  $P_L$  es como en la definición anterior, entonces  $P_L\mathbf{u} = \mathbf{u}$  si  $\mathbf{u} \in L$  y  $P_L\mathbf{u} = \mathbf{0}$  si  $\mathbf{u} \in L^\perp$ .

**Proposición 1.5.25** Sea  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ . Si  $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$  y  $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$  son matrices invertibles, entonces

- $\text{rango}(AQ) = \text{rango}(A)$ ,
- $\text{rango}(PA) = \text{rango}(A)$ , y por tanto ,
- $\text{rango}(PAQ) = \text{rango}(A)$ .

**Proposición 1.5.26** Sean  $T : V \rightarrow W$  y  $U : W \rightarrow Z$  transformaciones lineales sobre los espacios vectoriales  $V, W$  y  $Z$ , y sean  $A$  y  $B$  matrices tales que  $AB$  está definido. Entonces

- $\text{rango}(UT) \leq \text{rango}(U)$ ,
- $\text{rango}(UT) \leq \text{rango}(T)$ ,
- $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(A)$ ,
- $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(B)$ .

**Proposición 1.5.27** Sean  $A$  y  $B$  matrices tal que  $AB$  está definida. Entonces:

- (i)  $R(AB) = R(A) \iff \text{rango}(AB) = \text{rango}(A)$ ,
- (ii)  $N(AB) = N(B) \iff \text{rango}(AB) = \text{rango}(B)$ .

## 1.6. Forma normal de Hermite

**Definición 1.6.1** Una matriz en  $\mathbb{C}_r^{m \times n}$  se dirá que está en forma **normal de Hermite** si:

- las primeras  $r$  filas contienen por lo menos un elemento distinto de cero y las filas restantes contienen sólo ceros;
- hay  $r$  enteros  $c_r$  tales que
 
$$1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_r \leq n, \tag{1.6.1}$$
 y el primer elemento distinto de cero en la fila  $i \in \overline{1, r}$  aparece en la columna  $c_i$ ;
- todos los demás elementos en la columna  $c_i$  son cero,  $i \in \overline{1, r}$ , donde  $\overline{1, r}$  es el conjunto de índices  $\{1, 2, \dots, r\}$ .

Con una permutación adecuada de sus columnas, una matriz  $H \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  en la forma normal de Hermite puede convertirse en una matriz  $R$  con la siguiente forma

$$R = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} \tag{1.6.2}$$

donde  $O$  denota una matriz nula y  $K$  una matriz de  $m - r \times n - r$ .

**Proposición 1.6.2** Sea  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , sean  $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$  operaciones elementales por filas y sea  $P$  una matriz de **permutaciones** tal que para alguna matriz  $K \in \mathbb{C}^{m-r \times n-r}$ ,

$$EAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} \tag{1.6.3}$$

donde  $E = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$ .

En este caso se determina que  $A$  tiene rango  $r$ . La ecuación(1.6.3) se puede escribir como

$$A = E^{-1} \begin{bmatrix} E & K \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}. \quad (1.6.4)$$

Para más propiedades y ejemplos sobre cómo transformar una matriz a su forma normal de Hermite ver e.g. [1].

# Capítulo 2

## Inversas generalizadas

En este capítulo se estudiarán distintos tipos de inversas generalizadas, como lo es la inversa de Moore-Penrose, la inversa de Drazin y de manera particular la grupo inversa.

En los últimos años en el área de las matemáticas surgió la necesidad de encontrar algún tipo de inversa parcial para una matriz que sea singular o incluso rectangular. Por inversa generalizada de una matriz  $A$  dada, nos referiremos a una matriz  $X$  asociada de alguna manera con  $A$  que:

- exista para una clase de matrices mayor que la clase de matrices no singulares;
- tenga algunas de las propiedades de la inversa usual; y
- se reduzca a la inversa usual cuando  $A$  es no singular.

El propósito de construir una inversa generalizada para una matriz, es obtener una matriz que funcione como inversa dadas algunas condiciones. Esta matriz será útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, cadenas de Markov, entre otras aplicaciones, las cuales con la inversa usual no tendrían solución en el caso de que la matriz sea singular. En las aplicaciones muchas de las matrices resultantes son singulares, de manera que surge la necesidad de obtener aproximaciones de la inversa para obtener soluciones aproximadas al problema. En la mayoría de los problemas reales encontrar la solución exacta de estas ecuaciones es bastante difícil porque en muchos casos la matriz resulta ser no invertible, por lo que es más apropiado utilizar otros métodos como son las inversas generalizadas (ver e.g. [4]).

Algunos autores han usado el término “pseudoinversa” en lugar de “inversa generalizada” y la definen como cualquier matriz  $X$  que satisfaga:

$$AXA = A.$$

Más adelante veremos que para cada matriz  $A$  existe una o más matrices que satisfacen la condición anterior.

Si  $A$  fuera no singular, multiplicando  $A^{-1}$  por la derecha y por la izquierda, se obtiene:

$$X = A^{-1}.$$

Nosotros estamos interesados en el caso en que  $A$  es no invertible.

Con esta definición de inversa generalizada notemos que  $X$  no es única, como lo podemos ver en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.0.3** Las matrices  $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , y  $X_2 = \begin{bmatrix} -42 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  son inversas generalizadas de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$  ya que realizando los productos obtenemos

$$AX_1A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} = A$$

por lo tanto  $X_1$  es inversa generalizada de  $A$ .

Y

$$AX_2A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -42 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} = A$$

por tanto, también  $X_2$  es inversa generalizada de  $A$ .

## 2.1. La inversa de Moore-Penrose

Sea  $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  la transformación lineal definida por  $Tx = Ax$  para  $x \in \mathbb{C}^n$ . Notemos que si se restringe  $T$  a  $N(A)^\perp = R(A^*)$  entonces  $N(T|_{R(A^*)}) = \{\mathbf{0}\}$  y así por la Proposición 1.5.10,  $T|_{R(A^*)}$  es inyectiva, lo cual nos da una idea para la primera definición de inversa generalizada.

**Definición 2.1.1** (Definición funcional de la inversa generalizada.)

Si  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , defínase la transformación lineal  $T^\dagger : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$  por  $T^\dagger(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$  si  $\mathbf{y} \in R(A)^\perp$ , y  $T^\dagger(\mathbf{y}) = (T|_{R(A^*)})^{-1}\mathbf{y}$  si  $\mathbf{y} \in R(A)$ . La matriz de  $T^\dagger$  es denotada  $A^\dagger$  y llamada **la inversa generalizada de  $A$** .

Notemos que  $\mathbf{y} \in R(A)^\perp \Rightarrow AA^\dagger\mathbf{y} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ , y  $\mathbf{y} \in R(A) \Rightarrow$  existe  $x \in R(A^*)$  tal que  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \in R(A) \Rightarrow T^\dagger(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ , y así,  $AA^\dagger\mathbf{y} = TT^\dagger(\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ . Por otra parte, si  $\mathbf{x} \in R(A^*)^\perp = N(A)$  entonces  $A^\dagger A\mathbf{x} = A^\dagger\mathbf{0} = \mathbf{0}$ , y si  $\mathbf{x} \in R(A^*) = R(A^\dagger)$  entonces  $A^\dagger A\mathbf{x} = T^\dagger T(\mathbf{x}) = ((T|_{R(A^*)})^{-1}T)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

**Observación 2.1.2** De lo anterior, y por la Observación 1.5.24 se sigue que  $AA^\dagger$  es el proyector ortogonal de  $\mathbb{C}^m$  sobre  $R(A)$ , mientras que  $A^\dagger A$  es el proyector ortogonal de  $\mathbb{C}^n$  sobre  $R(A^*) = N(A)^\perp = R(A^\dagger)$ .

Esto nos sugiere una segunda definición de la inversa generalizada, la cual se atribuye a E. H. Moore:

**Definición 2.1.3** (Definición de Moore de la inversa generalizada.)

Si  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , entonces **la inversa generalizada de  $A$**  se define como la única matriz  $A^\dagger$  tal que

(a)  $AA^\dagger = P_{R(A)}$ ,

(b)  $A^\dagger A = P_{R(A^\dagger)}$ .

En 1955 Penrose dio otra definición de manera independiente y sin conocer el trabajo de Moore, cuya notación era muy complicada.

**Definición 2.1.4** (Definición de Penrose de la inversa generalizada.)

La inversa generalizada de  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , es la única matriz  $A^\dagger$  que cumple:

(1)  $AA^\dagger A = A$ ,

(2)  $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ ,

(3)  $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$ ,

(4)  $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$ .

A las cuatro ecuaciones mencionadas anteriormente se les conoce como **Ecuaciones de Moore-Penrose**.

**Teorema 2.1.5** [4, Theorem 1.1.1] Las definiciones 2.1.1, 2.1.3 y 2.1.4 son equivalentes.

**Demostración:**

Notemos que de la Observación 2.1.2 se tiene que  $AA^\dagger$  es idempotente y además  $AA^\dagger = P_{R(A)}$ , de manera similar se puede ver que  $A^\dagger A$  es idempotente y que  $A^\dagger A = P_{R(A^\dagger)}$ . Por tanto si  $A^\dagger$  satisface 2.1.1 entonces también cumple las ecuaciones (a) y (b) de la Definición 2.1.3.

Ahora vamos a demostrar que las inversa de Moore implican las de Penrose. Sea  $AA^\dagger = P_{R(A)}$  multiplicando por  $A$  por la derecha tenemos  $AA^\dagger A = P_{R(A)}A$ . Sea  $x \in \mathbb{C}^n$ , entonces por la observación 1.5.24 podemos decir que si  $Ax \in R(A)$  entonces esto implica que  $AA^\dagger A = P_{R(A)}A = Ax$ , por tanto  $AA^\dagger A = A$  y así demostramos que *a*) implica el inciso (1).

Para el inciso (2), se hace de manera análoga, es decir, por *b*)  $AA^\dagger = P_{R(A^\dagger)}$  multiplicando ambos lados por la derecha por  $A^\dagger$  tenemos  $A^\dagger AA^\dagger = P_{R(A^\dagger)}A^\dagger$  y de igual manera por la Observación 1.5.24 se tiene que  $P_{R(A^\dagger)}A^\dagger = A^\dagger$ , por tanto  $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$  por lo que cumple (2). Para los incisos (3) y (4) al ser proyectores ortogonales se cumple.

Ahora probaremos que las ecuaciones de Penrose implican las de Moore.

Supongamos que  $A^\dagger$  satisface las cuatro ecuaciones de Penrose entonces por el inciso (2) tenemos que  $A^\dagger AA^\dagger = A \Rightarrow (AA^\dagger)^2 = AA^\dagger AA^\dagger = AP_{R(A^\dagger)}A^\dagger = AA^\dagger$ , y por el inciso (3)  $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$ . Por lo anterior  $AA^\dagger$  es un proyector ortogonal, es decir, los vectores de  $\mathbb{R}^n$  son ortogonales a  $R(AA^\dagger)$  con base a esto para probar *b*) bastaría demostrar que  $R(AA^\dagger) = R(A)$ .

Para ello sabemos que dadas dos matrices cualesquiera  $P$  y  $Q$  el rango del producto de ellas va a estar contenida en el rango de la primer matriz, es decir,

$$R(PQ) \subseteq R(P)$$

usando lo anterior, podemos decir

$$R(A) = R(AA^\dagger A) \quad \text{por 1)}$$

además

$$R(AA^\dagger A) \subseteq R(AA^\dagger) \subseteq R(A)$$

entonces

$$R(AA^\dagger) = R(A)$$

y por lo tanto

$$AA^\dagger = P_{R(A)}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned} R(A^\dagger) &= R(A^\dagger AA^\dagger) \quad \text{por 2)} \\ &= R(A^\dagger AA^\dagger) \subseteq R(A^\dagger A) \subseteq R(A^\dagger) \end{aligned}$$

entonces

$$R(A^\dagger A) = R(A^\dagger)$$

y por lo tanto

$$AA^\dagger = P_{R(A^\dagger)}$$

Ahora veamos que si  $A^\dagger$  satisface 2.1.3 y 2.1.4 entonces satisface 2.1.1, con esto  $A^\dagger$  será única y quedarán demostradas todas las equivalencias. Supongamos que  $A^\dagger$  satisface las ecuaciones (1) – (4), (a) y (b). Si  $y \in R(A)^\perp$ , entonces por el inciso (a),  $AA^\dagger y = 0$ . Además por (2)  $A^\dagger y = A^\dagger AA^\dagger y = A^\dagger 0 = 0$ . Si  $y \in R(A)$ , entonces existe  $x \in R(A^*)$  tal que  $Ax = y$ , luego por inciso (b) tenemos que  $A^\dagger y = A^\dagger Ax = P_{R(A^\dagger)}(x)$ . Además por (1)

$$AA^\dagger A = A \Rightarrow (AA^\dagger A)^* = A^* \Rightarrow (A^\dagger A)^* A^* = A^*,$$

de donde por (4) se tiene que  $(A^\dagger A)A^* = A^*$ . Así

$$x \in R(A^*) = R(A^\dagger AA^*) \subseteq R(A^\dagger).$$

Por lo tanto,  $A^\dagger y = P_{R(A^\dagger)}(x) = x$ , pero  $x = (T|R(A^*))^{-1}y$ . Por lo que  $A^\dagger$  satisface 2.1.1, con lo cual se concluye la demostración. ■

**Definición 2.1.6** Sea  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  una matriz, se define como **Inversa de Moore-Penrose** de  $A$  y se denota como  $A^\dagger$  a toda matriz  $X$  que satisfaga las siguientes cuatro ecuaciones

$$AXA = A \tag{1}$$

$$XAX = X \tag{2}$$

$$(AX)^* = AX \tag{3}$$

$$(XA)^* = XA \tag{4}$$

Si una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{C}^{n^2}$ , no singular, entonces  $X = A^{-1}$  y satisface las cuatro ecuaciones anteriores.

**Definición 2.1.7** Para  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $A\{i, j, \dots, k\}$  denota el conjunto de las matrices  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  que satisfacen las ecuaciones (i), (j), ..., (k) de (1) a (4). Una matriz  $X \in A\{i, j, \dots, k\}$  se conoce como  $\{i, j, \dots, k\}$ -**inversa de A** y se denotará por  $A^{(i, j, \dots, k)}$ .

Por ejemplo, si  $X$  cumple (1) se le llama  $\{1\}$ -inversa. Si además cumple la ecuación (2) se le llama  $\{1, 2\}$ -inversa (también  $\{2\}$ -inversa), etc.

**Proposición 2.1.8** Si  $A \{1, 2, 3, 4\}$  no es vacío, entonces consta en un solo elemento.

**Demostración:**

Sean  $X, Y \in A\{1, 2, 3, 4\}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 X &= XAX && \text{por(3)} \\
 &= X(AX)^* \\
 &= XX^*A^* && \text{por(1)} \\
 &= XX^*A^*Y^*A^* \\
 &= X(AX)^*(AY)^* && \text{por(3)} \\
 &= XAXAY && \text{por(2)} \\
 &= XAY && \text{por(1)} \\
 &= XAYAY && \text{por(4)} \\
 &= (XA)^*(YA)^*Y \\
 &= A^*X^*A^*Y^*Y && \text{por(1)} \\
 &= A^*Y^*Y \\
 &= (YA)^*Y && \text{por(4)} \\
 &= YAY && \text{por(2)} \\
 &= Y.
 \end{aligned}$$

■

## 2.2. Construcción de $\{1\}$ -inversa

Dadas las cuatro ecuaciones de Penrose introduciremos la siguiente notación de matrices cuando estas cumplan una de las cuatro ecuaciones.

Dada una matriz  $R \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  expresada como en (1.6.2) es decir

$$R = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix}$$

es fácil construir una  $\{1\}$ -inversa, pues para cualquier  $L \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ , la matriz

$$S = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix}$$

de  $n \times m$ , es una  $\{1\}$ -inversa de  $R$  ya que

$$RSR = \begin{bmatrix} I_r & KL \\ O & O \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} I_r & KL \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} = R.$$

Notemos que si  $R$  tiene rango completo de columna (i.e. si  $r = n$ ) entonces

$$R = \begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix} \quad y \quad S = \begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix},$$

por otra parte si  $R$  tiene rango completo de fila (i.e. si  $r = m$ ) entonces

$$R = \begin{bmatrix} I_r & K \end{bmatrix} \quad y \quad S = \begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}.$$

De esta manera, por la Proposición 1.6.2, el siguiente teorema muestra que la construcción de una  $\{1\}$ -inversas para  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  arbitraria se simplifica transformando  $A$  en una forma normal de Hermite.

**Teorema 2.2.1** Dada  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ . Si  $E \in \mathbb{C}_m^{m \times m}$  y  $P \in \mathbb{C}_n^{n \times n}$  son tales que

$$EAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix}, \quad (2.2.1)$$

entonces para cualquier  $L \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (m-r)}$  la matriz  $n \times m$

$$X = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix} E \quad (2.2.2)$$

es una  $\{1\}$ -inversa de  $A$ . Las matrices  $EAP$  y  $X$  pueden ser reinterpretadas si  $r = n$  o si  $r = m$ .

**Demostración:**

Por (1.6.4) podemos expresar a  $A$  como

$$A = E^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1},$$

y de esta manera

$$\begin{aligned} AXA &= E^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix} E E^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= E^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} = E^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} = A \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier matriz  $X$  que sea de la forma de la ecuación (2.2.2), satisface  $AXA = A$ , es decir, es  $\{1\}$ -inversa de  $A$ . ■

**Ejemplo 2.2.2** Consideremos la siguiente matriz rectangular:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con  $\text{rango}(A) = 2$ .

Sean  $E \in \mathbb{C}^{m \times m}$  y  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , donde  $E$  son las transformaciones elementales por filas de  $A$  y  $P$  es la matriz permutación de  $A$ .

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verificamos

$$EAP = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sea  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$L = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Aplicando el Teorema 2.2.1 tenemos que la  $\{1\}$ -inversa de  $A$  es:

$$\begin{aligned} X &= P \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & L \end{pmatrix} E \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha/2 & \alpha/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ \beta/2 & \beta/3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos ver que la matriz  $X$  no es única, ya que  $\alpha$  y  $\beta$  pueden tomar cualquier valor en  $\mathbb{C}$ . Por ejemplo, para  $X_{\{1\}}$ ,  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$

$$X_{\{1\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

y para  $X_{\{2\}}$ ,  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$

$$X_{\{2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ambas matrices,  $X_{\{1\}}$  y  $X_{\{2\}}$  satisfacen la ecuación (1) de Moore-Penrose.

### Propiedades

A continuación se muestran algunas propiedades importantes de las  $\{1\}$  - inversas.

Dada una matriz  $A$  denotaremos la  $\{1\}$  - inversa por  $A^{(1)}$ .

**Lema 2.2.3** Sea  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , entonces:

- $(A^{(1)})^* \in A^* \{1\}$ ,
- si  $A$  es no singular, entonces  $A^{(1)} = A^{-1}$ ,
- $AA^{(1)}$  y  $A^{(1)}A$  son idempotentes y tienen el mismo rango que  $A$ ,
- $\text{rango}(A)^{(1)} \geq \text{rango}(A)$ ,
- $A^{(1)}A = I_n$  si y sólo si  $r = n$ ,
- $AA^{(1)} = I_m$  si y sólo si  $r = m$ .

## 2.3. Existencia y construcción de la $\{1,2\}$ -Inversa

Bjerhammar notó por primera vez que la existencia de una  $\{1\}$ -inversa de una matriz  $A$  implica la existencia de una  $\{1, 2\}$ -inversa de la misma matriz (ver [2]). Esto se puede ver en el siguiente lema.

**Lema 2.3.1** Sea  $Y, Z \in A\{1\}$  y sea

$$X = YAZ,$$

entonces  $X \in A\{1, 2\}$ .

Dado que las matrices  $A$  y  $X$  ocurren simétricamente en (1) y (2),  $X \in A\{1, 2\}$  y  $A \in X\{1, 2\}$  son declaraciones equivalentes, y en cualquier caso podemos decir que  $A$  y  $X$  son  $\{1, 2\}$  -inversas entre ellos.

Bjerhammar, demostró que si  $X$  es una  $\{1\}$  -inversa de  $A$  y tiene el mismo rango que  $A$ , entonces  $X$  es una  $\{1, 2\}$  -inversa de  $A$ .

**Teorema 2.3.2** (Bjerhammar) Dado  $A$  y  $X \in A\{1\}$ , se cumple que  $X \in A\{1, 2\}$  si y sólo si  $\text{rango}(X) = \text{rango}(A)$ .

### Demostración:

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que el  $\text{rango}(X) = \text{rango}(A)$ , por el Lema 2.2.3,  $\text{rango}(XA) = \text{rango}(A) = \text{rango}(X)$ . Entonces  $R(A) = R(X)$ , por la Proposición 1.5.27. Luego por la Proposición 1.5.13 se tiene

$$XAY = X$$

para alguna  $Y$ . Multiplicando por  $A$  tenemos

$$AX = AXAY = AY$$

por lo tanto

$$XAX = X.$$

( $\Rightarrow$ ) Se sigue de manera similar. ■

**Corolario 2.3.3** *Dos de las siguientes tres afirmaciones implican la tercera:*

$$X \in A\{1\},$$

$$X \in A\{2\},$$

$$\text{rango}(X) = \text{rango}(A).$$

## 2.4. Existencia y construcción de $\{1, 2, 3\}$ -, $\{1, 2, 4\}$ - y $\{1, 2, 3, 4\}$ -Inversa

Así como Bjerhammar demostró que la existencia de la  $\{1\}$ -inversa implica la existencia de  $\{1, 2\}$ -inversa, Urquhart ha demostrado que la existencia de un  $\{1\}$  -inversa de cada la matriz finita con elementos en  $\mathbb{C}$  implica la existencia de  $\{1, 2, 3\}$ -inversa y  $\{1, 2, 4\}$ -inversa de cada matriz, (ver e.g. [25]).

**Lema 2.4.1** *Para cualquier matriz finita  $A$ ,*

$$\text{rango}(AA^*) = \text{rango}(A) = \text{rango}(A^*A).$$

**Corolario 2.4.2** *Para cualquier matriz finita  $A$ ,*

$$R(AA^*) = R(A)$$

*y*

$$N(AA^*) = N(A).$$

**Teorema 2.4.3** [25, Urquhart] *Para cada matriz  $A$  con elementos en los complejos,*

$$Y = (A^*A)^{(1)}A^* \in A \in \{1, 2, 3\}$$

*y*

$$Z = A^*(AA^*)^{(1)} \in A\{1, 2, 4\}.$$

**Teorema 2.4.4** [25, Urquhart] *Para cualquier matriz finita  $A$  de elementos complejos,*

$$A^{(1,4)} A A^{(1,3)} = A^\dagger \tag{2.4.1}$$

**Demostración:**

Denotaremos como  $X$  el lado izquierdo de la ecuación (2,4,1), por el Lema 2.3.1 se deduce que que  $X \in A\{1, 2\}$ , además

$$\begin{aligned} AX &= AA^{(1,4)}AA^{(1,3)} = AA^{(1,3)} & y \\ XA &= A^{(1,4)}AA^{(1,3)}A = A^{(1,4)}A. \end{aligned}$$

Sin embargo,  $AA^{(1,3)}$  y  $A^{(1,4)}A$  son hermitianos, por la definición de  $AA^{(1,3)}$  y  $A^{(1,4)}A$ , por lo tanto

$$X \in A\{1, 2, 3, 4\}.$$

Sin embargo, por la Observación 2.1.8,  $X \in A\{1, 2, 3, 4\}$  contiene a lo más un solo elemento. Por lo tanto, contiene exactamente un elemento, es decir  $A^\dagger$  y  $X = A^\dagger$ . ■

## 2.5. Ejemplos de inversas generalizadas

A continuación se mostrarán ejemplos de algunas inversas para una matriz dada, con lo cual veremos que estas inversas no son únicas, con excepción de la de Moore-Penrose.

- **Construcción de  $\{1\}$ -inversa:** Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.1}$$

buscamos la matriz  $X$  que cumpla

$$AXA = A, \tag{2.5.2}$$

es decir si

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces se debe cumplir

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pero en el lado izquierdo tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para que se cumpla (1) se debe satisfacer

$$a = 1, \quad y \quad b, c, d \in \mathbb{C}$$

por lo que las  $\{1\}$ -inversas de la matriz  $A$  son de la forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con } b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Veamos otro ejemplo, si

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

En este caso la matriz  $X$  también es  $\{1\}$ -inversa de la matriz  $A$ .

■ **Construcción de  $\{2\}$ -inversa:**

Dada la anterior matriz  $A$ , ahora queremos encontrar una matriz  $X$  tal que cumpla la ecuación:

$$XAX = X$$

por lo que tenemos

$$XAX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

realizando el producto de matrices del lado izquierdo

$$XAX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ac & bc \end{pmatrix}$$

por lo que la matriz  $X$  tiene que cumplir

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = a \\ ab = b \\ ac = c \\ bc = d \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1 \quad \text{o} \quad a = 0.$$

Si  $a = 1$  entonces  $d = bc$  y  $b, c \in \mathbb{C}$ .

Si  $a = 0$  entonces  $b = c = d = 0$ .

Entonces las  $\{2\}$ -inversas de la matriz  $A$  son de la forma

$$X_{\{2,0\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_{\{2,1\}} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & bc \end{pmatrix}$$

con  $b, c \in \mathbb{C}$ .

La matriz  $X_{\{2,0\}}$  es  $\{2\}$ -inversa pero no es  $\{1\}$ -inversa. Notemos que toda  $\{1\}$ -inversa es también  $\{2\}$ -inversa siempre y cuando  $\text{rango}(A) = \text{rango}(X)$ . Para que esta condición no se cumpla, basta que  $bc \neq d$ .

Para ser  $\{2\}$ -inversa se debe cumplir  $XAX = X$ . Recordando las restricciones tenemos nuestra matriz  $X$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$XAX = X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X.$$

Siendo esta la única matriz que solamente es  $\{2\}$ -inversa mas no es  $\{1\}$ -inversa de  $A$ .

Por otro lado verificando el Teorema 2,3,2, en el cual Bjerhammar nos dice que toda  $\{1\}$ -inversa implica la existencia de  $\{2\}$ -inversa, tenemos que

$$XAX = X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = X,$$

por lo tanto  $X$  es una  $\{2\}$ -inversa de  $A$ , pues la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  es  $\{1\}$ -inversa de  $A$ .

■ **Construcción de  $\{3\}$ -inversa:**

Dada la matriz  $A$  ahora queremos encontrar una matriz  $X$  tal que cumpla la ecuación

$$(AX)^* = AX$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]^* &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para que lo anterior se cumpla tenemos que tener que  $b = 0$  y  $a, c, d \in \mathbb{C}$ . Por consiguiente, las  $\{3\}$ -inversas de la matriz  $A$  son de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

con  $a, c, d \in \mathbb{C}$ .

■ **Construcción de  $\{4\}$ -inversa:**

La construcción de la  $\{4\}$ -inversa será análoga a la  $\{3\}$ -inversa, pero ahora encontraremos la matriz que satisfaga la cuarta ecuación de Penrose

$$(XA)^* = XA$$

es decir

$$\left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que esto se cumpla tenemos que tomar  $c = 0$  y  $a, b, d \in \mathbb{C}$ . Por lo que las  $\{3\}$ -inversas son de la matriz  $A$  de la forma

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

con  $c = 0$ ,  $a, b, d \in \mathbb{C}$ .

A continuación construimos todas las combinaciones posibles.

■ **Construcción de  $\{1, 3\}$ -inversa:**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

con  $a = 1, b = 0$  y  $c, d \in \mathbb{C}$ .

■ **Construcción de  $\{1, 4\}$ -inversa:**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

con  $c = 0$  y  $a, b, d \in \mathbb{C}$ .

■ **Construcción de  $\{2, 3\}$ -inversa:**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

con  $a = 1, b = d = 0$  y  $c \in \mathbb{C}$ .

Y también la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ **Construcción de  $\{2, 4\}$ -inversa:**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con  $a = 1, c, d = 0$  y  $b \in \mathbb{C}$ .

Y también la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Construcción de  $\{3, 4\}$ -inversa:**

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

con  $b = c = 0$  y  $a, d \in \mathbb{C}$ .

- **Construcción de  $\{1, 2, 3\}$ -inversa:**

Recordemos que las  $\{1, 2\}$ -inversas para la matriz  $A$  son de la forma  $a = 1$ ,  $bc = d$  y una  $\{3\}$ -inversa es de la forma  $b = 0$ ,  $a, c, d \in \mathbb{C}$ , por lo que la construcción de la  $\{1, 2, 3\}$ -inversa es de la forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

con  $c \in \mathbb{C}$ .

- **Construcción de  $\{1, 2, 4\}$ -inversa:**

Nuevamente recordando las  $\{1, 2\}$ -inversas y  $\{4\}$ -inversa obtenemos nuestra matriz  $X$  de la forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $a = 1, c = d = 0$  y  $b \in \mathbb{C}$ .

- **Construcción de  $\{2, 3, 4\}$ -inversa:**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con  $a = 1, b = c = d = 0$ .

- **Construcción de la Inversa de Moore-Penrose**

Esta inversa debe cumplir con las cuatro ecuaciones mencionadas anteriormente. La única forma para que esto suceda es que la matriz  $X$  quede de la siguiente forma:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo esta matriz, inversa de Moore-Penrose de  $A$ .

A continuación enlistaremos algunas propiedades de la inversa de Moore-Penrose

- $(A^\dagger)^\dagger = A$ ,

- $(A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger$ ,
- Si  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$  donde  $\lambda^\dagger = \frac{1}{\lambda}$  si  $\lambda \neq 0$ , y  $\lambda^\dagger = 0$  si  $\lambda = 0$ ,
- $A^* = A^* A A^\dagger = A^\dagger A A^*$ ,
- $(A^* A)^\dagger = A^\dagger A^{*\dagger}$ ,
- $A^\dagger = (A^* A)^\dagger A^* = A^* (A A^*)^\dagger$ .

## 2.6. Fórmula explícita para $A^\dagger$

En 1959 C.C. MacDuffee señaló que una factorización de rango completo de una matriz  $A$  conduce a una fórmula explícita para la inversa de Moore-Penrose,  $A^\dagger$ , (ver [14]).

**Teorema 2.6.1** [1, Theorem 5] (MacDuffee) Si  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $r > 0$ , tiene una factorización de rango completo

$$A = FG \tag{2.6.1}$$

entonces

$$A^\dagger = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^*. \tag{2.6.2}$$

**Ejemplo 2.6.2** Determinaremos la inversa de Moore-Penrose de la matriz  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Obtenemos las matrices  $F$  y  $G$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando  $A^\dagger = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^*$  tenemos:

$$\begin{aligned} G^*(F^*AG^*)^{-1}F^* &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [70]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [1/70] \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ A^\dagger &= \begin{bmatrix} 1/70 & 1/35 \\ 3/70 & 3/35 \\ 1/35 & 2/35 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.6.3** Encontraremos todas las soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (2.6.3)$$

Determinando una inversa generalizada de la matriz de coeficientes, tenemos:

$$x = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & -9 & 8 & 0 & 0 \\ -5 & 21 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por tanto, al sustituir en la fórmula de todas las soluciones

$$x = Gb + (GA - I)Z, \quad (2.6.4)$$

obtenemos:

$$x = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & -9 & 8 & 0 & 0 \\ -5 & 21 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -7/15 \\ 0 & 0 & 0 & 28/15 \\ 0 & 0 & 0 & -9/15 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

calculamos

$$x = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -6 & -7z_4 \\ 69 & 28z_4 \\ & -9z_4 \\ & 15z_4 \end{bmatrix}. \quad (2.6.5)$$

Introduciremos nuevas inversas generalizadas que tengan algunas de las propiedades espectrales de la inversa de una matriz no singular. Consideremos matrices cuadradas, ya que solo con ellas se pueden definir los conceptos de valores propios y vectores propios.

Recordemos las cuatro ecuaciones de Moore-Penrose las cuales son aplicadas en matrices rectangulares.

$$AXA = A \quad (1)$$

$$XAX = X \quad (2)$$

$$(AX)^* = AX \quad (3)$$

$$(XA)^* = XA \quad (4)$$

Ahora agregaremos las siguientes ecuaciones aplicadas a matrices cuadradas

$$A^k X A = A^k \tag{1^k}$$

$$AX = XA \tag{5}$$

$$A^k X = X A^k \tag{5^k}$$

$$AX^k = X^k A \tag{6^k}$$

donde  $k$  es algún entero positivo.

Una matriz que cumple las ecuaciones  $\{1^k, 2, 5\}$  se conoce como **la inversa de Drazin**, una de las propiedades más importantes que tiene este tipo de inversa son sus propiedades espectrales, esto se debe a las diversas aplicaciones que se le pueden dar. También se tratará *la grupo inversa*, la cual es un caso especial de la inversa de Drazin.

## 2.7. El índice de una matriz

**Proposición 2.7.1** *El conjunto de las ecuaciones  $(1^k), (2)$  y  $(5)$  son equivalente al conjunto de ecuaciones*

$$AX = XA \tag{5}$$

$$A^{k+1}X = A^k \tag{7}$$

$$AX^2 = X \tag{8}$$

con  $k$  entero positivo.

**Demostración:**

Dado el primer conjunto de ecuaciones  $((1^k), (2)$  y  $(5))$ , se pueden obtener las ecuaciones  $(7)$  y  $(8)$ .

$$\begin{aligned} A^{k+1}X &= A^k AX && \text{por (5)} \\ &= A^k XA && \text{por (1}^k) \\ &= A^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AX^2 &= AXX && \text{por (5)} \\ &= XAX && \text{por (2)} \\ &= X. \end{aligned}$$

Al cumplirse las igualdades de las ecuaciones (5), (7) y (8), entonces se cumplen las ecuaciones (1<sup>k</sup>) y (2).

$$\begin{aligned} XAX &= AXX && \text{por (5)} \\ &= AX^2 && \text{por (8)} \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^k X A &= A^k A X && \text{por (5)} \\ &= A^{k+1} A && \text{por (7)} \\ &= A^k. \end{aligned}$$

■

Deducimos que si (7) se cumple para algún entero  $k$  positivo, entonces se cumple para cada entero  $\ell > k$ . Se deduce también de (7) que

$$\text{rango}(A^k) = \text{rango}(A^{k+1}). \quad (2.7.4)$$

Por lo tanto, una solución  $X$  para (7) (y, en consecuencia, del conjunto (5), (7), (8)) existe solo si se cumple (2.7.4). Respecto a esto, la siguiente definición es útil.

**Definición 2.7.2** *El entero positivo  $k$  más pequeño para el que (2.7.4) se cumple, se denomina índice de  $A$  y se denota como  $\text{Ind}(A)$ .*

**Ejemplo 2.7.3** A continuación veremos un ejemplo de cómo obtener el índice de una matriz. Consideremos la matriz  $A$  como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con  $\text{rango}(A) = 2$ , elevando al cuadrado y al cubo la matriz  $A$  tenemos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que para las potencias que sean mayor que dos de la matriz  $A$ , el  $\text{rango}(A) = 0$ . Por lo tanto el entero no negativo más pequeño  $k$  para el cual se cumple que  $\text{rango}(A^k) = \text{rango}(A^{k+1})$ , es 3, por lo tanto  $\text{Ind}(A) = 3$ .

## 2.8. La grupo inversa

El nombre de *grupo inversa* fue dado por I. Erdélyi [6], porque dada una matriz  $A$ , las potencias positivas y negativas junto con el proyector  $AA^\#$  como elemento unitario (ver Definición 2.8.1), forman un grupo abeliano como veremos en el Corolario 4.2.3. A este conjunto le llamaremos *conjunto inversoide* y en el Capítulo 4 demostraremos que es un grupo topológico.

**Definición 2.8.1** Sea una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces **la grupo inversa**, denotada por  $A^\#$ , de  $A$  es la matriz  $X$  que satisface las siguientes condiciones.

$$AXA = A, \tag{1}$$

$$XAX = X, \tag{2}$$

$$AX = XA. \tag{5}$$

Tanto a Erdélyi como Englefield les llamó la atención las propiedades espectrales de la grupo inversa. Sin embargo, como veremos más adelante, la grupo inversa es un caso particular del inverso de Drazin, este tipo de inversa no esta restringida a matrices diagonales, sin embargo no existe para todas las matrices cuadradas, esta inversa existe si y sólo si  $R(A)$  y  $N(A)$  son subespacios complementarios, esto es equivalente a que el  $Ind(A) = 1$ , por lo tanto tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.8.2** Una matriz cuadrada  $A$  tiene una grupo inversa si y sólo si  $Ind(A) = 1$ , es decir,

$$rango(A) = rango(A)^2. \tag{2.8.4}$$

Si la grupo inversa existe, entonces es única.

**Definición 2.8.3** Sea  $A$  una matriz cuadrada, decimos que  $A$  es una **matriz de rango Hermitiano** si

$$R(A^*) = R(A)$$

o equivalentemente, si

$$N(A^*) = N(A).$$

**Proposición 2.8.4** Una matriz cuadrada  $A$  es de rango Hermitiano si y sólo si existe una matriz  $Y$  tal que

$$A^* = YA.$$

El siguiente teorema da una condición alternativa para la existencia de  $A^\#$ , y una fórmula explícita para su cálculo.

**Teorema 2.8.5** Sea  $A$  una matriz cuadrada que tenga la factorización de rango completo

$$A = FG. \tag{2.8.5}$$

Entonces la matriz  $A$  tiene una grupo inversa si y sólo si  $GF$  es no singular, en ese caso

$$A^\# = F(G)^{-2}G. \tag{2.8.6}$$

**Demostración:**

Sea  $r = rango(A)$ . Entonces  $GF \in \mathbb{C}^{r \times r}$ . Ahora

$$A^2 = FGFG$$

y así, por 2.8.4

$$\text{rango}(A^2) = \text{rango}(GF).$$

Por lo tanto la Proposición (2.8.4) se cumple si y sólo si  $GF$  es no singular, y se tiene la primera parte del teorema. Ahora vemos que las ecuaciones (1), (2) y (5) se cumplen con  $A$  dada por (2.8.5) y  $X$  con el lado derecho de la ecuación (2.8.6). Luego la fórmula (2.8.6) se deriva de la unicidad de la grupo inversa. ■

A continuación enlistaremos algunas propiedades de la grupo inversa y un teorema que relaciona la grupo inversa con la inversa de Moore-Penrose.

- $A^\# = A^{-1}$ , si  $A$  es no singular,
- $A^{\#\#} = A$ ,
- $A^{*\#} = A^{\#*}$ ,
- $A^{t\#} = A^{\#t}$ .

**Teorema 2.8.6**  $A^\# = A^\dagger$  si y sólo si  $A$  es de rango Hermitiano.

La grupo inversa tiene propiedades espectrales comparables a las de la inversa de una matriz no singular. Sin embargo, en este caso,  $A^\#$  no es la única matriz que tiene tales propiedades, ya que las matrices no singulares también cuentan con ellas.

Veamos que si una matriz cuadrada  $A$  tiene  $\text{Ind}(A) = 1$ , sus vectores cero son todos de grado uno, es decir son vectores nulos de  $A$ , esto se deduce de que la ecuación (2.8.4) implica  $N(A^2) = N(A)$ .

A continuación se darán dos lemas necesarios para establecer las propiedades espectrales de la grupo inversa.

**Lema 2.8.7** Sea  $x$  un  $\lambda$ -vector de  $A$  con  $\lambda \neq 0$ . Entonces  $x \in R(A^\ell)$ , donde  $\ell$  es un entero positivo arbitrario.

**Lema 2.8.8** Sea  $A$  una matriz cuadrada y sea

$$XA^{\ell+1} = A^\ell$$

para algún entero positivo  $\ell$ . Entonces, cada  $\lambda$ -vector de  $A$  de grado  $p$  para  $\lambda = 0$  es un  $\lambda$ -1-vector de  $X$  de grado  $p$ .

## 2.9. La inversa de Drazin

**Definición 2.9.1** Sea  $A$  una matriz cuadrada  $n \times n$ , entonces la **inversa de Drazin**, denotada por  $A^D$ , de  $A$  es la matriz  $X$  que satisface las siguientes condiciones.

$$A^k X A = A^k, \tag{1^k}$$

$$X A X = X, \tag{2}$$

$$AX = XA, \tag{5}$$

donde  $\text{Ind}(A)$ , es decir, el entero no negativo más pequeño  $k$  para el cual se cumple  $\text{rango}(A^k) = \text{rango}(A^{k-1})$ .

**Proposición 2.9.2** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Si existe una matriz  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que se cumple

$$A^{k+1}X = A^k$$

para algún entero positivo  $k$ , entonces

$$\text{rango}(A^{k+1}) = \text{rango}(A^k).$$

**Demostración:**

Por un lado tenemos

$$A^{k+1} = A^k A \Rightarrow \text{rango}(A^{k+1}) \leq \text{rango}(A^k),$$

por el otro lado,

$$A^k = A^{k+1}X \Rightarrow \text{rango}(A^k) \leq \text{rango}(A^{k+1}).$$

Por lo tanto como consecuencia tenemos que

$$\text{rango}(A^k) = \text{rango}(A^{k+1}).$$

■

**Observación 2.9.3** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz invertible, entonces la inversa de Drazin de  $A$  coincide con la matriz  $A^{-1}$ .

**Teorema 2.9.4** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y sea  $\text{Ind}(A) = k$ . Si existe una matriz  $X$  tal que  $X \in A\{1^k, 2, 5\}$ , entonces  $X$  es la única  $\{1^k, 2, 5\}$ -inversa de  $A$ .

**Demostración:**

Sean  $X, Y \in A\{1^k, 2, 5\}$ , y consideremos las matrices

$$E = AX = XA \quad y \quad F = AY = YA.$$

Por propiedad (5),  $E$  y  $F$  son matrices idempotentes

$$\begin{aligned} E^2 &= (AX)(AX) && (X \in A\{2\}) \\ &= AX = E, \\ F^2 &= (AY)(AY) && (Y \in A\{2\}) \\ &= AY = F. \end{aligned}$$

En primer lugar vamos a ver  $E = F$

$$\begin{aligned}
 E &= AX && (E \text{ idempotente}) \\
 &= A^k X^k && (Y \in A\{1^k\}) \\
 &= A^k Y A X^k \\
 &= A^{k-1} A Y A X^k && (Y \in A\{5\}) \\
 &= A^{k-1} Y A A X^k = \dots \\
 &= A Y A^k X^k = F A^k X^k \\
 &= F A X = F E
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= Y A && (F \text{ idempotente}) \\
 &= Y^k A^k && (X \in A\{1^k\}) \\
 &= Y^k A^k X A = \dots \\
 &= Y A E = F E.
 \end{aligned}$$

Luego  $E = F$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 X &= X A X = E X && (X \in A\{2\}) \\
 &= F X = Y A X \\
 &= Y E = Y F \\
 &= Y A Y && (Y \in A\{2\}) \\
 &= Y.
 \end{aligned}$$

■

**Teorema 2.9.5** [1, Theorem 7.] Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con índice  $k$ . Entonces  $A$  tiene una única  $\{1^k, 2, 5\}$ -inversa la cual se puede expresar como un polinomio en  $A$  y es también la única  $\{1^k, 2, 5\}$ -inversa para cada  $\ell \geq k$ .

A continuación se enlistarán algunas propiedades sobre la inversa de Drazin.

- $(A^*)^D = (A^D)^*$ ,
- $(A^t)^D = (A^D)^t$ ,
- $(A^D)^D = A$ , si y sólo si  $A$  tiene índice 1,
- $A^D$  tiene índice 1, y  $(A^D)^\# = A^2 A^D$ ,
- $((A^D)^D)^D = A^D$ .

## 2.10. Algoritmo para calcular $A^D$

**Algoritmo para calcular  $A^D$**  donde  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\text{Ind}(A) = k$ , donde  $k$  es un entero positivo dado.

**I.** Sea  $p$  un entero tal que  $p \geq k$  ( $p$  siempre se puede tomar igual a  $n$  si no hay un valor más pequeño que se pueda determinar). Si  $A^p = 0$ , entonces  $A^D = 0$ . Por tanto se supone  $A^p \neq 0$ .

**II.** Reducir las filas de  $A^p$  a su forma escalonada de Hermite,  $H_{A^p}$ .

**III.** Se seleccionan las columnas distinguidas de  $A^p$  y las llamamos  $v_1, v_2, \dots, v_r$ .

**IV.** Se forma la matriz  $I - H_{A^p}$ , y seleccionamos las columnas distintas de cero. Las llamamos  $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n$ .

**V.** Construimos la matriz no singular  $P = [v_1 | \dots | v_r | v_{r+1} | \dots | v_n]$ .

**VI** Se calcula  $P^{-1}$ .

**VII.** Formamos el producto  $P^{-1}AP$ . Esta matriz estará en la forma

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},$$

donde  $C$  es no singular y  $N$  es nilpotente.

**VIII.** Calculamos  $C^{-1}$ .

**IX.** Se calcula  $A^D$  formando el producto

$$A^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

**Ejemplo 2.10.1** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 1-i & -1+i & -1+i \\ 1-i & 1-i & 1-i \end{bmatrix}.$$

Usando el algoritmo anterior:

**I.-** Como no sabemos cual es el  $\text{Ind}(A)$ , sea  $p = 3$ . Entonces

$$A^3 = \begin{bmatrix} -8i & 0 & 0 \\ -12 + 4i & 0 & 0 \\ 4 + 4i & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**II.-** Usamos transformaciones elementales

$$A^3 = \begin{bmatrix} -8i & 0 & 0 \\ -12 + 4i & 0 & 0 \\ 4 + 4i & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 + 4i & 0 & 0 \\ 4 + 4i & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

luego

$$H_{A^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

III.- Por tanto,  $v_1 = \begin{bmatrix} -8i \\ -12 + 4i \\ 4 + 4i \end{bmatrix}$  es una base para  $R(A^k)$ .

IV.- Ahora  $I - H_{A^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  así que  $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  forman una base para  $N(A^k)$ .

V.-

$$P = \begin{bmatrix} -8i & 0 & 0 \\ -12 + 4i & 1 & 0 \\ 4 + 4i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

VI.-

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -8i & 0 & 0 \\ 4 + 12i & 8 & 0 \\ 4 - 4i & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

VII.-

$$P^{-1}AP = \left[ \begin{array}{c|cc} 2i & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1+i & -1+i \\ 0 & 1-i & 1-i \end{array} \right].$$

VIII.- Como  $C = 2i$ ,  $C^{-1} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$ .

IX.-

$$A^D = P \begin{bmatrix} \frac{-i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 \\ -3+i & 0 & 0 \\ i+i & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Capítulo 3

## Estudio de la regla del orden inverso

La regla del orden inverso para las inversas generalizadas de productos matriciales ha sido uno de los temas atractivos en la teoría de las inversas generalizadas y sus aplicaciones. Varios autores han estudiado diversos resultados sobre la regla del orden inverso relacionadas con inversas internas e inversas generalizadas, como lo son la inversa Moore-Penrose, y la inversa de Drazin. Siendo estas últimas las que se estudiarán a lo largo de este capítulo. Se establecerán las condiciones necesarias para que la inversa de Moore-Penrose y de Drazin cumplan la regla del orden inverso para el producto de dos matrices, esto está relacionado directamente con el método de rango de una matriz.

### 3.1. Regla del orden inverso para la inversa de Moore-Penrose

La regla del orden inverso para la inversa de Moore-Penrose es problema interesante y fundamental en la teoría de inversas generalizadas. Este tema ha llamado la atención desde alrededor de 1960. La regla del orden más simple entre las reglas del orden inverso es la de dos términos, es decir, para la inversa de Moore-Penrose el producto de dos matrices  $A$  y  $B$  se escribe como:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.$$

En esta sección estableceremos las condiciones de la regla del orden inverso para el producto de matrices para la inversa de Moore-Penrose. Las condiciones suficientes y necesarias para que esta regla se cumpla se encuentra por el método de rango de una matriz. Si  $A$  y  $B$  son matrices invertibles de la misma dimensión entonces el producto  $AB$  es no singular y también la inversa del producto  $AB$  cumple la regla del orden inverso.

Para algunos pares de matrices  $A, B$ , la relación

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \tag{3.1.1}$$

se cumple, y para otros no. No parece haber un criterio simple para distinguir los casos en que (3.1.1) se cumple. El siguiente resultado se debe a Greville [9].

**Teorema 3.1.1** Para las matrices  $A, B$  tales que  $AB$  existe, la relación de orden inverso (3.1.1) se cumple si y sólo si

$$R(A^*AB) \subset R(B) \quad \text{y} \quad R(BB^*A^*) \subset R(A^*). \quad (3.1.2)$$

**Demostración:**

Tomemos las dos ecuaciones siguientes:

$$BB^\dagger A^*AB = A^*AB \quad (3.1.3)$$

y

$$A^\dagger ABB^*A^* = BB^*A^*. \quad (3.1.4)$$

Tomando transposiciones conjugadas de ambos lados de (3.1.3) da

$$B^*A^*ABB^\dagger = B^*A^*A, \quad (3.1.5)$$

y luego multiplicando a la derecha por  $A^\dagger$  y a la izquierda por  $(AB)^{*\dagger}$  tenemos

$$ABB^\dagger A^\dagger = AB(AB)^\dagger. \quad (3.1.6)$$

Multiplicando (3.1.4) a la izquierda por  $B^\dagger$  y a la derecha por  $(AB)^{*\dagger}$  obtenemos

$$B^\dagger A^\dagger AB = (AB)^\dagger AB. \quad (3.1.7)$$

De (3.1.6) y (3.1.7) se deduce que  $B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1, 3, 4\}$ .

Finalmente, las ecuaciones,

$$B^*A^* = B^*BB^\dagger A^\dagger AA^*, \quad B^\dagger A^\dagger = B^\dagger B^{*\dagger} B^*A^*A^{*\dagger} A^\dagger$$

demuestran que

$$\text{rango}(B^\dagger A^\dagger) = \text{rango}(B^*A^*) = \text{rango}AB \quad (3.1.8)$$

y por lo tanto  $B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{2\}$  por el Teorema 2.3.2 y así (3.1.1) se cumple.

Recíprocamente, si tenemos

$$B^*A^* = B^\dagger A^\dagger ABB^*A^*$$

entonces multiplicando por la izquierda por  $ABB^*B$  da

$$ABB^*(I - A^\dagger A)BB^*A = O.$$

Como el miembro de la izquierda es Hermitiana y  $I - A^\dagger A$  es idempotente, se deduce que

$$(I - A^\dagger A)BB^*A^* = O,$$

que es equivalente a (3.1.4). De manera análoga, se obtiene (3.1.3). ■

A continuación presentamos un ejemplo donde se cumple la regla del orden inverso y otro en donde no se cumple.

**Ejemplo 3.1.2** Dadas las matrices  $A$  y  $B$ , queremos verificar si se cumple la siguiente condición

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, \quad (3.1.9)$$

donde  $A^\dagger$  es la inversa de Moore-Penrose de  $A$ .

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las inversas de Moore-Penrose respectivamente son

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B^\dagger = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso vemos que (3.1.9) se cumple

$$(AB)^\dagger = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^\dagger A^\dagger = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso vemos que (3.1.9) se cumple.

**Ejemplo 3.1.3** Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Las inversas de Moore-Penrose respectivamente son

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B^\dagger = \begin{pmatrix} 1/25 & 2/25 \\ 2/25 & 4/25 \end{pmatrix}.$$

Pero en este caso tenemos

$$(AB)^\dagger = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 \\ 2/10 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^\dagger A^\dagger = \begin{pmatrix} 2/25 & 0 \\ 4/25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que no se cumple (3.1.9), es decir  $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$ .

## 3.2. La regla del orden inverso para la inversa de Drazin

A continuación daremos las condiciones suficientes y necesarias para que la inversa de Drazin cumpla la regla del orden inverso.

En general, la regla del orden inverso no es aplicable para la inversa de Drazin es decir  $(AB)^D \neq B^D A^D$ . para cada  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

Como se estudió en el caso de la inversa de Moore-Penrose, las condiciones para que se cumpliera la regla del orden inverso tuvieron que ser condiciones muy fuertes tal que ni la conmutatividad de las matrices  $A$  y  $B$  fueron suficiente para que garantizaran que  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ . Pero este no es el caso para la inversa de Drazin, ya que la conmutatividad garantiza que la regla del orden inverso se cumpla, como veremos en el Teorema 3.2.2.

**Teorema 3.2.1** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces  $(AB)^D = A[(BA)^2]^D B$ .

**Demostración:**

Sean  $Y = A[(BA)^2]^D B$ . Es claro que  $YABY = Y$  y  $ABY = YAB = A(BA)^D B$ .

Sea  $k = \max\{Ind(AB), Ind(BA)\}$ .

Entonces

$$\begin{aligned} (AB)^{k+2} Y &= (AB)^{k+2} A(BA)^{2^D} B \\ &= (AB)^{k+1} ABA(BA^{2^D}) B \\ &= (AB)^{k+1} A(BA)^D B \\ &= A(BA)^{k+1} (BA)^D B \\ &= A(BA)^k B \\ &= (AB)^{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Y = (AB)^D.$$

Esto demuestra que  $Y$  es  $\{1^k\}$ -inversa de  $AB$ . ■

**Teorema 3.2.2** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tales que  $AB = BA$ , entonces

- $(AB)^D = B^D A^D = A^D B^D$ ,
- $A^D B = BA^D$  y  $AB^D = B^D A$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $AB = BA$ . Por el Teorema (2.9.5) tenemos que  $A^D$  es un polinomio en  $A$  y  $B^D$  es un polinomio en  $B$ . ■

**Ejemplo 3.2.3** Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Comprobaremos que  $A$  y  $B$  son conmutativas, es decir que  $AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Las inversas de Drazin de  $A$  y  $B$  respectivamente son:

$$A^D = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \quad y \quad B^D = \begin{pmatrix} 0,2173 & -0,043 \\ 0,130 & 0,173 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$(AB)^D = \begin{pmatrix} 0,069 & 0,026 \\ -0,078 & 0,095 \end{pmatrix}$$

$$B^D A^D = \begin{pmatrix} 0,0692 & 0,0262 \\ -0,0778 & 0,052 \end{pmatrix}.$$

En este caso vemos que  $(AB)^D = A^D B^D$  se cumple.

# Capítulo 4

## Grupo de matrices singulares

Al hablar de grupos topológicos se tienen ejemplos clásicos de grupos de matrices invertibles, pero ¿qué pasa cuando estas matrices son singulares?

En esta sección trabajaremos con la grupo inversa de una matriz (recordemos que este tipo de inversa generalizada es un caso particular de la inversa de Drazin). Tomaremos todas las potencias de una matriz, así como también las potencias de su grupo inversa y formaremos un grupo algebraico, a este grupo lo dotaremos de una topología y con una herramienta muy útil en la topología los cuales son los filtros se demostrará que la función que asigna cada una de las matrices de este grupo a su inversa es continua y por lo tanto también será un grupo topológico.

### 4.1. Grupos topológicos

Un grupo topológico es un conjunto con una estructura algebraica y una topológica, relacionadas entre sí. Las bases y fundamentos sobre la teoría de grupos topológicos se pueden encontrar en [3], [19], y [24]. Para profundizar en el estudio de grupos algebraicos, recomendamos [7] y para espacios topológicos [18],[21] y [22].

**Definición 4.1.1** *Un grupo algebraico  $(G, *)$  es un conjunto  $G$ , equipado con una operación  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$  que cumple las siguientes propiedades:*

- *Asociatividad:*  $g_1, g_2, g_3 \in G \Rightarrow (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ .
- *Elemento neutro:* Existe un único elemento  $e \in G$  tal que  $e * g = g * e = g$ ,  $\forall g \in G$ .
- *Elemento inverso:* Para todo  $g \in G$ , existe un único  $g^{-1} \in G$  tal que  $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ .

**Ejemplo 4.1.2** El grupo general lineal  $GL(n, \mathbb{R})$  o  $GL(n, \mathbb{C})$  de las matrices no singulares, con entradas en los números reales  $\mathbb{R}$  o complejos  $\mathbb{C}$  es un grupo con la multiplicación de matrices, porque el producto de dos matrices invertibles es invertible y la inversa de una matriz es invertible. Además la multiplicación de matrices es asociativa y la matriz identidad es el elemento neutro.

**Definición 4.1.3** Una **topología** sobre un conjunto  $X$  es una colección  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  que cumplen las siguientes propiedades:

- $\emptyset$  y  $X$  pertenecen a  $\tau$ .
- La unión arbitraria de elementos de  $\tau$  pertenece a  $\tau$ .
- La intersección finita de elementos de  $\tau$  pertenece a  $\tau$ .

A  $(X, \tau)$  se le llama **espacio topológico** y a los elementos de  $\tau$  se les llama **abiertos**.

**Definición 4.1.4** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x \in X$ . Definamos una **vecindad** de  $x$  como un conjunto  $V \subseteq X$  para el que existe un abierto  $A$  en  $X$ , tal que  $x \in A \subseteq V$ .

Denotaremos como  $\mathcal{V}_x$  al sistema de todas las vecindades de  $x \in X$ .

Una de las maneras más frecuentemente usadas para dotar de una topología a un conjunto es definir la topología en términos de una distancia en el conjunto de la siguiente manera.

**Definición 4.1.5** Un conjunto  $U$  es abierto en la topología métrica inducida por una distancia  $d$  si, y sólo si, para cada  $a \in U$  existe  $\delta > 0$  tal que la bola abierta con centro  $a$  y radio  $\delta$ ,  $B_d(a, \delta)$ , está contenida en  $U$ .

**Ejemplo 4.1.6** En  $GL(n, \mathbb{R})$  consideremos la topología heredada por ser un subespacio euclidiano de dimensión  $n^2$ , con la topología generada por la métrica

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}|^2}$$

Para cualesquiera  $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in GL(n, \mathbb{R})$ .

**Definición 4.1.7** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos, se dice que una función  $f : X \rightarrow Y$  es **continua**, si para cada subconjunto abierto  $V$  de  $Y$ , el subconjunto  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ , donde

$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}.$$

**Proposición 4.1.8** Una función  $f : X \rightarrow Y$  es **continua** en  $x \in X$  si y sólo si, dada una vecindad  $V$  de  $f(x)$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subset V$ .

**Definición 4.1.9** Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos y una función  $f : X \rightarrow Y$ , decimos que  $f$  es un **homeomorfismo** si cumple que

- $f$  es biyectiva.
- $f$  es continua.
- La inversa de  $f$  es continua.

**Proposición 4.1.10** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológico y  $f : X \rightarrow Y$ . Son equivalentes

- $f$  es un homeomorfismo.

- $f$  es biyectiva y  $f(A)$  es abierto en  $Y$  si y sólo si  $A$  es abierto en  $X$ .
- $f$  es biyectiva y  $f(A)$  es cerrado en  $Y$  si y sólo si  $A$  es cerrado en  $X$ .

**Definición 4.1.11** Un espacio topológico de  $X$  se llama **espacio de Hausdorff** si para cada par  $x, y$  de puntos distintos de  $X$ , existen vecindades disjuntas  $U$  y  $V$  de  $x$  y  $y$ , respectivamente, es decir  $U \cap V = \emptyset$ .

**Proposición 4.1.12** Un espacio es Hausdorff si y sólo si todo punto  $x \in X$  es intersección de sus vecindades cerradas.

**Demostración:**

Por definición de espacio de Hausdorff tenemos que para cada par de puntos  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  existen vecindades abiertas  $U$  y  $V$  de  $x$  y  $y$  respectivamente, así que  $U \subset X - V$  por lo que  $W = X - V$  es una vecindad cerrada de  $x$  que no contiene a  $y$ , por lo tanto  $\{x\} = \bigcap \{W | W \text{ es vecindad cerrada de } x\}$ . Recíprocamente, sean  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , existe una vecindad cerrada  $V$  de  $y$  tal que  $x \notin V$ . Entonces  $X - V$  es un abierto que contiene a  $x$ , por lo tanto,  $U = X - V$  es una vecindad de  $x$  ajena a  $V$ . ■

**Definición 4.1.13** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subset X$ . Decimos que  $x \in X$  es un **punto de acumulación** (o punto límite) de  $A$  si cualquier vecindad  $V$  de  $x$  es tal que

$$A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset.$$

**Definición 4.1.14** Sea  $X$  un espacio topológico, se dice que un conjunto  $C \subset X$  es **cerrado** si contiene todos sus puntos de acumulación.

**Definición 4.1.15** Sea  $X$  un espacio topológico,  $A \subseteq X$ , sea  $\mathcal{C}_A$  la familia de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $A$ . La intersección  $\bigcap \mathcal{C}_A$  es llamada **cerradura** o **clausura** de  $A$  y se denota como  $\overline{A}$ .

**Proposición 4.1.16** Sea  $G$  un grupo algebraico dotado con una topología tal que la multiplicación es continua y sean  $A, B$  dos subconjuntos de  $G$ , entonces  $\overline{A} \cdot \overline{B} \subseteq \overline{AB}$ .

**Demostración:**

Sean  $x \in \overline{A}$ ,  $y \in \overline{B}$  y sea  $W$  una vecindad de  $xy$ , por la continuidad de la multiplicación existen abiertos  $V_1, V_2$  con  $x \in V_1$  y  $y \in V_2$  tales que  $V_1 \cdot V_2 \subseteq W$ . Como  $x \in \overline{A}$  y  $y \in \overline{B}$  existen elementos  $a, b \in G$  tales que  $a \in A \cap V_1$  y  $b \in B \cap V_2$ , por lo tanto  $ab \in (AB) \cap W \neq \emptyset$ , entonces  $xy \in \overline{AB}$ . ■

**Definición 4.1.17** Se dice que una colección  $\mathbb{A}$  de subconjuntos de un espacio  $X$  es una **cubierta** de  $X$  si

$$X \subseteq \bigcup_{A \in \mathbb{A}} A$$

Si cada  $A \in \mathbb{A}$  es un conjunto abierto en  $X$ , decimos que  $\mathbb{A}$  es una **cubierta abierta** de  $X$ .

**Definición 4.1.18** Un espacio topológico es **compacto** si cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita.

**Proposición 4.1.19** Sea  $X$  un espacio topológico compacto y sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua, entonces  $f(X)$  es compacto.

**Demostración:**

Sea  $\mathcal{C}$  una cubierta abierta de  $f(X)$  y sea  $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(U) | U \in \mathcal{C}\}$ . Como  $f$  es continua entonces  $f^{-1}(\mathcal{C})$  es una cubierta abierta de  $X$ , y como  $X$  es compacto, existen  $U_1 \cup \dots \cup U_k$ , tales que  $X \subseteq f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k)$ , por lo tanto  $f(X) \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_k$ . ■

**Teorema 4.1.20** *Sea  $X$  un espacio compacto y sea  $A \subset X$ . Si  $A$  es cerrado, entonces  $A$  es compacto.*

**Demostración:**

Sea  $A$  un subespacio cerrado de  $X$ . Dado un cubierta  $\mathcal{A}$  de  $A$  por conjuntos abiertos en  $X$ , podemos considerar la cubierta abierta  $\mathcal{B}$  de  $X$  como  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - A\}$ . Como  $X$  es compacto, existe una subcubierta que la cubre. Si esta subcubierta contiene a  $\{X - A\}$ , lo descartamos, y si no la contiene la dejamos como está. La colección resultante en cualquier caso es una subcubierta finita de  $\mathcal{A}$ , que cubre a  $A$ . Por tanto  $A$  es compacto. ■

**Proposición 4.1.21** *Toda unión finita de subconjuntos compactos de un espacio topológico es compacto.*

**Demostración:**

Cualquier cubierta abierta de la unión finita es una cubierta de cada uno de los conjuntos que la integran. Como cada uno de ellos es compacto, existe una subcubierta finita de la cubierta que lo cubre y, como la unión es finita, también es una subcubierta finita que cubrirá toda la unión. ■

**Definición 4.1.22** *Sea  $\mathcal{C}$  una colección de subconjuntos de  $X$ , decimos que  $\mathcal{C}$  que tiene la **propiedad de la intersección finita** si cada subcolección finita  $\{C_1, \dots, C_n\}$  de  $\mathcal{C}$ , tiene intersección no vacía.*

**Teorema 4.1.23** [18, Teorema 26.9] *Sea  $X$  un espacio topológico,  $X$  es compacto si y sólo si, para cada colección de  $\mathcal{C}$  de conjuntos cerrados en  $X$ , con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$ .*

**Definición 4.1.24** *Se dice que un espacio topológico de Hausdorff es **localmente compacto** si cada uno de sus puntos tiene una vecindad compacta.*

**Proposición 4.1.25** *Sea  $X$  localmente compacto y  $A \subset X$  cerrado. Entonces  $A$  es localmente compacto.*

**Demostración:**

Sea  $x \in A$  y sea  $V$  una vecindad compacta de  $x \in X$ , entonces  $V \cap A$  es una vecindad compacta de  $x$  en  $A$ . ■

**Proposición 4.1.26** [21, Cor. VI.2.18] *Todo espacio métrico es Hausdorff, y localmente compacto.*

**Definición 4.1.27** *Un conjunto  $G$  con una operación binaria  $*$  y una familia  $\tau$  de subconjuntos de  $G$ , es decir, la terna  $(G, *, \tau)$ , se llama **grupo topológico** si*

- $(G, *)$  es un grupo;
- $(G, \tau)$  es un espacio topológico;

- las funciones  $\mu : (G, \tau) \times (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$  y  $\iota : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$  dadas por  $\mu(x, y) = x * y$  y  $\iota(x) = x^{-1}$  son continuas, donde  $x^{-1}$  es el inverso de  $x$ .

**Proposición 4.1.28** *Sea  $G$  un grupo algebraico con multiplicación continua y sea  $V \in \mathcal{V}_e$  entonces existe  $W \in \mathcal{V}_e$  tal que  $W^2 \subseteq V$ .*

**Demostración:**

Sea  $V \in \mathcal{V}_e$ , por la continuidad de la multiplicación, existen  $W_1, W_2 \in \mathcal{V}_e$  tales que  $W_1 W_2 \subseteq V$ . Sea  $W = W_1 \cap W_2$ , entonces  $W \times W \subseteq \mu^{-1}(V)$  por lo tanto  $W^2 \subseteq V$ . ■

**Proposición 4.1.29** *Sea  $G$  un grupo algebraico con multiplicación continua y sea  $g \in G$  un elemento fijo arbitrario, entonces la función  $\psi_g : G \rightarrow G$  dada por  $\psi_g(x) = gx$  es un homeomorfismo.*

**Demostración:**

Por Definición 4.1.27,  $\psi_g$  es continua. Supongamos que  $\psi_g(a) = \psi_g(b)$ , entonces  $ga = gb$ , luego  $g^{-1}ga = g^{-1}gb$ , así tenemos que  $a = b$ , por lo tanto  $\psi_g$  es inyectiva. Ahora sea  $z \in G$  esto implica que  $\psi_g(g^{-1}z) = gg^{-1}z = z$ , por lo tanto  $\psi_g$  es sobreyectiva. La inversa de  $\psi_g(x)$  es  $\psi_{g^{-1}}(x) = g^{-1}x$ , ya que  $\psi_g(\psi_{g^{-1}}(x)) = gg^{-1}x = x$ , recíprocamente  $\psi_{g^{-1}}(\psi_g(x)) = g^{-1}gx = x$ . Y como  $\psi_{g^{-1}}$  es continua, por lo tanto  $\psi_g$  es un homeomorfismo. ■

**Corolario 4.1.30** *Sea  $G$  un grupo algebraico con multiplicación continua, sea  $a \in G$ , y sean  $B \subseteq G$ ,*

- Si  $B$  es abierto entonces  $aB$  es abierto.
- Si  $B$  es cerrado entonces  $aB$  es cerrado.
- Si  $B$  es compacto entonces  $aB$  y  $Ba$  es compacto.

**Demostración:**

Por la Proposición 4.1.29 tenemos que  $\psi_a(x) = ax$  es un homeomorfismo. Si  $B$  es un abierto entonces  $\psi_a(B) = aB$  es abierto, análogamente si  $B$  es cerrado entonces  $\psi_a(B) = aB$  es cerrado, por Proposición 4.1.10. Por la Proposición 4.1.19, si  $B$  es un compacto entonces  $\psi_a(B) = aB$  es compacto. ■

**Ejemplo 4.1.31** Sabemos por el Ejemplo 4.1.2 que  $GL(n, \mathbb{R})$  es un grupo algebraico y por el Ejemplo 4.1.6 que es un espacio topológico, además por la Proposición 4.1.26,  $GL(n, \mathbb{R})$  es Hausdorff y localmente compacto.

Cada matriz  $A = [a_{ij}]$  puede identificarse con un punto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , colocando las filas ordenadamente, una tras de otra, por ejemplo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4.$$

Como las operaciones de suma y multiplicación  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son continuas, la multiplicación de matrices

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

es continua. En efecto, si  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  son matrices en  $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ , las coordenadas  $ij$  de la multiplicación son polinomios y por tanto son funciones continuas.

Además es un hecho conocido que

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^{-1} \end{aligned}$$

es continua (ver e.g. [23]).

Por lo tanto  $GL(n, \mathbb{R})$  es un grupo topológico.

## 4.2. Conjunto Inversoide

A continuación definiremos todas las potencias de una matriz cuadrada y de su grupo inversa.

**Definición 4.2.1** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con índice 1, denotemos  $(A^\#)^j$  como  $(A^{-j})$  para  $j \in \mathbb{N}$  y  $AA^\#$  como  $A^0$ . Llamaremos al conjunto

$$\mathcal{A} = \{A^j | j \in \mathbb{Z}\},$$

como **conjunto inversoide**.

Veremos que  $\mathcal{A}$  es un grupo algebraico.

**Teorema 4.2.2** Sean  $\ell, m \in \mathbb{Z}$  entonces para cada  $A^\ell, A^m \in \mathcal{A}$ ,

$$A^\ell A^m = A^{\ell+m}.$$

### Demostración:

Notemos que si  $\ell$  y  $m$  son enteros positivos entonces es claro que  $A^\ell A^m = A^{\ell+m}$  por asociatividad del producto de matrices.

De igual forma, si  $\ell$  y  $m$  son enteros negativos entonces

$$A^\ell A^m = (A^\#)^{-\ell} (A^\#)^{-m} = (A^\#)^{-\ell-m} = (A^\#)^{-(\ell+m)} = A^{\ell+m}.$$

Veamos ahora los siguientes casos

- Caso 1:

Si  $\ell = m = 0$ , tenemos  $A^0 A^0 = AA^\# AA^\#$ , aplicando la primera propiedad de la grupo inversa entonces  $A^0 A^0 = AA^\# = A^0$ .

- Caso 2:

Si  $\ell = 0$  y  $m$  positivo, entonces  $A^\ell A^m = A^0 A^m = AA^\# AA^{m-1}$ , entonces aplicando la primera propiedad de la grupo inversa ( $1^k$ ), entonces  $AA^\# AA^{m-1} = AA^\# AA^\# A^{-m} = AA^\# AA^{m-1} = AA^{m-1} = A^m$ .

- Caso 3:

Para  $\ell = 0$  y  $m$  negativo, entonces  $A^\ell A^m = A^0 A^m = AA^\# (A^\#)^{-m} = AA^\# A^\# (A^\#)^{-m-1}$ , aplicando

la propiedad (5) de la grupo inversa tenemos  $AA^\#A^\#(A^\#)^{-m-1} = A^\#AA^\#(A^\#)^{-m-1}$  y aplicando la propiedad (2) entonces  $A^\#AA^\#(A^\#)^{-m-1} = A^\#(A^\#)^{-m-1} = (A^\#)^{-m} = A^m$ .

• Caso 4:

Si  $\ell$  es positivo y  $m$  es negativo, entonces  $A^\ell A^m = A^\ell (A^\#)^{-m}$  esto significa que multiplicaremos  $\ell$ -veces  $A$  y  $-m$ -veces  $A^\#$ . Notemos que si  $-m > \ell$  y usando  $\{1, 2, 5\}$  (ver Definición 2.8.1) se tiene

$$\begin{aligned} A^\ell A^m &= A^\ell (A^\#)^{-m} = A^{\ell-1} A (A^\#) (A^\#)^{-m-1} = \dots \\ &= A^{(\ell-\ell)} A (A^\#)^{-m-(\ell-1)} = AA^\# A (A^\#)^{-m-(\ell-1)} \\ &= A (A^\#)^{-m-\ell+1} = A^\# AA^\# (A^\#)^{-m-\ell-1} \\ &= (A^\#)^{-m-\ell} = A^{\ell+m}. \end{aligned}$$

Si  $\ell > -m$  con un razonamiento similar se prueba que

$$\begin{aligned} A^\ell A^m &= A^\ell (A^\#)^{-m} = A^{\ell-1} A (A^\#) (A^\#)^{-m-1} = \dots \\ &= A^{\ell-(-m-1)} A^\# (A^\#)^{-m-(-m)} = A^{\ell+m+1} A^\# AA^\# \\ &= A^{\ell+m-1} AA^\# A = A^{\ell+m-1} A \\ &= A^{\ell+m}. \end{aligned}$$

Análogamente, si  $\ell$  es negativo y  $m$  es positivo, se cumple.

Si  $\ell = -m$  entonces tenemos:

$$\begin{aligned} A^\ell A^m &= A^\ell (A^\#)^{-m} = A^{\ell-1} A (A^\#) (A^\#)^{-m-1} = \dots \\ &= A^{\ell-(-m-1)} A^\# (A^\#)^{-m-(-m)} = A^{\ell+m+1} A^\# AA^\# \\ &= A^{\ell+m} AA^\# = A^{\ell+m-1} AAA^\# \\ &= A^{\ell+m}. \end{aligned}$$

■

**Corolario 4.2.3**  $\mathcal{A}$  es un grupo algebraico abeliano con la multiplicación de matrices.

Nos interesa ver  $\mathcal{A}$  como un grupo topológico, para ello consideraremos el conjunto  $\mathcal{A}$  con la misma topología que la del grupo general lineal  $GL(n, \mathbb{R})$  (ver Ejemplo 4.1.6), entonces  $\mathcal{A}$  es Hausdorff, y también localmente compacto (ver Proposición 4.1.26). De esta forma al igual que en  $GL(n, \mathbb{R})$ , la multiplicación en  $\mathcal{A}$  será continua (ver Ejemplo 4.1.31).

En la siguiente sección probaremos que  $\mathcal{A}$  es un grupo topológico.

### 4.3. Grupo Inversoide

En 1937 el matemático Henri Cartan introdujo los conceptos de filtros y de ultrafiltros, los cuales se han convertido actualmente en una importante herramienta en la topología. Estos fueron utilizados

por Bourbaki como una alternativa a la noción similar de red desarrollada en 1922 por E. H. Moore y H. L. Smith.

En esta sección introduciremos los filtros, los cuales utilizaremos para demostrar la continuidad de la inversa en  $\mathcal{A}$ . Desarrollaremos la demostración del Teorema 4.3.15, que es nuestro teorema fundamental, mediante los Lemas 4.3.10, 4.3.11, 4.3.12 y 4.3.13 lo haremos siguiendo las ideas del artículo [5].

**Definición 4.3.1** *Un **filtro** en un conjunto  $X$  es una familia  $\mathcal{F}$  no vacía de subconjuntos no vacíos de  $X$ , tales que*

$$i) \text{ Si } F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}.$$

$$ii) \text{ Si } F \in \mathcal{F} \text{ y } F \subset G \implies G \in \mathcal{F}.$$

**Nota:** Si  $\mathcal{F}$  es un filtro sobre  $X$  entonces  $X \in \mathcal{F}$ .

**Definición 4.3.2** *Si  $\mathcal{F}$  es un filtro en  $X$  y  $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$  decimos que  $\mathcal{B}$  es una **base** de  $\mathcal{F}$  si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \implies \exists B \in \mathcal{B}$  tal que  $B \subset B_1 \cap B_2$ .*

**Definición 4.3.3** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $x \in X$ . El conjunto  $\mathcal{V}_x$  de todas las vecindades de  $x$  es un filtro en  $X$  llamado **filtro de vecindades** de  $x \in X$ .*

**Definición 4.3.4** *Dados dos filtros  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  en un conjunto  $X$ , se dice que  $\mathcal{F}$  es más **grueso** que  $\mathcal{G}$  y que  $\mathcal{G}$  es más **fino** que  $\mathcal{F}$ , si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ .*

**Definición 4.3.5** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{F}$  un filtro en  $X$ . Se dice que  $\mathcal{F}$  **converge** a  $x$ , y se denota como  $\mathcal{F} \rightarrow x$ , si  $\mathcal{F}$  es más fino que el filtro de vecindades de  $x$ . Es decir, si  $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{F}$ .*

Notemos que si  $\mathcal{F} \rightarrow x$ , entonces  $x$  es un punto de acumulación (ver Definición 4.1.13).

**Proposición 4.3.6** [21, Proposición V1.22] *Todo filtro en  $X$  converge a lo más a un sólo punto si y sólo si es un espacio de Hausdorff.*

Recordemos que una relación  $R$  sobre un conjunto  $M$  es un orden parcial si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Al conjunto  $M$  con el orden parcial  $R$  se le llama **conjunto parcialmente ordenado**; en este caso se dice que un elemento  $a \in M$  es **máximo** si para ninguna  $b \neq a$ ,  $a \leq b$ .

Un ejemplo es el conjunto potencia de un conjunto  $N$ , el conjunto  $M$  conformado por todos los subconjuntos de  $N$  ordenados mediante la relación de inclusión ( $\subseteq$ ), es un conjunto parcialmente ordenado.

De la misma forma, dado un espacio topológico  $X$ , el conjunto de todos los filtros sobre  $X$  con la relación  $\subset$ , es un conjunto parcialmente ordenado.

**Definición 4.3.7** *Un filtro máximo en un conjunto  $X$  es llamado **ultrafiltro**.*

**Proposición 4.3.8** [22, Proposición 11.20] *Sea  $X$  un espacio topológico entonces  $X$  es compacto si y sólo si todo ultrafiltro en  $X$  converge.*

En la sección anterior vimos que  $\mathcal{A}$  es un grupo algebraico con topología de Hausdorff y localmente compacto, además la multiplicación en  $\mathcal{A}$  es continua.

A continuación veremos que cualquier grupo algebraico  $G$  que cumpla estas condiciones es un grupo topológico.

A partir de ahora denotaremos con la letra  $G$  a un grupo algebraico con topología de Hausdorff y localmente compacto, cuya multiplicación es continua.

**Definición 4.3.9** Dado un subconjunto  $U \subseteq G$  definiremos

$$U^{-1} = \{h^{-1} | h \in U\}.$$

**Lema 4.3.10** Sea  $\mathcal{F}$  un filtro en  $G$  tal que  $\mathcal{F} \rightarrow x$  y  $\mathcal{F}^{-1} \rightarrow y$ . Entonces  $y = x^{-1}$ .

**Demostración:**

Como  $\mathcal{F}$  converge a  $x$  y  $\mathcal{F}^{-1}$  converge a  $y$ , entonces por la continuidad de multiplicación tenemos que  $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \rightarrow xy$ , por otro lado  $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \rightarrow e$ , como es  $G$  Hausdorff, por la Proposición 4.3.6, entonces  $xy = e$ , por lo tanto  $x = y^{-1}$ . ■

**Lema 4.3.11** Sea  $H$  un subconjunto compacto de  $G$ . Entonces  $H^{-1}$  es cerrado.

**Demostración:**

Sea  $x$  un punto de acumulación en  $H^{-1}$ , para probar que  $H^{-1}$  es cerrado basta demostrar que  $x \in H^{-1}$ . Sea  $\mathcal{B} = \{U \cap H^{-1} | U \in \mathcal{V}_x\}$  entonces  $\mathcal{B}$  es una base de filtro en  $H^{-1}$  tal que  $\mathcal{B} \rightarrow x$ . Sea  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro en  $H^{-1}$  tal que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ , entonces  $\mathcal{U} \rightarrow x$  y  $\mathcal{U}^{-1}$  es un ultrafiltro en  $H$ . Luego  $\mathcal{U}^{-1} \rightarrow y$  para alguna  $y \in H$  (ver Proposición 4.3.8), aplicando el Lema 4.3.10 tenemos que  $y = x^{-1}$  y por lo tanto  $x \in H^{-1}$ . ■

**Lema 4.3.12** Sea  $E$  un subconjunto numerable de  $G$  y sea  $x$  un punto de acumulación de  $E$ . Entonces  $x^{-1}$  es un punto de acumulación de  $E^{-1}$ .

**Demostración:**

Sea  $\mathcal{U}$  una base de ultrafiltro en  $E$  tal que  $\mathcal{U} \rightarrow x$ . Por el Lema 4.3.10 basta demostrar que existe  $y \in G$  tal que  $\mathcal{U}^{-1} \rightarrow y$ , ya que en este caso  $\mathcal{U}^{-1} \rightarrow x^{-1}$  y  $x^{-1}$  será un punto de acumulación de  $E^{-1}$ .

Sea  $B = E \cup \{x\}$  y  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B^n$ . Entonces  $D$  es un subgrupo numerable de  $G$ . Sea  $A = \overline{D}$ , y sean

$x, y \in A$  entonces existen  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  tales que  $x \in \overline{B}^k$ ,  $y \in \overline{B}^\ell$ , entonces por la Proposición 4.1.16  $xy \in \overline{B}^k \overline{B}^\ell \implies xy \in \overline{B}^{k+\ell} \subseteq \overline{D} = A$ , por lo tanto  $A^2 \subset A$ .

Ahora sea  $V$  una vecindad compacta de la identidad y sea  $a \in A$ , por el Corolario 4.1.30,  $aV$  es una vecindad de  $a$ . Sea  $Z = aV - \{a\}$ , como  $a \in A = \overline{D}$  entonces  $Z \cap D \neq \emptyset$  esto implica que existe algún  $z \in D$ , tal que  $z = a\tilde{v}$  para alguna  $\tilde{v} \in V$ , por lo que  $a = z\tilde{v}^{-1} \in DV^{-1}$ . Por lo tanto  $A \subset DV^{-1}$ , entonces  $A = \bigcup \{dV^{-1} \cap A | d \in D\}$ .

Como  $D$  es subgrupo de  $G$  entonces  $e \in D$ , por tanto  $(V^{-1} \cap A) \neq \emptyset$ . Sea  $x \in d(V^{-1} \cap A)$  entonces  $x = du$ , para algún  $u \in (V^{-1} \cap A)$  esto implica que  $du = x \in dV^{-1}$ , por otro lado como  $d \in D \subseteq A$  y

$u \in A$  entonces  $du \in A$  ya que  $A^2 \subset A$ , entonces  $x \in dV^{-1} \cap A$ , por lo tanto  $d(V^{-1} \cap A) \subseteq dV^{-1} \cap A$ . Recíprocamente, si  $y \in dV^{-1} \cap A$  esto implica que  $y \in dV^{-1}$  y  $y \in A$ , luego existe  $v \in V^{-1}$  tal que  $y = dv$ , esto implica que  $v = d^{-1}y \in A^2 \subset A$ , entonces  $v \in (V^{-1} \cap A)$  por lo tanto  $y \in d(V^{-1} \cap A)$ , entonces  $dV^{-1} \cap A \subseteq d(V^{-1} \cap A)$ , como se tienen las contenciones de ambos lados entonces  $d(V^{-1} \cap A) = dV^{-1} \cap A$ . Por lo tanto  $\bigcup\{d(V^{-1} \cap A) | d \in D\} = \bigcup\{dV^{-1} \cap A | d \in D\} = A$ .

Por el Lema 4.3.11,  $V^{-1}$  es cerrado y como  $A$  es cerrado entonces  $A \cap V^{-1}$  es cerrado, ahora por el Corolario 4.1.30 tenemos que  $d(A \cap V^{-1})$  también es cerrado para cada  $d \in D$ .

Por la Proposición 4.1.25, como  $A$  es un subconjunto cerrado de un espacio localmente compacto entonces es localmente compacto. Notemos que  $V^{-1} \cap A \neq \emptyset$  implica que  $d(V^{-1} \cap A) \neq \emptyset$  además como  $d(V^{-1} \cap A)$  es cerrado y  $A$  es localmente compacto entonces para todo  $t \in d(V^{-1} \cap A)$  existe una vecindad compacta  $W$  de  $t$  en  $A$ , i.e. existe un abierto  $U$  en  $A$  tal que  $t \in U \subset W \subset d(V^{-1} \cap A) \subset A$ . Entonces existe un abierto  $N$  en  $G$  tal que  $U = N \cap A \subset d(V^{-1} \cap A)$ . Dado que  $A$  es la cerradura de  $D$ , existe un punto  $c \in D$  tal que  $c \in D \cap N$ .

Por lo tanto  $xc^{-1}(N \cap A) = xc^{-1}N \cap A$  es una vecindad de  $x$  en  $A$ . Dado que  $\mathcal{U} \rightarrow x$  y  $\mathcal{U}$  es una base de ultrafiltro en  $A$ , existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $U \subset xc^{-1}(N \cap A) \subset xc^{-1}dV^{-1}$ . Esto implica  $U^{-1} \subset Vd^{-1}cx^{-1}$  y por el Corolario 4.1.30,  $Vd^{-1}cx^{-1}$  es compacto, finalmente por la Proposición 4.3.8 se tiene que  $\mathcal{U}^{-1}$  converge. ■

**Lema 4.3.13** *Sea  $A$  un subconjunto compacto de  $G$ . Entonces  $A^{-1}$  es compacto.*

**Demostración:**

Como  $G$  es un espacio localmente compacto, existe una vecindad compacta  $V$  de  $e$ , y por el Corolario 4.1.30 las traslaciones  $xV$  son compactas.

Veamos que  $A^{-1}$  puede cubrirse con un número finito de traslaciones de  $V$ . Supongamos que esta afirmación es falsa, luego hay una sucesión  $\{x_n^{-1}\}$  contenida en  $A^{-1}$  tal que  $x_n^{-1} \notin \cup\{x_i^{-1}V | i = 1, \dots, n-1\}$ . Establezcamos  $E_n = \{x_k | k \geq n\}$ . La colección  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene la propiedad de la intersección finita (ver Definición 4.1.22), y por el Teorema 4.1.23 como  $A$  es compacto entonces  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n} \neq \emptyset$ , es decir, existe  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n}$ . Por la Proposición 4.1.28, como  $V \in \mathcal{V}_e$  existe  $U \in \mathcal{V}_e$  tal que  $U^2 \subset V$ . Como  $x \in \overline{E_1}$ , existe  $x_m \in Ux$  lo que implica  $x_mx^{-1} \in U$  por lo tanto  $x^{-1} \in x_m^{-1}U$ . Además  $x \in \overline{E_{m+1}}$  implica por el Lema 4.3.12 que  $x^{-1} \in \overline{E_{m+1}^{-1}}$  y como  $x^{-1} \in x^{-1}U$ , entonces  $E_{m+1}^{-1} \cap (x^{-1}U - \{x^{-1}\}) \neq \emptyset$ , es decir, existe  $x_n^{-1} \in E_{m+1}^{-1} \cap (x^{-1}U - \{x^{-1}\})$  con  $n > m$  entonces  $x_n^{-1} \in x^{-1}U \subseteq x_m^{-1}U^2 \subset x_m^{-1}V$ , lo que contradice la elección de  $x_n^{-1}$ . Por lo tanto  $A \subseteq \bigcup x_iV$ . Por la Proposición 4.1.21 tenemos que  $\bigcup_{i=1}^n x_iV$  es compacto y por el Lema 4.3.11 tenemos que  $A^{-1}$  es cerrado por tanto, por el Teorema 4.1.20 concluimos que  $A^{-1}$  es compacto. ■

**Teorema 4.3.14** *Sea  $G$  un grupo algebraico, con una topología de Hausdorff, localmente compacto tal que la multiplicación es continua, entonces  $G$  es un grupo topológico.*

**Demostración:**

Debemos ver que la función  $\iota : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ , es continua, es decir que para toda  $U \in \mathcal{V}_{x^{-1}}$  existe  $V \in \mathcal{V}_x$  tal que  $V^{-1} \subset U$ . Para esto, sea  $U$  una vecindad abierta de la identidad  $e$  y  $\mathcal{C}$  la colección

de vecindades compactas de  $e$ , debemos mostrar que existe  $V \in \mathcal{C}$  tal que  $V^{-1} \subset U$ . Supongamos que este no es el caso, es decir que  $V^{-1} \cap U^c \neq \emptyset$  para todo  $V \in \mathcal{C}$ . Como  $V$  es compacto entonces por el Lema 4.3.13,  $V^{-1}$  es compacto, además  $V^{-1}$  es cerrado por Lema 4.3.11. Como  $U^c$  es cerrado entonces  $U^c \cap V^{-1}$  es cerrado y subconjunto de compacto  $V^{-1}$ . Por lo tanto  $\{U^c \cap V^{-1} | V \in \mathcal{C}\}$  es una familia de conjuntos compactos. Dado que esta familia tiene la propiedad de la intersección finita (ver Definición 4.1.22),  $\bigcap \{V^{-1} \cap U^c | V \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset$ . Pero, como  $G$  es Hausdorff, entonces  $e = \bigcap \{V^{-1} | V \in \mathcal{C}\} \supset \bigcap \{V^{-1} \cap U^c | V \in \mathcal{C}\}$  lo que implica que  $e \in U^c$ , esto es una contradicción. ■

Como el conjunto inversoide  $\mathcal{A}$  (ver Definición 4.2.1) satisface las condiciones del teorema anterior, como resultado inmediato se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 4.3.15** *El conjunto inversoide  $\mathcal{A}$  es un grupo topológico.*

# Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado la regla del orden inverso para los casos de Moore-Penrose y Drazin, también trabajamos con grupos topológicos en un espacio de matrices no invertibles. Los resultados principales que se obtuvieron en esta tesis se presentan a continuación.

Las condiciones para que se cumpla la regla del orden inverso en el caso de la inversa de Moore-Penrose es mas fuerte que en el caso de la inversa de Drazin ya que en ésta última basta con que se cumpla la conmutatividad de las matrices, sin embargo para la inversa de Moore-Penrose debe cumplir que  $R(A^*AB) \subset R(B)$  y  $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$  esto lo podemos ver en los Teoremas 3.1.1 y 3.2.2.

Asimismo se construyó el conjunto Inversoide, el cual lo denotamos como  $\mathcal{A}$ , tomando todas las potencias de una matriz de índice 1 y las potencias de su grupo inversa. Demostramos que en este conjunto la multiplicación y la inversa son continuas, para probarlo se demostró en el Teorema 4.2.2 que  $\mathcal{A}$  es un grupo algebraico; a este grupo lo dotamos de una topología Hausdorff y localmente compacta. Con ayuda de los filtros se demostró en el Teorema 4.3.15 que la función que asigna cada una de las matrices de este grupo a su inversa es continua y por lo tanto  $\mathcal{A}$  es también un grupo topológico.

# Bibliografía

- [1] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, Wiley-Interscience, New York, 1974.
- [2] A. Bjerhammar, *A generalized matrix algebra*, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm **124**(1958), 32.
- [3] G.E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic press, New York, 1972.
- [4] S.L. Campbell, C.D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Pitman, London 1979.
- [5] R. Ellis, *A note on the continuity of the inverse*, Proc. Amer. Math. Soc. **8**(1957), 372–373.
- [6] I. Erdélyi, *On the matrix equation  $Ax = \lambda Bx$* , J. Math. Anal. Appl. **17**(1967), 119–132.
- [7] J.B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, Addison-Wesley, United State of America, 2000.
- [8] S.H. Friedberg, A.J. Insel, L.E. Spence, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Nueva York, 2003.
- [9] T. N. E. Greville, *Note on the generalized inverse of a matrix product*, J. Soc. Indust. Appl. Math. **9**(1966), 109–115.
- [10] G. Kantún Montiel, *Outer generalized inverses with prescribed ideals*, Linear and Multilinear Algebra, **62**(2014) no. 9, 1187-1196.
- [11] G. Kantún-Montiel, M. Cho, *Commuting outer inverses*, Advances in Linear Algebra & Matrix Theory, **3**(2013) no.4, 69-72.
- [12] G. Kantun-Montiel, S.V. Djordjevic, *Invertibility along an Operator*, Operators and matrices, **11**(2017) no.2, 347-354.
- [13] G. Kantún-Montiel, S.V. Djordjevic, R.E. Harte, *On semigroup inverses*, Funct. Anal. Approx. Comp., **1**(2009), 11-18.
- [14] C. C. MacDuffee, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, 1956.
- [15] E. H. Moore *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. **26**(1920), 394–395.

- [16] E. H. Moore and R. W. Barnard, *General Analysis, Memoirs of the American Philosophical Society*, I, American Philosophical Society, Philadelphia, (1935), 197–209.
- [17] D. Masic, D.S. Djordjevic, G. Kantun-Montiel, *Image-kernel  $(P, Q)$ -inverses in rings*, *Electronic Journal of Linear Algebra*, **27**(2014) no. 1, 272-283.
- [18] J. Munkres, *Topology*, Segunda edición, Pearson, London, 1979.
- [19] S. Neymet Urbina, R. Jiménez Benítez, *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2005.
- [20] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **51**(1955), 406–413.
- [21] C. Prieto, *Topología básica*, Ediciones científicas universitarias, México, 2013.
- [22] G. Salicrup, *Introducción a la topología*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 1997.
- [23] G. W. Stewart, *On the continuity of the generalized inverse*, *SIAM J. Appl. Math.***17**(1969), 33–45.
- [24] M. Tkachenko, *Grupos topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana, México, 1997.
- [25] N. S. Urquhart, *Computation of generalized inverse matrices which satisfy specified conditions*, *SIAM Rev.* **10**(1968), 216–218.