Capítulo 8

Propiedades dinámicas en productos

Franco Barragán
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México
Anahí Rojas
Universidad del Papaloapan, Oaxaca, México

1. Introducción

En los últimos años la Dinámica Topológica se ha convertido en un área de gran interés para muchos investigadores. Particularmente, se ha definido un gran número de sistemas dinámicos, entre los más conocidos y estudiados se encuentran los sistemas: transitivos, exactos, mezclantes, débilmente mezclantes, totalmente transitivos, fuertemente transitivos, caóticos en el sentido de Devaney, minimales e irreducibles. Otros tipos de sistemas dinámicos que ya no son tan populares como los anteriores son los siguientes: órbita-transitivos, estrictamente órbita-transitivos, ω-transitivos, TT_{++}, suavemente mezclantes, exactamente Devaney caóticos, minimales inversos, totalmente minimales, dispersores, Touhey y los F-sistemas. De las muchas formas en la que se pueden analizar estos sistemas, en [**5**] hicimos un análisis de relaciones que existen entre los sistemas: exactos, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivos, totalmente transitivos, fuertemente transitivos, caóticos en el sentido de Devaney, minimales, irreducibles, semi-abiertos, turbulentos, órbita-transitivos, estrictamente órbita-transitivos, ω-transitivos, IN, TT y TT_{++}. Además, por medio de contraejemplos, demostramos que algunas de estas nociones no pueden relacionarse de manera general. Por lo cual, es necesario condicionar al espacio fase o a la función para obtener más relaciones entre estos sistemas. Con el fin de darle continuidad al trabajo realizado en [**5**], en este nuevo capítulo agregamos los sistemas suavemente mezclantes, exactamente Devaney caóticos, minimales inversos, totalmente minimales, dispersores, Touhey y los F-sistemas y, además de mostrar relaciones que existen entre todos estos sistemas dinámicos, los estudiamos sobre un espacio muy particular.

Sean $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, con $m \geqslant 2$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $f_i : X_i \to X_i$ una función. Se define la función $\prod_{i=1}^m f_i : \prod_{i=1}^m X_i \to \prod_{i=1}^m X_i$ dada por $\prod_{i=1}^m f_i((x_1, \ldots, x_m)) = (f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m))$, para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Esta función es llamada *función producto*. De este modo, podemos analizar las relaciones entre los sistemas dinámicos (1) $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$ y (2) (X_i, f_i), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. N. Değirmenci y Ş. Koçak [**12**] consideraron dos espacios métricos, X y Y, y dos funciones $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ (no necesariamente continuas) y analizaron las relaciones entre f, g y $f \times g$ cuando alguna de ellas es una función caótica en el sentido de Devaney. En particular, demostraron el siguiente resultado: si f es continua y caótica en el sentido de Devaney, y g es caótica en el sentido de Devaney y mezclante (no necesariamente continua), entonces $f \times g$ es caótica en el sentido de Devaney. Años después, X. Wu y P. Zhu [**28**] demostraron que para cada entero $m \geqslant 2$, si $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es caótica en el sentido de Devaney, entonces, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es también caótica en el sentido de Devaney. Además, demostraron que si $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es transitiva, entonces, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es transitiva. El recíproco no es cierto en general. En [**28**], X. Wu y P. Zhu consideraron espacios métricos sin puntos aislados y funciones continuas. Más aún, R. Li y X. Zhou [**20**] analizaron relaciones entre f, g y $f \times g$ cuando alguna de ellas es: topológicamente transitiva, topológicamente débilmente mezclante, sindéticamente transitiva, cofinitamente sensitiva, multi-sensitiva y ergódicamente sensitiva, siempre considerando espacios métricos y funciones no necesariamente continuas. Recientemente, K. B. Mangang [**22**] estudió el caos Li-Yorke del sistema dinámico producto $(\prod_{i=1}^{m} X_i, \prod_{i=1}^{m} f_i)$ cuando cada sistema dinámico (X_i, f_i) tiene la propiedad. En particular, demostró que (X, f) y (Y, g) son sistemas dinámicos exactos si y sólo si el sistema dinámico producto $(X \times Y, f \times g)$ es exacto. En este último trabajo, X y Y son espacios métricos compactos y f y g son funciones continuas.

Sea $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: exacta, mezclante, transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, suavemente mezclante, exactamente Devaney caótica, minimal inversa, totalmente minimal, dispersora, Touhey o un F-sistema. En este capítulo estudiamos relaciones entre las siguientes dos condiciones:

(1) Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.
(2) $\prod_{i=1}^{m} f_i \in \mathcal{M}$.

Es importante enfatizar que en los artículos antes mencionados, los autores trabajan con espacios métricos compactos o espacios métricos sin puntos aislados y funciones continuas. En este capítulo consideramos espacios topológicos y funciones no necesariamente continuas.

Cabe mencionar que este capítulo está basado en las secciones tres y cuatro del artículo *Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products* [**24**].

2. Preliminares

En esta sección presentamos los conceptos básicos de sistemas dinámicos necesarios para un buen desarrollo de este capítulo. Considerando un espacio topológico X y un subconjunto A de X, al conjunto cerradura de A en X lo detonamos por $\mathrm{cl}_X(A)$. Si no existe riesgo de confusión se escribe $\mathrm{cl}(A)$. También, denotamos con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$ e $\mathbb{I}$ al conjunto de los números naturales, números enteros no negativos y números irracionales, respectivamente.

Además, si $f : X \to X$ es una función, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k-ésima iteración de f la definimos como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k. Esto es, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ y en general $f^{k+1} = f \circ f^k$. Se entiende que $f^1 = f$ y definimos $f^0 = id_X$ (la función identidad en X). Debe quedar claro que $f^k \circ f^s = f^{k+s}$ y $(f^k)^s = f^{ks}$. Para un subconjunto A de X y k un entero, denotamos con $f^k(A)$ a la imagen de A bajo f^k cuando $k \geqslant 0$ y la preimagen bajo $f^{|k|}$ cuando $k < 0$. En el caso del conjunto que consta de un único punto x, escribimos $f^{-k}(x)$ para denotar al conjunto $f^{-k}(\{x\})$, donde $k > 0$.

En todo el escrito, m es un entero mayor o igual que dos.

Definición 2.1. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea X_i un conjunto no vacío. Se define y denota su ***producto cartesiano*** como el conjunto:

$$\prod_{i=1}^{m} X_i = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in X_i, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Cuando $X_1 = X_2 = \cdots = X_m$ al conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ se le denota con X_1^m.

Definición 2.2. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, τ_i) un espacio topológico. La ***topología producto*** $\mathcal{X}$ sobre el conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ es la topología que tiene como base la colección $\beta = \{U_1 \times \cdots \times U_m : U_i \in \tau_i, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}\}$. El espacio topológico $(\prod_{i=1}^{m} X_i, \mathcal{X})$ se llama *espacio producto* de la familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^{m}$ y se denota simplemente por $\prod_{i=1}^{m} X_i$.

Es natural pensar que así como se pude construir un espacio topológico a partir de espacios topológicos dados, también podemos construir una función a partir de otras.

Definición 2.3. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sean X_i un conjunto no vacío y $f_i : X_i \to X_i$ una función. Se define la ***función producto*** $\prod_{i=1}^{m} f_i : \prod_{i=1}^{m} X_i \to \prod_{i=1}^{m} X_i$ como:

$$\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)((x_1, \ldots, x_m)) = (f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m)),$$

para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} X_i$.

Cuando $f_1 = f_2 = \cdots = f_m$ a la función $\prod_{i=1}^{m} f_i$ se le denota con $f_1^{\times m}$.

Las siguientes propiedades no son difíciles de verificar.

Observación 2.4. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sean X_i un espacio topológico, U_i y V_i subconjuntos no vacíos de X_i y $f_i : X_i \to X_i$ una función y sea $k \in \mathbb{N}$. Se cumple lo siguiente:

(1) $(\prod_{i=1}^{m} f_i)^k = \prod_{i=1}^{m} f_i^k$.
(2) Si $(\prod_{i=1}^{m} f_i)^k(\prod_{i=1}^{m} U_i) = \prod_{i=1}^{m} V_i$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(U_i) = V_i$.

Definición 2.5. Sean X un espacio topológico y E un subconjunto de X. Se dice que E es ***denso*** en X si $\mathrm{cl}_X(E) = X$.

Recordemos que la idea principal de este capítulo es analizar algunas propiedades del sistema dinámico $(\prod_{i=1}^{m} X_i, \prod_{i=1}^{m} f_i)$. Por ello, es necesario introducir la definición de estos objetos.

Definición 2.6. Un ***sistema dinámico*** es cualquier pareja formada por un espacio topológico X y cualquier función $f : X \to X$ y lo denotamos con (X, f).

Para referirse al sistema dinámico (X, f), generalmente se hace referencia únicamente a la función f.

Un concepto muy importante dentro de la teoría de sistemas dinámicos es el de órbita de un punto.

Definición 2.7. Sea (X, f) un sistema dinámico. La ***órbita de un punto $x \in X$ bajo f***, denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, es el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$. Esto es: $\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Existen puntos con la particularidad de generar órbitas finitas.

Definición 2.8. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que x es un ***punto periódico de f*** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$.

Al conjunto de todos los puntos periódicos de f se le denota con $Per(f)$.

Ejemplo 2.9. Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leqslant \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esta función se conoce como *función tienda*. Se cumple que, $x_0 = \frac{2}{5}$ es un punto periódico de T, ya que $T^2(x_0) = x_0$.

También existen puntos con la particularidad de generar órbitas densas.

Definición 2.10. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que x es un ***punto transitivo de f*** si la órbita $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X.

Al conjunto de todos los puntos transitivos de f se le denota con $trans(f)$.

Ejemplo 2.11. Sean $\theta \in \mathbb{I}$ y $S^1 = \{e^{2\pi i\alpha} : \alpha \in [0,1]\}$. Se define la *función rotación irracional* $R_\theta : S^1 \to S^1$ como $R_\theta(e^{2\pi i\alpha}) = e^{2\pi i\theta}(e^{2\pi i\alpha}) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}$, para cada $\alpha \in [0, 1]$ o simplemente;

$$R_\theta(z) = (e^{2\pi i\theta})z, \text{ para cada } z \in S^1.$$

Notemos que, para cada $z \in S^1$, $z \in trans(R_\theta)$.

Cada uno de los conjuntos que hemos definido hasta este momento juegan un papel importante en el desarrollo de este capítulo, sin embargo, los conjuntos que a continuación se definen, son punto clave en la demostración de resultados en secciones posteriores.

Definición 2.12. Sean (X, f) un sistema dinámico y A un subconjunto de X. Se dice que A es ***+invariante bajo f*** si $f(A) \subseteq A$, A es ***−invariante bajo f*** si $f^{-1}(A) \subseteq A$ y A es ***invariante bajo f*** si $f(A) = A$.

A los espacios topológicos con la propiedad de que cada subconjunto abierto es +invariante bajo una función, les damos un nombre especial. La siguiente definición es una aportación original de [**24**].

Definición 2.13. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que X es un espacio ***+invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f***, si cada subconjunto abierto de X es +invariante bajo f.

Ejemplo 2.14. Sean $X = \{1, 2\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ y $f : X \to X$ la función dada por $f(1) = 1$ y $f(2) = 1$. Luego, X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f.

No todos los espacios topológicos son +invariantes sobre subconjuntos abiertos. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.15. Sean (X, τ) como en el Ejemplo 2.14 y $f : X \to X$ la función dada por $f(1) = 2$ y $f(2) = 1$. Notemos que $f^{\times 2}(\{1\} \times \{1\}) = \{(2, 2)\} \not\subseteq \{1\} \times \{1\}$. Así, X^2 no es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo $f^{\times 2}$.

Lema 2.16. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sean (X_i, f_i) un sistema dinámico, U_i un subconjunto no vacío de X_i y $x_i \in X_i$. Si, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) \in U_i$, entonces, para $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$, se cumple que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in U_i$.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) \in U_i$. Pongamos $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Se sigue que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $l_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k = k_i + l_i$. Así, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(x_i) = f_i^{k_i+l_i}(x_i) = f_i^{l_i}(f_i^{k_i}(x_i))$. Consecuentemente, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in f_i^{l_i}(U_i)$. Puesto que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, U_i es +invariante bajo f_i, tenemos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in U_i$. □

Definición 2.17. Sean (X, f) un sistema dinámico y A y B subconjuntos de X. Se define el siguiente conjunto:

$$\boldsymbol{n_f(A, B) = \{k \in \mathbb{N} : A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset\}}.$$

Para finalizar esta sección, presentamos la definición de punto ω-límite y conjunto ω-límite.

Definición 2.18. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que $y \in X$ es un ***punto ω-límite de x bajo f*** si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cualquier abierto U de X tal que $y \in U$, existe un entero $n \geqslant k$ tal que $f^n(x) \in U$. El conjunto de todos los puntos ω-límite de x bajo f, se denota por $\omega(x, f)$ y se llama ***conjunto ω-límite de x bajo f***.

Ejemplo 2.19. Sean $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subseteq [0, 1]$ con la métrica usual y $f : X \to X$ definida por; $f(0) = 0$ y $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ [**21**, Ejemplo 2.9]. Luego, $0 \in \omega(1, f)$.

3. Funciones del tipo transitivas

Desde hace muchos años el estudio de propiedades particulares en una función se ha convertido en una herramienta importante en muchas áreas de la matemática. Una de las primeras propiedades que se observó en ciertas funciones fue la continuidad. Definición que introduce M. Fréchet en 1910 [**14**]. Después de la definición de M. Fréchet, empezaron a surgir otras clases de funciones. En 1913, H. Weyl [**27**] introduce la clase de las funciones abiertas; once años después, R. L. Moore [**23**] introduce el concepto de función monótona; y en 1964, J. J. Charatonik [**11**] establece las condiciones para que una función pertenezca a la clase de las funciones confluentes. Desde la introducción de estas tres clases de funciones, se han definido otras que están contenidas o contienen a alguna de las tres anteriores. Por ejemplo, los homeomorfismos, las funciones semi abiertas, MO, OM y casi interiores, son funciones del tipo abiertas. Por otro lado, las funciones fuertemente monótonas, a lo más monótonas, casi monótonas, débilmente monótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles, son del tipo monótonas. Finalmente, las funciones semiconfluentes, empalmantes, débilmente confluentes, atriódicas, pseudoconfluentes, frágilmente confluentes y frágilmente semiconfluentes, son funciones del tipo confluentes (la definición de cada una de estas funciones se puede consultar en [**4**]). Hoy en día, las funciones del tipo abiertas, monótonas y confluentes son muy estudiadas dentro de la teoría de continuos. Sin embargo, el inicio de la teoría de sistemas dinámicos trajo consigo la necesidad de comenzar a definir lo que hoy conocemos como funciones dinámicas. En 1912, G. D. Birkhoff [**8**] introduce el concepto de función minimal y en 1920 inicia el estudio de las funciones transitivas [**9**], quedando contenida la primera clase dentro de la segunda. Después del surgimiento de las funciones transitivas se empezaron a definir muchas otras que están relacionadas o son equivalentes a dicha clase. Una de las más estudiadas es la clase de las funciones caóticas. La palabra caos fue usada por primera ves en 1975 por T. Y. Li y J. A. Yorke [**19**] sin una definición formal, y aunque no existe una definición matemática universal de la palabra caos, la más utilizada es la dada por R. L. Devaney [**13**]. Otra clase muy estudiada en la teoría de sistemas dinámicos es la clase de las funciones mezclantes, definida en 1955 por W. Gottschalk y G. Hedlung [**16**]. Posteriormente, en 1967, H. Furstenberg [**15**] introduce una condición más débil que la de W. Gottschalk y G. Hedlung e inicia el estudio de las funciones débilmente mezclantes. Otras funciones del tipo transitivas son las funciones: exactas, totalmente transitivas, fuertemente transitivas e irreducibles.

A continuación, presentamos la definición de las funciones del tipo transitivas más conocidas y estudiadas dentro del área de los sistemas dinámicos.

Definición 3.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es:

(1) ***Exacta*** si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$.
(2) ***Mezclante*** si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geqslant N$.
(3) ***Transitiva*** si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.
(4) ***Débilmente mezclante*** si $f^{\times 2}$ es trasitiva.
(5) ***Totalmente transitiva*** si f^s es transitiva, para cada $s \in \mathbb{N}$.

(6) ***Fuertemente transitiva*** si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$.
(7) ***Caótica*** si f es transitiva y $Per(f)$ es denso en X (esta definición corresponde al caos en el sentido de Devaney [**3**]).
(8) ***Minimal*** si no existe un subconjunto propio A de X el cuál es no vacío, cerrado e invariante.
(9) ***Irreducible*** si el único subconjunto cerrado A de X tal que $f(A) = X$ es $A = X$.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Irreducible} \arrow[dr] & \text{Exacta} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Mezclante} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Débilmente mezclante} \\
 & \text{Sobreyectiva} & \text{Totalmente transitiva} \arrow[d] & \\
 & \text{Caótica} \arrow[r] & \text{Transitiva} & \text{Fuertemente transitiva} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Figura 1. Resumen de relaciones que se dan cuando X es un espacio topológico y $f : X \to X$ una función no necesariamente continua.

En el diagrama de la Figura 1, presentamos las relaciones que se dan de manera general entre las funciones dadas en la Definición 3.1. Es decir, considerando a X como cualquier espacio topológico y a $f : X \to X$ cualquier función (no necesariamente continua). La prueba de estas relaciones entre funciones se puede consultar en [**5**, Teoremas 3.1, 3.3, 3.5, 3.6 y 3.7].

Bajo ciertas hipótesis se pueden obtener otras relaciones entre las clases de funciones que presentamos en la Definición 3.1. En el diagrama de la Figura 2 mostramos algunos de estos resultados (con F. transitiva, Déb. M. y T. transitiva denotamos a las funciones fuertemente transitivas, débilmente mezclantes y totalmente transitivas, respectivamente). La prueba de las implicaciones que se muestran en el diagrama de la Figura 2 se pueden consultar en [**5**, Teorema 6.3] y [**25**, Teoremas 1.5.19 y 1.5.20].

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Irreducible} \arrow[drr, "(C.1)"] & & \text{Exacta} \arrow[r, "(C.1)"] \arrow[d, "(C.1)"] & \text{Mezclante} \arrow[r, "(C.1)"] \arrow[d, "(C.1)"] & \text{Déb. M} \arrow[dl, "(C.2)"] \\
\text{Minimal} \arrow[ur, "(C.3)"] \arrow[drr, "(C.3)"] & & & \text{Sobreyectiva} & \text{T. transitiva} \arrow[dl, "(C.1)"] & \\
 & & \text{F. transitiva} \arrow[r, "(C.1)"] & \text{Transitiva} & \text{Caótica} \arrow[l, "(C.1)"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2. Relaciones entre funciones con dominio compacto (y/o de Hausdorff) y f continua.

En el diagrama de la Figura 2, las condiciones (C.1), (C.2) y (C.3) son como sigue:

(C.1) Para cualquier espacio topológico X y para cualquier función $f : X \to X$.
(C.2) Para cualquier espacio topológico X y para cualquier función continua $f : X \to X$.
(C.3) Para cualquier espacio topológico X compacto y para cualquier función continua $f : X \to X$.

Como ya mencionamos, los sistemas dinámicos de la Definición 3.1 son los más conocidos y estudiados en el área de sistemas dinámicos. Sin embargo, existen otras nociones que también están relacionadas con la transitividad topológica, aunque no son tan populares como los anteriores. Por ejemplo, en 1967, H. Furstenberg [**15**] no solo introduce el concepto de función débilmente mezclante, también define los F-sistemas, sin embargo, estos últimos son menos conocidos que los sistemas débilmente mezclantes. Por otro lado, los tipos de sistemas dinámicos presentados en la Definición 3.1 han dado pie al surgimiento de nuevos sistemas. En 1997, P. Touhey [**26**] define una variante de las funciones caóticas en el sentido de Devaney, a esta clase de funciones las conocemos como funciones Touhey. Tres años después, F. Blanchard, B. Host y A. Maass [**10**] introducen el concepto de función dispersora y en el 2005, D. Kwietniak [**18**] inicia el estudio de las funciones exactamente Devaney caóticas. En su gran mayoría, los tipos de sistemas dinámicos que hemos mencionado fueron definidos entre continuos, espacios métricos compactos o espacios compactos y de Hausdorff. Recientemente, se han definido tipos de sistemas dinámicos sobre espacios topológicos. Por ejemplo, J. H. Mai y W. H. Sun, en el 2010 [**21**] inician el estudio de las funciones órbita-transitivas, estrictamente órbita transitivas y ω-transitivas. Finalmente, en el 2017, E. Akin, J. Auslander y A. Nagar [**2**] definen una clase más grande que la clase de las funciones minimales, la clase de las funciones minimales inversas sobre espacios métricos.

A continuación, presentamos más clases de funciones del tipo transitivas y vemos de que manera se relacionan con las funciones que presentamos en la Definición 3.1.

Definición 3.2. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es:

(1) ***Órbita-transitiva*** si existe $x \in X$ tal que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$.
(2) ***Estrictamente órbita-transitiva*** si existe $x \in X$ tal que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$.
(3) ***ω-transitiva*** si existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.
(4) ***TT_{++}*** si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $n_f(U, V)$ es infinito.
(5) ***Suavemente mezclante*** si para cualquier espacio topológico Y y cualquier función transitiva, $g : Y \to Y$, la función $f \times g$ es transitiva.
(6) ***Exactamente Devaney caótica*** si f es exacta y $Per(f)$ es denso en X.
(7) ***Minimal inversa*** si para cada $x \in X$, el conjunto:

$$\left\{y \in X : f^l(y) = x, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\right\}$$

es denso en X.
(8) ***Totalmente minimal*** si para cada $s \in \mathbb{N}$, f^s es minimal.
(9) ***Dispersora*** si para cualquier espacio topológico Y y cualquier función minimal, $g : Y \to Y$, la función $f \times g$ es transitiva.
(10) ***Touhey*** si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existen un punto periódico $x \in U$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f^k(x) \in V$.
(11) **Un *F-sistema*** si f es totalmente transitiva y $Per(f)$ es denso en X.

En el diagrama de la Figura 3 mostramos relaciones entre las funciones de las Definiciones 3.1 y 3.2 para el caso general, es decir, cuando X es un espacio topológico y $f\colon X \to X$ cualquier función. Para las pruebas de estas inclusiones recomendamos revisar [**1, 5, 7**] y [**21**] (denotamos con T. transitiva, F. transitiva, E. Devaney caótica y E. órbita-transitiva a las funciones totalmente transitivas, fuertemente transitivas, exactamente Devaney caóticas y estrictamente órbita-transitivas, respectivamente).

En el Teorema 3.3 se presentan otras relaciones que no se muestran en el diagrama de la Figura 3. Incluimos su demostración ya que las pruebas no se siguen inmediatamente de la definición como en el caso de las funciones Touhey, exactamente Devaney caóticas, dispersoras, suavemente mezclantes y los F-sistemas.

Teorema 3.3. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple lo siguiente:

(1) Si f es exacta, entonces f es minimal inversa.
(2) Si f es minimal inversa, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es exacta. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que f es exacta, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$. Por otro lado, ya que x es un punto en X, por la igualdad anterior podemos concluir que $x \in f^k(U)$. Con esto último aseguramos la existencia de $u \in U$ tal que $f^k(u) = x$. Por lo tanto, $u \in \{y \in X : f^l(y) = x, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\}$. Así, f es minimal inversa.

Ahora supongamos que f es minimal inversa. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y $v \in V$. Ya que f es minimal inversa, el conjunto $\{y \in X : f^l(y) = v, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\}$ es denso en X. Esto implica que la intersección $\{y \in X : f^l(y) = v, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\} \cap U$ es no vacía. Así, existen $u \in U$ y $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(u) = v$. Con lo cual podemos concluir que $f^l(u) \in f^l(U) \cap V$. Por lo tanto, f es transitiva. □

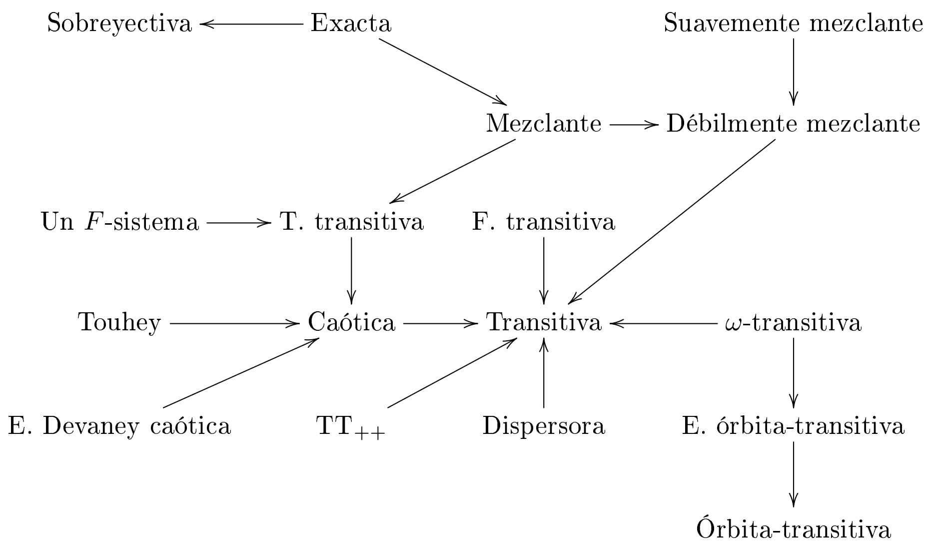

Figura 3. Resumen de relaciones que se dan de manera general.

Finalizamos esta sección mostrando ejemplos de las funciones presentadas en las Definiciones 3.1 y 3.2.

Ejemplo 3.4. Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ como en el Ejemplo 2.9. De [**17**, Proposición 7.2], sabemos que T es exacta. Así, por el diagrama de la Figura 2, T también es mezclante, débilmente mezclante, totalmente transitiva y transitiva. Más aún, en [**17**, Proposición 7.3], se verifica que $Per(T)$ es denso en el intervalo $[0,1]$, por lo que T es caótica en el sentido de Devaney, exactamente Devaney caótica y un F-sistema. Finalmente, de [**21**, pág. 952], sabemos que las propiedades de ω-transitividad y transitividad son equivalentes para espacios topológicos con una base numerable, parcialmente compactos y pseudo-regulares y para cualquier función continua. En consecuencia, T también es ω-transitiva.

Ejemplo 3.5. Sea $R_\theta : S^1 \to S^1$ como en el Ejemplo 2.11. De [**25**, Proposición 1.6.14], tenemos que R_θ es minimal. Luego, por el diagrama de la Figura 2, concluimos que R_θ es además, irreducible, fuertemente transitiva y transitiva. Por otro lado, de [**25**, Ejemplo 2.3.12], tenemos que R_θ es TT_{++}. Además, no es difícil verificar que toda función minimal y continua es minimal inversa [**2**, pág. 26], con lo cual obtenemos que R_θ es minimal inversa. Finalmente, si $r \in \mathbb{N}$, $R_\theta^r(z) = e^{2\pi i r\theta} z$. De aquí, para cada $r \in \mathbb{N}$, $R_\theta^r(z)$ es también una rotación irracional. Por lo tanto, para cada $r \in \mathbb{N}$, $R_\theta^r(z)$ es minimal. Consecuentemente, R_θ es totalmente minimal.

Ejemplo 3.6. Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 2.19. Luego, f es órbita-transitiva ya que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(1, f)) = X$ [**21**, Ejemplo 3.3].

Ejemplo 3.7. Sean $f : X \to X$ como en el Ejemplo 3.6 y $Y = [0, 1]$ con la topología $\tau = \{[0, t) : t \in (0, 1]\} \cup \{\emptyset, Y\}$. Definamos la función $F_1 : X \times Y \to X \times Y$ como sigue:

$$F_1((s,t)) = \begin{cases} (s, 0), & t \neq 0; \\ (f(s), 0), & t = 0. \end{cases}$$

Luego, F_1 es estrictamente órbita-transitiva ya que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(F_1((1, 1)), F_1)) = X \times Y$ [**21**, Ejemplo 3.3].

Ejemplo 3.8. Sea $f : [0, 2] \to [0, 2]$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ -2x + 3, & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ -x + 2, & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Se cumple que f es caótica en el sentido de Devaney y Touhey [**12**, Ejemplo 1].

4. Propiedades dinámicas sobre productos

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Notemos que las Definiciones 2.1 y 2.3 dejan ver una relación muy natural entre los sistemas dinámicos $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$ y (X_i, f_i), para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Qué relaciones existen entre los sistemas dinámicos $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$ y (X_i, f_i), para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, cuando alguno de ellos tiene alguna propiedad dinámica?

Sabemos bien que para responder a esta pregunta, es conveniente analizar primero relaciones entre los espacios $\prod_{i=1}^m X_i$ y X_i, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y después, con ayuda de estos resultados, empezar a establecer relaciones entre las funciones $\prod_{i=1}^m f_i$ y f_i, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Por esta razón, en esta sección nos encargamos de estudiar algunas propiedades dinámicas en productos cartesianos.

Teorema 4.1. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico y sea $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Si $(x_1, \dots, x_m)$ es un punto transitivo de $\prod_{i=1}^m f_i$, entonces, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, x_i es un punto transitivo de f_i.
(2) Si $\omega((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$, entonces, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$.
(3) $(x_1, \dots, x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$ si y sólo si, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, x_i es un punto periódico de f_i.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Sean $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $U_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis,

$$\mathcal{O}((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) \cap (\prod_{i=1}^m U_i) \neq \emptyset.$$

Se sigue que, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \dots, x_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Luego, por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \dots, x_m)) = (f_1^k(x_1), \dots, f_m^k(x_m))$ y así, $f_{i_0}^k(x_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por lo tanto, $U_{i_0} \cap \mathcal{O}(x_{i_0}, f_{i_0}) \neq \emptyset$ y $\mathrm{cl}_{X_{i_0}}(\mathcal{O}(x_{i_0}, f_{i_0})) = X_{i_0}$. Supongamos que $\omega((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Sean $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, $y_{i_0} \in X_{i_0}$, $k \in \mathbb{N}$, U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} tal que $y_{i_0} \in U_{i_0}$ y, para cada $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $y_j \in X_j$. Además, para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. De lo anterior obtenemos que, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(y_1, \dots, y_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Así, por hipótesis, existe $l \in \mathbb{N}$ con

$l \geqslant k$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((x_1,\ldots,x_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que, $f_{i_0}^l(x_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por lo tanto, $y_{i_0} \in \omega(x_{i_0}, f_{i_0})$. Consecuentemente, $X_{i_0} = \omega(x_{i_0}, f_{i_0})$.

Supongamos que $(x_1,\ldots,x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\ldots,x_m)) = (x_1,\ldots,x_m)$. Así, por la Observación 2.4, parte (1), para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^k(x_i) = x_i$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, x_i es un punto periódico de f_i.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, x_i es un punto periódico de f_i. Así, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) = x_i$. Sea $k = k_1 \cdots k_m$. De aquí, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^k(x_i) = x_i$. En consecuencia, $(f_1^k(x_1),\ldots,f_m^k(x_m)) = (x_1,\ldots,x_m)$. Por la Observación 2.4, parte (1), $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\ldots,x_m)) = (x_1,\ldots,x_m)$. Por lo tanto, $(x_1,\ldots,x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$. □

El Ejemplo 4.2 muestra que los recíprocos del Teorema 4.1, partes (1) y (2) no se cumplen en general.

Ejemplo 4.2. Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 2.15. Notemos que:

(1) $\mathrm{cl}_X(\mathcal{O}(1,f)) = X$ y $\mathrm{cl}_X(\mathcal{O}(2,f)) = X$. Sin embargo, $\mathcal{O}((1,2), f^{\times 2}) \cap \{1\}^2 = \emptyset$. En consecuencia, $\mathrm{cl}_{X^2}(\mathcal{O}((1,2), f^{\times 2})) \neq X^2$.

(2) $\omega(1,f) = X$ y $\omega(2,f) = X$. Sin embargo, $\omega((1,2), f^{\times 2}) \neq X^2$.

Existen condiciones bajo las cuales se cumplen los recíprocos del Teorema 4.1, partes (1) y (2). Una de estas condiciones es la que mostramos en el Teorema 4.3.

Teorema 4.3. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, sean (X_i, f_i) un sistema dinámico y $x_i \in X_i$. Se cumple lo siguiente:

(1) Si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$ y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\omega((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$.

(2) Si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$ y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$ y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Sean $(y_1,\ldots,y_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$, $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(y_1,\ldots,y_m) \in \mathcal{U}$. De aquí, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i, tal que $(y_1,\ldots,y_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $l_i \in \mathbb{N}$ tal que $l_i \geqslant k$ y $f_i^{l_i}(x_i) \in U_i$. Sea $l = \max\{l_1,\ldots,l_m\}$. Por el Lema 2.16, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^l(x_i) \in U_i$. Así, $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((x_1,\ldots,x_m)) \in \mathcal{U}$. También, notemos que $l \geqslant k$. Por lo tanto, $(y_1,\ldots,y_m) \in \omega((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i)$ y así $\omega((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$ y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathcal{O}(x_i, f_i) \cap U_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) \in U_i$. Sea $k = \max\{k_1,\ldots,k_m\}$. Por el Lema 2.16, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^k(x_i) \in U_i$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\ldots,x_m)) = (f_1^k(x_1),\ldots,f_m^k(x_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. De aquí, concluimos que, $\mathcal{O}((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por lo tanto:

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$ □

En el Teorema 4.1 vimos una manera natural de relacionar puntos transitivos, ω-límite y periodicos de las funciones $\prod_{i=1}^m f_i$ y f_i, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$. Ahora podemos intuir lo que sucede con los respectivos conjuntos.

La prueba del siguiente corolario se sigue del Teorema 4.1.

Corolario 4.4. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Se cumple lo siguiente:

(1) $trans(\prod_{i=1}^m f_i) \subseteq \prod_{i=1}^m trans(f_i)$.
(2) $\omega((x_1,\ldots,x_m),\prod_{i=1}^m f_i) \subseteq \prod_{i=1}^m \omega(x_i,f_i)$.
(3) $Per(\prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m Per(f_i)$.

Teorema 4.5. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, sea (X_i,f_i) un sistema dinámico. Se cumple lo siguiente:
(1) $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(trans(\prod_{i=1}^m f_i)) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i))$.
(2) $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) = \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$.

Demostración. En virtud del Corolario 4.4, parte (1), es suficiente con verificar que

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\prod_{i=1}^m trans(f_i)\right) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i)).$$

Sean $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m trans(f_i))$ e $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$. Sea U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. Observemos que $(x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y que $\prod_{i=1}^m U_i$ es abierto en $\prod_{i=1}^m X_i$. Así, $\prod_{i=1}^m U_i \cap \prod_{i=1}^m trans(f_i) \neq \emptyset$. Sea $(u_1,\ldots,u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $u_i \in trans(f_i)$. De aquí, $U_{i_0} \cap trans(f_{i_0}) \neq \emptyset$. Como U_{i_0} e $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$ son arbitrarios, tenemos que $x_{i_0} \in \mathrm{cl}_{X_{i_0}}(trans(f_{i_0}))$ y en consecuencia, $(x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i))$. Por lo tanto:

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\prod_{i=1}^m trans(f_i)\right) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i)).$$

Finalmente, por el Corolario 4.4, parte (1), tenemos que,

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(trans(\prod_{i=1}^m f_i)) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i)).$$

Sean $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i))$ e $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$. Veamos que $x_{i_0} \in \mathrm{cl}_{X_{i_0}}(Per(f_{i_0}))$. Sea U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. Notemos que $(x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y que $\prod_{i=1}^m U_i$ es abierto en $\prod_{i=1}^m X_i$. Así, $(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) \cap (\prod_{i=1}^m U_i) \neq \emptyset$. Sea $(u_1,\ldots,u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $u_i \in Per(f_i)$. De aquí, $u_{i_0} \in Per(f_{i_0}) \cap U_{i_0}$. Ya que U_{i_0} e $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$ son arbitrarios, obtenemos que, $x_{i_0} \in \mathrm{cl}_{X_{i_0}}(Per(f_{i_0}))$ y así, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $x_i \in \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$. Por lo tanto, $(x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$.

Ahora, sean $(x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathcal{U}$. Veamos que $\prod_{i=1}^m Per(f_i) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Tenemos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe un subconjunto abierto U_i de X_i tal que $(x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $U_i \cap Per(f_i) \neq \emptyset$. Para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, sea $u_i \in U_i \cap Per(f_i)$. De aquí, $(u_1,\ldots,u_m) \in (\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m Per(f_i))$. En consecuencia, $\mathcal{U} \cap (\prod_{i=1}^m Per(f_i)) \neq \emptyset$. Ya que $\mathcal{U}$ es arbitrario, tenemos que $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i))$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) = \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$. □

Observemos que en algunas condiciones dadas en las Definiciones 3.1 y 3.2, la densidad del conjunto de puntos periódicos juega un papel muy importante. Por ello, es conveniente conocer las condiciones bajo las cuales la densidad del conjunto $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ implica la densidad del conjunto $Per(f_i)$, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ y viceverza.

Teorema 4.6. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, sea (X_i,f_i) un sistema dinámico. Luego, $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$ si y sólo si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i.

Demostración. Supongamos que $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por el Teorema 4.5, parte (2), $\prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Consecuentemente, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = X_i$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i.

Ahora supongamos que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i. Así,

$$\prod_{i=1}^{m} \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = \prod_{i=1}^{m} X_i.$$

Por otro lado, por el Corolario 4.4, parte (3) y el Teorema 4.5, parte (2), $\prod_{i=1}^{m} \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^{m} X_i} \left(\prod_{i=1}^{m} Per(f_i)\right) = \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^{m} X_i} \left(Per \left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)\right)$. Esto implica que, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^{m} X_i}(Per(\prod_{i=1}^{m} f_i)) = \prod_{i=1}^{m} X_i$. Por lo tanto, $Per(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^{m} X_i$. □

El siguiente lema está motivado por la parte (4) de la Definición 3.2.

Lema 4.7. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si $j \in \{1, \ldots, m\}$ y U_j y V_j son dos subconjuntos abiertos no vacíos de X_j y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$, ponemos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$, entonces $n_{\prod_{i=1}^{m} f_i}(\prod_{i=1}^{m} U_i, \prod_{i=1}^{m} V_i) \subseteq n_{f_j}(U_j, V_j)$.

Demostración. Sea $k \in n_{\prod_{i=1}^{m} f_i}(\prod_{i=1}^{m} U_i, \prod_{i=1}^{m} V_i)$. De aquí:

$$\left(\prod_{i=1}^{m} U_i\right) \cap \left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)^{-k} \left(\prod_{i=1}^{m} V_i\right) \neq \emptyset.$$

Así, podemos tomar $(y_1, \ldots, y_m) \in (\prod_{i=1}^{m} U_i)$ tal que $(\prod_{i=1}^{m} f_i)^k((y_1, \ldots, y_m)) \in \prod_{i=1}^{m} V_i$. Por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que, $(f_1^k(y_1), \ldots, f_m^k(y_m)) \in \prod_{i=1}^{m} V_i$. Luego, $y_j \in U_j \cap f_j^{-k}(V_j)$. Por lo tanto, $k \in n_{f_j}(U_j, V_j)$ y así:

$$n_{\prod_{i=1}^{m} f_i} \left(\prod_{i=1}^{m} U_i, \prod_{i=1}^{m} V_i\right) \subseteq n_{f_j}(U_j, V_j). \qquad \square$$

5. Propiedades dinámicas de funciones en productos

Es complicado dar una fecha exacta en la que inicia el estudio de propiedades dinámicas de funciones producto. Ya que en muchos trabajos, aunque no se habla de la dinámica de funciones producto como tal, se pueden encontrar algunos resultados que involucran alguna propiedad dinámica de estas funciones. En 1967, H. Furstenberg ya hablaba de dinámica topológica, producto de procesos y producto de flujos [**15**]. Años más tarde, W. Bauer y K. Sigmund, citando algunas ideas de H. Furstenberg, analizan la dinámica topológica de transformaciones inducidas sobre espacios de medida [**6**], en dicho trabajo, también se pueden encontrar algunos resultados encaminados al estudio de propiedades dinámicas de funciones producto. Es hasta el año 2010 cuando N. Değirmenci y Ş. Koçak le dan formalidad al estudio de propiedades dinámicas (principalmente el caos en el sentido de Devaney) en espacios producto [**12**]. En particular, analizan las condiciones bajo las cuales el producto de dos funciones (sobre espacios métricos) f y g caóticas en el sentido de Devaney es también una función caótica en el sentido de Devaney. Además, demuestran que si el producto $f \times g$ es mezclante, entonces f y g también lo son. Tres años después, R. Li y X. Zhou [**20**], considerando a $\mathcal{M}$ como alguna de las siguientes clases de funciones: sindéticamente transitivas, sindéticamente sensitivas, cofinitamente sensitivas, multi-sensitivas, ergódicamente sensitivas, mezclantes y transitivas, analizan las relaciones entre las condiciones: (1) $f \times g \in \mathcal{M}$ y (2) $f, g \in \mathcal{M}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico y sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: exacta, transitiva, débilmente mezclante, mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, irreducible, suavemente mezclante, minimal inversa, Touhey, totalmente minimal, dispersora, exactamente Devaney caótica o un F-sistema. Motivados por las ideas de N. Değirmenci, Ş. Koçak, R. Li y X. Zhou, en esta sección analizamos relaciones entre las siguientes condiciones: (1) $\prod_{i=1}^{m} f_i \in \mathcal{M}$ y (2) para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.

Teorema 5.1. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exacta si y sólo si $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0}. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por la Observación 2.4, parte (2), $f_{i_0}^k(U_{i_0}) = X_{i_0}$. Por lo tanto, f_{i_0} es exacta.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exacta. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i) = X_i$. Por otro lado, por el diagrama de la Figura 3, tenemos que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es sobreyectiva. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y para cada $l \in \mathbb{N}$, $f_i^l(X_i) = X_i$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Se sigue que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $l_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k = k_i + l_i$. Esto implica que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(U_i) = f_i^{l_i + k_i}(U_i) = f_i^{l_i}(f_i^{k_i}(U_i)) = f_i^{l_i}(X_i) = X_i$. Finalmente, por la Observación 2.4, parte (1), $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) = \prod_{i=1}^m f_i^k(U_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) = \prod_{i=1}^m X_i$ y así $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta. □

De los Teoremas 4.6 y 5.1, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.2. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exactamente Devaney caótica si y sólo si $\prod_{i=1}^m f_i$ es exactamente Devaney caótica.

Teorema 5.3. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Luego, $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante si y sólo si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es mezclante.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ y $\prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$, para todo $k \geqslant N$. Sean $k_1 \geqslant N$ y $(a_1, \ldots, a_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1}(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i)$. Luego, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que $\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{k_1}((x_1, \ldots, x_m)) = (a_1, \ldots, a_m)$. Esto es, $f_{i_0}^{k_1}(x_{i_0}) = a_{i_0}$. Así, $a_{i_0} \in f_{i_0}^{k_1}(U_{i_0}) \cap V_{i_0}$. Consecuentemente, $f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$, para cada $k \geqslant N$. Por lo tanto, f_{i_0} es mezclante.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es mezclante. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i, tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Ya que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $k \geqslant N_i$. Sean $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$ y $l \geqslant N$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^l(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Ahora, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, podemos tomar $a_i \in U_i$ tal que $f_i^l(a_i) \in V_i$. Esto implica que, $(a_1, \ldots, a_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^l(a_1, \ldots, a_m) \in \prod_{i=1}^m V_i$. En consecuencia, $(\prod_{i=1}^m f_i)^l(a_1, \ldots, a_m) \in ((\prod_{i=1}^m f_i)^l(\prod_{i=1}^m U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m V_i)$. Así, para cada $l \geqslant N$,

$$((\prod_{i=1}^m f_i)^l(\prod_{i=1}^m U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante. □

Para el caso de las funciones transitivas, débilmente mezclantes, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, caóticas en el sentido de Devaney, órbita-transitivas, estrictamente órbita-transitivas, ω-transitivas, TT_{++}, minimales inversas, Touhey, los F-sistemas, dispersoras y suavemente mezclantes no nos es posible establecer un resultado similar al de los Teoremas 5.1, 5.2 y 5.3, sin embargo, podemos establecer el siguiente:

Teorema 5.4. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico y sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, minimal inversa, Touhey, un F-sistema, dispersora o suavemente mezclante. Si $\prod_{i=1}^{m} f_i \in \mathcal{M}$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^{m} U_i$ y $\prod_{i=1}^{m} V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^{m} X_i$. Puesto que, $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^{m} f_i)^k(\prod_{i=1}^{m} U_i) \cap (\prod_{i=1}^{m} V_i) \neq \emptyset$. Sea $(u_1, \ldots, u_m) \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ tal que $(\prod_{i=1}^{m} f_i)^k((u_1, \ldots, u_m)) \in \prod_{i=1}^{m} V_i$. Por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que $f_{i_0}^k(u_{i_0}) \in V_{i_0}$. Por lo tanto, $f_{i_0}^k(u_{i_0}) \in f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap V_{i_0}$, $f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$ y así f_{i_0} es transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es débilmente mezclante. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $X_{i_0} \times X_{i_0}$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_{i_0}^1, U_{i_0}^2, V_{i_0}^1$ y $V_{i_0}^2$ de X_{i_0} tales que $U_{i_0}^1 \times U_{i_0}^2 \subseteq \mathcal{U}$ y $V_{i_0}^1 \times V_{i_0}^2 \subseteq \mathcal{V}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $U_i^1 = U_i^2 = V_i^1 = V_i^2 = X_i$. Luego, $(\prod_{i=1}^{m} U_i^1) \times (\prod_{i=1}^{m} U_i^2)$ y $(\prod_{i=1}^{m} V_i^1) \times (\prod_{i=1}^{m} V_i^2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $(\prod_{i=1}^{m} X_i) \times (\prod_{i=1}^{m} X_i)$. Por hipótesis, existen $((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) \in (\prod_{i=1}^{m} U_i^1) \times (\prod_{i=1}^{m} U_i^2)$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\left(\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)\right)^k ((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) \in \left(\prod_{i=1}^{m} V_i^1\right) \times \left(\prod_{i=1}^{m} V_i^2\right).$$

Así, por la Observación 2.4, parte (1), $(f_{i_0} \times f_{i_0})^k((a_{i_0}, b_{i_0})) \in V_{i_0}^1 \times V_{i_0}^2$. Más aún, $(a_{i_0}, b_{i_0}) \in U_{i_0}^1 \times U_{i_0}^2$. Por lo tanto, $(f_{i_0} \times f_{i_0})^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $f_{i_0}^{\times 2}$ es transitiva. Finalmente, f_{i_0} es débilmente mezclante.

Supongamos que $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es totalmente transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $(\prod_{i=1}^{m} f_i)^s$ es transitiva. Luego, por la Observación 2.4, parte (1), $\prod_{i=1}^{m} f_i^s$ es transitiva. Así, por el primer párrafo de la prueba de este teorema, se tiene que $f_{i_0}^s$ es transitiva. Por lo tanto, f_{i_0} es totalmente transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es fuertemente transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^{m} U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^{m} X_i$. Por hipótesis, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{i=1}^{m} X_i = \bigcup_{k=0}^{s} (\prod_{i=1}^{m} f_i)^k(\prod_{i=1}^{m} U_i)$. Sea $x_{i_0} \in X_{i_0}$ y, para todo $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $x_i \in X_i$. Luego, existe $k_1 \in \{0, \ldots, s\}$ tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in (\prod_{i=1}^{m} f_i)^{k_1}(\prod_{i=1}^{m} U_i)$. Así, por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que $x_{i_0} \in f_{i_0}^{k_1}(U_{i_0})$. Por lo tanto, $X_{i_0} = \bigcup_{k=0}^{s} f_{i_0}^k(U_{i_0})$ y así f_{i_0} es fuertemente transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es caótica en el sentido de Devaney. Por el primer párrafo de la prueba de este teorema, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es transitiva. Además, por el Teorema 4.6, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es caótica en el sentido de Devaney.

Supongamos que $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es órbita-transitiva. De aquí, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} X_i$ tal que $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^{m} X_i}(\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^{m} f_i)) = \prod_{i=1}^{m} X_i$. Por el Teorema 4.1, parte (1), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$. Así, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es órbita-transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es estrictamente órbita-transitiva. Luego, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} X_i$ tal que:

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^{m} X_i}\left(\mathcal{O}\left(\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)((x_1, \ldots, x_m)), \prod_{i=1}^{m} f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{m} X_i.$$

Por el Teorema 4.1, parte (1), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(f_i(x_i), f_i)) = X_i$ y así, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es estrictamente órbita-transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es ω-transitiva. De aquí, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ tal que $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Así, por el Teorema 4.1, parte (2), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$. Por lo tanto, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es ω-transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es TT_{++}. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De aquí, por el Lema 4.7, $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\prod_{i=1}^m U_i, \prod_{i=1}^m V_i) \subseteq n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, V_{i_0})$. Además, por hipótesis, $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\prod_{i=1}^m U_i, \prod_{i=1}^m V_i)$ es infinito. Por lo tanto, $n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, V_{i_0})$ es infinito y así f_{i_0} es TT_{++}.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal inversa. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $x_{i_0} \in X_{i_0}$, U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sean $U_i = X_i$ y $x_i \in X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, tenemos que $\{A \in \prod_{i=1}^m X_i : (\prod_{i=1}^m f_i)^l(A) = (x_1, \ldots, x_m),\ \text{para algún } l \in \mathbb{N}\} \cap \prod_{i=1}^m U_i \neq \emptyset$. Sean $(u_1, \ldots, u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $l \in \mathbb{N}$ tales que $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((u_1, \ldots, u_m)) = (x_1, \ldots, x_m)$. De la Observación 2.4, parte (1), $u_{i_0} \in \{y \in X_{i_0} : f_{i_0}^l(y) = x_{i_0},\ \text{para algún } l \in \mathbb{N}\} \cap U_{i_0} \neq \emptyset$. Así, el conjunto $\{y \in X_{i_0} : f_{i_0}^l(y) = x_{i_0},\ \text{para algún } l \in \mathbb{N}\}$ es denso en X_{i_0}. Puesto que $x_{i_0} \in X_{i_0}$ es arbitrario, podemos concluir que f_{i_0} es minimal inversa.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es Touhey. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. Así, $\prod_{i=1}^m U_i$ y $\prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, existen un punto periódico $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \ldots, x_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Por el Teorema 4.1, parte (3), x_{i_0} es un punto periódico de f_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y por la Observación 2.4, parte (1), $f_{i_0}^k(x_{i_0}) \in V_{i_0}$. Por lo tanto, f_{i_0} es Touhey.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es un F-sistema. Así, $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva y $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por el tercer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es totalmente transitiva. Además, por el Teorema 4.6, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es un F-sistema.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es dispersora. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, Y un espacio topológico, $g : Y \to Y$ una función minimal y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $X_{i_0} \times Y$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_{i_0}^1$ y $U_{i_0}^2$ de X_{i_0} y subconjuntos abiertos no vacíos V_1 y V_2 de Y tales que $U_{i_0}^1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}$ y $U_{i_0}^2 \times V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $U_i^1 = U_i^2 = X_i$. Así, $\prod_{i=1}^m U_i^1$ y $\prod_{i=1}^m U_i^2$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que $(\prod_{i=1}^m f_i) \times g$ es transitiva, existen $((u_1, \ldots, u_m), v_1) \in (\prod_{i=1}^m U_i^1) \times V_1$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $((\prod_{i=1}^m f_i) \times g)^k((u_1, \ldots, u_m), v_1) \in (\prod_{i=1}^m U_i^2) \times V_2$. De aquí, $(u_{i_0}, v_1) \in U_{i_0}^1 \times V_1$ y por la Observación 2.4, parte (1), $(f_{i_0} \times g)^k((u_{i_0}, v_1)) \in U_{i_0}^2 \times V_2$. Por lo tanto, $(f_{i_0} \times g)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y así f_{i_0} es dispersora.

La prueba para las funciones suavemente mezclantes es análoga a la prueba dada para funciones dispersoras. $\square$

El recíproco del Teorema 5.4 no es cierto en general. Veamos un ejemplo parcial de esto en el siguiente:

Ejemplo 5.5. Sea $f : [0, 2] \to [0, 2]$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ -2x + 3, & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ -x + 2, & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

En [**12**, Ejemplo 1], se verifica que f es una función caótica en el sentido de Devaney. Además, se prueba que $f^{\times 2} : [0, 2]^2 \to [0, 2]^2$ no es transitiva y por lo tanto, no es caótica en el sentido de Devaney. Más aún, en [**1**] y [**21**], se verifica que para continuos y funciones continuas, las funciones: transitiva, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva y TT_{++} son equivalentes.

Por lo tanto, el recíproco del Teorema 5.4, para todas estas clases de funciones no se cumple en general.

Las funciones minimales y totalmente minimales no las incluimos en el Teorema 5.4 ya que para estas dos clases de funciones requerimos la continuidad de la función.

Teorema 5.6. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es continua y $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es minimal, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es minimal.

Demostración. Sea $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Puesto que f_{i_0} es continua, por [**21**, Proposición 6.2] es suficiente con verificar que, para cada $x \in X_{i_0}$, $\mathrm{cl}_{X_{i_0}}(\mathcal{O}(x, f_{i_0})) = X_{i_0}$. Sean $x_{i_0} \in X_{i_0}$ y para todo $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, $x_i \in X_i$. De aquí, $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} X_i$. Puesto que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es continua, no es difícil verificar que $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es una función continua. En consecuencia, $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es continua y minimal. Así:

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^{m} X_i}\left(\mathcal{O}\left((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^{m} f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{m} X_i.$$

Luego, por el Teorema 4.1, parte (1), para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$. En particular, $\mathrm{cl}_{X_{i_0}}(\mathcal{O}(x_{i_0}, f_{i_0})) = X_{i_0}$. Como $x_{i_0} \in X_{i_0}$ es arbitrario, de [**21**, Proposición 6.2], f_{i_0} es minimal. □

Corolario 5.7. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es continua y $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es totalmente minimal, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es totalmente minimal.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $(\prod_{i=1}^{m} f_i)^s$ es minimal. De aquí, por la Observación 2.4, parte (1), $\prod_{i=1}^{m} f_i^s$ es minimal. Así, por el Teorema 5.6, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i^s es minimal. □

Lema 5.8. Para cada $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y $f_i \times f_{m+1}$ es transitiva, entonces $(\prod_{i=1}^{m} f_i) \times f_{m+1}$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y que $f_i \times f_{m+1}$ es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos subconjuntos abiertos no vacíos de $(\prod_{i=1}^{m} X_i) \times X_{m+1}$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ de $\prod_{i=1}^{m} X_i$ y subconjuntos abiertos no vacíos V_1 y V_2 de X_{m+1} tales que, $\mathcal{U}_1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_2 \times V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i^1, U_i^2 de X_i tales que $\prod_{i=1}^{m} U_i^1 \subseteq \mathcal{U}_1$ y $\prod_{i=1}^{m} U_i^2 \subseteq \mathcal{U}_2$. Por hipótesis, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $(f_i \times f_{m+1})^{k_i}(U_i^1 \times V_1) \cap (U_i^2 \times V_2) \neq \emptyset$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $(u_i, v_i) \in U_i^1 \times V_1$ tal que $(f_i \times f_{m+1})^{k_i}((u_i, v_i)) \in U_i^2 \times V_2$. Consecuentemente, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^{k_i}(u_i) \in U_i^2$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_m\}$. Por el Lema 2.16, obtenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(u_i) \in U_i^2$. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $k = k_{i_0}$ y $v = v_{i_0}$. Así, $f_{m+1}^k(v) \in V_2$. Esto implica que, $((u_1, \ldots, u_m), v)) \in (\prod_{i=1}^{m} U_i^1) \times V_1$ y $((\prod_{i=1}^{m} f_i) \times f_{m+1})^k(((u_1, \ldots, u_m), v)) \in (\prod_{i=1}^{m} U_i^2) \times V_2$. Consecuentemente, $((\prod_{i=1}^{m} f_i) \times f_{m+1})^k(\mathcal{U}_1 \times V_1) \cap (\mathcal{U}_2 \times V_2) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^{m} f_i) \times f_{m+1}$ es transitiva. □

Como mencionamos anteriormente, los conjuntos +invariantes juegan un papel muy importante para que el recíproco de varios de los resultados que presentamos en este trabajo se puedan verificar. Veamos por ejemplo la prueba del Teorema 5.9.

Teorema 5.9. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico y sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, Touhey, dispersora, un F-sistema o suavemente mezclante. Si, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$ y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$.

Demostración. En toda la prueba estamos suponiendo que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Por hipótesis, para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, podemos tomar $u_i \in U_i$ tal que $f_i^{k_i}(u_i) \in V_i$. Pongamos $k = \text{máx}\{k_1, \dots, k_m\}$. Por el Lema 2.16, tenemos que, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(u_i) \in V_i$. Esto implica que, $(u_1, \dots, u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $(f_1^k(u_1), \dots, f_m^k(u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. De aquí, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((u_1, \dots, u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Finalmente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y así $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es débilmente mezclante. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i^1, U_i^2, V_i^1 y V_i^2 de X_i, tales que $\prod_{i=1}^m U_i^1 \subseteq \mathcal{U}_1$, $\prod_{i=1}^m U_i^2 \subseteq \mathcal{U}_2$, $\prod_{i=1}^m V_i^1 \subseteq \mathcal{V}_1$ y $\prod_{i=1}^m V_i^2 \subseteq \mathcal{V}_2$. Puesto que f_i es débilmente mezclante, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i^j) \cap V_i^j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2\}$. Para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$, sea $a_i \in U_i^1$ tal que $f_i^{k_i}(a_i) \in V_i^1$ y $a_i' \in U_i^2$ tal que $f_i^{k_i}(a_i') \in V_i^2$ y pongamos $k = \text{máx}\{k_1, \dots, k_m\}$. Luego, por el Lema 2.16, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(a_i) \in V_i^1$ y $f_i^k(a_i') \in V_i^2$. Esto implica que, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((a_1, \dots, a_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i^1$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((a_1', \dots, a_m')) \in \prod_{i=1}^m V_i^2$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{V}_1 \neq \emptyset$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es débilmente mezclante.

Supongamos que, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es totalmente transitiva. Sean $s \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Puesto que, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es totalmente transitiva, tenemos que, para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $(f_i^s)^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Esto implica que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^{sk_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Ahora, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, podemos tomar $u_i \in U_i$ tal que $f_i^{sk_i}(u_i) \in V_i$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \dots, k_m\}$. Por el Lema 2.16, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^{sk}(u_i) \in V_i$. Así, $(f_1^{sk}(u_1), \dots, f_m^{sk}(u_m)) \in \prod_{i=1}^m f_i^{sk}(U_i)$ y $(f_1^{sk}(u_1), \dots, f_m^{sk}(u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Además, por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{sk}((u_1, \dots, u_m)) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{sk}(\prod_{i=1}^m U_i)$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^{sk}((u_1, \dots, u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Consecuentemente:

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{sk}((u_1, \dots, u_m)) \in \left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{sk}\left(\prod_{i=1}^m U_i\right)\right) \cap \prod_{i=1}^m V_i.$$

De aquí, $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es transitiva y como $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es caótica en el sentido de Devaney. Así, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es transitiva y $Per(f_i)$ es denso en X_i. Por la primera parte de la prueba de este teorema, tenemos que, $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva y por el Teorema 4.6, $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es caótica en el sentido de Devaney.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es órbita-transitiva. Así, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $\text{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$. Por el Teorema 4.3, parte (2),

$$\text{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es órbita-transitiva.

Supongamos que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es estrictamente órbita-transitiva. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(f_i(x_i), f_i)) = X_i$. Por el Teorema 4.3, parte (2):

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m)), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Consecuentemente, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)((x_1, \ldots, x_m)), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es estrictamente órbita-transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es ω-transitiva. De aquí, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $\omega(x_i, f_i) = X_i$. Por el Teorema 4.3, parte (1), obtenemos que $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es ω-transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es TT_{++}. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Puesto que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es TT_{++}, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $n_{f_i}(U_i, V_i)$ es infinito. Para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $k_i \in n_{f_i}(U_i, V_i)$. Así, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Se sigue que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $u_i \in U_i$ tal que $f_i^{k_i}(u_i) \in V_i$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Por el Lema 2.16, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(u_i) \in V_i$. De aquí, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((u_1, \ldots, u_m)) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i)$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $k \in n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Ahora, ya que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $n_{f_i}(U_i, V_i)$ es infinito, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, podemos tomar $k_i' \in n_{f_i}(U_i, V_i)$ tal que $k_i' > k$. Sea $k_1 = \max\{k_1', \ldots, k_m'\}$. Por el Lema 2.16, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^{k_1}(u_i) \in V_i$. Se sigue que, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1}(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. En consecuencia, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $k_1 \in n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ y $k_1 > k$. Continuando con este proceso, obtenemos que $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es un conjunto infinito y como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son arbitrarios, concluimos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es TT_{++}.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es Touhey. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Además, ya que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es Touhey, tenemos que, para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i, existen un punto periódico $x_i \in U_i$ y $k_i \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f_i^{k_i}(x_i) \in V_i$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Luego, por el Lema 2.16, obtenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in V_i$. Por el Teorema 4.1, parte (3), podemos concluir que, $(x_1, \ldots, x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$ tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \ldots, x_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es Touhey.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es un F-sistema. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es totalmente transitiva y $Per(f_i)$ es denso en X_i. Por el tercer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva. Además, por el Teorema 4.6, sabemos que $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es un F-sistema.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es suavemente mezclante. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función transitiva. Por hipótesis, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \times g$ es transitiva. Así, por el Lema 5.8, $(\prod_{i=1}^m f_i) \times g$ es transitiva. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es suavemente mezclante.

La prueba para las funciones dispersoras es análoga a la prueba dada para funciones suavemente mezclantes. □

Las funciones minimales y totalmente minimales no las incluimos en el enunciado del Teorema 5.9 porque para estas dos condiciones volvemos a requerir la continuidad de la función.

Proposición 5.10. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y f_i es minimal y continua, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es minimal y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Por hipótesis tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es continua. Así, por [**21**, Proposición 6.2], solo hay que verificar que, para todo$(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$,

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Sea $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Ya que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es minimal, obtenemos que $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$ y puesto que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, por el Teorema 4.3, parte (2), tenemos que

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal. □

Corolario 5.11. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y f_i es totalmente minimal y continua, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente minimal.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i^s es minimal y continua. Así, por la Proposición 5.10, $\prod_{i=1}^m f_i^s$ es minimal. Luego, por la Observación 2.4, parte (1), $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es minimal. Finalmente, ya que $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente minimal. □

Con la elaboración de este capítulo esperamos, principalmente, que despierte en alguien el interés de seguir engrandeciendo el estudio de propiedades dinámicas de funciones en productos.

Agradecimientos: Los autores agradecemos de manera muy especial al árbitro por las sugerencias hechas para la mejora de nuestro trabajo.

Referencias

[1] Akin, E. y Carlson, J. D. (2012). Conceptions of topological transitivity. *Topology Appl.*, ***159*** (12), 2815-2830.
[2] Akin, E., Auslander, J. y Nagar, A. (2017). Dynamics of induced systems. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, ***37*** (7), 2034-2059.
[3] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G. y Stace, P. (1992). On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Month.*, ***99*** (4), 332-334.
[4] Barragán, F., Rojas, A. y Macías, S. (2017). Funciones Especiales Entre Continuos II. En J. Angoa, R. Escobedo y M. Ibarra. (Ed.), *Topolgía y sus aplicaciones 5* (pp. 3-23). Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Dirección de Fomento Editorial.
[5] Barragán, F. y Rojas, A. (2019). Nociones relacionadas con la transitividad topológica. En J. Angoa, R. Escobedo, M. Ibarra y A. Contreras (Ed.), *Topología y sus aplicaciones 7* (pp. 125-142). Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Dirección General de Publicaciones.
[6] Bauer, W. y Sigmund, K. (1975). Topological Dynamics of Transformations Induced on the Space of Probability Measures. *Monatsh. Math.*, ***79***, 81-92.
[7] Bilokopytov, E. y Kolyada, S. F. (2014). Transitive Maps on Topological Spaces. *Ukr. Math. J.*, ***65*** (9), 1293-1318.
[8] Birkhoff, G. D. (1912). Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques. *B. Soc. Math. Fr.*, ***40***, 305-323.
[9] Birkhoff, G. D. (1927). *Dynamical Systems*, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 9. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
[10] Blanchard, F., Host, B. y Maass, A. (2000). Topological complexity. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, ***20*** (3), 641-662.
[11] Charatonik, J. J. (1964). Confluent mappings and unicoherence of continua. *Fund. Math.*, ***56*** (2), 213-220.
[12] Değirmenci, N. y Koçak, Ş. (2010). Chaos in product maps. *Turk. J. Math.*, ***34*** (4), 593-600.
[13] Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Redwood City: Addison-Wesley.
[14] Fréchet, M. (1910). Les dimensions d'un ensemble abstrait. *Math. Ann.*, ***68***, 145-168.

[15] Furstenberg, H. (1967). Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets, and a Problem in Diophantine Approximation. *Math. Syst. Theory*, ***1*** (1), 1-50.

[16] Gottschalk, W. y Hedlund, G. (1955). *Topological Dynamics*, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 36. Providence: American Mathematical Society.

[17] King, J. y Méndez, H. (2014). *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México: Prensa de Ciencias.

[18] Kwietniak, D. (2005). Exact Devaney Chaos and Entropy. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, ***6*** (1), 169-179.

[19] Li, T. Y. y Yorke, J. A. (1975). Period Three Implies Chaos. *Amer. Math. Month.*, ***82*** (10), 985-992.

[20] Li, R. y Zhou, X. (2013). A note on chaos in product maps. *Turk. J. Math.*, ***37*** (4), 665-675.

[21] Mai, J. H. y Sun, W. H. (2010). Transitivities of maps of general topological spaces. *Topology Appl.*, ***157*** (5), 946-953.

[22] Mangang, K. B. (2017). Li-Yorke chaos in product dynamical systems. *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, ***12*** (1), 81-88.

[23] Moore, R. L. (1924). Concerning Upper Semi-Continuous Collections of Continua. *Trans. Amer. Soc.*, ***27*** (4), 416-428.

[24] Rojas, A., Barragán, F. y Macías, S. (2020). Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products. *Turk. J. Math.*, ***44*** (2), 491-523.

[25] Rojas, A. (2017). *Nociones de Transitividad Topológica en Productos Simétricos Generalizados* (Tesis de Maestría). Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México. `http://jupiter.utm.mx/~tesis_dig/13228.pdf`

[26] Touhey, P. (1997). Yet Another Definition of Chaos. *Amer. Math. Month.*, ***104*** (5), 411-414.

[27] Weyl, H. (1913). *Die Idee der Riemannachen Flache*, Leipzig: Teubner; tercera edición totalmente revisada, Stuttgart: Teubner, 1955; nueva edición por R. Remmert, Leipzig/Stuttgart: Teubner, 1997.

[28] Wu, X. y Zhu, P. (2012). Devaney chaos and Li-Yorke sensitivity for product systems. *Stud. Sci. Math. Hung.*, ***49*** (4), 538-548.

Correos electrónicos:

`franco@mixteco.utm.mx` (Franco Barragán),
`anacarrasco.rr@gmail.com` (Anahí Rojas).