
Proyecto de Tesis

Estimación de Fuerza basada en un
Observador de Perturbación para
Aplicaciones Hápticas

Título de la Tesis: Estimación de Fuerza basada en un Observador de Perturbación para Aplicaciones Hápticas.

Tesista: C. María de Jesús Armas Patricio.

Asesor de Tesis: M. en C. Esteban Chávez Conde.

Co-asesor externo: Dr. Francisco Beltrán Carbajal.

Co-asesor interno: Dr. Álvaro Cabrera Amado.

Ingeniería en Mecatrónica.

Universidad del Papaloapan Campus Loma Bonita.

Loma Bonita, Oaxaca. México.

Agosto del 2015.

Documento elaborado con el procesador Scientific WorkPlace.

MATLAB y Simulink son marcas registradas de MathWorks, Inc.



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
CAMPUS LOMA BONITA

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

Estimación de Fuerza basada en un Observador de Perturbación para Aplicaciones Hápticas

Tesis que presenta la

C. María de Jesús Armas Patricio

Para obtener el Grado de Licenciatura
en la especialidad de

Ingeniería en Mecatrónica

Asesor de Tesis:

M. en C. Esteban Chávez Conde

Co-asesor externo: Dr. Francisco Beltrán Carbajal

Co-asesor interno: Dr. Álvaro Cabrera Amado

Loma Bonita, Oaxaca.

Agosto del 2015.

Dedicatoria

A mi Madre quien ha sido mi fuente de inspiración, la que ha impulsado mi crecimiento profesional en cada momento. Gracias por su amor y confianza.

Agradecimientos

Primeramente agradezco a Dios por permitirme vivir, por dirigir mi vida, hacer de mí una persona de bien. Gracias por que hoy veo cumplido un sueño más.

A la Universidad del Papaloapan Campus Loma Bonita por haberme dado la oportunidad de cursar mis estudios de educación superior.

A los Profesores que participaron en mi formación académica, gracias por su apoyo, paciencia y dedicación.

A mi Director de tesis, el M. en C. Esteban Chávez Conde, por darme la oportunidad de desarrollar este proyecto. Gracias por confiar en mí, gracias por su paciencia y ayuda otorgada en todo momento.

A los Profesores: Dr. Álvaro Cabrera Amado, Dr. José Luis Juárez Pérez y el Dr. Rafael Castillo Rincón, por haber aceptado ser parte del jurado y por las sugerencias realizadas al presente trabajo de tesis.

Resumen

Un dispositivo háptico es un mecanismo a través del cual el usuario puede manipular los movimientos de un objeto virtual o de un robot real a distancia, y recibir información táctil de ese entorno virtual o real. Las aplicaciones de la háptica se han extendido ampliamente a la medicina, como por ejemplo: para propósitos de entrenamiento de nuevos cirujanos, para la preparación ante una cirugía no común, en odontología, entre otras. Así también a la industria, para fines de entrenamiento virtual de algún proceso de ensamble, en el uso de algún dispositivo o máquina, entre otros. El conocimiento de la fuerza de contacto o de interacción entre el usuario y el dispositivo háptico, es empleada para la retroalimentación háptica. Sin embargo, el uso de sensores de fuerza en los dispositivos hápticos está limitado por el ancho de banda del sensor y los costos asociados para la implementación, incluyendo la adición de masa al dispositivo háptico. Por lo cual, la estimación de la fuerza de contacto sin el uso de sensores de fuerza ha sido un punto de atención de la comunidad científica, con el fin de disminuir cierta complejidad en el diseño de los dispositivos hápticos y lograr la retroalimentación háptica.

En este sentido, el presente trabajo de tesis aborda el problema de la estimación de la fuerza aplicada por el usuario sobre un dispositivo háptico tipo palanca, basada en un algoritmo de estimación de perturbación sin el uso de sensores de fuerza. El dispositivo háptico estudiado es básicamente una palanca háptica, compuesta por un motor eléctrico de corriente directa como actuador y una palanca giratoria. Cuando el usuario aplica una fuerza sobre la palanca, se produce un movimiento angular; la palanca refleja una fuerza hacia el usuario (debida a la pared virtual), que es transferida a la palanca por medio del actuador a través de un sistema de transmisión.

Se desarrollaron los modelos dinámicos del dispositivo háptico tipo palanca para dos casos de estudio: el primero considera que la transmisión del movimiento entre la flecha del actuador y la palanca háptica, es por contacto; en el segundo caso se considera que dicha transmisión es por cable. Como objeto virtual, se consideró una pared virtual con dinámica viscoelástica para una interacción unidimensional. Se explotó la propiedad de controlabilidad que tiene la dinámica del dispositivo háptico, con el fin de parametrizar el modelo del sistema en términos de una salida, llamada salida plana, de acuerdo a la técnica de Planitud Diferencial.

Así también, los modelos dinámicos cumplen con la propiedad de observabilidad; y se desarrollaron algoritmos de observadores de perturbación para estimar la fuerza aplicada por el usuario, empleando parcialmente la metodología del Observador Proporcional Integral Generalizado (Observador GPI). Se consideró que la fuerza aplicada por el usuario es una señal localmente acotada por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, y haciendo una extensión del observador de Luenberger se logra estimar la perturbación.

Finalmente, se muestran los resultados de simulación numérica de ambos casos de estudio, tanto en movimiento libre (sin entrar en contacto con la pared virtual) y en movimiento restringido (estando en contacto con la pared virtual).

Abstract

A haptic device is a mechanism in which the user can control the movements of a virtual object or of a real robot from a distance, and receive tactile information on this virtual or real environment. The applications of the haptics have recently spread widely into medicine, for example: for the purpose of training new surgeons, for the preparation of complicated surgeries, in odontology, amongst others. The applications have also spread into industry, for the purpose of virtual training of some assembly processes, in the use of some devices or machines, amongst others. The knowledge of the contact force or interaction between the user and the haptic device is used for the haptic feedback. Nevertheless, the use of force sensors in the haptic devices are limited by the bandwidth of the sensor and the costs associated with the implementation, including the addition of mass to the haptic device. Therefore, the estimation of the contact force without the use of force sensors has been a point of interest within the scientific community, in order to diminish certain complexities in the design of the haptic device, and to achieve the haptic feedback.

In this respect, the present thesis approaches the problem of the estimation of the force applied by the user on a paddle based haptic device on an algorithm of estimation of disturbance without the use of force sensors. The haptic device studied is basically a haptic paddle, composed of an electrical motor with direct current such as a lever actuator and a rotating paddle. When the user applies force on the paddle, an angular movement takes place; the paddle reflects force towards the user (due to the virtual wall), that is transferred to the paddle by means of the actuator across a transmission system.

The dynamic models of the haptic paddle have been developed for two case studies: the first takes into account that the transmission of the movement between the shaft of the actuator and the haptic paddle, is for contact; in the second case it is believed that the above mentioned transmission is for cable. As a virtual object, it was considered to be a virtual wall with viscoelastic for one-dimensional interaction dynamics. The property of controllability of the dynamics of the haptic device was exploited, in order to parameterize the model of the system in terms of an output, called flat output, according to the technique of differential flatness.

The dynamic models also comply with the property of observability; and observer algorithms of disturbance have been developed to estimate the force applied by the user, partially by using the methodology of the Generalized Proportional Integral Observer (GPI Observer). It is considered that the force applied by the user is a signal locally bounded by a family of Taylor polynomials time-variants, by adding an extension of the Luenberger observer an estimation of the disturbance is achieved.

Finally, the numerical simulation results of both case of studies are shown, in free movement (without coming in contact with the virtual wall) and restricted motion (while being in contact with the virtual wall).

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	v
Abstract	VII
1. Introducción	1
1.1. Marco teórico	1
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Justificación	5
1.4. Estado del arte	6
1.5. Hipótesis y predicciones	6
1.6. Objetivos	7
1.6.1. Objetivo general	7
1.6.2. Objetivos particulares	7
1.7. Preliminares de la interfaz háptica de estudio	8
1.8. Organización de la tesis	9
2. Modelos matemáticos y propiedades	11
2.1. Modelado matemático del dispositivo háptico	12
2.1.1. Caso I: Dinámica con transmisión por contacto	12
2.1.2. Caso II: Dinámica con transmisión por cable	16
2.2. Propiedades del dispositivo háptico	21
2.2.1. Controlabilidad	21
2.2.2. Observabilidad	22
2.3. Pared virtual y actuador del dispositivo háptico	24
2.3.1. Dinámica de la pared virtual	24
2.3.2. Dinámica controlada del actuador	25
2.4. Interacción háptica entre el usuario y la pared virtual	28

3. Estimación de la fuerza de contacto vía observador de perturbación	31
3.1. Introducción	32
3.2. Observador de perturbación	33
3.3. Caso I: Dispositivo háptico con transmisión por contacto	36
3.3.1. Diseño del observador de perturbación	36
3.3.2. Resultados de simulación numérica	38
3.4. Caso II: Dispositivo háptico con transmisión por cable	41
3.4.1. Parametrización diferencial	41
3.4.2. Diseño del observador de perturbación	45
3.4.3. Resultados de simulación numérica	51
4. Conclusiones y perspectivas	59
4.1. Conclusiones generales	59
4.2. Trabajo futuro	61
Bibliografía	61
Apéndice	67
A. Diagramas de simulación	69
A.1. Caso I: Dinámica con transmisión por contacto	69
A.2. Caso II: Dinámica con transmisión por cable (modelo dinámico)	73
A.3. Caso II: Dinámica con transmisión por cable (modelo parametrizado)	74

Índice de figuras

1.1. Interfaz Háptica (Sensable Technology, Inc.).	1
1.2. Elementos que integran un sistema háptico (información tomada de [4]) . . .	2
1.3. Percepción táctil (información tomada de Immersion Corporation).	2
1.4. Partes de un sistema de interacción háptico: Usuario, escenario virtual y robot háptico (información tomada de [4]).	3
1.5. Flujo de información entre el dispositivo háptico y el usuario (información tomada de [5]).	3
1.6. Flujo de información entre el dispositivo háptico, el renderizado háptico y el motor de simulación (información tomada de [8]).	4
1.7. Fuerza aplicada por el usuario sobre el dispositivo háptico tipo palanca en una interacción háptica bidireccional con una pared virtual.	5
1.8. Diagrama de bloques de la interacción háptica bidireccional entre el usuario y el dispositivo háptico.	8
2.1. Dinámica del dispositivo háptico, de la pared virtual y dinámica controlada del actuador.	11
2.2. Partes principales del dispositivo háptico con transmisión por contacto.	12
2.3. Diagrama esquemático del dispositivo háptico con transmisión por contacto.	13
2.4. Resultados de simulación numérica de la dinámica del dispositivo háptico con transmisión por contacto.	15
2.5. Dispositivo háptico con transmisión por cable.	16
2.6. Diagrama esquemático simplificado del dispositivo háptico con transmisión por cable.	16
2.7. Diagrama de cuerpo libre del sistema de transmisión por cable	17
2.8. Diagrama esquemático de un resorte con fuerza de tensión aplicada.	17
2.9. Resultados de simulación numérica de la dinámica del dispositivo háptico con transmisión por cable, sin fuerza aplicada por el usuario.	20
2.10. Resultados de simulación numérica de la dinámica del dispositivo háptico con transmisión por cable, con fuerza aplicada por el usuario.	20
2.11. Ejemplo de colisión háptica entre un punto y una pared virtual (información tomada de [26]).	24
2.12. Diagrama esquemático para el análisis de la fuerza de reacción de la pared virtual.	25

2.13. Diagrama esquemático de los parámetros dinámicos de un motor eléctrico de corriente directa.	26
2.14. Diagrama del controlador proporcional-integral de corriente de armadura del actuador.	27
2.15. Resultados de simulación numérica del controlador proporcional-integral de corriente de armadura ($k_p = 3$, $k_i = \frac{1}{T_i} = \frac{1}{0.001}$).	27
2.16. Interacción háptica bidireccional entre el usuario y la pared virtual, a través de la palanca háptica.	28
2.17. Resultados de simulación numérica del dispositivo háptico con transmisión por contacto en movimiento restringido.	29
3.1. Observador de perturbación para la estimación de la fuerza aplicada por el usuario.	31
3.2. Resultados de simulación numérica de la palanca háptica con transmisión por contacto, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].	39
3.3. Resultados de simulación numérica del dispositivo háptico con transmisión por contacto, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz].	39
3.4. Resultados de simulación numérica de la palanca háptica con transmisión por contacto, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].	40
3.5. Resultados de simulación numérica de la palanca háptica con transmisión por contacto, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz].	41
3.6. Resultados de simulación numérica del modelo dinámico de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].	52
3.7. Resultados de simulación numérica del modelo dinámico de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz].	52
3.8. Resultados de simulación numérica del modelo dinámico de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].	53
3.9. Resultados de simulación numérica del modelo dinámico de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz].	54
3.10. Resultados de simulación numérica del modelo parametrizado de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].	55
3.11. Resultados de simulación numérica del modelo parametrizado de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz].	56

3.12. Resultados de simulación numérica del modelo parametrizado de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].	57
3.13. Resultados de simulación numérica del modelo parametrizado de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz].	58
4.1. Concepto de diseño de la plataforma experimental basada en un dispositivo háptico tipo palanca.	61
A.1. Parámetros y modelo dinámico del dispositivo háptico	69
A.2. Dinámica de la pared virtual	70
A.3. Par de reacción de la pared virtual	70
A.4. Dinámica del motor eléctrico y controlador de corriente	71
A.5. Ganancias del controlador	71
A.6. Parámetros y ganancias del observador de perturbación	72
A.7. Observador de perturbación	72
A.8. Parámetros y modelo dinámico del dispositivo háptico	73
A.9. Observador de perturbación	73
A.10. Modelo dinámico del dispositivo háptico	74
A.11. Observador de perturbación	75

Índice de tablas

2.1. Parámetros del dispositivo háptico con transmisión por contacto.	15
2.2. Parámetros del dispositivo háptico con transmisión por cable.	19
2.3. Parámetros del actuador.	27

Capítulo 1

Introducción

1.1. Marco teórico

El término *haptic* proviene del griego “hapthesthai”, que significa relativo al tacto. Se refiere a la interacción manual con entornos, ya sea en forma de exploración o manipulación (*ver* Srinivasan & Basdogan, en [1]). La realidad virtual es una representación de cosas, que con ayuda de los medios electrónicos, nos dan la sensación de estar en un entorno real y que podemos interactuar con lo que nos rodea (*ver* Visansay, en [2]).

Una interfaz háptica es un sistema que permite a una persona sentirse como si estuviera en contacto con un ambiente remoto o virtual. Estas interfaces permiten al usuario mover parte de su cuerpo, por lo general la mano, y sentir fuerzas, vibraciones, calor, etc. Las interfaces hápticas incluyen sensores y actuadores (*ver* Kuchenbecker, en [3]). Una interfaz háptica es un tipo de interfaz hombre-máquina (*véase* Figura 1.1), lo cual hace posible que un usuario interactúe con un ambiente de realidad virtual (*ver* Puerto Coy, en [4]).



Figura 1.1: Interfaz Háptica (Sensable Technology, Inc.).

Los primeros prototipos de interfaces hápticas tuvieron lugar a principio de 1990, esto fue posible gracias a que los microprocesadores y sistemas computacionales se desarrollaron de forma que permitían el procesamiento de datos en tiempo real (*ver* Puerto Coy, en [4]). En la Figura 1.2 se muestran los elementos principales de un sistema háptico.

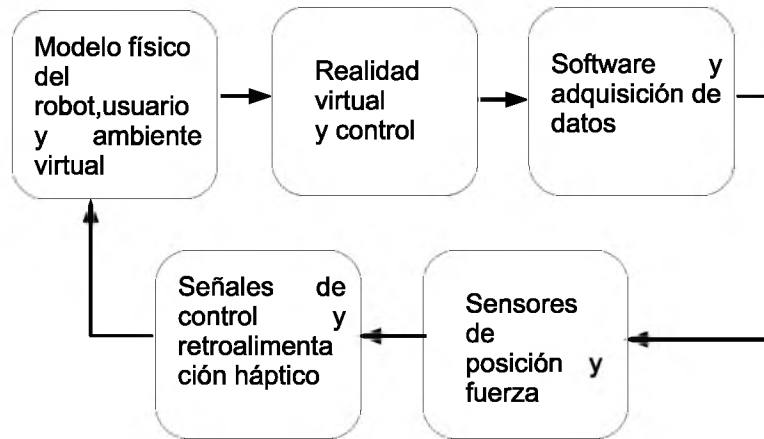


Figura 1.2: Elementos que integran un sistema háptico (información tomada de [4])

Para la percepción de los ambientes virtuales hacemos un uso predominante del sentido de la vista, ya que gracias a ella podemos interpretar nuestro entorno, como por ejemplo colores, la forma de los objetos, podemos calcular distancias, etc. La percepción táctil es una interacción mecánica con la piel y no está relacionada exclusivamente con fuerzas o movimientos, el usuario es el receptor de la información (*ver* Thorsten, en [5]), como se puede ver en la Figura 1.3.



Figura 1.3: Percepción táctil (información tomada de Immersion Corporation).

Un dispositivo háptico es un mecanismo mediante el cual el usuario puede controlar los movimientos de un objeto virtual o un robot real en un lugar remoto y recibir información táctil del entorno de trabajo. Este dispositivo es diseñado para interactuar con el ser humano. Por consiguiente, un sistema háptico está compuesto por tres partes básicas: el usuario, el escenario virtual y el robot o dispositivo háptico (*ver* Puerto Coy, en [4]), tal como se muestra en la Figura 1.4.

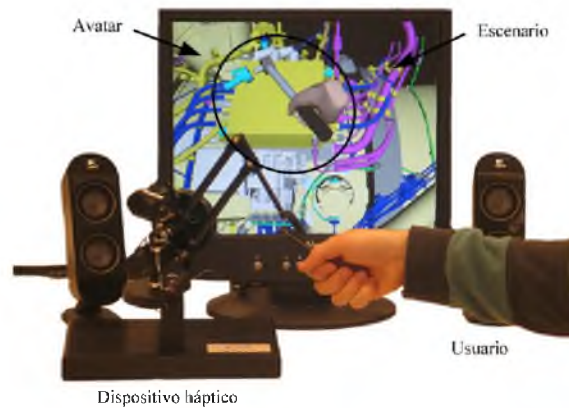


Figura 1.4: Partes de un sistema de interacción háptico: Usuario, escenario virtual y robot háptico (información tomada de [4]).

Así también, un dispositivo háptico es un sistema que genera una salida la cual es percibida hápticamente, no es necesario que el dispositivo tenga una entrada (*véase* la Figura 1.5).

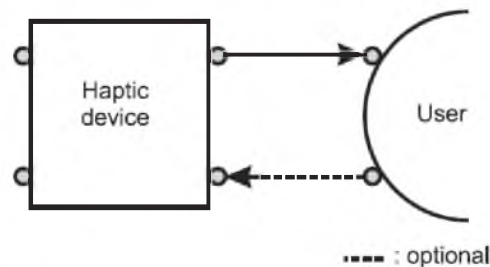


Figura 1.5: Flujo de información entre el dispositivo háptico y el usuario (información tomada de [5]).

La palabra *kinestético* hace referencia al sentido muscular, que es estimulado por las tensiones del cuerpo, mediante su uso es posible determinar en qué lugar o posición están localizadas ciertas partes de nuestro cuerpo, sin necesidad de mirarlas (*ver* Thorsten, en [5]).

Ahora bien, la retroalimentación de fuerzas en el área de la háptica trata con dispositivos que interactúan con músculos y tendones, y dan al humano una sensación de que se aplica una fuerza. La retroalimentación táctil, trata con dispositivos que interactúan, con los nervios terminales en la piel, los cuáles indican presencia de calor, presión y textura. Estos dispositivos son utilizados para indicarle al usuario si está en contacto con un objeto virtual. Entre los principales tipos de dispositivos hápticos se encuentran las plataformas de movimiento para simuladores y travesías simuladas, los guantes con retroalimentación de fuerza, los dermatoesqueletos y mayordomos (*ver* Aviña, en [6]).

Por otro lado, el renderizado háptico es utilizado para calcular las colisiones entre objetos virtuales, las respuestas a estas interacciones y la retroalimentación transmitida al usuario mediante la interfaz háptica (*ver* Salisbury et al., en [7]). En la Figura 1.6 se muestra un diagrama de bloques del flujo de información entre el dispositivo háptico, el renderizado háptico y el motor de simulación (*ver* Salisbury et al., en [8]).

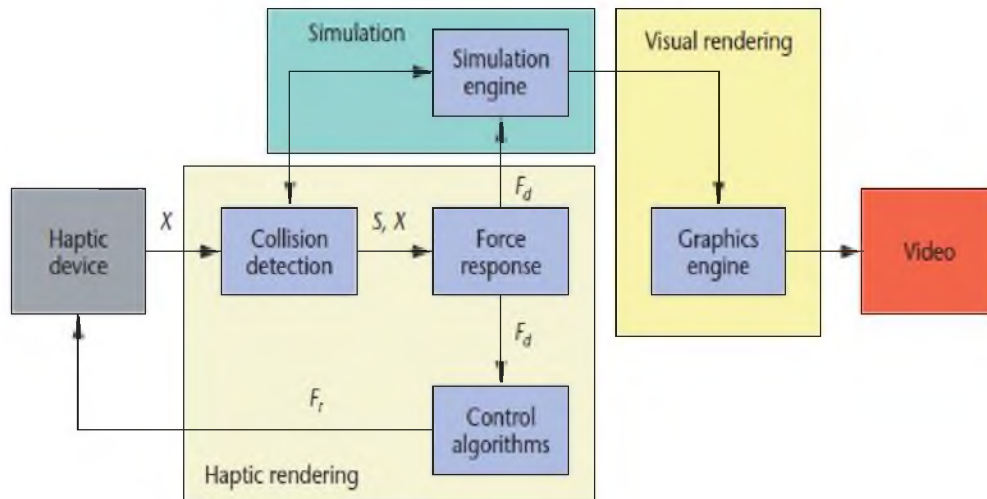


Figura 1.6: Flujo de información entre el dispositivo háptico, el renderizado háptico y el motor de simulación (información tomada de [8]).

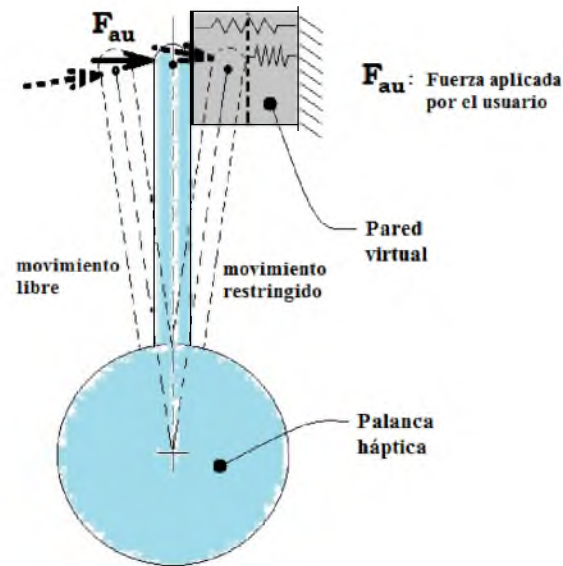


Figura 1.7: Fuerza aplicada por el usuario sobre el dispositivo háptico tipo palanca en una interacción háptica bidireccional con una pared virtual.

1.2. Planteamiento del problema

Se requiere estimar la fuerza de contacto entre el usuario y un dispositivo háptico del tipo palanca, en una interacción háptica bidireccional con una pared virtual dinámicamente visco-elástica sin emplear sensores de fuerza, a partir de la medición de la señal de entrada y la señal de salida del dispositivo háptico (véase Figura 1.7).

1.3. Justificación

Las aplicaciones de la háptica se han extendido ampliamente a la medicina y a la industria, tanto en el diseño de dispositivos hápticos como en el desarrollo de algoritmos de renderizado háptico. El conocimiento de la fuerza de contacto o de interacción entre el usuario y el dispositivo háptico, es empleada para la retroalimentación háptica. El uso de sensores de fuerza en los dispositivos hápticos está limitado por el ancho de banda del sensor y los costos asociados para la implementación, incluyendo la adición de masa al dispositivo háptico. Por tal motivo, estimar dicha fuerza sin el uso de sensores de fuerza, suele ser importante y útil para disminuir cierta complejidad en el diseño de los dispositivos hápticos, especialmente para la retroalimentación háptica.

1.4. Estado del arte

La estimación de la fuerza de interacción entre el usuario y un dispositivo háptico ha sido abordada por diversos investigadores mediante el empleo de observadores de perturbación. Diversas metodologías de observadores de perturbación se han adaptado para la estimación de la fuerza de contacto. Por ejemplo, Gupta & O'Malley en [9] hace una extensión de una metodología de observadores no lineales (presentada por Chen et al. en [10] para manipuladores robóticos) aplicado a la estimación de una fuerza de interacción háptica. Dicha estrategia fue implementada en un dispositivo háptico de un grado de libertad mediante una interacción bidireccional con una pared virtual con cierta rigidez. Por otro lado, Smith et al. en [11] emplea una metodología de redes neuronales artificiales para estimar mediante un observador la fuerza de contacto en aplicaciones hápticas. Así también, Lee et al. en [12] utiliza un método de estimación para la fuerza de reacción basada en un observador de perturbación modos deslizantes, aplicado a un instrumento de cirugía robótica.

En años recientes, Sira-Ramírez et al. en [13], [14], [15] han estudiado y desarrollado un algoritmo de rechazo activo de perturbación basado en un Observador Proporcional Integral Generalizado (Observador GPI), inspirado en el contexto de procesamiento de señales. Consideran a la perturbación como una señal acotada por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, y haciendo una extensión del Observador de Luenberger logran estimar la perturbación. Así también, en [16], [17], [18] se pueden ver las aplicaciones de éste esquema de control basado en observador en suspensiones activas de automóvil, robots paralelos, y ejes de máquinas herramientas. Dicha metodología se ha de emplear para la estimación de la fuerza de interacción entre el usuario y el dispositivo háptico.

1.5. Hipótesis y predicciones

Se considera que el dispositivo háptico tiene disponible tanto la señal de entrada como la señal de salida, y que su dinámica es completamente conocida. Además, que la fuerza aplicada por el usuario sobre el dispositivo háptico es de tipo sinusoidal y no alcanza frecuencias mayores a $50 [Hz]$. Existiendo la posibilidad de aproximar la fuerza de contacto como una señal localmente acotada por un polinomio de Taylor variante en el tiempo, y estimar dicha dinámica mediante un observador de perturbación con la aplicación parcial de la metodología del Observador GPI.

1.6. Objetivos

1.6.1. Objetivo general

Estimar la fuerza de contacto entre el usuario y un dispositivo háptico del tipo palanca, en una interacción háptica con una pared virtual unidimensional con dinámica visco-elástica, mediante un observador de perturbación.

1.6.2. Objetivos particulares

- Modelar matemáticamente el dispositivo háptico tipo palanca.
- Obtener una ecuación diferencial entrada-salida del dispositivo háptico mediante la metodología de Planitud Diferencial.
- Diseñar un observador de perturbación para la estimación de la fuerza de contacto entre el usuario y el dispositivo háptico, a partir de las ecuaciones de movimiento del dispositivo háptico y del modelo parametrizado.
- Obtener resultados de simulación numérica de la estimación de la fuerza de contacto basado en el observador de perturbación, en movimiento libre y en interacción con una pared virtual con dinámica visco-elástica.

1.7. Preliminares de la interfaz háptica de estudio

En la Figura 1.8 se muestra un diagrama de bloques del flujo de información que se considera en la interacción háptica bidireccional entre el usuario y la pared virtual, por medio del dispositivo háptico tipo palanca.

El usuario ejerce una fuerza sobre la palanca háptica logrando un desplazamiento angular de la misma. Si existe colisión con la pared virtual, se calcula la fuerza de reacción producida por su dinámica viscoelástica, y se determina el par que será aplicado por el motor eléctrico de corriente directa a la palanca háptica.

El algoritmo del observador de perturbación requiere información de las variables de salida (desplazamiento angular de la palanca háptica) y de entrada (par dado por el motor eléctrico) del dispositivo háptico, para estimar la fuerza aplicada por el usuario, evitando así el uso de un sensor de fuerza.

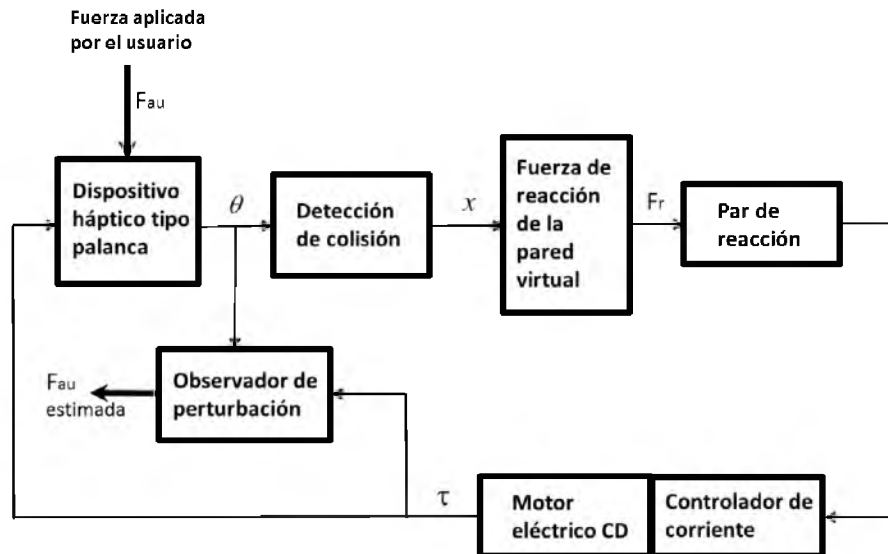


Figura 1.8: Diagrama de bloques de la interacción háptica bidireccional entre el usuario y el dispositivo háptico.

Es importante remarcar que únicamente se realizaron simulaciones numéricas, de acuerdo al flujo de información del diagrama de bloques de la Figura 1.8. Cada bloque del diagrama está gobernado por ecuaciones estáticas y/o dinámicas.

1.8. Organización de la tesis

En el capítulo uno se ha presentado el marco teórico, así como el planteamiento del problema de este trabajo de tesis, su justificación, el estado del arte relacionado al uso de observadores de perturbación para la estimación de la fuerza de contacto, los objetivos que se definieron y aspectos generales de la interfaz háptica en estudio.

En el capítulo dos se muestran las partes componentes del dispositivo háptico tipo palanca. Así también, se presentan los modelos dinámicos de dos casos de estudio de la palanca háptica. En el primer caso se considera que la transmisión del movimiento entre la flecha del actuador y la palanca háptica, es por contacto; en el segundo caso se considera que dicha transmisión es por cable. Las propiedades de controlabilidad y observabilidad de la dinámica del dispositivo háptico también son presentadas. Por último, se explica la dinámica viscoelástica de la pared virtual y la dinámica controlada del motor eléctrico (actuador).

En el capítulo tres se desarrolla el observador de perturbación para estimar la fuerza aplicada por el usuario, empleando parcialmente la metodología del Observador GPI. Se considera que la perturbación es la fuerza aplicada por el usuario, siendo una señal acotada por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, y haciendo una extensión del observador de Luenberger se logra estimar la perturbación. Se diseña el observador de perturbación para los dos casos de estudio del dispositivo háptico. Se muestran los resultados de simulación numérica de ambos casos de estudio, tanto en movimiento libre (sin entrar en contacto con la pared virtual) y en movimiento restringido (estando en contacto con la pared virtual).

En el capítulo cuatro se presentan las conclusiones generales y el trabajo futuro.

Capítulo 2

Modelos matemáticos y propiedades

En este capítulo se presentan los modelos matemáticos de dos casos de estudios de la dinámica del dispositivo háptico tipo palanca¹, que se han obtenido por las ecuaciones Euler-Lagrange (*ver* [19], [20]), y las ecuaciones de Newton (*ver* [21]). Las dinámicas del dispositivo háptico están descritas por ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, que representan solamente las características dinámicas de la parte mecánica del dispositivo y que han sido modeladas con funciones lineales. El primer caso de estudio ha sido modelado considerando que la transmisión del movimiento entre la flecha del actuador y la palanca háptica, es por contacto; en el segundo caso, se considera que la transmisión es por cable. Así también, se describen las características dinámicas de rigidez y amortiguamiento de la pared virtual considerada en la interacción con el usuario, y la dinámica controlada del actuador para la aplicación de la fuerza de reacción. En la Figura 2.1 se remarcan los bloques que se describen en éste capítulo.

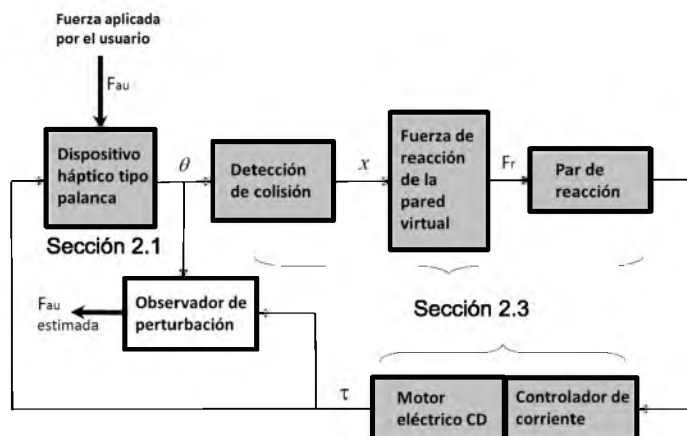


Figura 2.1: Dinámica del dispositivo háptico, de la pared virtual y dinámica controlada del actuador.

¹Para más detalles de la interfaz háptica en estudio, véase la Sección 1.7.

2.1. Modelado matemático del dispositivo háptico

2.1.1. Caso I: Dinámica con transmisión por contacto

El dispositivo háptico que se muestra en la Figura 2.2 fue diseñado² en SolidWorks para ser analizado en este trabajo de tesis. Está compuesto principalmente por una palanca (palanca háptica) que es el medio de interacción con el usuario, y un motor eléctrico de corriente directa como actuador. La flecha del actuador tiene acoplada una polea que transmite el movimiento angular a la palanca háptica mediante fricción (por contacto). El actuador está empotrado en el soporte principal, al igual que el rodamiento que sostiene al perno (eje de giro) de la palanca háptica. Cuando el usuario ejerce una fuerza en la parte superior de la palanca háptica, una fuerza de reacción es transmitida al usuario a través del par del actuador, mediante el contacto entre la polea y la palanca háptica. El intervalo mecánicamente permitido para el movimiento angular de la palanca háptica es de 60 grados.

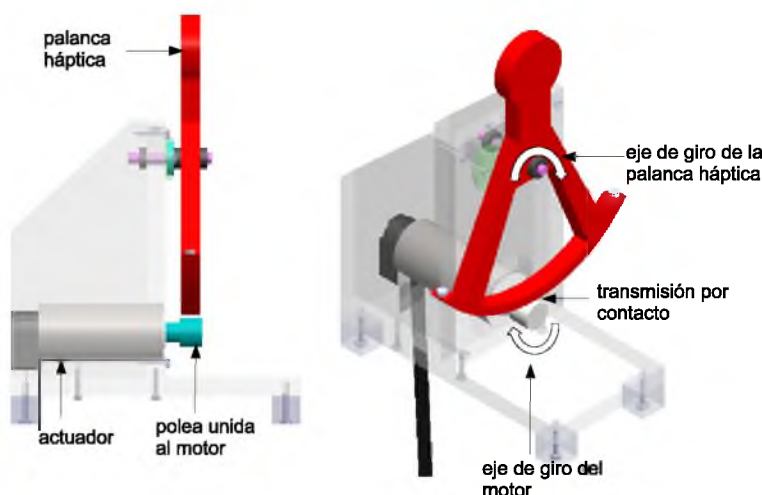


Figura 2.2: Partes principales del dispositivo háptico con transmisión por contacto.

En la Figura 2.3 se muestra un diagrama esquemático de los parámetros cinemáticos y dinámicos del dispositivo háptico, en donde F_{au} representa la fuerza ejercida por el usuario; d representa la distancia entre el punto donde el usuario aplica la fuerza y el eje de giro de la palanca háptica; I_p representa el momento de inercia de masa en el eje de giro de la palanca háptica (el centro de masa de la palanca se ubica en el eje de giro); J_m representan el momento de inercia de masa de la polea-actuador; c_p y c_m representan los coeficientes de fricción viscosa debido a los rodamientos de la palanca háptica y del actuador, respectivamente; τ es el par

²Inspirado en la palanca háptica (haptic paddle) originalmente desarrollada en el Laboratorio del Prof. Mark Cutkosky de la Stanford University a mediados de los 90's (ver <http://hapkit.stanford.edu/>).

aplicado por el actuador; θ y θ_m son los desplazamientos angulares de la palanca háptica y de la flecha del actuador, respectivamente; R y r representan los valores de radio de la palanca háptica y de la polea acoplada a la flecha del motor eléctrico, con una relación cinemática dada por: $\theta = a\theta_m$, con $a = \frac{r}{R} = \frac{1}{10}$.

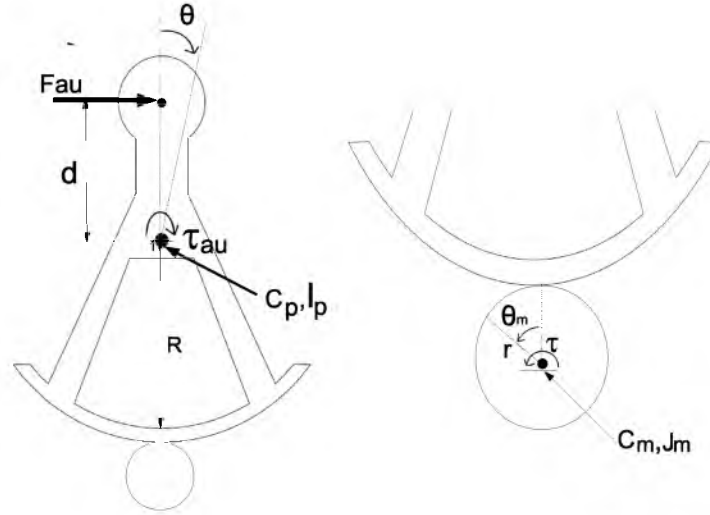


Figura 2.3: Diagrama esquemático del dispositivo háptico con transmisión por contacto.

De acuerdo a las ecuaciones Euler-Lagrange, el Lagrangiano L está dado por: $L = T - V$, como la diferencia de la energía cinética T y la energía potencial V del sistema. Para este caso de estudio, se define la coordenada generalizada $q = \theta$ que es el desplazamiento angular de la palanca háptica, y la fuerza generalizada $Q = \frac{1}{a}\tau$ que es el par aplicado por el actuador.

La energía cinética total de la parte mecánica del dispositivo háptico, está dada por la suma de la energía cinética de la palanca háptica y la energía cinética de la polea-actuador,

$$T = T_{palanca} + T_{polea} \quad (2.1)$$

con,

$$T_{palanca} = \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}^2, \quad T_{polea} = \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2.$$

La energía potencial del sistema es $V = 0$, ya que no hay elementos que almacenen energía; además, el centro de masa de la palanca háptica coincide con el eje de giro. Por consiguiente, el Lagrangiano de la parte mecánica del sistema en términos de la coordenada generalizada θ , está dado por:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2, \\ &= \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{J_m}{a^2}\dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se emplea la función de disipación de *Rayleigh* denotada por D (ver Goldstein en [20]) para describir la energía disipativa del sistema, producida por la dinámica lineal de los rodamientos de la palanca háptica y el actuador:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}c_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}c_m\dot{\theta}_m^2, \\ &= \frac{1}{2}c_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{c_m}{a^2}\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

La ecuación Euler-Lagrange para la parte mecánica del sistema, incluyendo la función de disipación de Rayleigh y la fuerza aplicada por el usuario f_{au} , está dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = Q + F_{au}d. \quad (2.3)$$

Ahora se calculan cada uno de los términos de la ec.(2.3), obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) &= \left(I_p + \frac{J_m}{a^2}\right)\ddot{\theta}, & \frac{\partial L}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} &= \left(c_p + \frac{c_m}{a^2}\right)\dot{\theta}, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación Euler-Lagrange se obtiene la dinámica del sistema háptico, dada por:

$$J_e\ddot{\theta} + c_e\dot{\theta} = \frac{1}{a}\tau + \tau_{au}, \quad (2.4)$$

donde, $J_e = I_p + \frac{J_m}{a^2}$, $c_e = c_p + \frac{c_m}{a^2}$, τ es el par del actuador y τ_{au} es el par producido debido a la fuerza aplicada por el usuario $\tau_{au} = F_{au}d$. La ec.(2.4) puede reescribirse en dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Definiendo las variables de estado como: $z_1 = \theta$, $z_2 = \dot{\theta}$; y considerando el par del actuador como la señal de entrada $u(t) = \tau$, se tiene que,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\frac{c_e}{J_e}z_2 + \frac{1}{aJ_e}u + \frac{1}{J_e}\tau_{au}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

De acuerdo a las variables de estado definidas anteriormente; una representación en el espacio de estado de la dinámica del dispositivo háptico, puede estar dada por:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t) + Bu(t) + E\tau_{au}, \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{z}(t) = [z_1, z_2]^T \in \mathbb{R}^2$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $B, E \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$; con,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c_e}{J_e} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{aJ_e} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_e} \end{bmatrix}.$$

En la Figura 2.4 se muestran los resultados obtenidos en la simulación numérica de la dinámica del dispositivo háptico, considerando los valores de los parámetros indicados en la Tabla 2.1, usando el método numérico *Runge-Kutta* y un paso fijo de integración de $0,1 [ms]$.

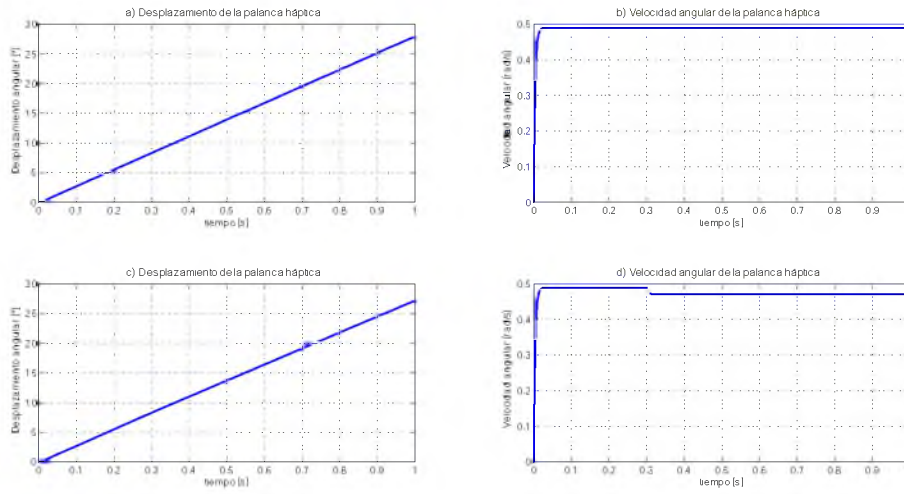


Figura 2.4: Resultados de simulación numérica de la dinámica del dispositivo háptico con transmisión por contacto.

La Figura 2.4(a) y 2.4(b) muestra el desplazamiento y la velocidad angular de la palanca háptica, siendo el par del actuador $\tau = 0,05 [N.m]$ y no hay fuerza aplicada por el usuario $F_{au} = 0$. La Figura 2.4(c) y 2.4(d) muestra el desplazamiento y la velocidad angular de la palanca háptica, con un par dado por el actuador de $\tau = 0,05 [N.m]$ y una fuerza aplicada por el usuario de $F_{au} = 0,01 [N]$ en $t = 0,3 [s]$.

Valores de los parámetros del dispositivo háptico con transmisión por contacto		
$I_p = 177,5 \times 10^{-5} [kg.m^2]$	$c_p = 0,5 [\frac{N.m-s}{rad}]$	$R = 0,2 [m]$
$J_m = 1,01 \times 10^{-5} [kg.m^2]$	$c_m = 78,4 \times 10^{-5} [\frac{N.m-s}{rad}]$	$r = 0,02 [m]$
$d = 0,076 [m]$		

Tabla 2.1: Parámetros del dispositivo háptico con transmisión por contacto.

2.1.2. Caso II: Dinámica con transmisión por cable

El dispositivo háptico en estudio tiene los mismos componentes principales del Caso I (ver Figura 2.3 en la Sección 2.1.1). Sin embargo, el sistema de transmisión de movimiento entre la polea-actuador y la palanca háptica, es diferente. En la Figura 2.5 se muestra el tipo de transmisión, realizado mediante un cable cruzado, que acopla a la polea-actuador con la palanca háptica. Si la polea-actuador gira en el sentido de las manecillas del reloj, la palanca háptica girará en sentido contrario.

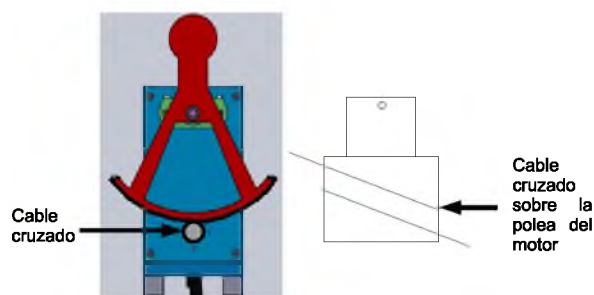


Figura 2.5: Dispositivo háptico con transmisión por cable.

En la Figura 2.6 se muestra un diagrama esquemático simplificado de la polea-actuador y la palanca háptica, en donde $\tau_{au} = F_{au}d$ es el par ejercido por el usuario; k representa el coeficiente de rigidez del cable, asumiendo que $k = k_1 = k_2$. Los parámetros R, r, I_p, J_m, c_p, c_m y las variables θ, θ_m, τ , han sido descritos en el Caso I (ver Figura 2.3 en la Sección 2.1.1). El desplazamiento angular θ de la palanca háptica es diferente al desplazamiento angular θ_m de la polea-actuador, debido a la constante de rigidez del cable³.

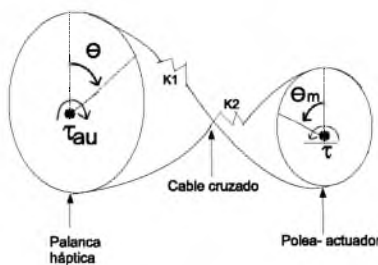


Figura 2.6: Diagrama esquemático simplificado del dispositivo háptico con transmisión por cable.

³Si la rigidez del cable es infinita, los desplazamientos angulares θ y θ_m quedarán relacionados por $\theta = \frac{r}{R}\theta_m$, y el modelo matemático se reduce al del Caso I.

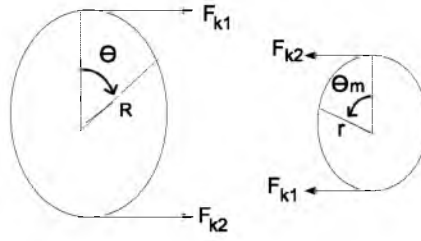


Figura 2.7: Diagrama de cuerpo libre del sistema de transmisión por cable

Para obtener las ecuaciones dinámicas del dispositivo háptico, primeramente se determinan las fuerzas debidas a la rigidez del cable, considerando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 2.7.

La ley de *Hooke* define una relación lineal entre la fuerza de tensión aplicada en los extremos de un resorte y la deformación ocurrida (*véase* Figura 2.8), y que es proporcional de acuerdo al coeficiente de rigidez K , como:

$$F = K(x_2 - x_1) \quad (2.7)$$

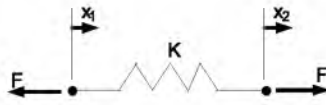


Figura 2.8: Diagrama esquemático de un resorte con fuerza de tensión aplicada.

De acuerdo a la ec.(2.7) se pueden determinar las ecuaciones de las fuerzas F_{k1} y F_{k2} , considerando los desplazamientos infinitesimales que relacionan el movimiento angular con el rectilíneo de los resortes, es decir, $a = R\theta$ y $b = r\theta_m$. Para la fuerza F_{k1} , es fácil ver que, si se considera a la polea-actuador como la polea motriz,

$$\begin{aligned} F_{k1} &= k(b - a) \\ &= k(r\theta_m - R\theta). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Y para la fuerza F_{k2} , considerando ahora la palanca háptica como la polea motriz,

$$\begin{aligned} F_{k2} &= k(a - b) \\ &= k(R\theta - r\theta_m). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de fuerzas de rigidez del cable y de acuerdo al diagrama de cuerpo libre de la Figura 2.7, se calcula la suma de momentos en el eje de giro de la palanca háptica, tomando como positivo el movimiento angular en el sentido de las manecillas del reloj. Es decir, se incluyen los momentos causados por las fuerzas F_{k1} y F_{k2} , el par de fricción viscosa debido al rodamiento de la palanca háptica $\tau_{fvp} = c_p\dot{\theta}$, y el par producido debido a la fuerza aplicada por el usuario $\tau_{au} = F_{au}d$,

$$\begin{aligned} + \circlearrowleft \sum M_{eje \text{ de giro palanca háptica}} &= I_p\ddot{\theta}, \\ RF_{k1} - RF_{k2} - \tau_{fvp} + \tau_{au} &= I_p\ddot{\theta}, \\ Rk(r\theta_m - R\theta) - Rk(R\theta - r\theta_m) - c_p\dot{\theta} + \tau_{au} &= I_p\ddot{\theta}, \end{aligned}$$

resultando la siguiente ecuación:

$$I_p\ddot{\theta} + c_p\dot{\theta} + 2Rk(R\theta - r\theta_m) = \tau_{au}. \quad (2.10)$$

Ahora se calcula la suma de momentos en el eje de giro de la polea-actuador, tomando como positivo el movimiento angular en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Se incluyen los momentos causados por las fuerzas F_{k1} y F_{k2} , el par de fricción viscosa debido al rodamiento del actuador $\tau_{fva} = c_m\dot{\theta}_m$, y el par τ producido por el actuador,

$$\begin{aligned} + \circlearrowleft \sum M_{eje \text{ de giro actuador}} &= J_m\ddot{\theta}_m, \\ rF_{k2} - rF_{k1} - \tau_{fva} + \tau &= J_m\ddot{\theta}_m, \\ rk(R\theta - r\theta_m) - rk(r\theta_m - R\theta) - c_m\dot{\theta}_m + \tau &= J_m\ddot{\theta}_m, \end{aligned}$$

y se obtiene la segunda ecuación:

$$J_m\ddot{\theta}_m + c_m\dot{\theta}_m + 2rk(r\theta_m - R\theta) = \tau. \quad (2.11)$$

Las ecs.(2.10) y (2.11) describen la dinámica del dispositivo háptico con transmisión por cable. Definiendo variables de estado como: $x_1 = \theta_m$, $x_2 = \dot{\theta}_m$, $x_3 = \theta$ y $x_4 = \dot{\theta}$, y considerando el par del actuador como la señal de entrada $u(t) = \tau$; las ecuaciones dinámicas puede ser escritas en ecuaciones diferenciales de primer orden, como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J_m} (u - 2r^2kx_1 - c_mx_2 + 2rRkx_3), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{I_p} (\tau_{au} + 2rRkx_1 - 2R^2kx_3 - c_px_4). \end{aligned} \quad (2.12)$$

De acuerdo a las variables de estado definidas anteriormente; una representación en el espacio de estado de la dinámica del dispositivo háptico, puede estar dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) + E\tau_{au}, \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$; $B, E \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$; con,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2r^2k}{J_m} & -\frac{c_m}{J_m} & \frac{2rRk}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2rRk}{I_p} & 0 & -\frac{2R^2k}{I_p} & -\frac{c_p}{I_p} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{J_m}{I_p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{I_p} \end{bmatrix}.$$

En las Figuras 2.9 y 2.10 se muestran los resultados obtenidos en la simulación numérica de la dinámica del dispositivo háptico, considerando los valores de los parámetros indicados en la Tabla 2.2, usando el método numérico *Runge-Kutta* y un paso fijo de integración de 0,1 [ms].

Valores de los parámetros del dispositivo háptico con transmisión por cable		
$J_m = 1,01x10^{-5} [kg.m^2]$	$c_m = 78,4x10^{-5} [\frac{N.m.s}{rad}]$	$R = 0,2 [m]$
$I_p = 177,5x10^{-5} [kg.m^2]$	$c_p = 0,25 [\frac{N.m.s}{rad}]$	$r = 0,02 [m]$
$d = 0,076 [m]$	$k = 5000 [\frac{N}{m}]$	

Tabla 2.2: Parámetros del dispositivo háptico con transmisión por cable.

La Figura 2.9(a) y 2.9(b) muestra el desplazamiento y la velocidad angular de la palanca háptica, mientras que la Figura 2.9(c) y 2.9(d) muestra el desplazamiento y la velocidad angular de la polea-actuador. En estos resultados se aplicó un par del actuador de $\tau = 0,05 [N.m]$ y no hay fuerza aplicada por el usuario $F_{au} = 0$.

La Figura 2.10(a) y 2.10(b) muestra el desplazamiento y la velocidad angular de la palanca háptica, mientras que la Figura 2.10(c) y 2.10(d) muestra el desplazamiento y la velocidad angular de la polea-actuador. En estos resultados se aplicó un par del actuador de $\tau = 0,05 [N.m]$ y una fuerza aplicada por el usuario de $F_{au} = 0,01 [N]$ en el tiempo $t = 0,5 [s]$.

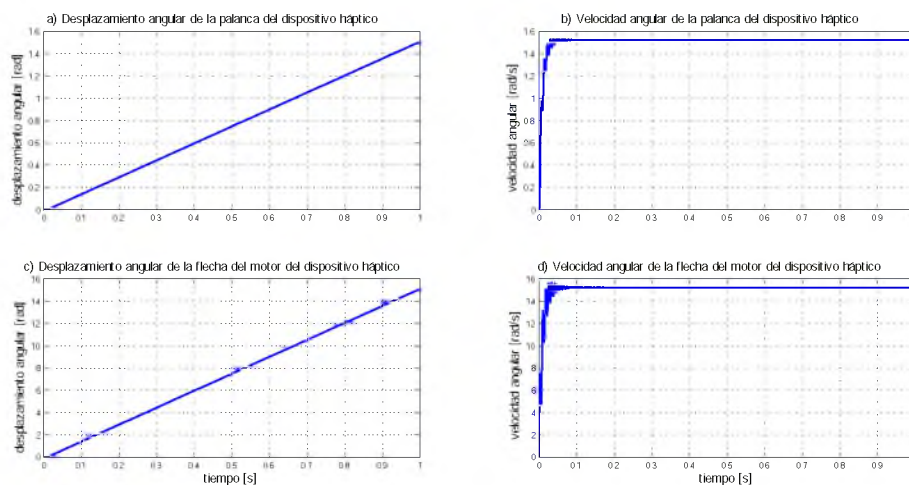


Figura 2.9: Resultados de simulación numérica de la dinámica del dispositivo háptico con transmisión por cable, sin fuerza aplicada por el usuario.

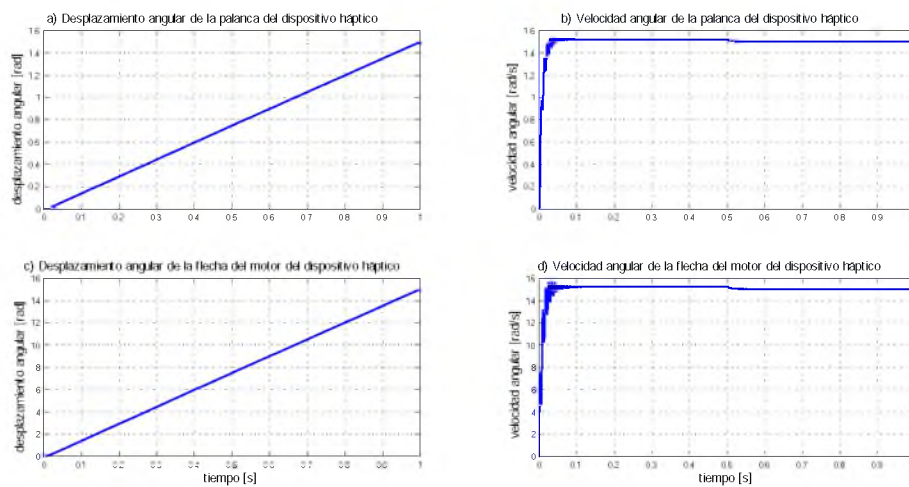


Figura 2.10: Resultados de simulación numérica de la dinámica del dispositivo háptico con transmisión por cable, con fuerza aplicada por el usuario.

2.2. Propiedades del dispositivo háptico

Un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede llevar de cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones en un intervalo de tiempo finito. Así también, un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $\mathbf{x}(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito (*ver* Ogata en [24]).

R. Kalman introdujo los conceptos de controlabilidad y observabilidad en sistemas dinámicos lineales (*ver* Kalman et. al, en [25]), que son propiedades importantes en el diseño de sistemas de control en el espacio de estados. Aunque la mayor parte de los sistemas físicos son controlables y observables, los modelos matemáticos correspondientes tal vez no posean la propiedad de controlabilidad y observabilidad. En este caso, es necesario conocer las condiciones bajo las cuales un sistema es controlable y observable.

2.2.1. Controlabilidad

Un sistema lineal de una entrada y una salida descrito mediante la ecuación de estado $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$, es de estado completamente controlable (*ver* [24] en [24]) si y sólo si los vectores $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ son linealmente independientes, o la matriz de $n \times n$,

$$C_k = [B \ : \ AB \ : \ \dots \ : \ A^{n-1}B],$$

es de rango n . La matriz se denomina, por lo común, *matriz de controlabilidad*.

Caso I: Dispositivo háptico con transmisión por contacto

Para el modelo dinámico del dispositivo háptico del Caso I (*ver* pág. 14), de acuerdo a la ec.(2.6), la matriz de controlabilidad está dada por: $C_k = [B, AB]$,

$$C_k = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{aJ_e} \\ \frac{1}{aJ_e} & -\frac{c_e}{aJ_e^2} \end{bmatrix}.$$

El determinante de la matriz de controlabilidad es: $\det C_k = -\frac{1}{a^2 J_e^2}$, es no singular; y por tanto, el rango $C_k = 2$. Por lo que el sistema es de *estado completamente controlable*.

Caso II: Dispositivo háptico con transmisión por cable

De la misma manera, en referencia a la ec.(2.13) del modelo dinámico del dispositivo háptico del Caso II (*ver* página 19), la matriz de controlabilidad está dada por: $C_k = [B, AB, A^2B, A^3B]$,

$$C_k = \begin{bmatrix} c_{k1,1} & c_{k1,2} & c_{k1,3} & c_{k1,4} \\ c_{k2,1} & c_{k2,2} & c_{k2,3} & c_{k2,4} \\ c_{k3,1} & c_{k3,2} & c_{k3,3} & c_{k3,4} \\ c_{k4,1} & c_{k4,2} & c_{k4,3} & c_{k4,4} \end{bmatrix},$$

con los elementos de la matriz de controlabilidad, dados por,

$$\begin{aligned} c_{k1,1} &= 0, & c_{k1,2} &= \frac{1}{J_m}, & c_{k1,3} &= -\frac{c_m}{J_m^2}, & c_{k1,4} &= \frac{1}{J_m} \left(\frac{c_m^2}{J_m^2} - \frac{2kr^2}{J_m} \right), \\ c_{k2,1} &= \frac{1}{J_m}, & c_{k2,2} &= -\frac{c_m}{J_m^2}, & c_{k2,3} &= \frac{1}{J_m} \left(\frac{c_m^2}{J_m^2} - \frac{2kr^2}{J_m} \right), \\ c_{k2,4} &= -\frac{1}{J_m} \left[\frac{c_m}{J_m} \left(\frac{c_m^2}{J_m^2} - \frac{2kr^2}{J_m} \right) - \frac{2c_m kr^2}{J_m^2} \right], \\ c_{k3,1} &= c_{k3,2} = c_{k3,3} = 0, & c_{k3,4} &= \frac{2kRr}{I_p J_m}, \\ c_{k4,1} &= c_{k4,2} = 0, & c_{k4,3} &= \frac{2kRr}{I_p J_m}, & c_{k4,4} &= -\frac{1}{J_m} \left(\frac{2c_p k Rr}{I_p^2} + \frac{2c_m k Rr}{I_p J_m} \right). \end{aligned}$$

El determinante de la matriz de controlabilidad es: $\det C_k = \frac{4k^2 R^2 r^2}{J_p^2 J_m^4}$, es no singular; y por tanto, el rango $C_k = 4$. Por lo que el sistema es de *estado completamente controlable*.

2.2.2. Observabilidad

El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles, a partir de variables que sí lo son en el tiempo mínimo posible (*ver* [24] en [24]). Dado un sistema lineal descrito mediante la ecuación de estado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ y la ecuación de salida $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$, es completamente observable si el estado $\mathbf{x}(t_0)$ se determina a partir de la observación de $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Por tanto, el sistema es completamente observable si y sólo si la matriz de $n \times nm$,

$$O_k = [\mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T : \dots : (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T],$$

es de rango n , o tiene n vectores columna linealmente independientes. Ésta se denomina *matriz de observabilidad*.

Caso I: Dispositivo háptico con transmisión por contacto

Para el modelo dinámico del dispositivo háptico del Caso I (*ver* página 14), de acuerdo a la ec.(2.13), la matriz de observabilidad se obtiene mediante $O_k = [\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T]$, considerando como salida al desplazamiento angular θ de la palanca háptica, $y = \mathbf{C}\mathbf{z} = z_1$, con $\mathbf{C} = [1 \ 0]$. Por tanto, la matriz de observabilidad es,

$$O_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El determinante de la matriz de observabilidad es: $\det O_k = 1$, es no singular; y por tanto, el rango $O_k = 2$. Por lo que el sistema es de *estado completamente observable*.

Caso II: Dispositivo háptico con transmisión por cable

De esta misma manera, en referencia a la ec.(2.13) del modelo dinámico del dispositivo háptico del Caso II (*ver* pág. 19), la matriz de observabilidad está dada por:

$$O_k = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, (A^T)^3 C^T].$$

Se considera como salida del sistema al desplazamiento angular θ de la palanca háptica, $y = C\mathbf{x} = x_3$, con $C = [0, 0, 1, 0]$. Por tanto, la matriz de observabilidad es,

$$O_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\frac{kRr}{I_p} & -2\frac{kRrc_p}{I_p^2} \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{kRr}{I_p} \\ 1 & 0 & -2\frac{kR^2}{I_p} & 2\frac{kR^2 c_p}{I_p^2} \\ 0 & 1 & -\frac{c_p}{I_p} & \frac{c_p^2}{I_p^2} - 2\frac{kR^2}{I_p} \end{bmatrix}.$$

El determinante de la matriz de observabilidad es: $\det O_k = 4\frac{k^2 R^2 r^2}{I_p^2}$, es no singular; y por tanto, el rango $O_k = 4$. Por lo que el sistema es de *estado completamente observable*.

2.3. Pared virtual y actuador del dispositivo háptico

2.3.1. Dinámica de la pared virtual

En la Figura 2.11 se muestra un diagrama esquemático de una pared virtual unidimensional. El punto virtual *HIP*, punto de interfaz háptico (por sus siglas en inglés de *Haptic Interface Point* [5]), está relacionado con la posición real del dispositivo háptico empleado. La fuerza que resulta de la colisión entre el *HIP* y la pared virtual, se puede calcular en correspondencia con la rigidez y la distancia $x_0 - x_2$ que ha penetrado el *HIP* sobre la pared virtual (movimiento restringido); y cuando el *HIP* no se encuentra en colisión con la pared virtual (movimiento libre) su posición es x_1 .

Es recomendable que la dinámica de la pared virtual incluya una componente de amortiguamiento viscoso, para mejorar la sensación táctil y ayude a mantener estable su dinámica [30].

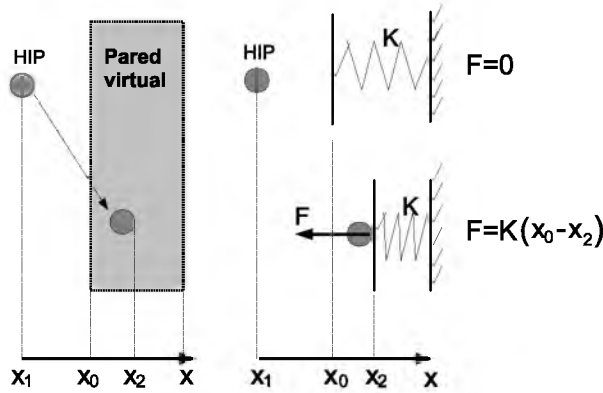


Figura 2.11: Ejemplo de colisión háptica entre un punto y una pared virtual (información tomada de [26]).

En las simulaciones numéricas de la interfaz háptica en estudio, se ha considerado que la referencia de la pared virtual es $x_0 = 0$. No se emplea algún algoritmo para la detección de la colisión entre el *HIP* y la pared virtual. Solamente cuando se realiza el estudio en movimiento restringido, se considera que la posición del *HIP* es $x \geq 0$, y la fuerza de reacción producida por la dinámica viscoelástica de la pared virtual está dada por:

$$f = -C\dot{x} - Kx, \quad (2.14)$$

donde K y C son la constante de rigidez y la constante de amortiguamiento viscoso, respectivamente, de la pared virtual; x y \dot{x} representan la posición y velocidad del *HIP*, respectivamente, en un movimiento unidimensional. La posición x del *HIP* está relacionada con el

desplazamiento angular θ de la palanca háptica (*ver* Figura 2.12), con: $x = d \sin\theta$; siendo d la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza ejercida por el usuario y el eje de giro de la palanca háptica. Y para un estudio en movimiento libre, se considera que $x < 0$ y no se calcula la fuerza de reacción de la pared virtual, debido a que el *HIP* no se encuentra en colisión con ésta.

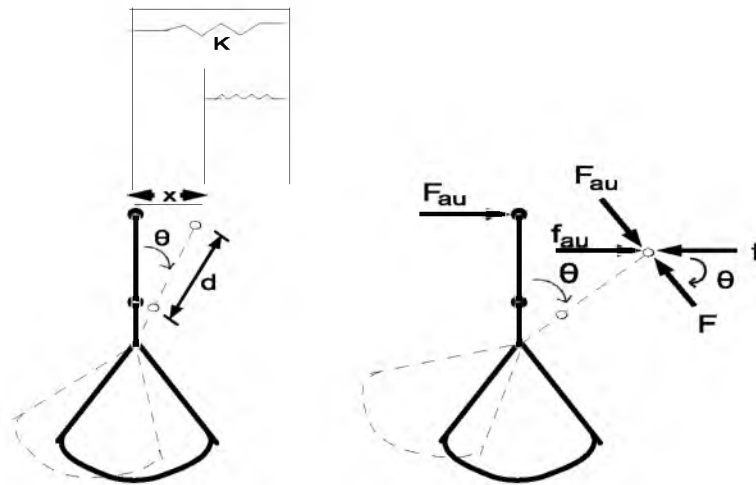


Figura 2.12: Diagrama esquemático para el análisis de la fuerza de reacción de la pared virtual.

2.3.2. Dinámica controlada del actuador

De acuerdo a la sección 2.3.1, en un movimiento restringido, la fuerza de reacción f de la pared virtual se calcula mediante la ec.(2.14). Esta fuerza de reacción se transforma (*ver* Figura 2.12) y se aplica a la palanca a través del par del actuador, y así el usuario sentirá la interacción háptica con la pared virtual. El par aplicado por el actuador se calcula mediante la siguiente relación:

$$\tau = \frac{Rd}{r} \left(\frac{f}{\cos\theta} \right), \quad (2.15)$$

donde r es el radio de la polea acoplada a la flecha del actuador y R el radio de la curvatura de la palanca háptica (*véase* la Figura 2.3 para más detalles de los parámetros de la palanca háptica).

Considere la Figura 2.13 que muestra un diagrama esquemático representativo de los parámetros dinámicos del actuador. L_a y R_a representan la inductancia y resistencia de armadura (devanado en el rotor) del motor eléctrico, respectivamente; V_e es el voltaje de caída en las escobillas $V_e = k_e\omega$, que es directamente proporcional a la velocidad angular ω de la flecha del rotor por la constante de fuerza contraelectromotriz k_e . Las variables i_a

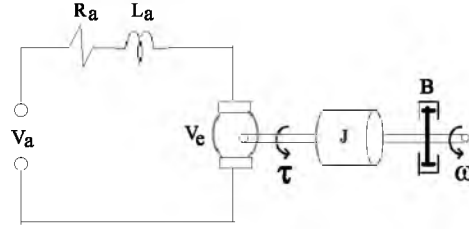


Figura 2.13: Diagrama esquemático de los parámetros dinámicos de un motor eléctrico de corriente directa.

y V_a son la corriente que circula al interior de la armadura y el voltaje de alimentación del motor eléctrico, respectivamente; J y B representan el momento de inercia del rotor y el coeficiente de amortiguamiento viscoso debido a los rodamientos que sostienen al rotor, respectivamente.

El par τ de la flecha del rotor es generado en una relación directamente proporcional con la corriente de armadura i_a , por medio de la constante mecánica k_m [23]:

$$\tau = k_m i_a. \quad (2.16)$$

La ecuación dinámica de la parte eléctrica del actuador se obtiene mediante un análisis de malla al circuito en serie equivalente, de acuerdo a la ley de voltaje de *Kirchhoff* se tiene:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_e \omega = V_a. \quad (2.17)$$

Y la dinámica de la parte mecánica del actuador se obtiene mediante la segunda ley de Newton, en movimiento rotacional, obteniendo:

$$J \frac{d\omega}{dt} + B\omega = k_m i_a. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, la dinámica del actuador queda descrita por las ecs.(2.17) y (2.18) [23].

Se considera un controlador proporcional-integral de corriente de armadura para aplicar el par del actuador sobre la palanca háptica:

$$u = k_p(i_a^* - i_a) + k_i \int_0^t (i_a^* - i_a) dt, \quad (2.19)$$

donde k_p y k_i son las ganancias proporcional e integral del controlador, respectivamente; i_a^* y i_a son la corriente de armadura deseada y la corriente actual del actuador, respectivamente; u es el voltaje de alimentación del actuador en una relación *voltaje-corriente*. La corriente de armadura deseada se determina mediante la ecs.(2.15) y (2.16). En la Figura 2.14 se muestra un diagrama esquemático representativo del sistema de control del actuador.

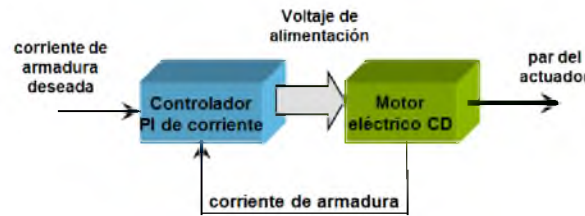


Figura 2.14: Diagrama del controlador proporcional-integral de corriente de armadura del actuador.

En la Tabla 2.3 se muestran los parámetros del actuador considerado, y en la Figura 2.15 se muestra la respuesta del controlador respecto a una referencia de corriente de armadura dada.

Valores de los parámetros del actuador		
$L_a = 1,6 [mH]$	$R_a = 7,19 [\Omega]$	$k_e = 0,126 [\frac{N.m}{A}]$
$J_m = 1,01 \times 10^{-5} [kg.m^2]$	$B = 78 \times 10^{-6} [\frac{N.m.s}{rad}]$	$k_m = 0,126 [\frac{N.m}{A}]$
$V_a = 48 [V]$ (nominal)	$i_a = 1,74 [A]$ (continua máx.)	$\omega = 2670 [rpm]$ (nominal)

Tabla 2.3: Parámetros del actuador.

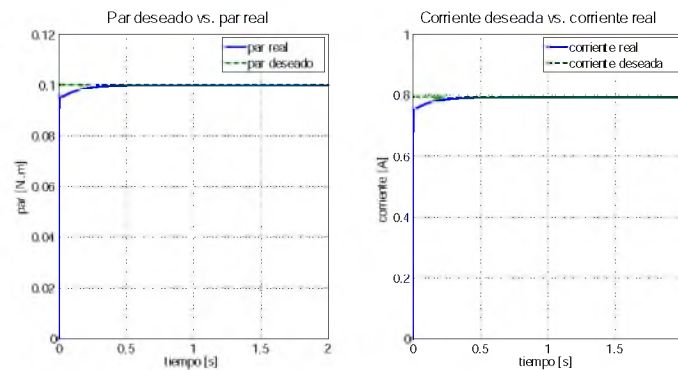


Figura 2.15: Resultados de simulación numérica del controlador proporcional-integral de corriente de armadura ($k_p = 3$, $k_i = \frac{1}{T_i} = \frac{1}{0,001}$).

2.4. Interacción háptica entre el usuario y la pared virtual

En la Figura 2.16 se muestra un diagrama de bloques relacionado a la interacción háptica bidireccional entre el usuario y la pared virtual, a través de la palanca háptica.

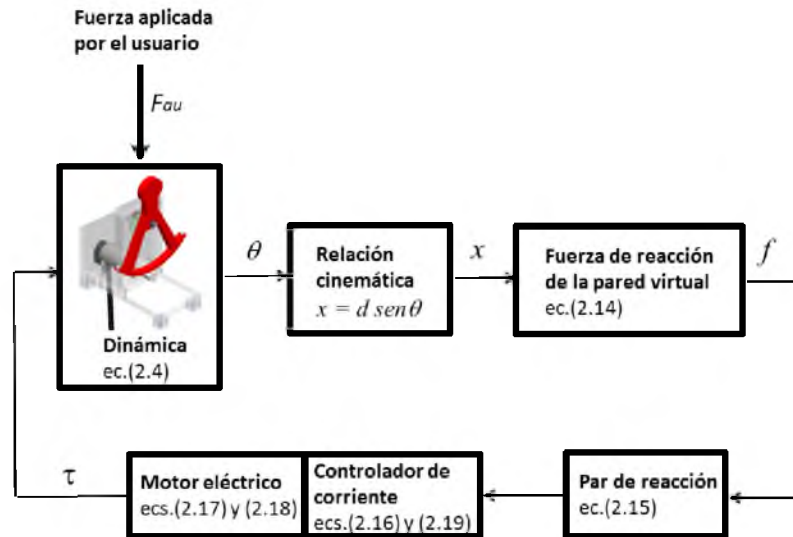


Figura 2.16: Interacción háptica bidireccional entre el usuario y la pared virtual, a través de la palanca háptica.

Cuando el usuario ejerce una fuerza positiva sobre la palanca háptica a una distancia d , se genera un desplazamiento angular θ (ver ec.(2.4) que corresponde a la dinámica de la palanca háptica del Caso I). Tal desplazamiento angular está relacionado con el punto virtual *HIP* (ver Figura 2.11), en un movimiento unidimensional con: $x = d \text{sen}\theta$. El usuario se encuentra en contacto con la pared virtual (movimiento restringido) a través de la palanca háptica.

De acuerdo al desplazamiento x , se determina la deformación de la pared virtual y se calcula la fuerza de reacción mediante la ec.(2.14). El par que se requiere aplicar a través del actuador hacia la palanca (para que el usuario perciba la fuerza de reacción debida a la pared virtual), se determina con la ec.(2.15). Conocido el par que se desea aplicar, se calcula la corriente correspondiente (ver ec.(2.16)), y se regula mediante un controlador de corriente (ver ec.(2.19) y Figura 2.14). Con una relación *voltaje-corriente* se aplica un voltaje de armadura en el actuador, de acuerdo a la corriente dada por el controlador, que corresponde al par requerido en la palanca háptica para que el usuario perciba la fuerza de reacción de la pared virtual.

En la Figura 2.17 se muestran resultados de simulación numérica de la interacción háptica bidireccional entre el usuario y la pared virtual, considerando la dinámica de la palanca háptica del Caso I. Las ecuaciones se programaron en MATLAB/Simulink, empleando el método numérico Runge-Kutta y un paso de integración fijo de $0,1 [ms]$. La fuerza aplicada por el usuario es $F_{au} = 2 [N]$, y la palanca háptica alcanza un desplazamiento angular de $1,5$ grados en estado estacionario. La deformación de la pared virtual es de $2 [mm]$, y la fuerza de reacción de la pared virtual es $f = -1,998 [N]$. La componente de fuerza F de la fuerza de reacción de la pared virtual (véase Figura 2.12), es $F = \frac{f}{\cos \theta} = -2 [N]$ en estado de equilibrio, y corresponde a la fuerza aplicada por el usuario.

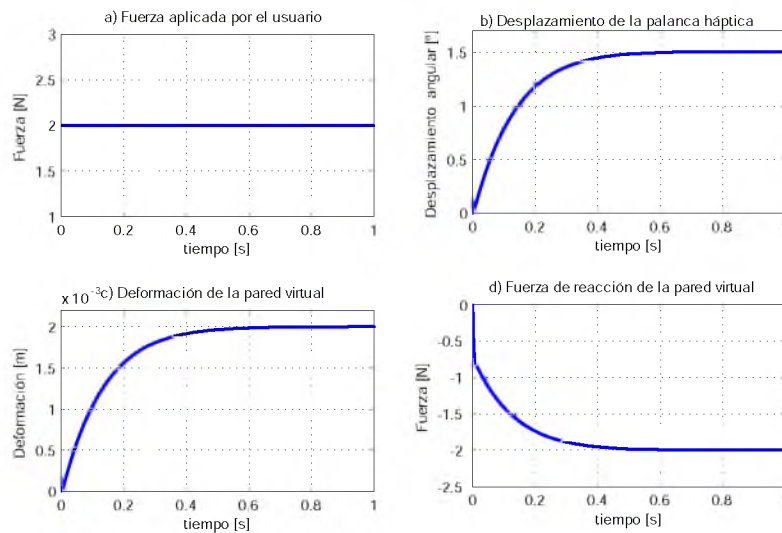


Figura 2.17: Resultados de simulación numérica del dispositivo háptico con transmisión por contacto en movimiento restringido.

No se ha presentado el estudio de la estabilidad del sistema háptico, ya que no es la finalidad en este trabajo de tesis. Sin embargo, los resultados muestran que el sistema háptico es estable, habiendo considerado un coeficiente de amortiguamiento viscoso en la pared virtual, que contribuye a la estabilidad del sistema. En [30], [31], [32], se presentan estudios basados en pasividad de la estabilidad de los sistemas hápticos, y las condiciones bajo las cuáles se puede asegurar; considerando que el sistema háptico está compuesto por un subsistema en tiempo continuo (dispositivo háptico) y un subsistema en tiempo discreto (codificadores ópticos incrementales y el renderizado háptico).

Capítulo 3

Estimación de la fuerza de contacto vía observador de perturbación

De acuerdo al capítulo anterior, los modelos dinámicos de la palanca háptica cumplen con propiedades importantes como la controlabilidad y observabilidad. Si el modelo dinámico es controlable, es posible parametrizar la entrada en términos de una salida llamada salida plana, de acuerdo a la técnica de Planitud Diferencial [28], [29]. Así también, si el modelo dinámico es observable, se puede diseñar un observador para la estimación de los estados del sistema. En este capítulo se describe el diseño de un observador para la estimación de la fuerza aplicada por el usuario (véase Figura 3.1). El observador de perturbación se diseña empleando parcialmente una metodología de rechazo activo de perturbaciones, basada en un Observador Proporcional Integral Generalizado propuesto por Sira-Ramírez y colaboradores en [13], inspirado en el contexto de procesamiento de señales. Se considera a la perturbación (fuerza aplicada por el usuario) como una señal acotada por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, y se hace una extensión del Observador de Luenberger para estimar la perturbación.

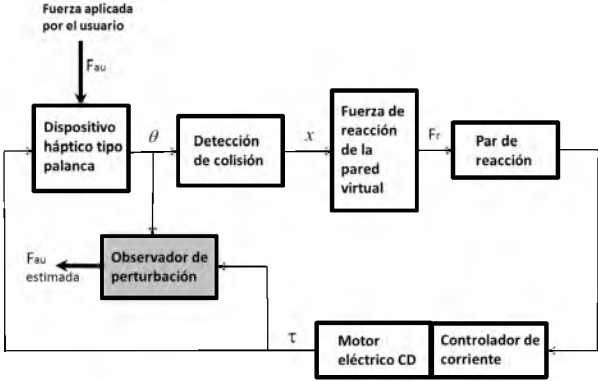


Figura 3.1: Observador de perturbación para la estimación de la fuerza aplicada por el usuario.

3.1. Introducción

El Observador de Luenberger (propuesto por Luenberger en [27]), es un observador de estado que estima las variables de estado con base a las mediciones de las variables de salida y de control, y puede diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad¹. Si el observador de estado capta toda las variables de estado del sistema, incluso las no disponibles para una medición directa, se denomina *observador de estado de orden completo*.

Considere el sistema lineal definido mediante:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.1)$$

$$y = Cx. \quad (3.2)$$

El estado x se aproximará mediante el estado \tilde{x} del modelo dinámico:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x}), \quad (3.3)$$

que representa al observador de estado (*véase* [24] para más detalles). Vemos que el observador de estado tiene a y y a u como entradas, y \tilde{x} como salida. El último término del segundo miembro de esta ecuación del modelo, ec.(3.3), es un término de corrección que contiene la diferencia entre la salida y medida y la salida $\tilde{y} = C\tilde{x}$ estimada. La matriz L funciona como una matriz de ponderación. El término de corrección vigila el estado \tilde{x} . Ante la presencia de una discrepancia entre las matrices A y B usadas en este modelo y las del sistema real, la adición del término de corrección ayuda a reducir los efectos producidos por la diferencia entre el modelo dinámico y el sistema real.

Para el diseño de las ganancias de un observador de estado de orden completo, se requiere obtener la dinámica del error del observador, restando la ec.(3.3) de la ec.(3.1), obteniendo:

$$\dot{e} = (A - LC)e, \quad (3.4)$$

siendo el vector de error e , la diferencia entre x y \tilde{x} , es decir, $e = x - \tilde{x}$.

A partir de la ec.(3.4), vemos que el comportamiento dinámico del vector de error se determina mediante los valores característicos de la matriz $(A - LC)$. Si dicha matriz es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial $e(0)$. Es decir, que $\tilde{x}(t)$ convergerá a $x(t)$ sin considerar los valores de $x(0)$ y $\tilde{x}(0)$. Si se eligen los valores característicos de la matriz $(A - LC)$ en tal forma que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y suficientemente rápido, cualquier vector de error tenderá a *cero* (el origen) con una velocidad adecuada. Si el sistema es completamente observable, se demuestra que es posible seleccionar una matriz L tal que $(A - LC)$ tenga valores valores característicos arbitrariamente deseados.

¹Se dice que el sistema es completamente observable si el estado $x(t_o)$ se determina a partir de la observación de $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_o \leq t \leq t_1$. Por tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida (*ver* [24]).

3.2. Observador de perturbación

El Observador Proporcional Integral Generalizado (Observador GPI) fue propuesto por Sira-Ramírez y colaboradores en [13], y emplea una extensión del Observador de Luenberger para el rechazo activo de perturbaciones. Tal estrategia fue inspirada en el contexto de procesamiento de señales. En principio, el proceso de diseño del observador de perturbación, considera que la señal de entrada de perturbación $\xi(t)$ puede ser localmente aproximada por una familia de polinomios de Taylor de $(r - 1)$ -ésimo grado:

$$\xi(t) = \sum_{i=0}^{r-1} p_i t^i, \quad (3.5)$$

donde todos los coeficientes p_i son completamente desconocidos.

La señal de perturbación puede ser localmente descrita por el siguiente modelo matemático lineal en variables de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r, \\ \dot{\xi}_r &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde, $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \dot{\xi}$, $\xi_3 = \ddot{\xi}$, \dots , $\xi_r = \xi^{(r-1)}$.

Un modelo de estado aproximado extendido para la dinámica de la salida perturbada, es dado por:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n, \\ \dot{z}_n &= -a_0 z_1 - a_1 z_2 - \dots - a_{n-1} z_n - bu + \xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r, \\ \dot{\xi}_r &= 0, \\ y &= z_1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Un Observador de Luenberger para el sistema de la ecuación anterior, es dado por,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \beta_{r+(n-1)}(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \beta_{r+(n-2)}(y - \hat{y}), \\
&\vdots \\
\dot{\hat{z}}_{n-1} &= \hat{z}_n + \beta_{r+(n-(n-1))}(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_n &= -a_0\hat{z}_1 - a_1\hat{z}_2 - \cdots - a_{n-1}\hat{z}_n - bu + \hat{\xi}_1 + \beta_r(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \beta_{r-(n-(n-1))}(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \beta_{r-(n-(n-2))}(y - \hat{y}), \\
&\vdots \\
\dot{\hat{\xi}}_{r-1} &= \hat{\xi}_r + \beta_1(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_r &= \beta_0(y - \hat{y}),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

siendo, $y = z_1$, $\hat{y} = \hat{z}_1$.

El error de estimación puede ser obtenido al restar la dinámica del observador dado por la ec.(3.8), de la dinámica lineal del sistema extendido dado por la ec.(3.7), obteniendo,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= -\beta_{r+(n-1)}e_1 + e_2, \\
\dot{e}_2 &= -\beta_{r+(n-2)}e_1 + e_3, \\
&\vdots \\
\dot{e}_{n-1} &= -\beta_{r+(n-(n-1))}e_1 + e_n, \\
\dot{e}_n &= -(\beta_5 + a_0)e_1 - a_1e_2 - \cdots - a_{n-1}e_4 + e_{z1}, \\
\dot{e}_{z1} &= -\beta_{r-(n-(n-1))}e_1 + e_{z2}, \\
\dot{e}_{z2} &= -\beta_{r-(n-(n-2))}e_1 + e_{z3}, \\
&\vdots \\
\dot{e}_{z(r-1)} &= -\beta_1e_1 + e_{zr}, \\
\dot{e}_{zr} &= -\beta_0e_1,
\end{aligned}$$

con, $e_1 = y - \hat{y}$, $e_2 = z_2 - \hat{z}_2, \dots, e_n = z_n - \hat{z}_n$, $e_{zi} = \xi_i - \hat{\xi}_i$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Para esta expresión no es difícil ver que la dinámica del error de observación de la salida $e_1 = y - \hat{y}$, satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
e_1^{(r+n)} + (\beta_{r+(n-1)} + a_{(n-1)})e_1^{(r+(n-1))} + (\beta_{r+(n-2)} + a_{(n-2)} + \beta_{r+(n-1)}a_{(n-1)})e_1^{(r+(n-2))} \\
+ \cdots + (\beta_{r+1} + a_1 + \beta_{r+2}a_3 + \beta_{r+3}a_2)e_1^{(r+1)} \\
+ (\beta_r + a_0 + \beta_{r+1}a_3 + \beta_{r+2}a_2 + \beta_{r+3}a_1)e_1^{(r)} + \beta_{r-1}e_1^{(r-1)} \\
+ \cdots + \beta_2\ddot{e}_1 + \beta_1\dot{e}_1 + \beta_0e_1 = 0,
\end{aligned}$$

la cual es completamente independiente de cualquiera de los coeficientes p_i , $i = 0, \dots, r-1$, de la expansión polinomial de Taylor de $\xi(t)$. Esto significa que el observador de alta ganancia continuamente se actualiza. Por lo tanto, conforme pasa el tiempo, la señal de entrada de perturbación acotada $\xi(t)$ se aproxima a la forma de un polinomio en el tiempo de $(r-1)$ -ésimo grado.

Claramente, los coeficientes del polinomio característico asociado, pueden ser ajustados por medio de una especificación de las ganancias $\{\beta_{r+(n-1)}, \dots, \beta_1, \beta_0\}$ lo suficientemente lejos del eje imaginario del semiplano complejo izquierdo, tal que el error de estimación de la salida converga exponencialmente asintóticamente a cero.

3.3. Caso I: Dispositivo háptico con transmisión por contacto

3.3.1. Diseño del observador de perturbación

El modelo dinámico del dispositivo háptico es de estado completamente observable (*ver* sección 2.2.2, pág. 22), y para el diseño del observador de perturbación se emplea la metodología descrita en la sección 3.2. Se considera que la señal de perturbación a estimar es el par debido a la fuerza aplicada por el usuario $\xi(t) = \tau_{au} = F_{au}d$, y que puede ser aproximada localmente por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, de cuarto grado. De acuerdo a la ec.(3.5) (*véase* pág. 33), la perturbación aproximada toma la siguiente forma:

$$\xi(t) \approx p_0 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3 + p_4t^4,$$

donde todos los coeficientes p_i son completamente desconocidos.

La señal de perturbación puede ser localmente descrita por un modelo matemático lineal en variables de estado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde, $\xi_1 = \xi(t)$, $\xi_2 = \dot{\xi}(t)$, $\xi_3 = \ddot{\xi}(t)$, $\xi_4 = \xi^{(3)}(t)$, $\xi_5 = \xi^{(4)}(t)$.

El modelo de estado aproximado extendido para la dinámica perturbada del sistema, puede escribirse de acuerdo a la ec.(3.7). Considerando la ec.(2.5) y la ec.(3.9), la dinámica resulta,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\frac{c_e}{J_e}z_2 + \frac{1}{aJ_e}u + \frac{1}{J_e}\xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Un Observador de Luenberger para el sistema de la ec.(3.10), de acuerdo a la ec.(3.8), se escribe como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \beta_{67}(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{z}}_2 &= -\frac{c_e}{J_e}\hat{z}_2 + \frac{1}{aJ_e}u + \frac{1}{J_e}\hat{\xi}_1 + \beta_5(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \beta_4(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \beta_3(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{\xi}}_3 &= \hat{\xi}_4 + \beta_2(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{\xi}}_4 &= \hat{\xi}_5 + \beta_1(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{\xi}}_5 &= \beta_0(y - \hat{y}),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

siendo, $z_1 = y$, $\hat{z}_1 = \hat{y}$.

El error de estimación puede ser obtenido al restar la dinámica del observador dada por la ec.(3.11), de la dinámica lineal del sistema extendido dado por la ec.(3.10), resultando,

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 - \beta_6 e_1, \\
 \dot{e}_2 &= -\frac{c_e}{J_e}e_2 + \frac{1}{J_e}e_{z1} - \beta_5 e_1, \\
 \dot{e}_{z1} &= e_{z2} - \beta_4 e_1, \\
 \dot{e}_{z2} &= e_{z3} - \beta_3 e_1, \\
 \dot{e}_{z3} &= e_{z4} - \beta_2 e_1, \\
 \dot{e}_{z4} &= e_{z5} - \beta_1 e_1, \\
 \dot{e}_{z5} &= -\beta_0 e_1,
 \end{aligned}$$

con, $e_1 = z_1 - \hat{z}_1$, $e_2 = z_2 - \hat{z}_2$, $e_{zi} = \xi_i - \hat{\xi}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La dinámica del error escrita en forma vectorial está dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_{z1} \\ \dot{e}_{z2} \\ \dot{e}_{z3} \\ \dot{e}_{z4} \\ \dot{e}_{z5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_5 & -\frac{c_e}{J_e} & \frac{1}{J_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{z1} \\ e_{z2} \\ e_{z3} \\ e_{z4} \\ e_{z5} \end{bmatrix}.$$

Para determinar la ecuación característica de la dinámica del error, se usa el teorema de *Cayley-Hamilton*, $p(s) = \det(sI - A)$; resultando un polinomio característico $p(s)$ de séptimo grado:

$$s^7 + \left(\frac{c_e}{J_e} + \beta_6\right)s^6 + \left(\frac{c_e\beta_6}{J_e} + \beta_5\right)s^5 + \frac{\beta_4}{J_e}s^4 + \frac{\beta_3}{J_e}s^3 + \frac{\beta_2}{J_e}s^2 + \frac{\beta_1}{J_e}s + \frac{\beta_0}{J_e} = 0, \tag{3.12}$$

Ahora, para el diseño de las ganancias del observador, se propone un polinomio característico deseado $p_d(s)$ de séptimo grado, de la forma: $p_d(s) = (s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^3$,

$$\begin{aligned} & s^7 + (6\zeta\omega_n + p)s^6 + (3\omega_n^2 + 12\zeta^2\omega_n^2 + 6\zeta\omega_n p)s^5 \\ & + (12\zeta\omega_n^3 + 8\zeta^3\omega_n^3 + 3\omega_n^2 p + 12\zeta^2\omega_n^2 p)s^4 + (12\zeta^2\omega_n^4 + 3\omega_n^4 + 12\zeta\omega_n^3 p + 8\zeta^3\omega_n^3 p)s^3 \\ & + (6\zeta\omega_n^5 + 12\zeta^2\omega_n^4 p + 3\omega_n^4 p)s^2 + (\omega_n^6 + 6\zeta\omega_n^5 p)s + \omega_n^6 p = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

tal que sea *Hurwitz*, con $\zeta, \omega_n, p > 0$; y las raíces lo suficientemente alejadas del eje imaginario del semiplano izquierdo del plano complejo s , tal que el error de estimación tenga una rápida convergencia exponencialmente a cero.

Finalmente, las ganancias del observador se calculan al igualar las ecs.(3.12) y (3.13), quedando definidas como:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (\omega_n^6 p) J_e, \\ \beta_1 &= (\omega_n^6 + 6\zeta\omega_n^5 p) J_e, \\ \beta_2 &= (6\zeta\omega_n^5 + 12\zeta^2\omega_n^4 p + 3\omega_n^4 p) J_e, \\ \beta_3 &= (12\zeta^2\omega_n^4 + 3\omega_n^4 + 12\zeta\omega_n^3 p + 8\zeta^3\omega_n^3 p) J_e, \\ \beta_4 &= (12\zeta\omega_n^3 + 8\zeta^3\omega_n^3 + 3\omega_n^2 p + 12\zeta^2\omega_n^2 p) J_e, \\ \beta_5 &= 3\omega_n^2 + 12\zeta^2\omega_n^2 - \frac{c_e}{J_e} \beta_6, \\ \beta_6 &= 6\zeta\omega_n - \frac{c_e}{J_e}. \end{aligned}$$

3.3.2. Resultados de simulación numérica

Las ecuaciones correspondientes a cada uno de los bloques mostrados en la Figura 3.1 se programaron en MATLAB/Simulink, empleando el método numérico Runge-Kutta y un paso de integración fijo de 0,1 [ms]. Se consideraron dos estudios, uno en movimiento libre y el otro en movimiento restringido.

Estudio A. Palanca háptica en movimiento libre.

Se consideró una fuerza aplicada por el usuario del tipo sinusoidal en frecuencias de 30 y 50 [Hz], con una amplitud de -2 [N]; sin interacción con la pared virtual, ya que es un movimiento libre. En las Figuras 3.2 y 3.3 se muestran los resultados de simulación numérica obtenidos considerando valores de $\zeta = 2$, $\omega_n = 1800$ y $p = 1800$, para las ganancias del observador de perturbación.

En la Figura 3.2 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 1 [mN].

En la Figura 3.3 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 7 [mN].

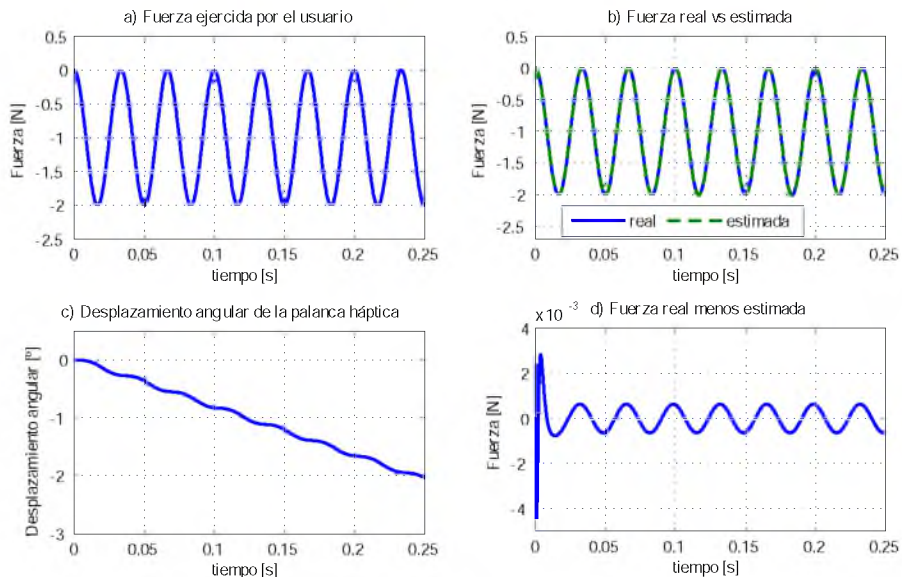


Figura 3.2: Resultados de simulación numérica de la palanca háptica con transmisión por contacto, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].

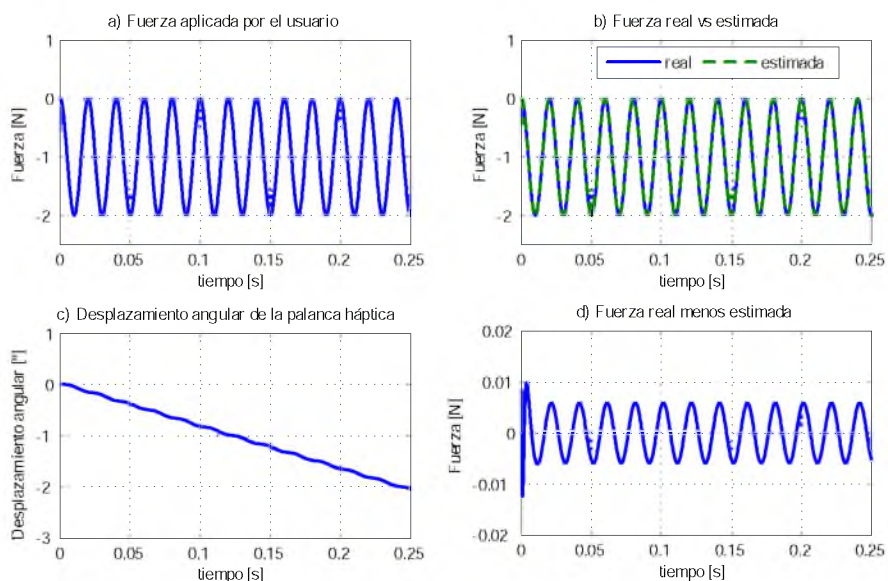


Figura 3.3: Resultados de simulación numérica del dispositivo háptico con transmisión por contacto, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz].

Estudio B. Palanca háptica en movimiento restringido.

Se consideró una fuerza aplicada por el usuario del tipo sinusoidal en frecuencias de 30 y 50 [Hz], y una amplitud de -2 [N]; en una interacción bidireccional con la pared virtual, ya que es un movimiento restringido. En las Figuras 3.4 y 3.5 se muestran los resultados de simulación numérica obtenidos considerando valores de $\zeta = 2$, $\omega_n = 1800$ y $p = 1800$, para las ganancias del observador de perturbación.

En la Figura 3.4 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 1 [mN].

En la Figura 3.5 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 7 [mN].

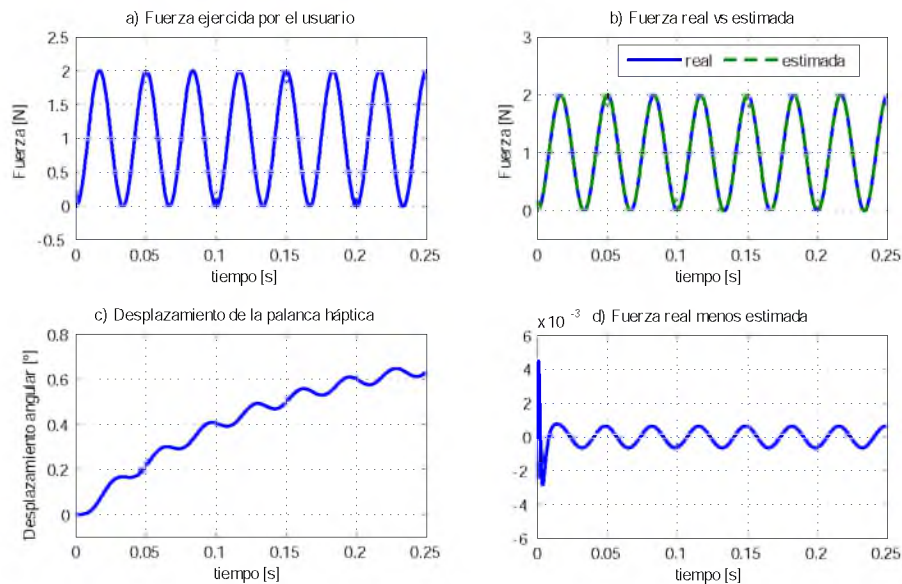


Figura 3.4: Resultados de simulación numérica de la palanca háptica con transmisión por contacto, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].

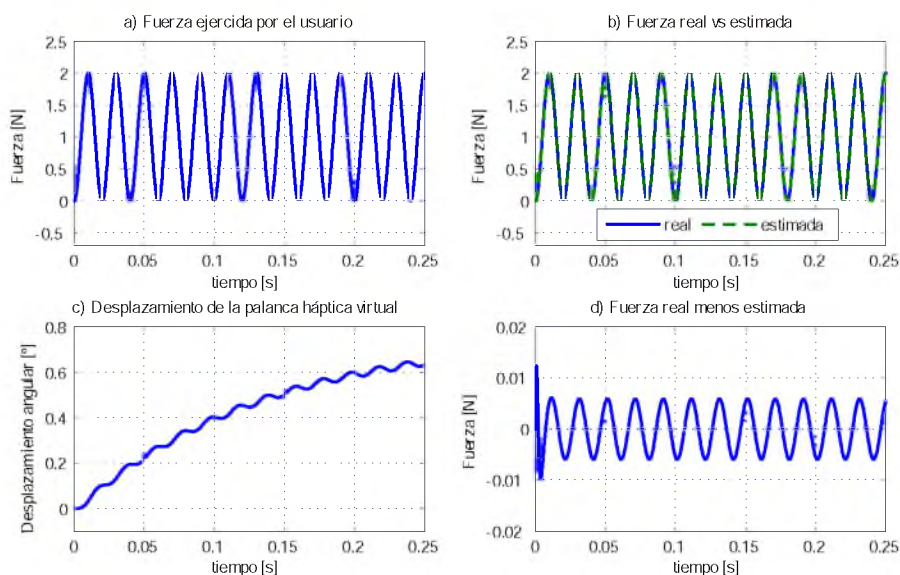


Figura 3.5: Resultados de simulación numérica de la palanca háptica con transmisión por contacto, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz].

3.4. Caso II: Dispositivo háptico con transmisión por cable

3.4.1. Parametrización diferencial

La *Planitud Diferencial* o *planitud* fue propuesta por Fliess y colaboradores (ver [28] y [29]), y es una propiedad que tienen algunos sistemas dinámicos controlados, que permite trivializar las tareas de planificación de trayectoria y simplifica el problema de diseño de control por retroalimentación, tanto de sistemas lineales como no lineales. La planitud es equivalente a la controlabilidad y, por lo tanto, el sistema de interés en este trabajo, exhibe esta propiedad. La propiedad de planitud permite una parametrización completa de todas las variables de la dinámica del dispositivo háptico (estados, entrada, salida) en términos de una variable independiente, llamada *salida plana*, y un número finito de sus derivadas en el tiempo; resultando una ecuación diferencial ordinaria entrada-salida. Esto nos permite también, diseñar un observador de perturbación, para estimar la fuerza aplicada por el usuario.

Sistemas lineales diferencialmente planos

Un sistema lineal de una entrada y una salida (SISO, del inglés Single Input-Single Output) se dice que es *plano* (de acuerdo a [28], [29]), si existe en este una salida endógena,

llamada *salida plana*, la cual es una función de los estados del sistema, y también de un número finito de sus derivadas. Los estados, la entrada y la salida del sistema pueden ser expresados con la salida plana y un número finito de derivadas.

Sea un sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ z &= h(x),\end{aligned}\tag{3.14}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ que son los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}$ como entrada, y $z \in \mathbb{R}$ que es la salida, se dice que el sistema es *plano* si existe una salida,

$$y = \theta(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}),\tag{3.15}$$

tal que,

$$\begin{aligned}x &= \lambda(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}), \\ u &= \pi(y, \dot{y}, \dots, y^{(k+1)}), \\ z &= \zeta(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Al conjunto de ecs.(3.16), se le denomina *parametrización diferencial* del sistema de la ec.(3.14), en función de la salida plana.

Obtención de la salida plana

De acuerdo a lo anterior, si el sistema es controlable, entonces es diferencialmente plano, y tiene por lo tanto una salida plana. La matriz de controlabilidad está dada por,

$$C_k = [B, AB, \dots, A^{(n-1)}B].\tag{3.17}$$

Ahora, la salida plana puede ser encontrada por medio de la siguiente expresión,

$$y = \lambda x,\tag{3.18}$$

donde y es la salida plana, x el vector de estado del sistema y λ está dada por:

$$\lambda = k [0 \ 0 \ \dots \ 1] C_k^{-1},\tag{3.19}$$

siendo k una constante que podría resultar la unidad o un parametro o parametros del sistema, que bien, podría no tomarse en cuenta.

Ahora bien, una vez encontrada la salida es necesario conocer las derivadas finitas de ésta de acuerdo al orden del sistema. El número finito de derivadas de la salida plana se pueden encontrar mediante,

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \lambda A^2 \\ \vdots \\ \lambda A^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

donde λ se debe redefinir de acuerdo a la salida plana encontrada. Una vez encontrando $y^{(n-1)}$, se deriva una vez más para encontrar y^n , y se pueda ver la entrada de control.

Modelo parametrizado del dispositivo háptico con transmisión por cable

El modelo dinámico del dispositivo háptico está descrito en las ecs.(2.10) y (2.11), y se representa en el espacio de estado por la ec.(2.13). El sistema es controlable (*véase* la sección 2.2.1 en la pág. 21, para más detalles), y en consecuencia, es diferencialmente plano.

Para realizar la parametrización diferencial de la dinámica del dispositivo háptico, se obtiene primeramente la salida plana mediante las ecs.(3.18) y (3.19), donde C_k^{-1} es la inversa de la matriz de controlabilidad del sistema,

$$C_k^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a\gamma_1 L_a k_m} (a^2 \gamma_1^2 R_a^2 + k_m a \gamma_1 L_a R_a + \gamma_2 k_m a L_a^2 - k_e k_m \gamma_1 L_a) & -L_a & L_a \\ \frac{1}{k_m} (a \gamma_2 L_a + a \gamma_1 R_a) & a \gamma_1 \frac{L_a}{k_m} & 0 \\ a \gamma_1 \frac{L_a}{k_m} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo que,

$$y = [0 \ 0 \ 0 \ 1] C_k^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{J_m I_p}{2k R r} x_3.$$

La salida plana se considera simplemente como $y = x_3$, ya que el coeficiente $\frac{J_m I_p}{2k R r}$ contiene parámetros del sistema y no afecta en la parametrización. Se observa que la salida plana es el desplazamiento angular $x_3 = \theta$ de la palanca háptica. Para mostrar la parametrización de todas las variables de estado y la entrada de control, se calculan las derivadas en el tiempo de la salida plana $y = x_3$ hasta la tercera derivada. Se deriva una vez $y^{(3)}$ para encontrar la entrada de control u ; obteniendo de esta manera,

$$\begin{aligned}
 y &= x_3, \\
 \dot{y} &= x_4, \\
 \ddot{y} &= \frac{2kRr}{I_p} x_1 - \frac{2kR^2}{I_p} x_3 - \frac{c_p}{I_p} x_4 + \frac{1}{I_p} \tau_{au}, \\
 y^{(3)} &= -\frac{2c_p k R r}{I_p^2} x_1 + \frac{2kRr}{I_p} x_2 + \frac{2c_p k R^2}{I_p^2} x_3 + \left(\frac{c_p^2}{I_p^2} - \frac{2kR^2}{I_p} \right) x_4 - \frac{c_p}{I_p^2} \tau_{au} + \frac{1}{I_p} \dot{\tau}_{au}, \\
 y^{(4)} &= \frac{2kRr}{I_p J_m} u + \left(\frac{c_p^2 2r R k}{I_p^3} - \frac{2kR^2 2r R k}{I_p^2} - \frac{2kRr 2r^2 k}{I_p J_m} \right) x_1 - \left(\frac{2c_p k R r}{I_p^2} + \frac{2kRr c_m}{I_p J_m} \right) x_2 \\
 &\quad + \left(\frac{2kRr 2r R k}{I_p J_m} - \frac{c_p^2 2R^2 k}{I_p^3} + \frac{2kR^2 2R^2 k}{I_p^2} \right) x_3 + \left(\frac{2c_p k R^2}{I_p^2} - \frac{c_p^3}{I_p^3} + \frac{2c_p k R^2}{I_p^2} \right) x_4 \\
 &\quad + \frac{1}{I_p} \ddot{\tau}_{au} - \frac{c_p}{I_p^2} \dot{\tau}_{au} + \left(\frac{c_p^2}{I_p^3} - \frac{2kR^2}{I_p^2} \right) \tau_{au}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Entonces, las variables de estado y la entrada de control son parametrizadas en términos de la salida plana y un número finito derivadas, considerando así también la fuerza aplicada por el usuario. Resultando las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \left(\frac{I_p}{2kRr} \right) \ddot{y} + \left(\frac{c_p}{2kRr} \right) \dot{y} + \left(\frac{R}{r} \right) y - \frac{1}{2kRr} \tau_{au}, \\
 x_2 &= \frac{I_p}{2kRr} y^{(3)} + \left(\frac{c_p}{2kRr} \right) \ddot{y} + \left(\frac{R}{r} \right) \dot{y} - \frac{1}{2kRr} \dot{\tau}_{au}, \\
 x_3 &= y, \\
 x_4 &= \dot{y}, \\
 u &= \left(\frac{I_p J_m}{2kRr} \right) y^{(4)} + \left(\frac{J_m c_p}{2kRr} + \frac{I_p c_m}{2kRr} \right) y^{(3)} + \left(\frac{J_m R}{r} + \frac{r I_p}{R} + \frac{c_m c_p}{2kRr} \right) \ddot{y} + \left(\frac{c_m R}{r} + \frac{c_p r}{R} \right) \dot{y} \\
 &\quad + \left(\frac{J_m}{2kRr} \ddot{\tau}_{au} - \frac{c_m}{2kRr} \dot{\tau}_{au} + \frac{r}{R} \tau_{au} \right)
 \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de la entrada de control u en función de la salida plana $y = x_3$ y la perturbación τ_{au} , puede ser reescrita como:

$$u = \eta_1 y^{(4)} + \eta_2 y^{(3)} + \eta_3 \ddot{y} + \eta_4 \dot{y} + \frac{J_m}{2kRr} \ddot{\tau}_{au} - \frac{c_m}{2kRr} \dot{\tau}_{au} + \frac{r}{R} \tau_{au}, \tag{3.22}$$

con los coeficientes dados por,

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \frac{I_p J_m}{2kRr}, \\
 \eta_2 &= \frac{J_m c_p}{2kRr} + \frac{I_p c_m}{2kRr}, \\
 \eta_3 &= \frac{J_m R}{r} + \frac{I_p r}{R} + \frac{c_m c_p}{2kRr}, \\
 \eta_4 &= \frac{R c_m}{r} + \frac{r c_p}{R}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, la ec.(3.22) es el modelo parametrizado de la dinámica del dispositivo háptico con transmisión por cable, considerando el par debido a la fuerza aplicada por el usuario $\tau_{au} = F_{aud}$.

3.4.2. Diseño del observador de perturbación

Observador de perturbación del modelo dinámico

El modelo dinámico del dispositivo háptico es de estado completamente observable (*ver* sección 2.2.2, pág. 23), y para el diseño del observador de perturbación se emplea la metodología descrita en la sección 3.2. Se considera que la señal de perturbación a estimar es el par debido a la fuerza aplicada por el usuario $\xi(t) = \tau_{au} = F_{au}d$, y que puede ser aproximada localmente por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, de cuarto grado. De acuerdo a la ec.(3.5) (*véase* pág. 33), la perturbación aproximada toma la siguiente forma:

$$\xi(t) \approx p_0 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3 + p_4t^4,$$

donde todos los coeficientes p_i son completamente desconocidos.

Entonces, la señal de perturbación puede ser localmente descrita por un modelo matemático lineal en variables de estado, como:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

donde, $\xi_1 = \xi(t)$, $\xi_2 = \dot{\xi}(t)$, $\xi_3 = \ddot{\xi}(t)$, $\xi_4 = \xi^{(3)}(t)$, $\xi_5 = \xi^{(4)}(t)$.

El modelo de estado aproximado extendido para la dinámica perturbada del sistema, puede escribirse de acuerdo a la ec.(3.7). Considerando la ec.(2.12) y la ec.(3.23), la dinámica resulta,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{2kr^2}{J_m}x_1 - \frac{c_m}{J_m}x_2 + \frac{2kRr}{J_m}x_3 + \frac{1}{J_m}u, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{2kRr}{I_p}x_1 - \frac{2kR^2}{I_p}x_3 - \frac{c_p}{I_p}x_4 + \frac{1}{I_p}\xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Un Observador de Luenberger para el sistema de la ec.(3.24), es dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \lambda_8(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{x}}_2 &= -\frac{2kr^2}{J_m}\hat{x}_1 - \frac{c_m}{J_m}\hat{x}_2 + \frac{2kRr}{J_m}\hat{x}_3 + \frac{1}{J_m}u + \lambda_7(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_4 + \lambda_6(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{x}}_4 &= \frac{2kRr}{I_p}\hat{x}_1 - \frac{2kR^2}{I_p}\hat{x}_3 - \frac{c_p}{I_p}\hat{x}_4 + \frac{1}{I_p}\hat{\xi}_1 + \lambda_5(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \lambda_4(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \lambda_3(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_3 &= \hat{\xi}_4 + \lambda_2(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_4 &= \hat{\xi}_5 + \lambda_1(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_5 &= \lambda_0(y - \hat{y}),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

siendo, $x_3 = y$, $\hat{x}_3 = \hat{y}$.

El error de estimación puede ser obtenido al restar la dinámica del observador dado por la ec.(3.25), de la dinámica lineal del sistema extendido dado por la ec.(3.24), obteniendo,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 - \lambda_8 e_3, \\
\dot{e}_2 &= -\frac{2kr^2}{J_m}e_1 - \frac{c_m}{J_m}e_2 + \frac{2kRr}{J_m}e_3 - \lambda_7 e_3, \\
\dot{e}_3 &= e_4 - \lambda_6 e_3, \\
\dot{e}_4 &= \frac{2kRr}{I_p}e_1 - \frac{2kR^2}{I_p}e_3 - \frac{c_p}{I_p}e_4 + \frac{1}{I_p}e_{x1} - \lambda_5 e_3, \\
\dot{e}_{x1} &= e_{x2} - \lambda_4 e_3, \\
\dot{e}_{x2} &= e_{x3} - \lambda_3 e_3, \\
\dot{e}_{x3} &= e_{x4} - \lambda_2 e_3, \\
\dot{e}_{x4} &= e_{x5} - \lambda_1 e_3, \\
\dot{e}_{x5} &= -\lambda_0 e_3,
\end{aligned}$$

con, $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, $e_3 = x_3 - \hat{x}_3$, $e_4 = x_4 - \hat{x}_4$, $e_{xi} = \xi_i - \hat{\xi}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La dinámica del error escrita en forma vectorial está dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ \dot{e}_{x1} \\ \dot{e}_{x2} \\ \dot{e}_{x3} \\ \dot{e}_{x4} \\ \dot{e}_{x5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\lambda_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & \mu_3 - \lambda_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_4 & 0 & -\mu_5 - \lambda_5 & -\mu_6 & \frac{1}{I_p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_{x1} \\ e_{x2} \\ e_{x3} \\ e_{x4} \\ e_{x5} \end{bmatrix},$$

donde los términos μ_i con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; son: $\mu_1 = \frac{2kr^2}{J_m}$, $\mu_2 = \frac{c_m}{J_m}$, $\mu_3 = \frac{2kRr}{J_m}$, $\mu_4 = \frac{2kRr}{I_p}$, $\mu_5 = \frac{2kR^2}{I_p}$, $\mu_6 = \frac{c_p}{I_p}$.

La ecuación característica de la dinámica del error resulta en un polinomio característico $p(s)$ de noveno grado,

$$\begin{aligned} & s^9 + (\mu_2 + \mu_6 + \lambda_6)s^8 + (\mu_1 + \mu_5 + \mu_2\mu_6 + \lambda_5 + \lambda_6\mu_2 + \lambda_6\mu_6)s^7 \\ & \quad + (\mu_1\mu_6 + \mu_2\mu_5 + \frac{1}{I_p}\lambda_4 + \lambda_5\mu_2 + \lambda_6\mu_1 + \lambda_6\mu_2\mu_6 + \lambda_8\mu_4)s^6 \\ & + (\mu_1\mu_5 - \mu_3\mu_4 + \frac{1}{I_p}\lambda_3 + \frac{1}{I_p}\lambda_4\mu_2 + \lambda_5\mu_1 + \lambda_6\mu_1\mu_6 + \lambda_7\mu_4 + \lambda_8\mu_2\mu_4)s^5 \\ & \quad + (\frac{1}{I_p}\lambda_2 + \frac{1}{I_p}\lambda_3\mu_2 + \frac{1}{I_p}\lambda_4\mu_1)s^4 + (\frac{1}{I_p}\lambda_1 + \frac{1}{I_p}\lambda_2\mu_2 + \frac{1}{I_p}\lambda_3\mu_1)s^3 \\ & + (\frac{1}{I_p}\lambda_0 + \frac{1}{I_p}\lambda_1\mu_2 + \frac{1}{I_p}\lambda_2\mu_1)s^2 + (\frac{1}{I_p}\lambda_0\mu_2 + \frac{1}{I_p}\lambda_1\mu_1)s + \frac{1}{I_p}\lambda_0\mu_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ahora, para el diseño de las ganancias del observador se propone un polinomio característico deseado $p_d(s)$ de la forma: $p_d(s) = (s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^4$,

$$\begin{aligned} & s^9 + (8\omega_n\zeta + p)s^8 + (4\omega_n^2 + 8p\omega_n\zeta + 24\omega_n^2\zeta^2)s^7 \\ & \quad + (32\omega_n^3\zeta^3 + 24\omega_n^3\zeta + 24p\omega_n^2\zeta^2 + 4p\omega_n^2)s^6 \\ & + (16\omega_n^4\zeta^4 + 48\omega_n^4\zeta^2 + 6\omega_n^4 + 32p\omega_n^3\zeta^3 + 24p\omega_n^3\zeta)s^5 \\ & \quad + (32\zeta^3\omega_n^5 + 24\zeta\omega_n^5 + 16\zeta^4\omega_n^4p + 48\zeta^2\omega_n^4p + 6\omega_n^4p)s^4 \\ & \quad + (24\zeta^2\omega_n^6 + 4\omega_n^6 + 32\zeta^3\omega_n^5p + 24\zeta\omega_n^5p)s^3 \\ & + (8\zeta\omega_n^7 + 24\zeta^2\omega_n^6p + 4\omega_n^6p)s^2 + (\omega_n^8 + 8\zeta\omega_n^7p)s + \omega_n^8p = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

tal que sea *Hurwitz*, con $\zeta, \omega_n, p > 0$; y las raíces lo suficientemente alejadas del eje imaginario del semiplano izquierdo del plano complejo s , tal que el error de estimación tenga una rápida convergencia exponencialmente a cero.

Finalmente, las ganancias del observador se calculan al igualar las ecs.(3.26) y (3.27), quedando definidas como:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= (\omega_n^8 p) I_p, \\
\lambda_1 &= \frac{I_p}{\mu_1} (\omega_n^8 + 8\zeta \omega_n^7 p) - \frac{\mu_2}{\mu_1} \lambda_0, \\
\lambda_2 &= \frac{I_p}{\mu_1} (8\zeta \omega_n^7 + 24\zeta^2 \omega_n^6 p + 4\omega_n^6 p) - \frac{1}{\mu_1} \lambda_0 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \lambda_1, \\
\lambda_3 &= \frac{I_p}{\mu_1} (24\zeta^2 \omega_n^6 + 4\omega_n^6 + 32\zeta^3 \omega_n^5 p + 24\zeta \omega_n^5 p) - \frac{1}{\mu_1} \lambda_1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \lambda_2, \\
\lambda_4 &= \frac{I_p}{\mu_1} (32\zeta^3 \omega_n^5 + 24\zeta \omega_n^5 + 16\zeta^4 \omega_n^4 p + 48\zeta^2 \omega_n^4 p + 6\omega_n^4 p) - \frac{1}{\mu_1} \lambda_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \lambda_3, \\
\lambda_5 &= (4\omega_n^2 + 8\zeta \omega_n p + 24\zeta^2 \omega_n^2) - \mu_1 - \mu_5 - \mu_2 \mu_6 - (\mu_2 + \mu_6) \lambda_6, \\
\lambda_6 &= (8\zeta \omega_n + p) - \mu_2 - \mu_6, \\
\lambda_7 &= \frac{1}{\mu_4} (16\zeta^4 \omega_n^4 + 48\zeta^2 \omega_n^4 + 6\omega_n^4 + 32\zeta^3 \omega_n^3 p + 24\zeta \omega_n^3 p) - \frac{1}{I_p \mu_4} \lambda_3 \\
&\quad - \mu_3 + \frac{\mu_2}{I_p \mu_4} \lambda_4 + \frac{\mu_1 \mu_5}{\mu_4} + \frac{\mu_1}{\mu_4} \lambda_5 + \frac{\mu_1 \mu_6}{\mu_4} \lambda_6 + \mu_2 \lambda_8, \\
\lambda_8 &= \frac{1}{\mu_4} (32\zeta^3 \omega_n^3 + 24\zeta \omega_n^3 + 24\zeta^2 \omega_n^2 p + 4\omega_n^2 p) - \frac{1}{I_p \mu_4} \lambda_4 - \frac{\mu_1 \mu_6}{\mu_4} - \frac{\mu_2 \mu_6}{\mu_4} - \frac{\mu_2}{\mu_4} \lambda_5 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_4} + \frac{\mu_2 \mu_6}{\mu_4} \right) \lambda_6.
\end{aligned}$$

Observador de perturbación del modelo parametrizado

El modelo parametrizado del dispositivo háptico está descrito por una ecuación diferencial entrada-salida plana perturbada, de acuerdo a la ec.(3.22). La entrada es el par del actuador $u = \tau$, la salida plana $y = x_3$ es el desplazamiento angular θ de la palanca háptica, y $\tau_{au} = F_{au} d$ es el par debido a la fuerza aplicada por el usuario.

Definiendo variables de estado como: $z_1 = y$, $z_2 = \dot{y}$, $z_3 = \ddot{y}$ y $z_4 = y^{(3)}$; la ecuación diferencial entrada-salida plana perturbada puede escribirse en ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2, \\
\dot{z}_2 &= z_3, \\
\dot{z}_3 &= z_4, \\
\dot{z}_4 &= -\frac{\eta_2}{\eta_1} z_4 - \frac{\eta_3}{\eta_1} z_3 - \frac{\eta_4}{\eta_1} z_2 + \frac{1}{\eta_1} u \\
&\quad - \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{J_m}{2kRr} \bar{\tau}_{au} - \frac{c_m}{2kRr} \dot{\bar{\tau}}_{au} + \frac{r}{R} \tau_{au} \right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

En referencia a la sección 2.2.2 (véase pág. 23), la dinámica del dispositivo háptico es de estado completamente observable, y para el diseño del observador de perturbación se emplea la metodología descrita en la sección 3.2. Se considera que la señal de perturbación a estimar es el conjunto de términos que incluyen a τ_{au} y a sus derivadas,

$$\xi(t) = \frac{J_m}{2kRr} \ddot{\tau}_{au} - \frac{c_m}{2kRr} \dot{\tau}_{au} + \frac{r}{R} \tau_{au},$$

y que puede ser aproximada localmente por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, de cuarto grado. De acuerdo a la ec.(3.5) (véase pág. 33), la perturbación aproximada toma la siguiente forma:

$$\xi(t) \approx p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4,$$

donde todos los coeficientes p_i son completamente desconocidos.

La señal de perturbación puede ser localmente descrita por un modelo matemático lineal en variables de estado, como:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0.\end{aligned}\tag{3.29}$$

donde, $\xi_1 = \xi(t)$, $\xi_2 = \dot{\xi}(t)$, $\xi_3 = \ddot{\xi}(t)$, $\xi_4 = \xi^{(3)}(t)$, $\xi_5 = \xi^{(4)}(t)$.

El modelo de estado aproximado extendido para la dinámica de la salida plana perturbada del sistema, puede escribirse de acuerdo a la ec.(3.7). Considerando la ec.(3.28) y la ec.(3.29), la dinámica resulta,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_4 &= -\frac{\eta_2}{\eta_1} z_4 - \frac{\eta_3}{\eta_1} z_3 - \frac{\eta_4}{\eta_1} z_2 + \frac{1}{\eta_1} u - \frac{1}{\eta_1} \xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Un Observador de Luenberger para el sistema de la ec.(3.30), es dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \beta_8(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \beta_7(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{z}}_3 &= \hat{z}_4 + \beta_6(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{z}}_4 &= -\frac{\eta_2}{\eta_1} \hat{z}_4 - \frac{\eta_3}{\eta_1} \hat{z}_3 - \frac{\eta_4}{\eta_1} \hat{z}_2 + \frac{1}{\eta_1} u - \frac{1}{\eta_1} \hat{\xi}_1 + \beta_5(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \beta_4(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \beta_3(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_3 &= \hat{\xi}_4 + \beta_2(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_4 &= \hat{\xi}_5 + \beta_1(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_5 &= \beta_0(y - \hat{y}),\end{aligned}\tag{3.31}$$

siendo, $z_1 = y$, $\hat{z}_1 = \hat{y}$.

El error de estimación puede ser obtenido al restar la dinámica del observador dado por la ec.(3.31), de la dinámica lineal del sistema extendido dado por la ec.(3.30), obteniendo,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 - \beta_9 e_1, \\
\dot{e}_2 &= e_3 - \beta_8 e_1, \\
\dot{e}_3 &= e_4 - \beta_7 e_1, \\
\dot{e}_4 &= -\frac{\eta_2}{\eta_1} e_4 - \frac{\eta_3}{\eta_1} e_3 - \frac{\eta_4}{\eta_1} e_2 - \frac{1}{\eta_1} e_{z1} - \beta_5 e_1, \\
\dot{e}_{z1} &= e_{z2} - \beta_4 e_1, \\
\dot{e}_{z2} &= e_{z3} - \beta_3 e_1, \\
\dot{e}_{z3} &= e_{z4} - \beta_2 e_1, \\
\dot{e}_{z4} &= e_{z5} - \beta_1 e_1, \\
\dot{e}_{z5} &= -\beta_0 e_1,
\end{aligned}$$

con, $e_1 = z_1 - \hat{z}_1$, $e_2 = z_2 - \hat{z}_2$, $e_3 = z_3 - \hat{z}_3$, $e_4 = z_4 - \hat{z}_4$, $e_{zi} = \xi_i - \hat{\xi}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La dinámica del error escrita en forma vectorial está dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ \dot{e}_{z1} \\ \dot{e}_{z2} \\ \dot{e}_{z3} \\ \dot{e}_{z4} \\ \dot{e}_{z5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_5 & -\frac{\eta_4}{\eta_1} & -\frac{\eta_3}{\eta_1} & -\frac{\eta_2}{\eta_1} & -\frac{1}{\eta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_{z1} \\ e_{z2} \\ e_{z3} \\ e_{z4} \\ e_{z5} \end{bmatrix},$$

y su ecuación característica resulta en un polinomio característico $p(s)$ de noveno grado,

$$\begin{aligned}
s^9 + \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} + \lambda_8\right)s^8 + \left(\frac{\eta_3}{\eta_1} + \lambda_7 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\lambda_8\right)s^7 + \left(\frac{\eta_4}{\eta_1} + \lambda_6 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\lambda_7 + \frac{\eta_3}{\eta_1}\lambda_8\right)s^6 \\
+ \left(\lambda_5 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\lambda_6 + \frac{\eta_3}{\eta_1}\lambda_7 + \frac{\eta_4}{\eta_1}\lambda_8\right)s^5 + \left(\frac{1}{\eta_1}\lambda_4\right)s^4 + \left(\frac{1}{\eta_1}\lambda_3\right)s^3 \\
+ \frac{1}{\eta_1}\lambda_2 s^2 + \frac{1}{\eta_1}\lambda_1 s + \frac{1}{\eta_1}\lambda_0 = 0.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ahora, para el diseño de las ganancias del observador se propone un polinomio característico deseado $p_d(s)$ de la forma: $p_d(s) = (s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^4$,

$$\begin{aligned}
s^9 + (8\omega_n \zeta + p)s^8 + (4\omega_n^2 + 8p\omega_n \zeta + 24\omega_n^2 \zeta^2)s^7 \\
+ (32\omega_n^3 \zeta^3 + 24\omega_n^3 \zeta + 24p\omega_n^2 \zeta^2 + 4p\omega_n^2)s^6 \\
+ (16\omega_n^4 \zeta^4 + 48\omega_n^4 \zeta^2 + 6\omega_n^4 + 32p\omega_n^3 \zeta^3 + 24p\omega_n^3 \zeta)s^5 \\
+ (32\zeta^3 \omega_n^5 + 24\zeta \omega_n^5 + 16\zeta^4 \omega_n^4 p + 48\zeta^2 \omega_n^4 p + 6\omega_n^4 p)s^4 \\
+ (24\zeta^2 \omega_n^6 + 4\omega_n^6 + 32\zeta^3 \omega_n^5 p + 24\zeta \omega_n^5 p)s^3 \\
+ (8\zeta \omega_n^7 + 24\zeta^2 \omega_n^6 p + 4\omega_n^6 p)s^2 + (\omega_n^8 + 8\zeta \omega_n^7 p)s + \omega_n^8 p = 0,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

tal que sea *Hurwitz*, con $\zeta, \omega_n, p > 0$; y las raíces lo suficientemente alejadas del eje imaginario del semiplano izquierdo del plano complejo s , tal que el error de estimación tenga una rápida convergencia exponencialmente a cero.

Finalmente, las ganancias del observador se calculan al igualar las ecs.(3.26) y (3.27), quedando definidas como:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= (\omega_n^8 p) \eta_1, \\
\lambda_1 &= (\omega_n^8 + 8\zeta\omega_n^7 p) \eta_1, \\
\lambda_2 &= (8\zeta\omega_n^7 + 24\zeta^2\omega_n^6 p + 4\omega_n^6 p) \eta_1, \\
\lambda_3 &= (24\zeta^2\omega_n^6 + 4\omega_n^6 + 32\zeta^3\omega_n^5 p + 24\zeta\omega_n^5 p) \eta_1, \\
\lambda_4 &= (32\zeta^3\omega_n^5 + 24\zeta\omega_n^5 + 16\zeta^4\omega_n^4 p + 48\zeta^2\omega_n^4 p + 6\omega_n^4 p) \eta_1, \\
\lambda_5 &= (16\zeta^4\omega_n^4 + 48\zeta^2\omega_n^4 + 6\omega_n^4 + 32\zeta^3\omega_n^3 p + 24\zeta\omega_n^3 p) - \frac{\eta_2}{\eta_1} \lambda_6 - \frac{\eta_3}{\eta_1} \lambda_7 - \frac{\eta_4}{\eta_1} \lambda_8, \\
\lambda_6 &= \frac{1}{\eta_1} (32\zeta^3\omega_n^3 + 24\zeta\omega_n^3 + 24\zeta^2\omega_n^2 p + 4\omega_n^2 p), \\
\lambda_7 &= (4\omega_n^2 + 8\zeta\omega_n p + 24\zeta^2\omega_n^2) - \frac{\eta_3}{\eta_1} - \frac{\eta_2}{\eta_1} \lambda_8, \\
\lambda_8 &= (8\zeta\omega_n + p) - \frac{\eta_2}{\eta_1}.
\end{aligned}$$

3.4.3. Resultados de simulación numérica

Los resultados de simulación numérica se obtuvieron para el *modelo dinámico* y para el *modelo parametrizado*, considerando dos estudios para cada uno de éstos, uno en movimiento libre y el otro en movimiento restringido. Las ecuaciones correspondientes a cada uno de los bloques mostrados en la Figura 3.1 se programaron en MATLAB/Simulink, empleando el método numérico Runge-Kutta y un paso de integración fijo de 0,1 [ms].

Modelo dinámico: Estudio A. Palanca háptica en movimiento libre.

Se consideró una fuerza aplicada por el usuario del tipo sinusoidal en frecuencias de 30 y 50 [Hz], con una amplitud de -2 [N]; sin interacción con la pared virtual, ya que es un movimiento libre. En las Figuras 3.6 y 3.7 se muestran los resultados de simulación numérica obtenidos considerando valores de $\zeta = 2$, $\omega_n = 2000$ y $p = 2000$, para las ganancias del observador de perturbación.

En la Figura 3.6 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 7 [mN].

En la Figura 3.7 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 65 [mN].

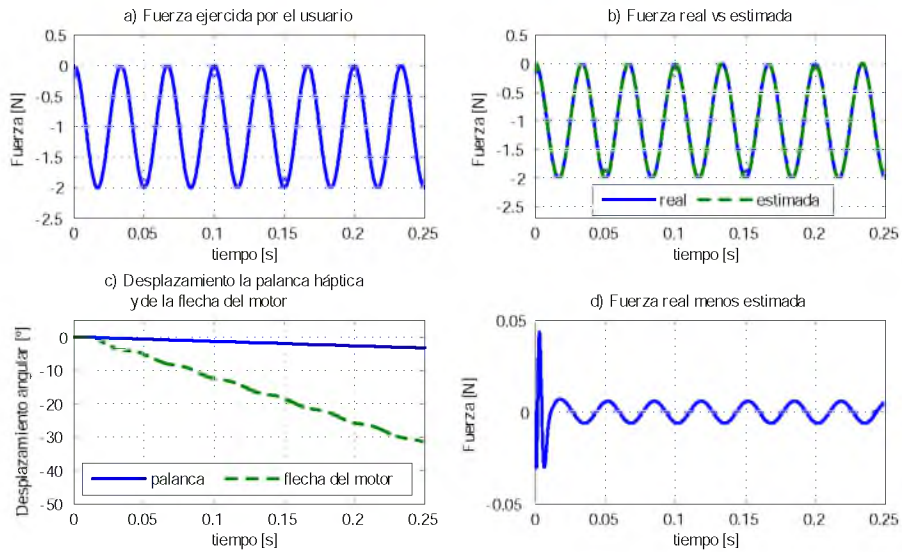


Figura 3.6: Resultados de simulación numérica del modelo dinámico de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].

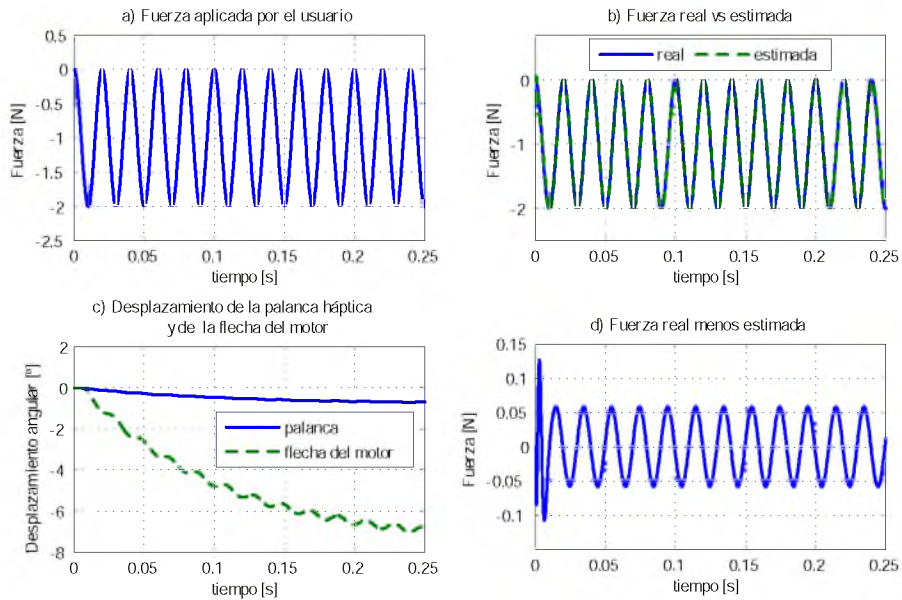


Figura 3.7: Resultados de simulación numérica del modelo dinámico de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz].

Modelo dinámico: Estudio B. Palanca háptica en movimiento restringido.

Se consideró una fuerza aplicada por el usuario del tipo sinusoidal en frecuencias de 30 y 50 [Hz], y una amplitud de 2 [N]; en una interacción bidireccional con la pared virtual, ya que es un movimiento restringido. En las Figuras 3.8 y 3.9 se muestran los resultados de simulación numérica obtenidos considerando valores de $\zeta = 2$, $\omega_n = 2000$ y $p = 2000$, para las ganancias del observador de perturbación.

En la Figura 3.8 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 7 [mN].

En la Figura 3.9 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 65 [mN].

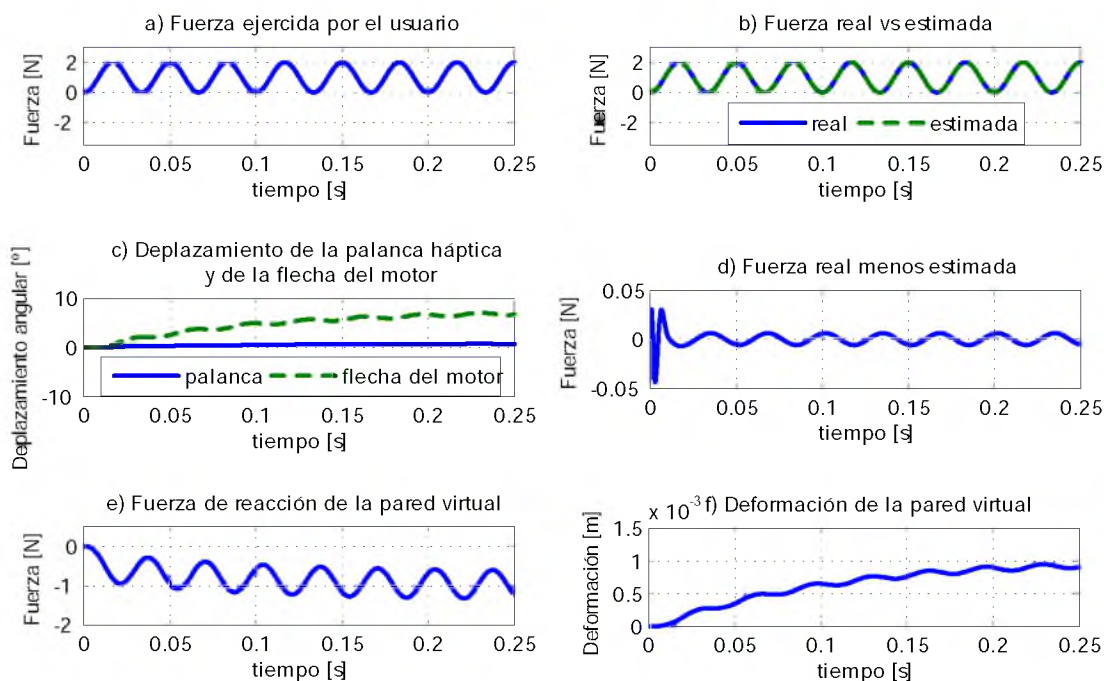


Figura 3.8: Resultados de simulación numérica del modelo dinámico de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].

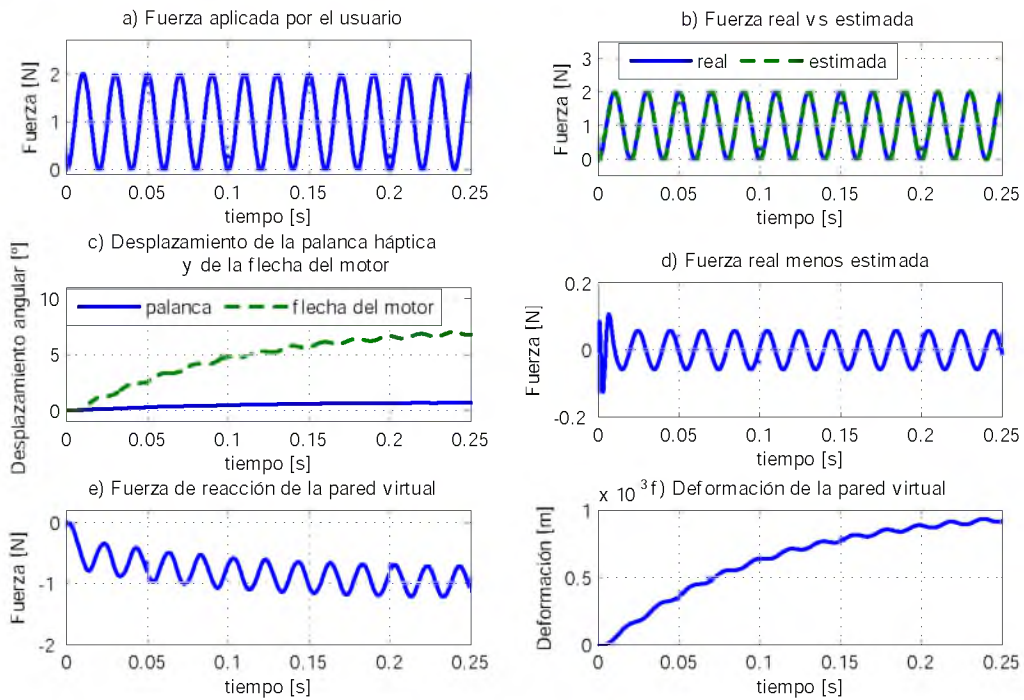


Figura 3.9: Resultados de simulación numérica del modelo dinámico de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de $50 [Hz]$.

Modelo parametrizado: Estudio A. Palanca háptica en movimiento libre.

Se consideró una fuerza aplicada por el usuario del tipo sinusoidal en frecuencias de 30 y 50 [Hz], con una amplitud de -2 [N]; sin interacción con la pared virtual, ya que es un movimiento libre. En las Figuras 3.10 y 3.11 se muestran los resultados de simulación numérica obtenidos considerando valores de $\zeta = 2$, $\omega_n = 2000$ y $p = 2000$, para las ganancias del observador de perturbación.

En la Figura 3.10 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 5 [mN].

En la Figura 3.11 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 50 [mN].

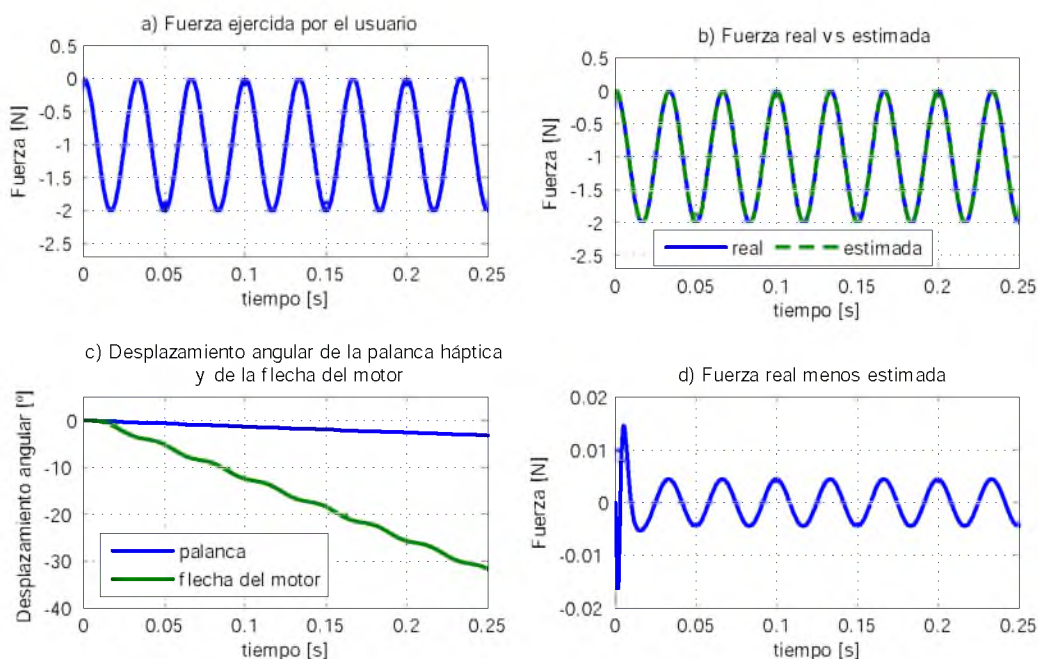


Figura 3.10: Resultados de simulación numérica del modelo parametrizado de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].

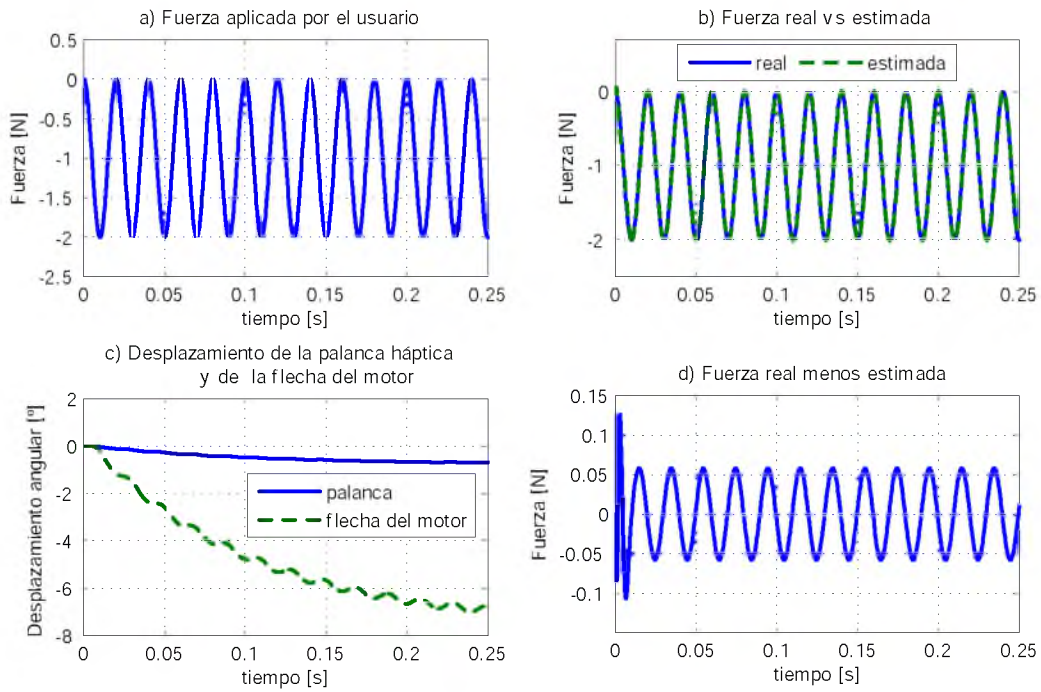


Figura 3.11: Resultados de simulación numérica del modelo parametrizado de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento libre, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de $50 [Hz]$.

Modelo parametrizado: Estudio B. Palanca háptica en movimiento restringido.

Se consideró una fuerza aplicada por el usuario del tipo sinusoidal en frecuencias de 30 y 50 [Hz], y una amplitud de 2 [N]; en una interacción bidireccional con la pared virtual, ya que es un movimiento restringido. En las Figuras 3.12 y 3.13 se muestran los resultados de simulación numérica obtenidos considerando valores de $\zeta = 2$, $\omega_n = 2000$ y $p = 2000$, para las ganancias del observador de perturbación.

En la Figura 3.12 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 5 [mN].

En la Figura 3.13 se muestran los resultados comparativos de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada por el observador de perturbación. Se observa que la diferencia de la fuerza aplicada por el usuario y la fuerza estimada, es menor a ± 50 [mN].

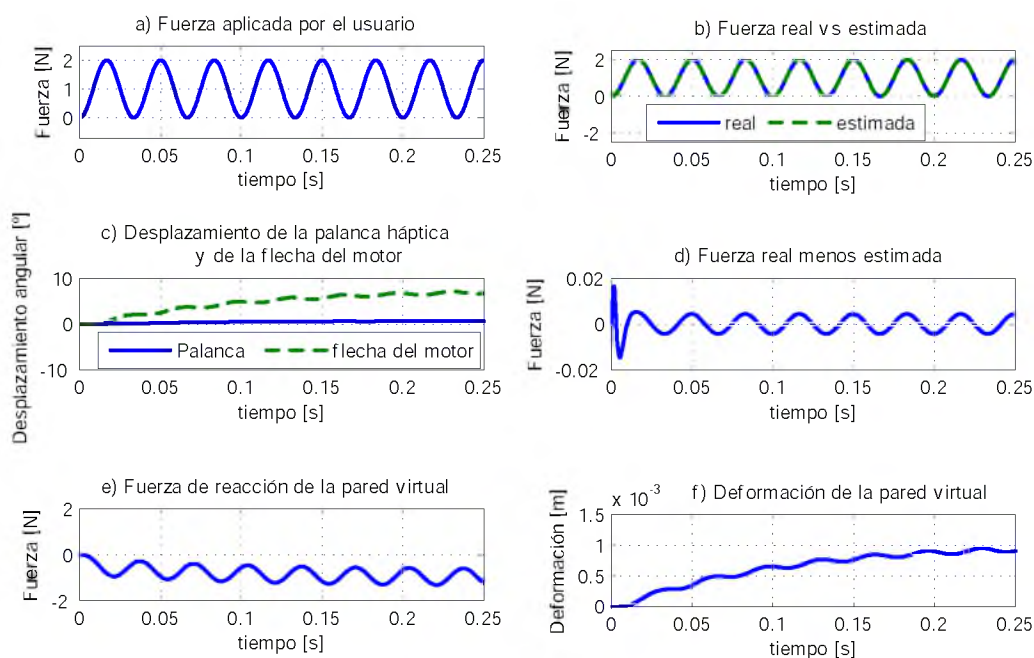


Figura 3.12: Resultados de simulación numérica del modelo parametrizado de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz].

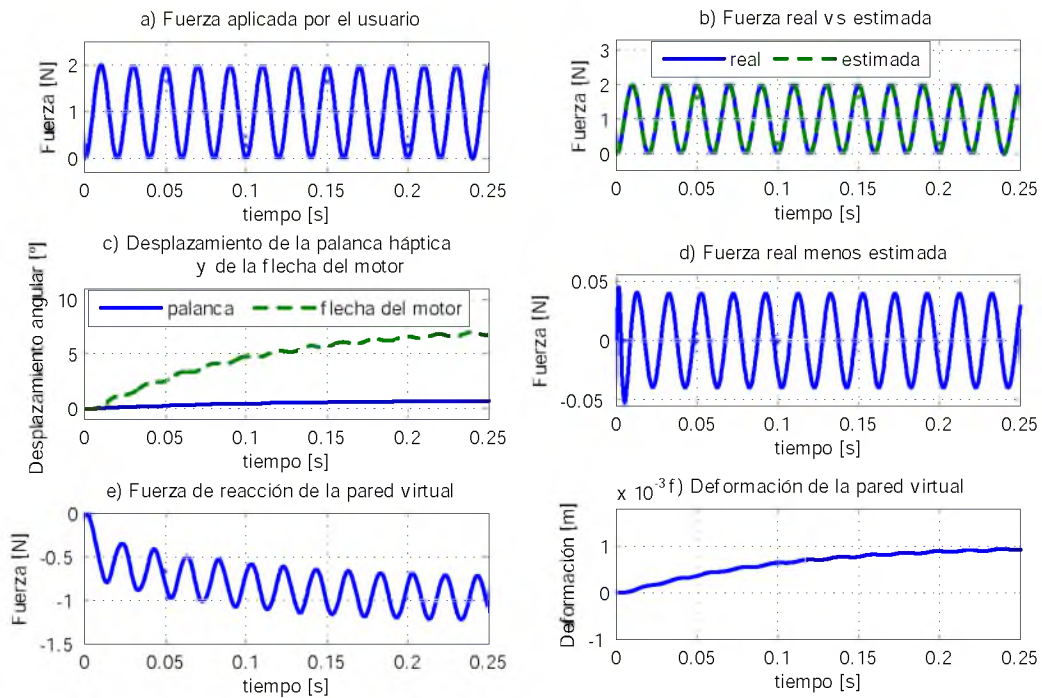


Figura 3.13: Resultados de simulación numérica del modelo parametrizado de la palanca háptica con transmisión por cable, en movimiento restringido, con una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de $50 [Hz]$.

Capítulo 4

Conclusiones y perspectivas

4.1. Conclusiones generales

El dispositivo háptico que se ha estudiado está compuesto principalmente por una palanca y un actuador que le transmite un par. La dinámica de la palanca háptica se dividió en dos casos de estudio: el Caso I, considera una transmisión por contacto entre la palanca y una polea acoplada a la flecha del actuador; el Caso II, considera que la transmisión del movimiento entre la palanca y la polea acoplada al actuador es por medio de un cable. Los modelos matemáticos que fueron desarrollados describen la dinámica de la palanca háptica en funciones lineales, y cumplen con las propiedades de controlabilidad y observabilidad, necesarias para el diseño de controladores y observadores de estado.

Se consideró una pared virtual con dinámica viscoelástica (amortiguamiento viscoso y rigidez), en una interacción háptica bidireccional unidimensional con el usuario. Así también, se utilizó un controlador proporcional-integral de corriente para regular el par necesario que debe aplicarse a la palanca háptica, de acuerdo a la fuerza de reacción de la pared virtual.

La estimación de la fuerza ejercida por el usuario sobre la palanca háptica sin el uso de sensores de fuerza, en una interacción háptica bidireccional con una pared virtual, fue el objetivo principal de éste trabajo. Se diseñaron observadores de perturbación para estimar la fuerza aplicada por el usuario, en los dos casos de estudio, usando parcialmente la metodología de Observadores GPI. La fuerza aplicada por el usuario se aproximó como una señal acotada localmente por un polinomio de Taylor variante en el tiempo de cuarto grado.

Para el Caso I, se consideró la ec.(2.4) (*ver* pág. 14) que describe la dinámica de la palanca háptica. Los estudios realizados fueron tanto en movimiento libre (sin interacción con la pared virtual) como en movimiento restringido (en interacción con la pared virtual); considerando una fuerza aplicada por el usuario del tipo sinusoidal en frecuencias de 30 y 50 [Hz], con una amplitud de 2 [N]. El algoritmo del observador de perturbación empleado está descrito por la ec.(3.11) (*ver* pág. 37), y sus ganancias se ajustaron con valores de: $\zeta = 2$, $\omega_n = 1800$ y $p = 1800$; obteniendo así una estimación satisfactoria.

En las Figuras 3.2 y 3.4 (*ver* págs. 39 y 40) se muestran los errores de la estimación de la fuerza aplicada por el usuario, siendo de 0,63 [mN] en movimiento libre y restringido, con

una fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz]. Las Figuras 3.3 y 3.5 (ver págs. 39 y 41) muestran que los errores de la estimación de la fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz], tanto en movimiento libre como en movimiento restringido, son de 5,9 [mN].

Para el Caso II, se consideró el modelo dinámico de la palanca háptica dado por las ecs.(2.10) y (2.11) (ver pág. 18). También se realizaron los estudios tanto en movimiento libre como en movimiento restringido, empleando la mismos parámetros de la fuerza aplicada por el usuario del Caso I. Se diseñaron dos observadores de perturbación: el primero basado en el modelo dinámico, el segundo está basado en el modelo parametrizado dado por la ec.(3.22) (ver pág. 44).

El observador de perturbación fue diseñado a partir del modelo dinámico y está dado por la ec.(3.25) (ver pág. 3.25)), con ganancias que fueron ajustadas con valores de: $\zeta = 2$, $\omega_n = 20000$ y $p = 2000$; obteniendo así una estimación satisfactoria. Los resultados de simulación de la estimación de la fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz], se muestran en las Figuras 3.6 y 3.8 (ver págs. 52 y 3.8). Se puede ver que los errores de la estimación de la fuerza aplicada por el usuario son de 6,04 [mN], para los movimientos libre y restringido. Las Figuras 3.7 y 3.9 (ver págs. 52 y 54) muestran que los errores de la estimación de la fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz], tanto en movimiento libre como en restringido, son de 58,02 [mN].

La ec.(3.31) (ver pág. 3.31) describe el observador de perturbación diseñado a partir del modelo parametrizado. Las ganancias del observador fueron ajustadas con valores de: $\zeta = 2$, $\omega_n = 20000$ y $p = 2000$; obteniendo así una estimación satisfactoria de la fuerza ejercida por el usuario. Las Figuras 3.10 y 3.12 (ver págs. 55 y 57) muestran los resultados de la estimación de la fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz], en movimiento libre y restringido; donde los errores de la estimación de la fuerza son de 4,43 [mN]. Los resultados de la estimación de la fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 50 [Hz], se pueden ver en las Figuras 3.11 y 3.13 (ver págs. 56 y 58). Los errores de la estimación de la fuerza son de 39,51 [mN].

Se observa que para el Caso I, el error de estimación de la fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de 30 [Hz], es el mismo tanto en movimiento libre y como en restringido. El error de estimación aumentó en menos del 10 %, cuando se evaluó la interfaz háptica con la fuerza aplicada por el usuario a una frecuencia de excitación de 50 [Hz]. Para el Caso II, también se puede observar que los errores de estimación del observador de perturbación basado en el modelo dinámico, son los mismos tanto en movimiento libre como en restringido; y que para un frecuencia de 50 [Hz] el error de estimación de la fuerza aumento en menos del 10 % respecto al error obtenido por la frecuencia de excitación de 30 [Hz]. También se observa que los errores de estimación de la fuerza usando el observador de perturbación basado en el modelo parametrizado, son menores en un 30 % respecto de los errores de estimación del observador basado en el modelo dinámico.

En general, se logró una estimación satisfactoria de la fuerza ejercida por el usuario para ésta aplicación en particular, con las características dinámicas consideradas. Es importante comentar que si se emplea una transmisión por cable en un dispositivo háptico tipo palanca,

el cable debe ser completamente rígido, con el fin de simplificar el modelo dinámico. Sin embargo, los resultados de simulación numérica muestran el desempeño satisfactorio del observador de perturbación para ambos casos de estudio.

4.2. Trabajo futuro

Se considera que en un siguiente proyecto se realice la construcción de una plataforma experimental de la interfaz háptica, para la implementación de los algoritmos del observador de perturbación. En la Figura 4.1 se muestran las partes que componen a la plataforma experimental propuesta, que principalmente son: una computadora (para realizar los cálculos del renderizado háptico considerando la dinámica de la pared virtual), una tarjeta de adquisición de datos (para la adquisición y distribución de las señales de entrada y salida del dispositivo háptico), un servoamplificador y un servomotor (para la aplicación del par dado por la pared virtual sobre la palanca háptica). Así también, se considera el uso de un sensor de fuerza para comparar con los resultados experimentales del observador de perturbación, y así validar la efectividad de ésta estrategia de estimación.

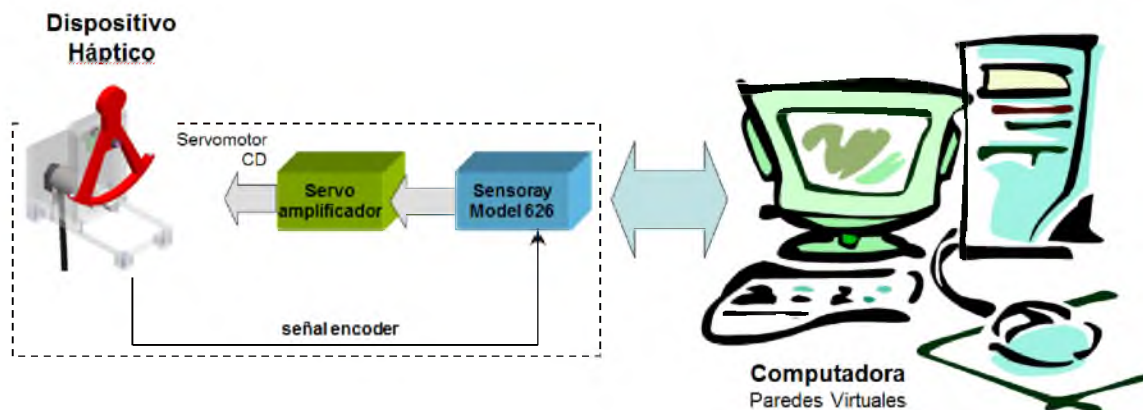


Figura 4.1: Concepto de diseño de la plataforma experimental basada en un dispositivo háptico tipo palanca.

Bibliografía

- [1] Srinivasan, M. A., Basdogan, C. 1997. “Haptics in Virtual Environments: Taxonomy, Research, Status, and Challenges”. *Computers & Graphics*. Vol. 21, No. 4, pp. 393–404.
- [2] Visansay Fernández, G. 2008. *Laboratorio Virtual de Física en Matlab/Simulink con Tecnología VRML*. Tesis de Licenciatura. Universidad de Cien Fuegos “Carlos Rafael Rodríguez”. Cien Fuegos, Cuba.
- [3] Julianne Kuchenbecker, K. 2006. *Characterizing and Controlling the High-Frequency Dynamics of Haptic Interfaces*. Stanford University. Doctoral Thesis. California, U.S.A.
- [4] Puerto Coy, M. J. 2010. *Estudio de la influencia del usuario y los Modos de Vibración de la interfaz en la Estabilidad y Dinámica de Sistemas Hápticos*. Tesis Doctoral. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Navarra. San Sebastián. España.
- [5] Thorsten A. K. 2009. *Engineering Haptic Devices*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.
- [6] Aviña Grimaldo A. S., Hernández Rojas E. 2006. *Guiado Háptico Local con Perspectivas de Diagnóstico y Rehabilitación Neuropsicológica*. Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Pachuca de Soto, Hidalgo. México.
- [7] Salisbury, J. K., Brok, D. L., Massie, T., Swarup, N., Zilles, C. 1995. “Haptic Rendering: Programming Touch Interaction with Virtual Objects”. *ACM Symposium on Interactive 3D Graphics*, pp. 123-130. California, U.S.A.
- [8] Salisbury, K., Conti, F., Barbagli, F. 2004. “Haptic Rendering: Introductory Concepts”. *IEEE Computer Graphics and Applications*. pp. 24-32. January/February.
- [9] Abhishek Gupta, Marcia K. O’Malley. 2011. “Disturbance-Observer-Based Force Estimation for Haptic Feedback”. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. Vol. 33. U.S.A.
- [10] Chen, W.-H., Ballance, D. J., Gawthrop, P. J., O’Reilly, J. 2000, “A Nonlinear Disturbance Observer for Robotic Manipulators”. *IEEE Transaction on Industrial Electronics*. Vol. 47, No. 4, pp. 932–938. U.S.A.
- [11] Andrew C. Smith, Farid Mobasser, Keyvan Hashtrudi-Zaad. 2006. “Neural-Network-Based Contact Force Observers for Haptic Applications”. *IEEE Transactions on Robotics*. Vol. 22. No. 6. U.S.A.

- [12] Min Cheol Lee, Chi Yen Kim, Bin Yao, William J. Peine, Young Eun Song. 2010. “Reaction Force Estimation of Surgical Robot Instrument Using Perturbation Observer with SMCSPO Algorithm”. IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Canada.
- [13] Sira-Ramírez, H., Feliu-Batlle, V., Beltrán-Carbajal, F., Blanco-Ortega, A. 2008. “Sigma-Delta Modulation Sliding Mode Observers for Linear Systems Subject to Locally Unstable Inputs”. IEEE 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, pp. 344–349. Ajaccio, France.
- [14] Sira-Ramírez, H., Núñez, C., Visairo, N. 2009. “Robust sigma-delta generalised proportional integral observer based control of a “buck” converter with uncertain loads”. International Journal of Control. Vol. 83, No. 8, pp. 1631-1640.
- [15] Sira-Ramírez, H., Ramírez-Neria, M., Rodríguez-Angeles, A. 2010. “On the Linear Control of Nonlinear Mechanical Systems”. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. pp. 1999–2004. Atlanta, USA.
- [16] Beltrán-Carbajal, F., Chávez-Conde, E., Silva-Navarro, G., Vázquez-González B., Favela-Contreras A. 2011. “Control of Nonlinear Active Vehicle Suspension Systems using Disturbance Observers”. Chapter of Book in “Vibration Analysis and Control-New Trends and Developments”. pp. 131-150. ISBN: 978-953-307-433-7. INTECH. Croatia.
- [17] Ramírez-Neria, M., Sira-Ramírez, H., Rodríguez-Ángeles, A., Luviano-Juárez, A. 2012. “An Active Disturbance Rejection Controller for a Parallel Robot via Generalized Proportional Integral Observers”. American Control Conference. pp. 5478-5483. Montreal, Canada.
- [18] Beltrán-Carbajal F., Chávez-Conde E., Favela-Contreras A. and R. F. Vázquez-Bautista. 2013. “Active Perturbation Rejection in Motion Control of Milling Machine Tools”. Revista Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia. No. 69. pp. 193-204. Colombia.
- [19] Wells, D. A. 1967. Lagrangian Dynamics. Schaum’s Outlines, McGraw-Hill. USA
- [20] Goldstein, H. 1987. Mecánica Clásica. Editorial Reverté. España.
- [21] Bedford, A., Fowler, W. 2008. Mecánica para Ingeniería: Dinámica. Prentice Hall. México.
- [22] Boylestad, R. L. and Nashelsky, L. 2003. Introducción al Análisis de Circuitos Eléctricos. Prentice Hall. México.
- [23] Cogdell, J. R. 2002. Fundamentos de Máquinas Eléctricas. Prentice Hall. México.
- [24] Ogata, K. 2010. Ingeniería de Control Moderna. Prentice Hall. Madrid.

- [25] Kalman, R.E., Ho, Y.C., Narendra, K.S. 1962. "Controllability of Linear Dynamic Systems", in *Contributions to Differential Equations*. Wiley Interscience Publishers, Inc. Vol. 1.
- [26] Díaz Garmendia, I. 2008. Métodos de Renderizado Multisensorial y Análisis de Estabilidad en Interfaces Hápticos. Tesis Doctoral. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Navarra. San Sebastián. España.
- [27] Luenberger, D.G. 1964. "Observing the State of a Linear System". IEEE Trans. Military Electr., MIL-8, pp. 74-80.
- [28] Fliess, M., Lévine, J., Martin, Ph. and Rouchon, P. 1993. "Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples". International Journal of Control, Vol. 61, No. 6, pp. 1327-1361.
- [29] Sira-Ramírez, H. and Agrawal, S. 2004. Differentially Flat Systems. Marcel Dekker. USA.
- [30] Colgate, J.E., Schenkel, G.G. 1997. "Passivity of a Class of Sample-Data Systems: Application to Haptic Interfaces". Journal of Robotic Systems, Vol. 14, No. 1, pp. 37-47.
- [31] Colgate, J.E., Brown, J.M. 1994. "Factors Affecting the Z-Width of a Haptic Display". In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3205-3210. Washington, D.C.
- [32] Abbott, J.J., Okamura, A.M. 2005. "Effects of Position Quantization and Sample Rate on Virtual Wall Passivity". IEEE Trans. on Robotics, Vol. 21, No. 5, pp. 952-964.

Apéndice

Apéndice A

Diagramas de simulación

A.1. Caso I: Dinámica con transmisión por contacto

En la Figura A.1 se muestran los parámetros correspondientes al modelo dinámico del dispositivo háptico correspondiente a la ec.(2.4) de la pág. 14.

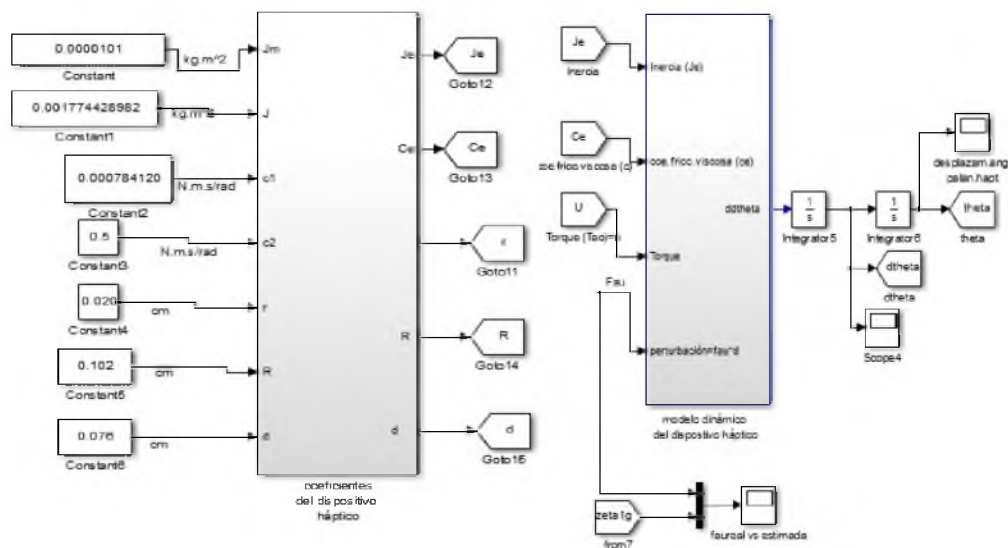


Figura A.1: Parámetros y modelo dinámico del dispositivo háptico

En la Figura A.2 y A.3 se muestran los bloques que representan la dinámica de la pared virtual.

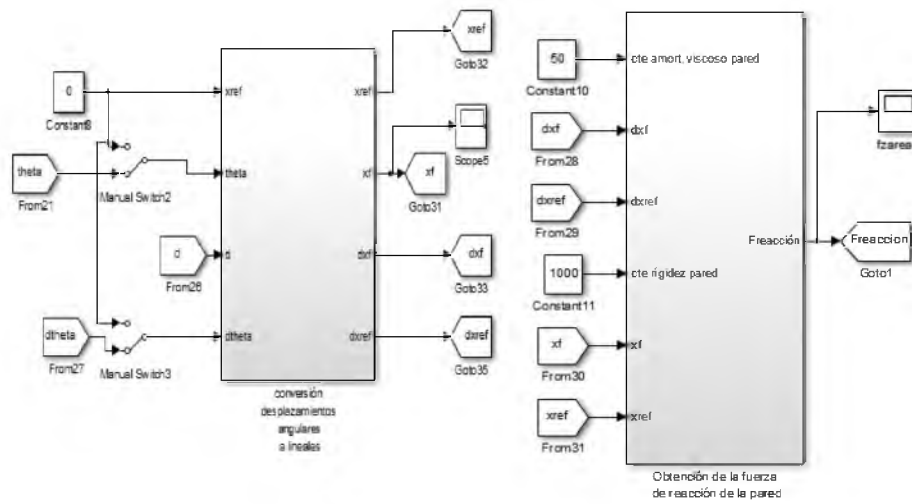


Figura A.2: Dinámica de la pared virtual

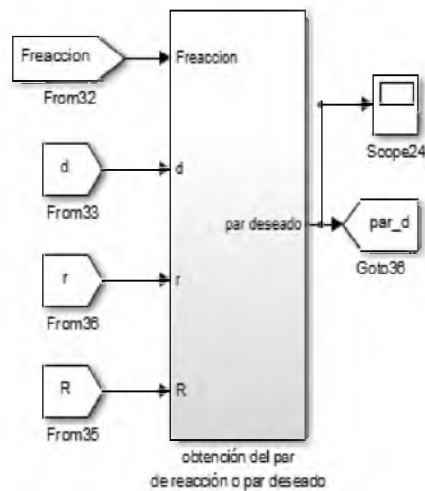


Figura A.3: Par de reacción de la pared virtual

En las Figuras A.4 y A.5 se observa la dinámica del motor eléctrico y del controlador de corriente dados por las ecs.(2.17), (2.18) y (2.19); de la pág. 26.

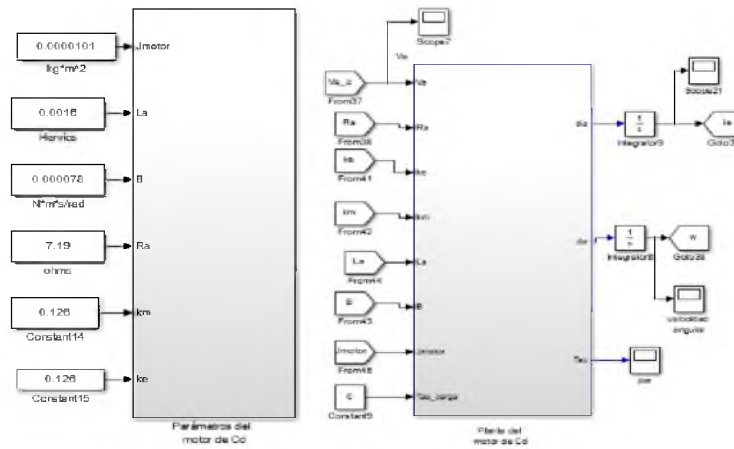


Figura A.4: Dinámica del motor eléctrico y controlador de corriente

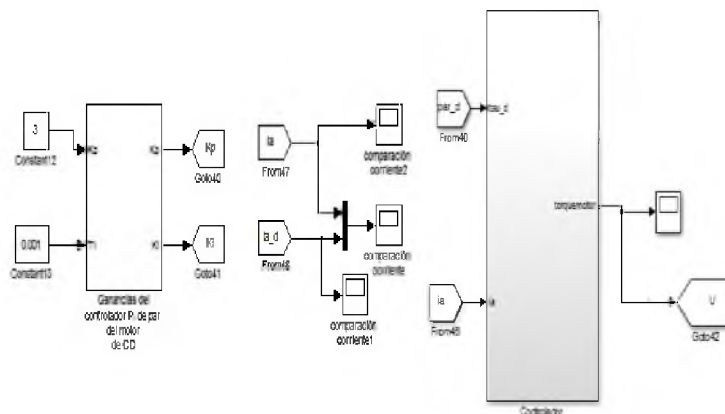


Figura A.5: Ganancias del controlador

En la Figura A.6 se muestran los bloques que representan algunos parámetros y ganancias del observador de perturbación.

El observador de perturbación que se muestra en la Figura A.7, es representado por las ecuaciones (3.11) en la pág.37.

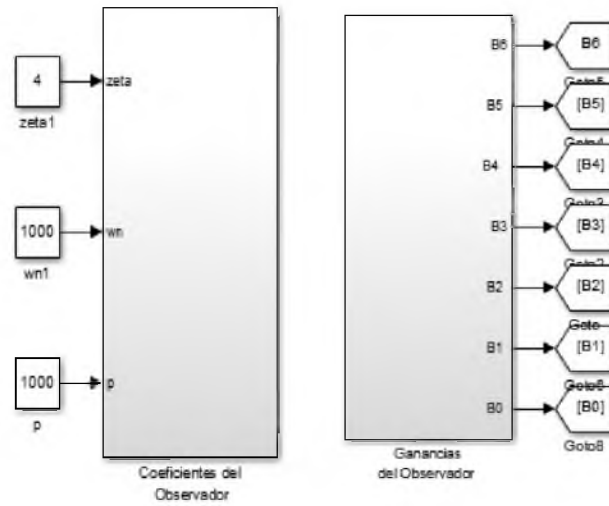


Figura A.6: Parámetros y ganancias del observador de perturbación

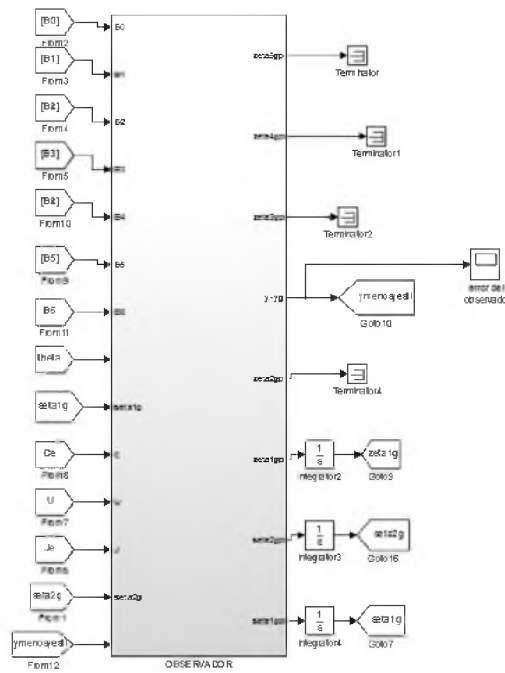


Figura A.7: Observador de perturbación

A.2. Caso II: Dinámica con transmisión por cable (modelo dinámico)

Las ecs.(2.10) y (2.11) de la pág 2.11 representan la dinámica del dispositivo háptico de la Figura A.8.

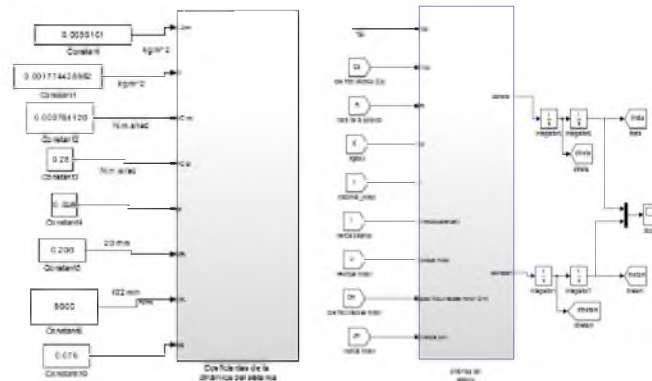


Figura A.8: Parámetros y modelo dinámico del dispositivo háptico

La ec.(3.24) de la pág.45 representan el observador de perturbación que se muestra en la Figura A.9.

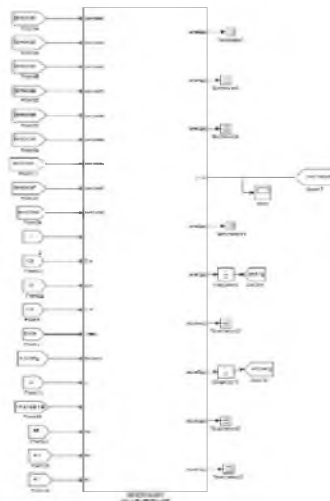


Figura A.9: Observador de perturbación

A.3. Caso II: Dinámica con transmisión por cable (modelo parametrizado)

En la Figura A.10 se muestra el modelo parametrizado del dispositivo de las ecuaciones (2.10) y (2.11) de la pág 18.

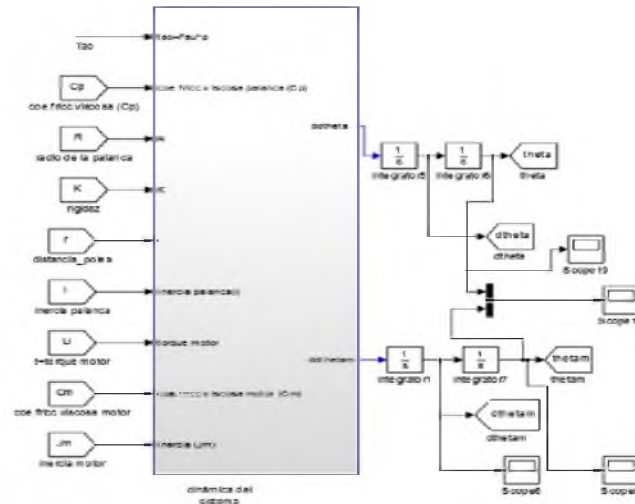


Figura A.10: Modelo dinámico del dispositivo háptico

En la Figura A.11 se muestra el observador de perturbación, el cual se diseñó a partir de la parametrización del modelo del dispositivo háptico dado por la ec.(3.22) de la pág 49; la ec.(3.31) conforman el diagrama de bloques del observador.

