



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

CAMPUS LOMA BONITA

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

**OPTIMIZACIÓN CINEMÁTICA Y SIMPLIFICACIÓN
DE LA COMPLEJIDAD DEL MODELO DINÁMICO
DE UN ROBOT PARALELO PLANAR 3RRR**

Tesis profesional para obtener el título de

INGENIERO EN MECATRÓNICA

Presenta:

C. MARCOS INFANTE JACOBO

Director de tesis:

M. en C. Esteban Chávez Conde

LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO, 2017



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
Campus Loma Bonita

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

LA PRESENTE TESIS TITULADA “OPTIMIZACIÓN CINEMÁTICA Y SIMPLIFICACIÓN DE LA COMPLEJIDAD DEL MODELO DINÁMICO DE UN ROBOT PARALELO PLANAR 3RRR”, PRESENTADA POR EL SUSTENTANTE DE LICENCIATURA C. MARCOS INFANTE JACOBO BAJO LA DIRECCIÓN DEL M.C. ESTEBAN CHÁVEZ CONDE, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITÉ EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO EN MECATRÓNICA.

M. en C. José Luis Nájera Sánchez
Jefe de la Carrera de Ingeniería en Mecatrónica

M. en C. Esteban Chávez Conde
Director de Tesis

Dr. Hiram N. García Lozano
Presidente



Dr. Álvaro Cabrera Amado
Secretario

M. en C. Esteban Chávez Conde
Vocal

Loma Bonita, Oaxaca. Abril 2017.

Proyecto de Tesis

Optimización Cinemática y Simplificación de
la Complejidad del Modelo Dinámico de un
Robot Paralelo Planar 3RRR

Título de la Tesis: Optimización Cinemática y Simplificación de la Complejidad del Modelo Dinámico de un Robot Paralelo Planar 3RRR.

Tesista: C. Marcos Infante Jacobo.

Director de Tesis: M. en C. Esteban Chávez Conde.

Asesor externo: Dr. Eusebio E. Hernández Martínez.

Asesor externo: Dr. Sergio Ivvan Valdez Peña.

Ingeniería en Mecatrónica.

Universidad del Papaloapan Campus Loma Bonita.

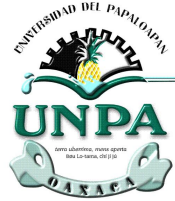
Loma Bonita, Oaxaca. México.

Abril de 2017.

Documento elaborado en Scientific WorkPlace (marca de MacKichan Software, Inc.).

MATLAB y Simulink son marcas registradas de MathWorks, Inc.

SimWise 4D es una marca registrada de Design Simulation Technologies, Inc.



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
CAMPUS LOMA BONITA

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

Optimización Cinemática y Simplificación de la Complejidad del Modelo Dinámico de un Robot Paralelo Planar 3RRR

Tesis que presenta el

C. Marcos Infante Jacobo

Para obtener el título de Licenciatura
en la especialidad de

Ingeniería en Mecatrónica

Director de Tesis:

M. en C. Esteban Chávez Conde

Asesores externos:

Dr. Eusebio E. Hernández Martínez

Dr. Sergio Ivvan Valdez Peña

Loma Bonita, Oaxaca.

Abril de 2017.

Dedicatoria

A mis Padres, Crisóforo Infante Albavera y Felicitas Jacobo Nicolás, quienes desde siempre me han brindado incondicionalmente su apoyo en todo lo que he necesitado, dentro y fuera de mi preparación académica. Porque gracias a sus ejemplos y valores, he aprendido a salir adelante sin importar que tan grande sea el obstáculo. Quiero que sientan que mis logros académicos, profesionales y personales son tanto míos como también de ustedes.

Gracias.

Agradecimientos

A la Universidad del Papaloapan Campus Loma Bonita, por haber sido mi casa durante estos 5 años, y por haberme dado la oportunidad de cursar mis estudios de educación superior.

Al M. en C. Esteban Chávez Conde, por haber aceptado ser mi director de tesis. Gracias por su confianza y por brindarme su apoyo y asesoría siempre que la necesité.

Al Dr. S. Ivvan Valdez Peña, por su apoyo y motivación para el desarrollo de esta tesis.

A los Profesores: Dr. Álvaro Cabrera Amado, Dr. José Luis Juárez Pérez y al Dr. Hiram Netzahualcóyotl García Lozano, por haber aceptado ser parte del jurado y por las sugerencias realizadas al presente trabajo de tesis.

A mis hermanas malcriadas, Mary y Xochitlina, por todos los momentos de alegría y peleas que tuvimos y que seguiremos teniendo.

A mis amigos, compañeros y profesores, por su apoyo, compañía y conocimiento compartido. ¡Pasamos grandes momentos!

Le agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, particularmente al Dr. Eusebio Eduardo Hernández Martínez director del Proyecto de Ciencia Básica SEP CONACYT CB-2011/169132: *Optimización de la estructura-control de robots paralelos basada en algoritmos poblacionales*, por la beca otorgada para la realización de este proyecto de tesis.

Resumen

Los robots o plataformas paralelas están constituidas generalmente por dos eslabones rígidos, acoplados a una base fija por un lado y por el otro al efector final, conectados en paralelo por cadenas seriales independientes llamadas brazos o piernas, generando así, cadenas cinemáticas cerradas. El estudio y optimización de robots paralelos ha sido y es, un problema de gran interés para la comunidad científica, esto debido a todas las bondades que trae su implementación a nivel industrial, desde mayor precisión, hasta una mayor robustez en comparación con los robots del tipo serial en tareas típicas de seguimiento de trayectorias o de pick & place.

En este trabajo se presenta un estudio integral de un Robot Paralelo Planar 3RRR, que comprende la descripción de su cinemática directa, cinemática inversa, cinemática diferencial, puntos singulares, espacio de trabajo y modelo dinámico.

Una primera contribución de esta tesis, es la metodología desarrollada para la optimización del espacio efectivo de trabajo del Robot Paralelo Planar 3RRR, donde se utilizaron tres familias de algoritmos evolutivos: un algoritmo genético, una estrategia evolutiva y un algoritmo de estimación de distribución; tomando en cuenta dentro de la función objetivo un cierto grado de manipulabilidad del robot dentro de todo el espacio generado, así como la optimización simultánea para un grupo de ángulos de orientación de la plataforma móvil, y la posibilidad de modificar el centroide del espacio de trabajo para incrementarlo aún más.

La segunda y principal contribución de este trabajo, es el estudio, descripción y reducción de la complejidad del modelo dinámico del Robot Paralelo Planar 3RRR, considerando el uso de dos barras esbeltas y homogéneas por cada eslabón pasivo, como una estrategia basada en el rediseño mecánico para la simplificación de las ecuaciones de movimiento. La validación del modelo dinámico reducido se realizó mediante simulación, programando las ecuaciones dinámicas simplificadas en el programa de MATLAB/Simulink y comparando su desempeño dinámico con el de un prototipo virtual implementado en el programa SimWise 4D.

Finalmente, se presentan los resultados de la validación del modelo dinámico, proporcionando guías y opiniones para mejorar los resultados obtenidos o para implementar la metodología en sistemas similares o más complejos, como un trabajo futuro.

Abstract

The robots or parallel platforms are generally formed by two rigid links, coupled to a fixed base from a side and to the end-effector by the other side, connected in parallel by independent serial chains called legs or arms, performing closed-loop kinematics chains. The study of parallel robots and its optimization, was and still is a problem of great interest to the scientific community, this is because all the benefits that came with the implementation of this kind of platforms in the industrial corporation, for example, better precision on tracking operations or stronger robots for pick and place tasks than the serial robot's configuration.

In this work, an integral studio of a 3RRR Planar Parallel Robot is performed, which includes the forward and inverse kinematic description, the Jacobian and singularity analysis, the analysis of a regular effective workspace and the study of the manipulator's dynamic model.

An initial contribution of this thesis, is the development of a methodology for the optimization process of the effective regular workspace of the 3RRR Planar Parallel Robot, where three families of evolutionary algorithms were tested: a genetic algorithm, an evolution strategy and an estimation of distribution algorithm; considering a rank of the robot manipulability inside the objective function for all the space generated, and the simultaneous optimization for a set of angular orientation of the moving platform, and also the possibility of moving the centroid of the workspace as a strategy to increase it.

The second and main contribution of this dissertation, is the study, description, and reduction of the dynamic model complexity of the 3RRR Planar Parallel Robot, taking into consideration the use of two homogeneous and slim bars for each passive link, as a mechanical redesign strategy to simplify the motion equations. The validation of the reduced dynamic model was made by simulation, programming the simplified dynamic equations in MATLAB/Simulink and making a comparison of the dynamic performance with a virtual prototype implemented in SimWise 4D simulator.

Finally, we present the results of the dynamic model validation, allowing feedback and guidelines to improve the obtained results or to implement the same methodology to similar cases or to address more complex design problems, as a future work.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	v
Abstract	VII
1. Introducción	1
1.1. Marco teórico	1
1.2. Planteamiento del problema	4
1.3. Justificación	4
1.4. Estado del arte	5
1.5. Hipótesis y predicciones	6
1.6. Objetivos	6
1.6.1. Objetivo general	6
1.6.2. Objetivos particulares	6
1.7. Organización de la tesis	6
2. Modelos Cinemáticos	7
2.1. Geometría del manipulador	7
2.2. Cinemática directa	12
2.3. Cinemática inversa	15
2.4. Simulaciones numéricas	17
2.5. Conclusiones	18
3. Cinemática Diferencial	21
3.1. Introducción	21
3.2. Obtención de la matriz Jacobiana	22
3.3. Singularidades	26
3.3.1. Singularidades de la cinemática inversa	26
3.3.2. Singularidades de la cinemática directa	26
3.3.3. Singularidades combinadas	27
3.4. Simulaciones numéricas	28

4. Diseño Cinemático Óptimo del Robot 3RRR	31
4.1. Introducción	31
4.2. Parámetros cinemáticos	32
4.2.1. Condiciones geométricas para el robot 3RRR	32
4.2.2. Límites de búsqueda para los parámetros de diseño	33
4.3. Función objetivo	33
4.3.1. Cálculo del espacio de trabajo libre de singularidades	34
4.3.2. Máximo espacio de trabajo regular	36
4.4. Métodos de optimización	37
4.4.1. Algoritmos evolutivos	38
4.5. Metodología de optimización propuesta	39
4.6. Resultados	40
4.7. Conclusiones	43
5. Modelo Dinámico	45
5.1. Introducción	45
5.2. Lagrangiano del robot	46
5.3. Funciones de restricción	49
5.4. Ecuaciones de movimiento	51
5.5. Simulaciones dinámicas	56
6. Simplificación de la Complejidad del Modelo Dinámico	59
6.1. Descripción de la estrategia de simplificación	59
6.2. Ecuaciones de movimiento	60
6.3. Simulaciones y validación del modelo	63
6.4. Conclusiones	64
7. Conclusiones y Perspectivas	69
7.1. Conclusiones generales	69
7.2. Trabajo futuro	71
Bibliografía	73
Apéndice	78
A. Constantes de la cinemática directa	79
B. Diagramas de simulación	83
B.1. SimWise 4D	83
B.2. Dinámica directa	85
B.3. Dinámica inversa	85
B.4. Jacobiano	88
C. Prototipos Virtuales	89

Índice de figuras

1.1.	(a) Robot para cirugías da Vinci (Cortesía de Intuitive Surgical, Inc.). (b) Robot doméstico Roomba 980 (Cortesía de iRobot Corp.). (c) Robot cuadrúpedo Big-Dog (Cortesía de Boston Dynamics).	1
1.2.	Tipos de robots de acuerdo a su estructura cinemática: (a) Robot Serial Fanuc M-10iA (Cortesía de Fanuc America Corp.). (b) Robot con Mecanismos Paralelogramos M-410iC/185 (Cortesía de Fanuc America Corp.). (c) Robot Paralelo tipo Delta IRB 360 (Cortesía de ABB Automation Inc.). (d) Robot Paralelo Planar 3(P)RRR (Cortesía del Institute of Mechatronic Systems, Leibniz Universität Hannover).	3
2.1.	Robot paralelo planar 3RRR	8
2.2.	Esquema del robot paralelo planar 3RRR	8
2.3.	Ángulos asociados con un brazo del robot 3RRR.	10
2.4.	Seis posibles soluciones a la cinemática directa del robot paralelo planar 3RRR para una triada de ángulos actuados dada.	15
2.5.	Ocho posibles soluciones de la cinemática inversa para una posición dada de la plataforma móvil.	17
2.6.	Diagrama a bloques de la interconexión de la cinemática inversa y directa.	18
2.7.	Resultados de la simulación numérica de los modelos cinemáticos del robot paralelo planar 3RRR con $a_i = 0.15$, $b_i = 0.2$, para $i=1, 2, 3$, $h = 0.15$, y $c = 0.5$ como parámetros de entrada. (a.1), (a.2), y (a.3) Posición angular de los eslabones actuados para cada trayectoria, dada por la cinemática inversa. (b.1), (b.2) y (b.3) Orientación de la plataforma móvil. (c.1), (c.2), y (c.3) Trayectoria desarrollada por el efector final.	19
3.1.	(a) Esquema del robot 3RRR a partir del cual se deriva la ec.(3.3), (b) Esquema del robot 3RRR a partir del cual se deriva la ec.(3.8), (c) Esquema del robot 3RRR a partir del cual se deriva la ec.(3.11).	23
3.2.	Dos posiciones singulares asociadas al Jacobiano J_q : (a) Brazo doblado sobre sí mismo y, (b) Brazo totalmente extendido.	27
3.3.	Dos posiciones singulares asociadas al Jacobiano J_x : (a) Los vectores \mathbf{b}_i se intersectan en un punto común y, (b) Todos los vectores \mathbf{b}_i son paralelos unos a otros.	27

3.4. Configuraciones singulares combinadas: (a) Arquitectura 1 y (b) Arquitectura 2.	28
3.5. Resultados de la simulación del Jacobiano del robot paralelo planar 3RRR: (a) Velocidades articulares de θ_1 , θ_2 y θ_3 dadas por el Jacobiano vs calculadas por MATLAB, (b) Diferencia entre las velocidades calculadas por el Jacobiano y las derivadas numéricamente por MATLAB, (c) Posición cartesiana del efector final dada por el Jacobiano y la posición deseada, y (d) Orientación de la plataforma móvil calculada por el Jacobiano ϕ_J y la orientación deseada ϕ_d	29
4.1. Representación gráfica de la metodología de optimización propuesta.	40
4.2. (a) Espacio de trabajo regular generado por la configuración geométrica no óptima, (b) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = -30^\circ$, (c) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = 0^\circ$, (d) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = 30^\circ$	42
4.3. Espacios generados por la geometría óptima: (a) Optimización del espacio de trabajo con el centroide fijo en el centro de la plataforma fija, (b) Optimización del espacio de trabajo con centroide optimizado.	43
4.4. (a) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = -30^\circ$, (b) Curvas de nivel del número de condición de \hat{J} con $\phi = -30^\circ$, (c) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = 0^\circ$, (d) Curvas de nivel del número de condición de \hat{J} con $\phi = 0^\circ$, (e) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = 30^\circ$, (f) Curvas de nivel del número de condición de \hat{J} con $\phi = 30^\circ$	44
5.1. Parámetros dinámicos de un brazo del robot paralelo 3RRR típico.	47
5.2. Esquemas del robot 3RRR a partir del cual se obtienen las funciones de restricción. (a) Diagrama para la función de restricción Γ_1 . (b) Diagrama para la función de restricción Γ_2 . (c) Diagrama para la función de restricción Γ_3	50
5.3. Primer estudio de la simulación dinámica del Robot 3RRR típico realizada con SimWise 4D: (a) Pares introducido en las uniones actuadas (τ_1 , τ_2 y τ_3), (b) Desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3), (c) Posición y orientación del efector final (G_x , G_y y ϕ), (d) Trayectoria dibujada en el plano cartesiano por el efector final $G(x, y)$	57
5.4. Segundo estudio de la simulación dinámica del Robot 3RRR típico realizada con SimWise 4D: (a) Pares introducidos en las uniones actuadas (τ_1 , τ_2 y τ_3), (b) Desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3), (c) Posición y orientación del efector final (G_x , G_y y ϕ), (d) Trayectoria dibujada en el plano cartesiano por el efector final $G(x, y)$	58
6.1. Robot Paralelo Planar 3RRR: Diseño mecánico propuesto.	60
6.2. Configuración de un brazo típico del robot paralelo planar 3RRR simplificado.	61

6.3.	Comparación del primer estudio de la simulación dinámica realizada con SimWise 4D y la simulación numérica del modelo simplificado del Robot 3RRR. (a) Pares introducidos en las uniones actuadas (τ_1 , τ_2 y τ_3). (b) Desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3) (c) Posición y orientación del efector final (G_x , G_y y ϕ). (d) Trayectoria dibujada en el plano cartesiano por el efector final $G(x, y)$	65
6.4.	Comparación del segundo estudio de la simulación dinámica realizada con SimWise 4D y la simulación numérica del modelo simplificado del Robot 3RRR. (a) Torque introducido en las uniones actuadas (τ_1 , τ_2 y τ_3). (b) Desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3) (c) Posición y orientación del efector final (G_x , G_y y ϕ). (d) Trayectoria dibujada en el plano cartesiano por el efector final $G(x, y)$	66
6.5.	Diferencia angular existente entre la posición de los eslabones actuados del modelo dinámico simplificado y los de la simulación de su modelo virtual. (a) Diferencia angular en θ_1 , θ_2 y θ_3 referente a la simulación mostrada en la Figura 6.3. (b) Diferencia angular en θ_1 , θ_2 y θ_3 referente a la simulación mostrada en la Figura 6.4.	67
6.6.	Simulación de la dinámica inversa del Robot 3RRR simplificado. (a) Trayectoria deseada en el plano cartesiano para el efector final $G(x, y)$. (b) Posición y orientación del efector final (G_x , G_y y ϕ). (c) Desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3). (d) Pares desarrollados por los actuadores (τ_1 , τ_2 y τ_3).	68
B.1.	Diagrama de flujo de las simulaciones dinámicas con SimWise 4D Motion	84
B.2.	Entorno de trabajo del software SimWise 4D.	84
B.3.	Diagrama a bloques en Simulink de la simulación dinámica del robot paralelo planar 3RRR	85
B.4.	Bloques de Simulink para la simulación del modelo dinámico directo del robot 3RRR simplificado. (a) Multiplicadores de Lagrange (λ_1 , λ_2 y λ_3). (b) Dinámica Directa (obtención de θ_1 , θ_2 y θ_3) (c) Cinemática Directa (obtención de G_x , G_y y ϕ).	86
B.5.	Bloques de Simulink para la simulación del modelo dinámico inverso del robot 3RRR simplificado. (a) Trayectoria propuesta dependiente del tiempo (G_x , G_y y ϕ). (b) Cinemática Inversa (obtención de θ_1 , θ_2 y θ_3). (c) Multiplicadores de Lagrange (λ_1 , λ_2 y λ_3). (d) Dinámica Inversa (obtención de τ_1 , τ_2 y τ_3).	87
B.6.	Diagrama a bloques de Simulink del Jacobiano del robot paralelo planar 3RRR.	88
C.1.	Prototipo virtual de un robot paralelo planar 3RRR modelo clásico.	89
C.2.	Prototipo virtual de un robot paralelo planar 3RRR con barras esbeltas y homogéneas como eslabones pasivos.	90

Índice de tablas

4.1. Límites inferior y superior de búsqueda para los parámetros de diseño del robot 3RRR.	33
4.2. Parámetros óptimos de diseño $\{a, b, e, c\}$ y valor óptimo para el espacio regular de trabajo del robot 3RRR.	41
4.3. Parámetros óptimos de diseño $\{a, b, e, c, W_x, W_y\}$ y valor óptimo para el espacio regular del robot 3RRR.	41
5.1. Ecuaciones que describen los perfiles de par implementados para el primer y segundo estudio de la respuesta en lazo abierto del robot 3RRR.	56
6.1. Trayectoria de prueba descrita en términos de posición y orientación del efector final para el robot 3RRR.	64
C.1. Parámetros de diseño del robot paralelo planar 3RRR clásico.	89
C.2. Parámetros de diseño del robot paralelo planar 3RRR con barras esbeltas y homogéneas como eslabones pasivos.	90

Capítulo 1

Introducción

1.1. Marco teórico

Los robots¹ y plataformas robóticas están cada vez más inmersas en nuestra vida diaria y afectan en gran parte nuestra forma de vivir, ya sea de manera directa o indirecta, siempre existe un contacto con ellos. De modo que desde robots industriales dedicados al ensamblaje de automóviles, robots soldadores de tuberías, robots dedicados para asistencia en cirugías (ver Fig. 1.1(a)), robots que limpian el piso de la casa (ver Fig. 1.1(b)), robots diseñados para aplicaciones militares (ver Fig. 1.1(c)), o incluso, plataformas robóticas para simulación en videojuegos; todas estas aplicaciones hacen de nuestro día a día, cada vez mas fácil y seguro.

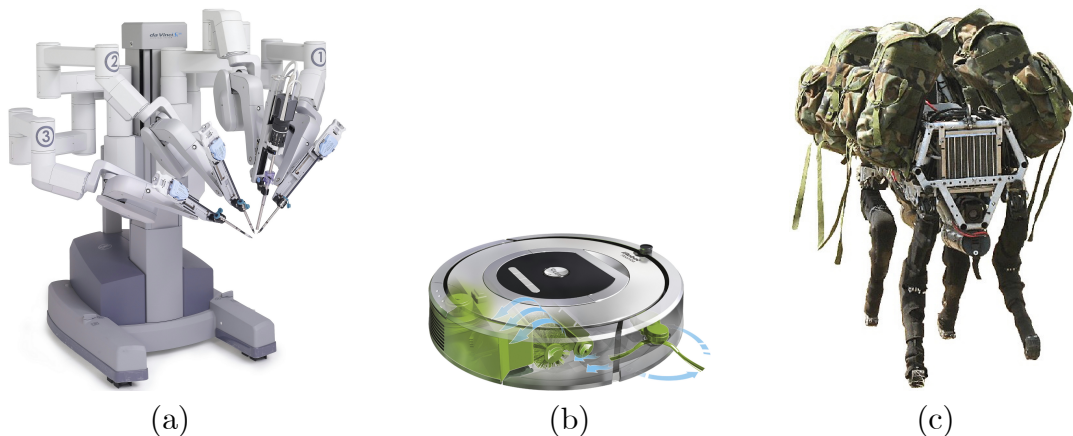


Figura 1.1: (a) Robot para cirugías da Vinci (Cortesía de Intuitive Surgical, Inc.). (b) Robot doméstico Roomba 980 (Cortesía de iRobot Corp.). (c) Robot cuadrúpedo Big-Dog (Cortesía de Boston Dynamics).

¹La *Robotic Industries Association* (por sus siglas en inglés, RIA) define a un **robot industrial** como un manipulador multifuncional reprogramable, capaz de mover materias, piezas, herramientas o dispositivos especiales según trayectorias variables, programadas para realizar tareas diversas [17].

Algunos factores que pueden explicar el rápido crecimiento en el desarrollo y uso de robots en las últimas dos décadas, es debido a la revolución computacional y electrónica, la cual trajo consigo procesadores mas rápidos, eficientes y pequeños, capaces de controlar en tiempo real operaciones que antes eran imposibles.

Sin embargo, no importa que tanto esfuerzo se dedique para diseñar mejores sistemas de control, algoritmos o el hecho de poseer procesadores potentes, sensores muy precisos y motores capaces de desarrollar grandes pares; al final, el rendimiento del robot recae en gran medida en su estructura mecánica, la cual posee masa, inercia, fricción y rigidez. Esta delimita el espacio de trabajo², la relación entre las variables de entrada y salida del sistema de control, y la interacción con el ambiente exterior. Es por esto que el estudio de robots y de nuevas estructuras es tan importante.

Actualmente en la industria, los robots mas utilizados presentan una arquitectura serial parecida a un brazo humano, esto debido a su gran espacio de trabajo y a su relativamente fácil controlabilidad. Sin embargo, en estos mecanismos cada unión debe ser actuada para poder controlar el efector final; y cuando se requieren realizar tareas a altas velocidades o aceleraciones, o cuando es necesario mover una gran cantidad de masa, estos robots se ven limitados por sus características físicas. La comunidad de investigadores en el campo de la robótica consideraron la posibilidad de desarrollar robots con diferentes estructuras cinemáticas³. Así, algunos de los problemas en los mecanismos seriales han sido resueltos mecánicamente mediante la distribución de cargas en un conjunto de eslabones, i.e. mediante el anclaje del efector final a tierra con un grupo de cadenas cinemáticas⁴, donde cada una soporte solo una fracción de la carga total; logrando así un mejor control sobre la tarea específica. Es decir, usar cadenas cinemáticas cerradas con dependencia en las uniones, y con esto controlar la estructura completa mediante la adecuada colocación de actuadores. Es así como surgen los robots paralelos (*ver* [4]), que presentan ciertas ventajas sobre el uso único y exclusivo de robots seriales.

Los robots pueden ser clasificados de acuerdo a varios criterios, tales como sus *grados de libertad*, su *estructura cinemática*, *tecnología de accionamiento*, *geometría del espacio de trabajo* y *características de movimiento* (Lung-Wen Tsai, en [1]). De acuerdo a su estructura cinemática, un robot serial es llamado así, si su estructura cinemática toma la forma de una cadena cinemática abierta (*ver* Figura 1.2(a)); por otro lado, un manipulador paralelo lo es, si está constituido por una o varias cadenas cinemáticas cerradas (*ver* Figura 1.2(c)). También se pueden encontrar manipuladores híbridos, los cuales consisten de ambas cadenas, abiertas y cerradas, como es el caso de algunos robots para aplicaciones de paletizado que

²El **espacio de trabajo** de un manipulador es el volumen total alcanzado por el efector final cuando el manipulador ejecuta todos los movimientos posibles. El espacio de trabajo está limitado por la geometría del manipulador, así como por las limitaciones mecánicas de las uniones [17].

³La **estructura cinemática** se refiere a la forma mecánica del robot, de acuerdo al tipo de cadena cinemática, abierta y/o cerrada [1].

⁴Cuando varios eslabones están conectados de forma móvil por uniones, se dice que forman una **cadena cinemática**. Los eslabones que contienen sólo dos pares de conexiones de elementos se denominan *eslabones binarios*; Los que tienen tres se llaman *eslabones ternarios*, y así sucesivamente. Si cada eslabón de la cadena está conectado a al menos otros dos eslabones, la cadena forma uno o más lazos cerrados y se denomina **cadena cinemática cerrada**; si no, la cadena se denomina **abierta** [14].



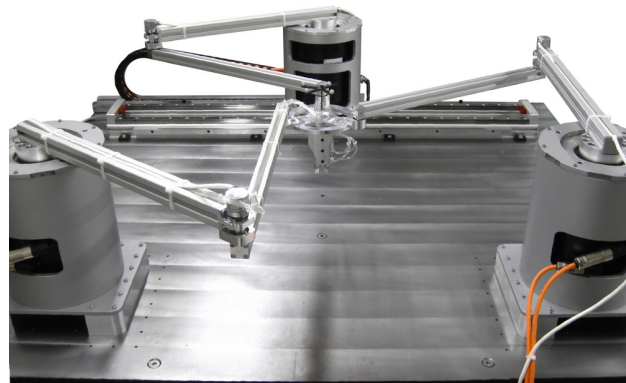
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.2: Tipos de robots de acuerdo a su estructura cinemática: (a) Robot Serial Fanuc M-10iA (Cortesía de Fanuc America Corp.). (b) Robot con Mecanismos Paralelogramos M-410iC/185 (Cortesía de Fanuc America Corp.). (c) Robot Paralelo tipo Delta IRB 360 (Cortesía de ABB Automation Inc.). (d) Robot Paralelo Planar 3(P)RRR (Cortesía del Institute of Mechatronic Systems, Leibniz Universität Hannover).

hacen uso de mecanismos paralelogramos (ver Figura 1.2(b)). Entre los robots paralelos que todavía se encuentran en desarrollo e investigación, y que no se han comercializado aún, está el robot planar 3RRR (ver Figura 1.2(d)).

1.2. Planteamiento del problema

El proceso de diseño de la estructura mecánica de los robots paralelos es muy compleja, debido a las características físicas propias de las cadenas cinemáticas cerradas (paralelas), en comparación a las cadenas cinemáticas abiertas (seriales). Alcanzar un mayor espacio de trabajo libre de singularidades, llevando a cabo el proceso de diseño tradicional, resulta ser inadecuado. Debido a que intervienen de manera concurrente diversas variables de diseño, restricciones y objetivos que debe cumplir el mecanismo⁵. Se requiere de técnicas y métodos que posean una naturaleza concurrente en su aplicación al diseño cinemático del robot paralelo planar 3RRR. En este mismo sentido, a primera vista resulta ser complejo el modelo dinámico de los robots paralelos, debido a las cadenas cinemáticas seriales que se unen en la plataforma móvil. En esta complejidad están incluidas las fuerzas de Coriolis y centrífugas, y la energía potencial debido al peso de los eslabones, que son dinámicas no lineales incrustadas en la estructura del mecanismo. Se requiere emplear estrategias que ayuden a eliminar la mayor parte de éstas dinámicas no lineales, con el fin de lograr un modelo dinámico menos complejo, que se aproxime a la dinámica real del robot paralelo planar 3RRR.

1.3. Justificación

El estudio de los robots paralelos se ve incrementado en dificultad debido a la existencia de múltiples cadenas cerradas en su configuración, las cuales a su vez, poseen eslabones o uniones pasivas que introducen errores geométricos (singularidades) y deformaciones. La estructura de los robots industriales está basada en mecanismos tanto seriales como paralelos, que permiten determinada movilidad y repetibilidad con cierta precisión. Es común que el sistema de control de un robot industrial incluya controladores clásicos del tipo Proporcional-Integral-Derivativo, con algún tipo de compensación de gravedad. Esto debido a la simplicidad que presenta el algoritmo para su implementación práctica, principalmente en costos computacionales. Sin embargo, el desempeño del controlador de movimiento para el seguimiento de trayectorias puede mejorarse si se considera parte de la dinámica mecánica del robot industrial. Si el modelo dinámico del robot es complejo, no sería conveniente debido a los costos computacionales que se generarían, pero si esa complejidad puede reducirse vía el diseño mecánico del robot, sería conveniente y viable su implementación práctica. Este tipo de plataforma paralela puede ser empleada donde no hay mucho espacio vertical sino horizontal, resultando conveniente este tipo de estructura. Algunas aplicaciones que pueden ser consideradas son, por ejemplo: como dispositivos hápticos, en rehabilitación física de extremidades superiores y en aplicaciones industriales de ensamblaje o pick & place.

⁵Un **mecanismo** es un conjunto de cuerpos resistentes, conectados por uniones móviles, para formar una cadena cinemática cerrada con un eslabón fijo y con el propósito de transformar el movimiento [14].

1.4. Estado del arte

En años recientes, los mecanismos paralelos han atraído cada vez más la atención de la comunidad científica e industrial. Es bien conocido que comparados con los mecanismos seriales tradicionales, los mecanismos paralelos tienen ventajas potenciales en precisión, velocidad y rigidez. Muchas arquitecturas de robots usando mecanismos paralelos han sido propuestas y analizadas. Sin embargo, en la práctica se observa una diferencia significativa entre lo esperado y el rendimiento real, esto, debido a las uniones pasivas que introducen errores geométricos y deformaciones. Además, muchas de las estructuras existentes poseen un espacio de trabajo limitado, el cual, muchas veces produce un mal desempeño de rigidez y precisión cerca de las vecindades de las singularidades, que pueden aparecer en tales mecanismos.

En nuestro caso, el robot paralelo planar 3RRR ha recibido atención por diversos investigadores que han analizado su cinemática y dinámica empleando diferentes metodologías, así como su desempeño y o controlabilidad en el espacio de trabajo. Por ejemplo, Gosselin y Ángeles en [2], presentan resultados del diseño cinemático óptimo del robot paralelo planar 3RRR usando algunos criterios de diseño como maximizar el espacio de trabajo, la simetría, entre otros. Merlet en [5], presenta la solución de la cinemática directa de diversas configuraciones de robots paralelos planares, con uniones tanto de revoluta como prismáticos, reduciendo a tres cadenas básicas dichas configuraciones. También, Staicu en [6], presenta la cinemática del robot paralelo planar 3RRR usando relaciones de matrices recursivas. Oetomo *et al.*, en [7], presentan la solución de la cinemática directa del caso simplificado de un robot paralelo planar 3RRR, haciendo posible el desacoplo del polinomio resultante en dos ecuaciones cuadráticas.

Por otro lado, Staicu y Stroe en [8], realizan un estudio comparativo de la dinámica del robot paralelo planar 3RRR, obtenida por los métodos del trabajo virtual y las ecuaciones de Lagrange. Zhang y Zhang en [9], presentan un análisis de la cinemática y dinámica del robot paralelo planar 3RRR con diferentes cargas y trayectorias de movimiento, haciendo énfasis en la reducción de la potencia de los actuadores y mínimo consumo de energía, como criterios para un futuro diseño óptimo del mecanismo. Arakelian y Smith en [10], realizan el diseño de un robot paralelo planar 3RRR libre de reacciones en la base fija durante el movimiento de la plataforma, mediante el balanceo dinámico con volantes de inercia. En otro trabajo, Arakelian *et al.*, en [11], presentan el incremento de zonas libres de singularidad para el robot paralelo planar 3RRR, empleando mecanismos de estructura variable, es decir, mecanismos en los cuales sus parámetros pueden ser alterados (esto permite cambiar el eslabón de entrada en el momento indicado). Desde otra perspectiva, Arakelian *et al.*, en [12], presentan un balanceo de fuerza óptimo para el robot paralelo planar 3RRR, considerando un sistema de contrapesos adaptable (donde los contrapesos pueden ser posicionados según sea conveniente). Desde un enfoque de control de movimiento, Zubizarreta *et al.*, en [13], presentan un modelo dinámico compacto de un robot paralelo planar 3RRR para propósitos de reducir el error de control, mediante el uso de sensores en las uniones pasivas.

1.5. Hipótesis y predicciones

El modelo dinámico del robot paralelo planar puede ser tratado de forma similar que en algunos mecanismos paralelos altamente estudiados, como es el caso del robot tipo Delta o el manipulador de Maryland; donde, reduciendo la masa de los eslabones pasivos y moviendo sus centros de masa, puede reducirse la complejidad del modelo dinámico. Además, se considera también que una adecuada selección de parámetros geométricos, puede mejorar el espacio efectivo de trabajo del mecanismo, así como asegurar cierta manipulabilidad en sus movimientos.

1.6. Objetivos

1.6.1. Objetivo general

El objetivo principal de esta tesis es analizar la cinemática y la dinámica de un robot paralelo planar tipo 3RRR para simplificar la complejidad del modelo dinámico mediante el uso de barras esbeltas, y optimizar la geometría del mecanismo de manera que aumente su espacio de trabajo.

1.6.2. Objetivos particulares

- Analizar la cinemática directa, inversa y diferencial del robot paralelo.
- Optimizar la geometría del robot paralelo para maximizar su espacio de trabajo.
- Analizar la dinámica del robot paralelo 3RRR típico.
- Simplificar la complejidad del modelo dinámico del robot paralelo mediante el uso de barras esbeltas.

1.7. Organización de la tesis

El contenido del presente trabajo de tesis está organizado de la siguiente forma: en el Capítulo 2 se presenta el estudio y desarrollo de los modelos cinemáticos directo e inverso del robot 3RRR. En el Capítulo 3 se presenta la obtención de la matriz Jacobiana del robot 3RRR, y se realiza un análisis de configuraciones y posiciones singulares de éste. En el Capítulo 4 se introduce una metodología para la maximización del espacio de trabajo del robot 3RRR utilizando algoritmos evolutivos; además se presenta también el uso de un método para la homogenización de la matriz Jacobiana obtenida en el Capítulo anterior. En el Capítulo 5 se realiza el estudio del modelo dinámico del robot paralelo planar 3RRR en su configuración típica, haciendo uso del método de formulación Lagrangiana. En el Capítulo 6 se propone una metodología para reducir la complejidad del modelo dinámico del robot 3RRR, y se presentan resultados de simulación de la validación de dicho modelo. Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones generales y trabajos futuros.

Capítulo 2

Modelos Cinemáticos

En este Capítulo se presenta la configuración geométrica del robot paralelo planar 3RRR típico y sus modelos cinemáticos, de acuerdo a [1]. La cinemática lleva por objetivo el estudio del movimiento del efector final a partir de la geometría de la plataforma, sin tomar en cuenta las fuerzas o pares necesarios para generar dicho movimiento en el mecanismo. El estudio de la cinemática de movimiento del robot 3RRR se divide en dos partes: la *cinemática inversa*, es decir, la posición de los ejes actuados dada una posición conocida del efector final, y la *cinemática directa*, donde a partir de las posturas conocidas de los eslabones actuados es posible definir la posición del efector final.

2.1. Geometría del manipulador

El manipulador paralelo planar 3RRR de estudio se muestra en la Figura 2.1. Está compuesto por seis eslabones binarios ($E1$ al $E6$) con uniones del tipo revoluta (1 al 9), anclados entre sí a la base fija por un extremo, y por el otro a la plataforma móvil (eslabón ternario). De estos eslabones binarios, la mitad son actuados ($E1$, $E3$ y $E5$, por las uniones activas 1, 4 y 7) y la otra mitad son pasivos ($E2$, $E4$ y $E6$). Las uniones pasivas del mecanismo son la 2, 3, 5, 6, 8 y 9. La plataforma móvil está sujeta a la base fija mediante tres brazos (piernas o miembros) idénticos ($E1$ con $E2$, $E3$ con $E4$, $E5$ con $E6$), los cuales constan de un eslabón actuado y uno pasivo. Todos los eslabones del mecanismo se consideran como cuerpos rígidos.

A simple vista se puede observar que dicho mecanismo presenta tres grados de libertad, dos traslacionales en el plano horizontal y uno de rotación en el mismo plano. Esto se comprueba con el criterio de Grüebler-Kutzbach (*ver* en [1], [14]) de acuerdo a la ec.(2.1), la cual calcula los grados de libertad (GDL) del mecanismo,

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_i f_i, \quad (2.1)$$

donde, λ son los grados de libertad del espacio en el cual trabajará el mecanismo; n es el número de eslabones, incluyendo la base fija y la móvil; j es el número de uniones, asumiendo

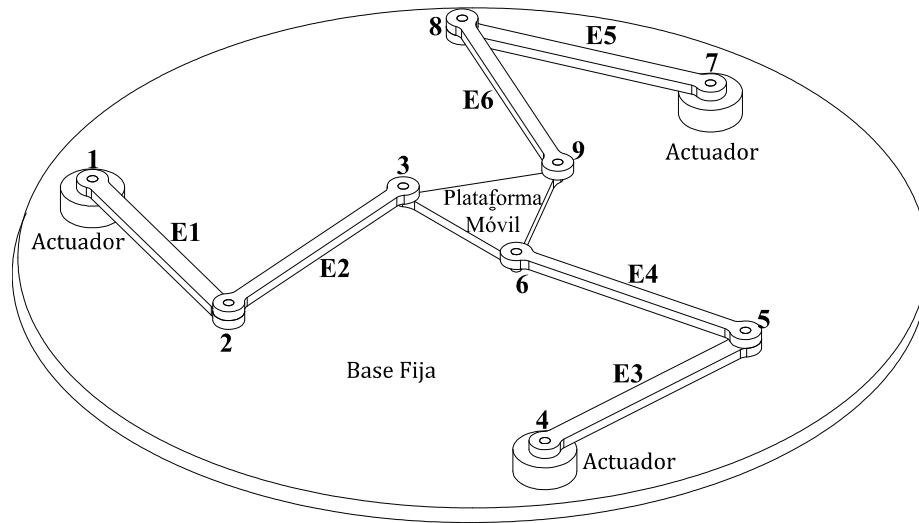


Figura 2.1: Robot paralelo planar 3RRR

que todas las uniones son binarias; f_i son los grados de movimiento permitido por la i -ésima unión. Así que, los grados de libertad del robot paralelo planar 3RRR, son:

$$F = 3(8 - 9 - 1) + 9 = 3.$$

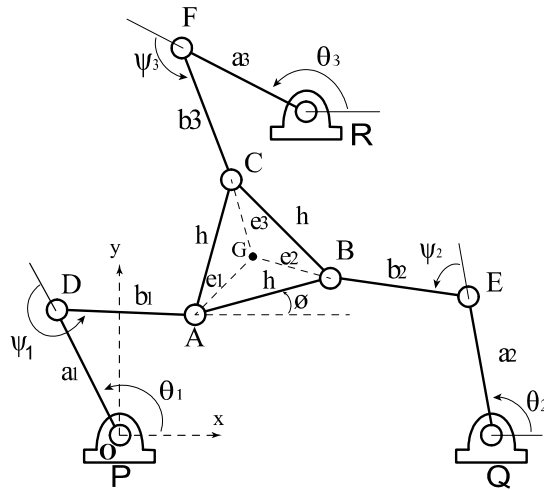


Figura 2.2: Esquema del robot paralelo planar 3RRR

De acuerdo a la Figura 2.2, los eslabones actuados están etiquetados como: a_1 , a_2 y a_3 ; y los eslabones pasivos por b_1 , b_2 y b_3 . Toda la estructura del manipulador, es decir, los eslabones actuados, eslabones pasivos y la plataforma móvil están conectados mediante

uniones del tipo revoluta, cuyos ejes de giro son paralelos entre sí. Las uniones activas (actuadores) se encuentran ubicadas en los puntos P , Q y R , y las uniones entre los eslabones actuados con los pasivos indicados como D , E y F , son las uniones pasivas. Los vértices de la plataforma móvil están indicados como A , B y C .

El marco de referencia cartesiano XY se encuentra en el punto P , siendo allí la ubicación del origen O . El eje coordenado X se encuentra a lo largo de la dirección del vector \overline{PQ} , y el eje coordenado Y es perpendicular a \overline{PQ} . Se asume que la base fija PQR y la plataforma móvil ABC , forman triángulos equiláteros entre sus uniones (i.e., $PQ = QR = RP = c$ y $AB = BC = CA = h$).

La localización del efector final o punto central del robot G , puede ser descrita en términos de la posición del punto A y la orientación del ángulo ϕ , como se muestra en la ec.(2.2).

$$\begin{aligned} G_x &= x_A + \frac{h}{\sqrt{3}} \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right), \\ G_y &= y_A + \frac{h}{\sqrt{3}} \sin\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

En este entendido, las posiciones de los puntos B y C pueden ser descritas en términos de A y ϕ , como se expresa a continuación:

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + h \cos(\phi), \\ y_B &= y_A + h \sin(\phi), \end{aligned} \quad (2.3)$$

y

$$\begin{aligned} x_C &= x_A + h \cos\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right), \\ y_C &= y_A + h \sin\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

A partir de la geometría indicada en la Figura 2.3 para un brazo del robot, se puede escribir una ecuación de cerradura para el punto A , de la forma siguiente:

$$\overline{OA} = \overline{OP} + \overline{PD} + \overline{DA}. \quad (2.5)$$

Expresando esta ecuación respecto a los ejes coordenados del marco de referencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_A &= x_P + a_1 \cos(\theta_1) + b_1 \cos(\psi_1 + \theta_1), \\ y_A &= y_P + a_1 \sin(\theta_1) + b_1 \sin(\psi_1 + \theta_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dado que el punto P está localizado en el origen O , las coordenadas $x_P = y_P = 0$.

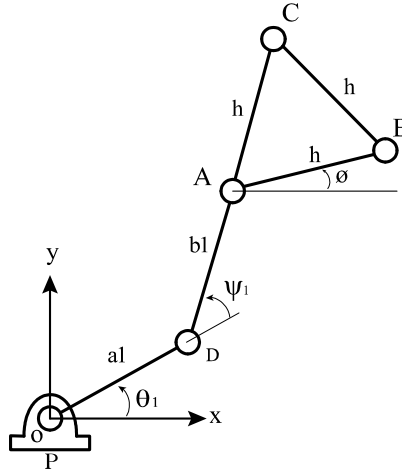


Figura 2.3: Ángulos asociados con un brazo del robot 3RRR.

A partir de que ψ_1 es un ángulo de una unión pasiva, el cual es desconocido, debe ser eliminado de la ec.(2.6). Para este propósito, estratégicamente se reescriben las ecuaciones en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_A - a_1 \cos(\theta_1) &= b_1 \cos(\psi_1 + \theta_1), \\ y_A - a_1 \sin(\theta_1) &= b_1 \sin(\psi_1 + \theta_1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sumando los miembros al cuadrado, de ambos lados de las dos ecuaciones, da como resultado:

$$x_A^2 + y_A^2 + a_1^2 - b_1^2 - 2a_1x_A \cos \theta_1 - 2a_1y_A \sin \theta_1 = 0. \quad (2.8)$$

Siendo la ec.(2.8), la ecuación de cerradura que representa a la primera de las tres cadenas cinemáticas (brazos) del robot 3RRR. De manera similar se realiza para los dos brazos restantes.

Para el segundo brazo (ver Figura 2.2), la ecuación de cerradura está dada por:

$$\overline{OB} = \overline{OQ} + \overline{QE} + \overline{EB}. \quad (2.9)$$

Expresando la ecuación de cerradura, ec.(2.9), respecto a las coordenadas del marco de referencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_B &= x_Q + a_2 \cos(\theta_2) + b_2 \cos(\psi_2 + \theta_2), \\ y_B &= y_Q + a_2 \sin(\theta_2) + b_2 \sin(\psi_2 + \theta_2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Despejando el término que contiene al ángulo pasivo ψ_2 desconocido, de la ec.(2.10), se tiene:

$$\begin{aligned} x_B - x_Q - a_2 \cos(\theta_2) &= b_2 \cos(\psi_2 + \theta_2), \\ y_B - y_Q - a_2 \sin(\theta_2) &= b_2 \sin(\psi_2 + \theta_2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior, y sumarlas, se obtiene:

$$\begin{aligned} x_B^2 + y_B^2 + x_Q^2 + y_Q^2 + a_2^2 - b_2^2 - 2x_Bx_Q - 2y_By_Q - 2x_Ba_2 \cos \theta_2 \\ - 2y_Ba_2 \sin \theta_2 + 2x_Qa_2 \cos \theta_2 + 2y_Qa_2 \sin \theta_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

y sustituyendo las coordenadas x_B y y_B (dadas por la ec.(2.3), en la ec.(2.12)), se obtiene la ecuación de cerradura para el segundo brazo del robot:

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 - 2x_Ax_Q - 2y_Ay_Q + x_Q^2 + y_Q^2 + h^2 + a_2^2 - b_2^2 + 2x_Ah \cos \phi \\ + 2y_Ah \sin \phi - 2x_Aa_2 \cos \theta_2 - 2y_Aa_2 \sin \theta_2 - 2a_2h \cos \phi \cos \theta_2 - 2x_Qh \cos \phi \\ - 2y_Qh \sin \phi + 2x_Qa_2 \cos \theta_2 + 2y_Qa_2 \sin \theta_2 - 2a_2h \sin \phi \sin \theta_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el tercer brazo (ver Figura 2.2), la ecuación de cerradura está dada por:

$$\overline{OC} = \overline{OR} + \overline{RF} + \overline{FC}. \quad (2.14)$$

Expresando la ecuación de cerradura anterior, la ec.(2.14), respecto a las coordenadas del marco de referencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_C &= x_R + a_3 \cos(\theta_3) + b_3 \cos(\psi_3 + \theta_3) \\ y_C &= y_R + a_3 \sin(\theta_3) + b_3 \sin(\psi_3 + \theta_3) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Así también, despejando el término que contiene al ángulo pasivo ψ_3 de la ec.(2.15), se tiene:

$$\begin{aligned} x_C - x_R - a_3 \cos(\theta_3) &= b_3 \cos(\psi_3 + \theta_3), \\ y_C - y_R - a_3 \sin(\theta_3) &= b_3 \sin(\psi_3 + \theta_3). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Y elevando al cuadrado los miembros de cada ecuación, y sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} x_C^2 + y_C^2 + x_R^2 + y_R^2 + a_3^2 - b_3^2 - 2x_Cx_R - 2y_Cy_R - 2x_Ca_3 \cos \theta_3 \\ - 2y_Ca_3 \sin \theta_3 + 2x_Ra_3 \cos \theta_3 + 2y_Ra_3 \sin \theta_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Al sustituir las coordenadas x_C y y_C (de la ec.(2.4) en la ec.(2.17)), se obtiene la ecuación de cerradura para el tercer brazo del robot:

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 - 2x_Ax_R - 2y_Ay_R + x_R^2 + y_R^2 + h^2 + a_3^2 - b_3^2 + 2x_Ah \cos(\phi + \frac{\pi}{3}) \\ + 2y_Ah \sin(\phi + \frac{\pi}{3}) - 2x_Aa_3 \cos \theta_3 - 2y_Aa_3 \sin \theta_3 - 2a_3h \cos(\phi + \frac{\pi}{3}) \cos \theta_3 - 2x_Rh \cos(\phi + \frac{\pi}{3}) \\ - 2y_Rh \sin(\phi + \frac{\pi}{3}) + 2x_Ra_3 \cos \theta_3 + 2y_Ra_3 \sin \theta_3 - 2a_3h \sin(\phi + \frac{\pi}{3}) \sin \theta_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Estas tres ecuaciones de cerradura, dadas por las ecs.(2.8), (2.13) y (2.18), serán útiles para la obtención de los modelos cinemáticos del robot paralelo planar 3RRR. A pesar

de que el método de Denavit-Hartenberg (*ver* [17]) es muy general para la obtención de modelos cinemáticos en robots seriales, la aplicación de este método a plataformas paralelas es complicado, debido a la existencia de múltiples cadenas cerradas. Por tanto, se ha decidido emplear el método geométrico.

2.2. Cinemática directa

Como se mencionó anteriormente, en el estudio de la cinemática directa, a partir del conocimiento de las variables articulares actuadas θ_1 , θ_2 , y θ_3 , se calculan la posición (x_A, y_A) y la orientación de la plataforma móvil dado por el ángulo ϕ . Esto se puede lograr mediante la eliminación de x_A y y_A , de las *tres* ecuaciones principales de la geometría del robot, las ecs.(2.8), (2.13) y (2.18). Para esto, se reescriben estas ecuaciones de la siguiente forma:

$$x_A^2 + y_A^2 + e_{11}x_A + e_{12}y_A + e_{13} = 0, \quad (2.19)$$

$$x_A^2 + y_A^2 + e_{21}x_A + e_{22}y_A + e_{23} = 0, \quad (2.20)$$

$$x_A^2 + y_A^2 + e_{31}x_A + e_{32}y_A + e_{33} = 0, \quad (2.21)$$

donde,

$$e_{11} = -2a_1 \cos \theta_1,$$

$$e_{12} = -2a_1 \sin \theta_1,$$

$$e_{13} = a_1^2 - b_1^2,$$

$$e_{21} = -2x_Q + 2h \cos \phi - a_2 \cos \theta_2,$$

$$e_{22} = -2y_Q + 2h \sin \phi - a_2 \sin \theta_2,$$

$$e_{23} = x_Q^2 + y_Q^2 + h^2 + a_2^2 - b_2^2 - 2a_2h \cos \phi \cos \theta_2 - 2a_2h \sin \phi \sin \theta_2 \\ - 2x_Qh \cos \phi - 2y_Qh \sin \phi + 2x_Qa_2 \cos \theta_2 + 2y_Qa_2 \sin \theta_2,$$

$$e_{31} = -2x_R + 2h \cos(\phi + \frac{\pi}{3}) - a_3 \cos \theta_3,$$

$$e_{32} = -2y_R + 2h \sin(\phi + \frac{\pi}{3}) - a_3 \sin \theta_3,$$

$$e_{33} = x_R^2 + y_R^2 + h^2 + a_3^2 - b_3^2 - 2a_3h \cos(\phi + \frac{\pi}{3}) \cos \theta_3 - 2a_3h \sin(\phi + \frac{\pi}{3}) \sin \theta_3 \\ - 2x_Rh \cos(\phi + \frac{\pi}{3}) - 2y_Rh \sin(\phi + \frac{\pi}{3}) + 2x_Ra_3 \cos \theta_3 + 2y_Ra_3 \sin \theta_3.$$

Es importante notar que e_{11} , e_{12} y e_{13} son constantes, mientras que e_{21} , e_{22} , e_{23} , e_{31} , e_{32} y e_{33} son funciones lineales de $\sin \phi$ y $\cos \phi$.

Las ecs.(2.19), (2.20) y (2.21) forman un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas: x_A , y_A y ϕ . Este sistema de ecuaciones puede simplificarse, realizando algunas operaciones.

Restando la ec.(2.20) de la ec.(2.19), resulta:

$$(e_{11} - e_{21})x_A + (e_{12} - e_{22})y_A + (e_{13} - e_{23}) = 0. \quad (2.22)$$

Así también, restando la ec.(2.21) de la ec.(2.19), resulta:

$$(e_{11} - e_{31})x_A + (e_{12} - e_{32})y_A + (e_{13} - e_{33}) = 0. \quad (2.23)$$

Si se definen nuevas variables, tal que,

$$\begin{aligned} e'_{11} &= e_{11} - e_{21}, & e'_{21} &= e_{11} - e_{31}, \\ e'_{12} &= e_{12} - e_{22}, & e'_{22} &= e_{12} - e_{32}, \\ e'_{13} &= e_{13} - e_{23}, & e'_{23} &= e_{13} - e_{33}, \end{aligned}$$

es posible reescribir las ecs.(2.22) y (2.23) de la siguiente forma:

$$e'_{11}x_A + e'_{12}y_A + e'_{13} = 0, \quad (2.24)$$

$$e'_{21}x_A + e'_{22}y_A + e'_{23} = 0. \quad (2.25)$$

Las ecs.(2.19), (2.24) y (2.25), forman un nuevo sistema de ecuaciones. Es posible resolver las ecs.(2.24) y (2.25) para x_A y y_A , dando como resultado:

$$x_A = \left[\frac{e'_{12}e'_{23} - e'_{13}e'_{22}}{e'_{11}e'_{22} - e'_{12}e'_{21}} \right], \quad y_A = \left[\frac{e'_{13}e'_{21} - e'_{11}e'_{23}}{e'_{11}e'_{22} - e'_{12}e'_{21}} \right]. \quad (2.26)$$

Sustituyendo los valores de x_A y y_A , de la ec.(2.26) en la ec.(2.19), resulta un polinomio de cuarto orden en función de $\sin \phi$ y $\cos \phi$ de la siguiente forma:

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + e_{11}\delta_0\delta_1 + e_{12}\delta_0\delta_2 + e_{13}\delta_0^2 = 0, \quad (2.27)$$

donde,

$$\begin{aligned} \delta_0 &= e'_{11}e'_{22} - e'_{12}e'_{21}, \\ \delta_1 &= e'_{12}e'_{23} - e'_{13}e'_{22}, \\ \delta_2 &= e'_{13}e'_{21} - e'_{11}e'_{23}. \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, cada valor δ_i está expresado en función de $\sin \phi$ y $\cos \phi$, por lo que agrupando términos podemos expresar cada una de la siguiente manera:

$$\delta_i = A_i + \beta_i \sin \phi + \alpha_i \cos \phi + \gamma_i \cos \phi \sin \phi + \mu_i \sin^2 \phi + \zeta_i \cos^2 \phi, \quad \text{para } i = 0, 1, 2. \quad (2.28)$$

donde A_i , β_i , α_i , γ_i , μ_i y ζ_i (para más detalles *ver* Apéndice A) son valores constantes, y únicamente dependen de las variables articulares θ_1 , θ_2 y θ_3 .

La ec.(2.27) puede ser manipulada algebraicamente, haciendo uso de las identidades trigonométricas de la tangente de medio ángulo dadas por:

$$\sin \phi = \frac{2t_i}{1+t_i^2} \quad \text{y} \quad \cos \phi = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}, \quad \text{donde} \quad t_i = \tan \frac{\phi}{2}. \quad (2.29)$$

Esta manipulación algebraica resulta en un polinomio de octavo orden, dado por la ec.(2.30); y que en sus raíces contiene las posibles soluciones para el ángulo de orientación ϕ ,

pudiendo existir hasta ocho valores diferentes que llevarían a la plataforma móvil a distintas posiciones.

$$\text{Polinomio: } M_1 t^8 + M_2 t^7 + M_3 t^6 + M_4 t^5 + M_5 t^4 + M_6 t^3 + M_7 t^2 + M_8 t + M_9 = 0, \quad (2.30)$$

donde,

$$\begin{aligned} M_1 &= e_{13} C_{05}^2 + e_{11} C_{05} C_{15} + e_{12} C_{05} C_{25} + C_{15}^2 + C_{25}^2, \\ M_2 &= 2C_{14} C_{15} + 2C_{24} C_{25} + e_{11} (C_{04} C_{15} + C_{05} C_{14}) + e_{12} (C_{04} C_{25} + C_{05} C_{24}) + 2C_{04} C_{05} e_{13}, \\ M_3 &= C_{14}^2 + C_{24}^2 + e_{13} (C_{04}^2 + 2C_{03} C_{05}) + e_{11} (C_{03} C_{15} + C_{04} C_{14} + C_{05} C_{13}) \\ &\quad + e_{12} (C_{03} C_{25} + C_{04} C_{24} + C_{05} C_{23}) + 2C_{13} C_{15} + 2C_{23} C_{25}, \\ M_4 &= e_{11} (C_{02} C_{15} + C_{03} C_{14} + C_{04} C_{13} + C_{05} C_{12}) + e_{12} (C_{02} C_{25} + C_{03} C_{24} + C_{04} C_{23} + C_{05} C_{22}) \\ &\quad + 2C_{12} C_{15} + 2C_{13} C_{14} + 2C_{22} C_{25} + 2C_{23} C_{24} + e_{13} (2C_{02} C_{05} + 2C_{03} C_{04}), \\ M_5 &= e_{13} (C_{03}^2 + 2C_{01} C_{05} + 2C_{02} C_{04}) + e_{11} (C_{01} C_{15} + C_{02} C_{14} + C_{03} C_{13} + C_{04} C_{12} + C_{05} C_{11}) \\ &\quad + e_{12} (C_{01} C_{25} + C_{02} C_{24} + C_{03} C_{23} + C_{04} C_{22} + C_{05} C_{21}) + C_{13}^2 + C_{23}^2 + 2C_{11} C_{15} \\ &\quad + 2C_{12} C_{14} + 2C_{21} C_{25} + 2C_{22} C_{24}, \\ M_6 &= e_{11} (C_{01} C_{14} + C_{02} C_{13} + C_{03} C_{12} + C_{04} C_{11}) + e_{12} (C_{01} C_{24} + C_{02} C_{23} + C_{03} C_{22} + C_{04} C_{21}) \\ &\quad + 2C_{11} C_{14} + 2C_{12} C_{13} + 2C_{21} C_{24} + 2C_{22} C_{23} + e_{13} (2C_{01} C_{04} + 2C_{02} C_{03}), \\ M_7 &= C_{12}^2 + C_{22}^2 + e_{13} (C_{02}^2 + 2C_{01} C_{03}) + e_{11} (C_{01} C_{13} + C_{02} C_{12} + C_{03} C_{11}) \\ &\quad + e_{12} (C_{01} C_{23} + C_{02} C_{22} + C_{03} C_{21}) + 2C_{11} C_{13} + 2C_{21} C_{23}, \\ M_8 &= 2C_{11} C_{12} + 2C_{21} C_{22} + e_{11} (C_{01} C_{12} + C_{02} C_{11}) + e_{12} (C_{01} C_{22} + C_{02} C_{21}) + 2C_{01} C_{02} e_{13}, \\ M_9 &= e_{13} C_{01}^2 + e_{11} C_{01} C_{11} + e_{12} C_{01} C_{21} + C_{11}^2 + C_{21}^2, \end{aligned}$$

con,

$$\begin{aligned} C_{i1} &= A_i - \alpha_i + \zeta_i, \\ C_{i2} &= 2\beta_i - 2\gamma_i, \\ C_{i3} &= 2A_i - 2\zeta_i + 4\mu_i, \\ C_{i4} &= 2\beta_i + 2\gamma_i, \\ C_{i5} &= A_i + \alpha_i + \zeta_i. \end{aligned} \quad \text{para } i = 0, 1, 2.$$

A manera de que el lector pueda visualizar y entender fácilmente las posibles soluciones que del polinomio dado por la ec.(2.30) puedan resultar, en la Figura 2.4 se muestra un caso en el que para una *triada* de ángulos dados $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, la plataforma móvil o efector final, toma distintas posiciones y orientación de acuerdo a la raíz seleccionada del ángulo ϕ .

Es importante mencionar, que estas soluciones dependen tanto de la arquitectura del robot, como de la configuración angular de todos y cada uno de los eslabones actuados, pudiendo o no aparecer múltiples soluciones reales con cada postura del mecanismo.

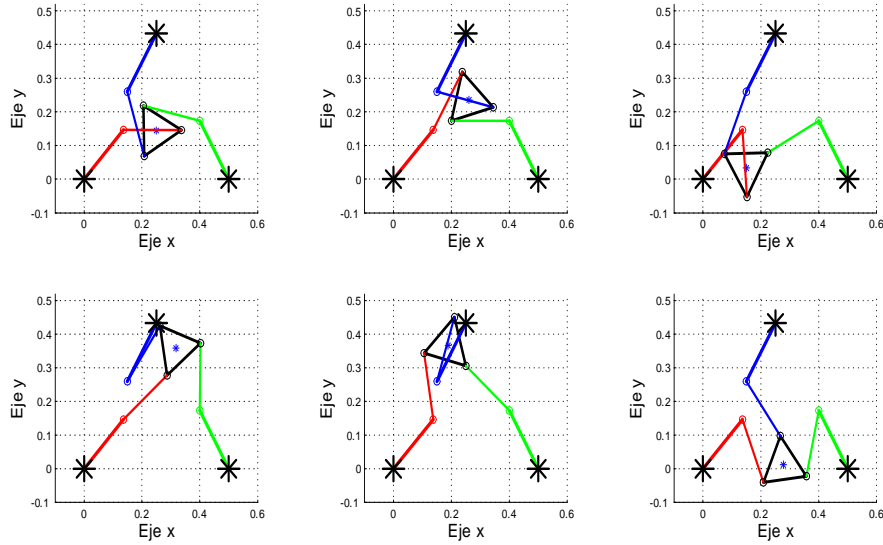


Figura 2.4: Seis posibles soluciones a la cinemática directa del robot paralelo planar 3RRR para una triada de ángulos actuados dada.

2.3. Cinemática inversa

El objetivo de la cinemática inversa, es definir la posición articular de los eslabones actuados a partir de la posición y orientación conocida del efector final del robot. A diferencia que con el cálculo de la cinemática directa, para el caso de los robots paralelos, la cinemática inversa suele ser relativamente sencilla. En este análisis, los valores de x_A , y_A y ϕ (que son los parámetros de posición y orientación de la plataforma móvil) son conocidos y se calculan los ángulos de las uniones actuadas θ_1 , θ_2 y θ_3 , que se encuentran ubicadas en los puntos P , Q y R (ver Figura 2.2). El cálculo de estos valores es posible de realizar en la forma siguiente.

Para el primer eslabón actuado, reescribimos la ec.(2.8) de la siguiente forma:

$$e_1 \sin \theta_1 + e_2 \cos \theta_1 + e_3 = 0, \quad (2.31)$$

donde,

$$\begin{aligned} e_1 &= -2y_A a_1, \\ e_2 &= -2x_A a_1, \\ e_3 &= x_A^2 + y_A^2 + a_1^2 - b_1^2. \end{aligned}$$

Usando las identidades trigonométricas de la tangente de medio ángulo (ec.(2.29)) y sustituyéndolas en la ec.(2.31), se obtiene:

$$(e_3 - e_2)t_1^2 + 2e_1 t_1 + (e_3 + e_2) = 0. \quad (2.32)$$

Resolviendo la ec.(2.32) para valores de t_1 , resulta:

$$t_1 = \tan \frac{\theta_1}{2} = \frac{-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 - e_3^2 + e_2^2}}{e_3 - e_2},$$

$$\theta_1 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 - e_3^2 + e_2^2}}{e_3 - e_2} \right).$$
(2.33)

Así también, para el segundo eslabón actuado, reescribimos la ec.(2.13) de la siguiente forma:

$$e_4 \sin \theta_2 + e_5 \cos \theta_2 + e_6 = 0, \quad (2.34)$$

donde,

$$\begin{aligned} e_4 &= 2y_Q a_2 - 2y_A a_2 - 2a_2 h \sin \phi, \\ e_5 &= 2x_Q a_2 - 2x_A a_2 - 2a_2 h \cos \phi, \\ e_6 &= x_A^2 + y_A^2 - 2x_A x_Q - 2y_A y_Q + x_Q^2 + y_Q^2 + h^2 + a_2^2 \\ &\quad - b_2^2 + 2x_A h \cos \phi + 2y_A h \sin \phi - 2x_Q h \cos \phi - 2y_Q h \sin \phi. \end{aligned}$$

Y usando el mismo procedimiento que en el caso anterior, se obtiene la ecuación para θ_2 ,

$$\theta_2 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-e_4 \pm \sqrt{e_4^2 - e_6^2 + e_5^2}}{e_6 - e_5} \right), \quad (2.35)$$

Para el tercer eslabón actuado, la ec.(2.18) se reescribe en la forma siguiente:

$$e_7 \sin \theta_3 + e_8 \cos \theta_3 + e_9 = 0, \quad (2.36)$$

donde,

$$\begin{aligned} e_7 &= 2y_R a_3 - 2y_A a_3 - 2a_3 h \sin\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right), \\ e_8 &= 2x_R a_3 - 2x_A a_3 - 2a_3 h \cos\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right), \\ e_9 &= x_A^2 + y_A^2 - 2x_A x_R - 2y_A y_R + x_R^2 + y_R^2 + h^2 + a_3^2 - b_3^2 + 2x_A h \cos\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &\quad + 2y_A h \sin\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) - 2x_R h \cos\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) - 2y_R h \sin\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

De igual manera que en los dos casos anteriores, se obtiene la siguiente ecuación de θ_3 ,

$$\theta_3 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-e_7 \pm \sqrt{e_7^2 - e_9^2 + e_8^2}}{e_9 - e_8} \right). \quad (2.37)$$

Una vez que θ_1 , θ_2 y θ_3 son calculados, los valores de los ángulos pasivos ψ_1 , ψ_2 y ψ_3 pueden ser calculados a partir de las ecuaciones de cerradura (2.6), (2.10) y (2.15), respectivamente, mediante sustitución hacia atrás.

Con todo lo anterior, se puede observar que para una posición y orientación dadas de la plataforma móvil, existen dos soluciones por cada θ_i , dando así un total de ocho soluciones posibles a la cinemática inversa del manipulador 3RRR, como se muestra en la Figura 2.5.

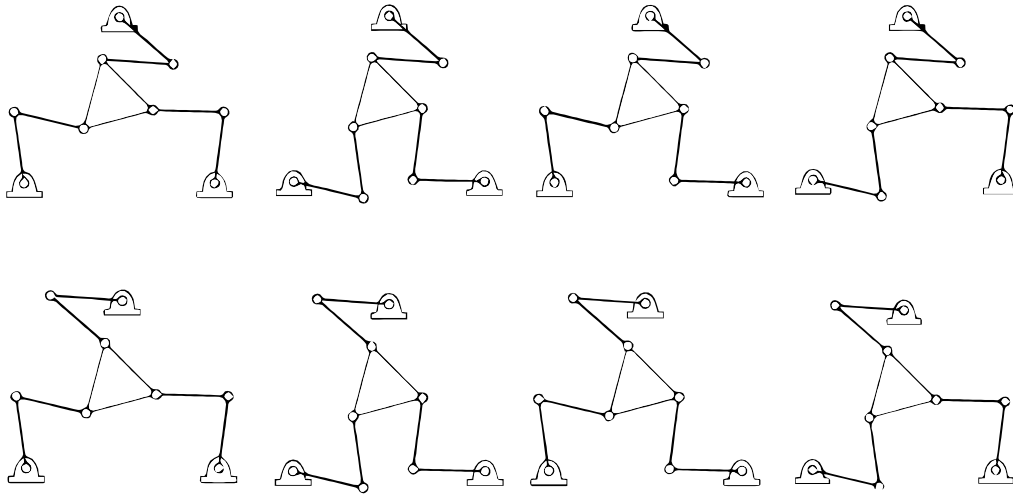


Figura 2.5: Ocho posibles soluciones de la cinemática inversa para una posición dada de la plataforma móvil.

2.4. Simulaciones numéricas

Para validar el correcto funcionamiento de los modelos cinemáticos, se muestran a continuación algunas simulaciones numéricas realizadas con ambos modelos, el inverso y el directo, calculados en conjunto. Las trayectorias de prueba propuestas están dadas por las ecs. (2.38), (2.39) y (2.40), la cuales representan un círculo, una flor de tres pétalos y el caracol de Pascal, respectivamente. Se debe notar, que el para la realización de estas simulaciones la orientación ϕ de la plataforma móvil se fijó igual con 0. En la Figura 2.6 se muestra la forma en que se interconectan ambos modelos cinemáticos. El bloque uno representa la trayectoria deseada (G_{xd}, G_{yd}, ϕ_d) que debe ser desarrollada por el efector final; el segundo bloque (cinemática inversa), está en función de esa trayectoria y calcula los ángulos actuados $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ del robot; y por último, el tercer bloque contiene la cinemática directa, la cual está en función de los ángulos propuestos por la cinemática inversa y los transforma a las posiciones del efector final (G_x, G_y, ϕ) . En la Figura 2.7 se pueden observar los resultados de la simulación numérica de los modelos cinemáticos, el desplazamiento angular deseado de los eslabones actuados, la orientación y trayectoria desarrollada por el efector final para cada trayectoria deseada. Con esto, se muestra claramente el funcionamiento de los modelos cinemáticos.

Ecuación del círculo

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.05 + 0.05 \cos(t), \\ y(t) &= \frac{\sqrt{3}}{8} + 0.05 \sin(t), \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ecuación de la flor de tres pétalos

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.25 + 0.07 \cos(t) \cos(3t), \\ y(t) &= \frac{\sqrt{3}}{8} + 0.07 \sin(t) \cos(3t), \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ecuación del caracol de Pascal

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.32 + 0.035 \cos(t) - 0.09 \cos^2(t), \\ y(t) &= \frac{\sqrt{3}}{8} + 0.035 \sin(t) - 0.09 \sin(t) \cos(t), \end{aligned} \quad (2.40)$$

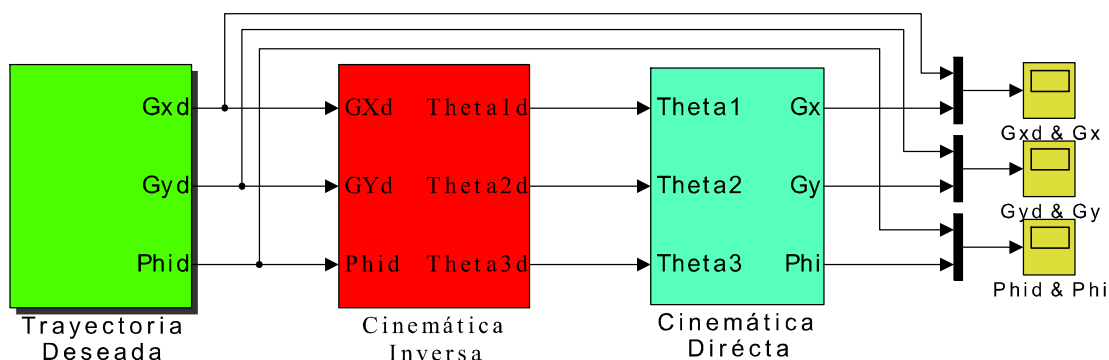


Figura 2.6: Diagrama a bloques de la interconexión de la cinemática inversa y directa.

2.5. Conclusiones

En este Capítulo se presentó la descripción geométrica del robot manipulador paralelo planar 3RRR, así como su cinemática directa e inversa. Así también, se mostró la dificultad numérica que conlleva calcular la cinemática directa en tiempo real a partir de la poca información que nos ofrecen los ángulos actuados y el desconocimiento de los ángulos pasivos, encausando al hecho de tener que elegir una de las múltiples soluciones posibles. Todo este cálculo se puede evitar usando sensores en los eslabones pasivos, que nos den información exacta de la posición de dicho eslabón, y así reducir el tiempo de procesamiento e incertidumbres en la selección de las raíces correctas. Otra alternativa a esto, es el uso de sensores en la plataforma móvil, de tal forma que se pueda transmitir o indicar su posición, así como su orientación en el plano cartesiano horizontal; evitando del todo el cálculo de la cinemática directa, dando la posibilidad de implementar otro tipo de controladores basados en la realimentación de la posición del efector final, y no solo depender de la posición angular de los eslabones actuados.

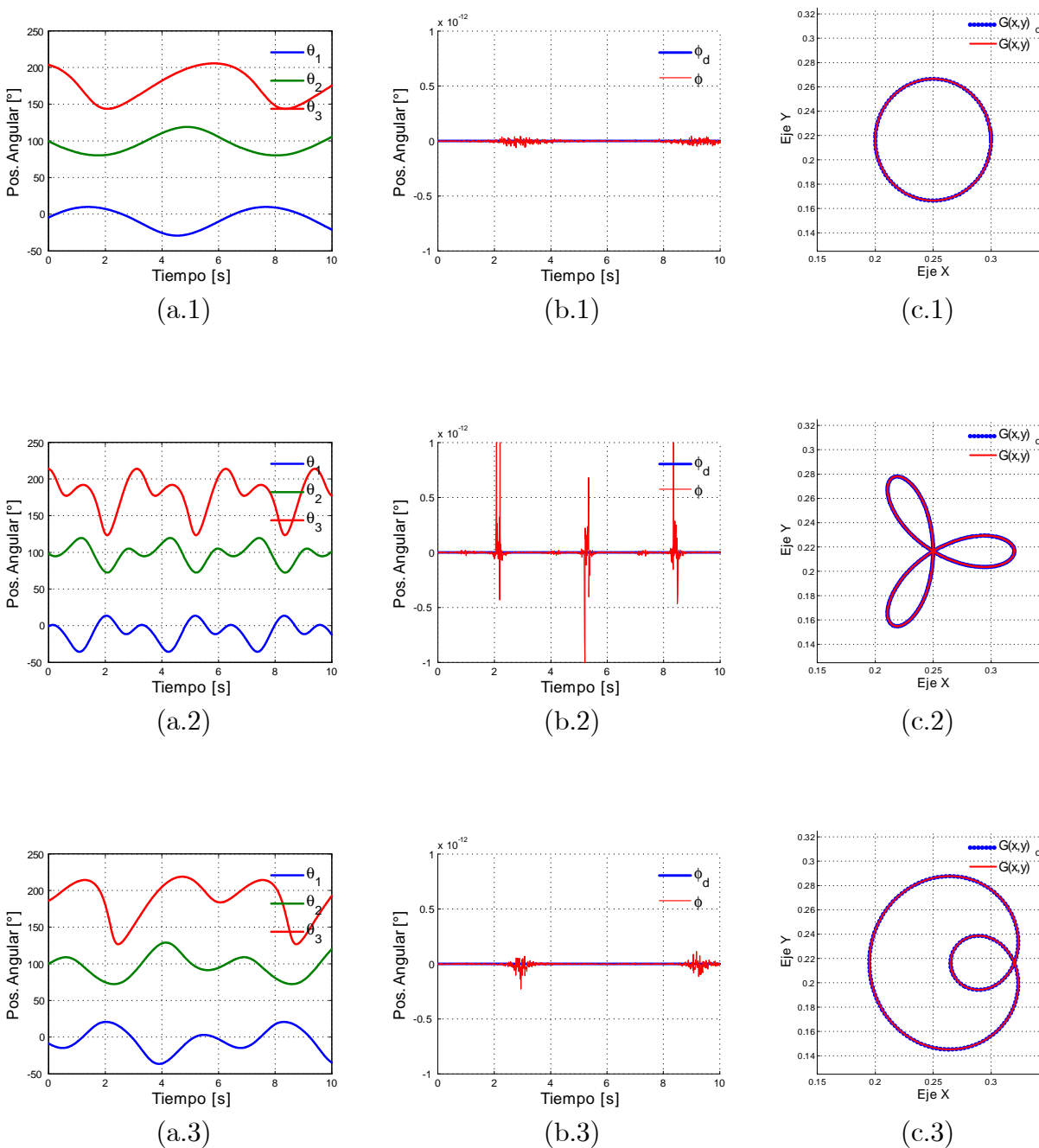


Figura 2.7: Resultados de la simulación numérica de los modelos cinemáticos del robot paralelo planar 3RRR con $a_i = 0.15$, $b_i = 0.2$, para $i=1, 2, 3$, $h = 0.15$, y $c = 0.5$ como parámetros de entrada. (a.1), (a.2), y (a.3) Posición angular de los eslabones actuados para cada trayectoria, dada por la cinemática inversa. (b.1), (b.2) y (b.3) Orientación de la plataforma móvil. (c.1), (c.2), y (c.3) Trayectoria desarrollada por el efector final.

Capítulo 3

Cinemática Diferencial

3.1. Introducción

El análisis del Jacobiano de los robots paralelos es un problema mucho más difícil que el de los robots seriales, debido a la existencia de cadenas cinemáticas cerradas (*ver* [1]).

Muchos investigadores han trabajado en este tipo de sistemas desde hace bastante tiempo, por ejemplo, los pioneros Waldron en [22], Davies y Primrose en [20], y Baker en [19], estudiaron el movimiento instantáneo de cadenas cinemáticas. Mohamed *et al.* en [21], desarrollaron un procedimiento para el análisis de los giros instantáneos asociados a las uniones de un eslabón, mediante el uso de las ecuaciones vectoriales de cadena cerrada. En 1990, Goselin y Ángeles en [15], estudiaron las singularidades en los mecanismos de cadena cerrada y sugirieron la separación de la matriz Jacobiana en dos matrices: *una asociada a la cinemática directa* y la *otra a la cinemática inversa* (esta clasificación fue refinada por Zlatanov *et al.* en [16]).

Para los robots paralelos, la matriz Jacobiana provee una transformación de la velocidad del efector final del espacio cartesiano a las velocidades de las uniones articulares. Si se establece al vector \mathbf{q} como las variables articulares actuadas, y a \mathbf{x} como el vector que describe el movimiento de la plataforma, entonces las restricciones cinemáticas impuestas por los eslabones pueden ser escritas de forma general como: $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}$. Si se lleva a cabo la diferenciación a esta ecuación respecto del tiempo, se obtiene una relación entre las velocidades de las articulaciones actuadas y la velocidad de salida en el efector final, dada por:

$$J_x \dot{\mathbf{x}} = J_q \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.1)$$

donde,

$$J_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{y} \quad J_q = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Las derivadas anteriores producen dos matrices Jacobianas separadas. Por lo tanto, el Jacobiano completo J , puede ser escrito como:

$$\dot{\mathbf{q}} = J \dot{\mathbf{x}}, \quad (3.2)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}$ es un vector de dimensión m que representa un conjunto de velocidades rotacionales, $\dot{\mathbf{x}}$ es un vector de dimensión n que representa la velocidad de salida del efector final en el plano cartesiano, y $J = J_q^{-1}J_x$ es la matriz Jacobiana de dimensión $n \times m$. Nótese que la matriz Jacobiana definida en la ec.(3.2) para un manipulador paralelo, corresponde al Jacobiano inverso de un robot serial.

Esta definición de la matriz Jacobiana difiere un poco de la que tradicionalmente se usa para los robots manipuladores seriales, donde el Jacobiano realiza una transformación a partir de las velocidades de las uniones articulares a la velocidad del efector final. Este cambio en la definición del Jacobiano para los robots paralelos, se deriva a partir de la dualidad existente entre los manipuladores seriales y paralelos (*ver* [23]), y se realiza por conveniencia.

3.2. Obtención de la matriz Jacobiana

Para el caso de estudio de interés, el robot paralelo 3RRR, se analiza su cinemática diferencial usando el método de cadena de vectores de velocidad o *velocity vector-loop* (basado en [1]). A partir de la Figura 2.2 (*ver* pág. 8 de la Sección 2), es posible escribir las ecuaciones de cadena cerrada para cada brazo. Es importante tener en cuenta que los puntos A , B y C , son los vértices de la plataforma móvil, y que su centroide (punto de interés del efector final) está representado por G . Como también, que la base fija está definida por los puntos fijos P , Q y R . Los vectores del primer y segundo eslabón del i -ésimo brazo, están denotados por \mathbf{a}_i y \mathbf{b}_i , respectivamente; mientras que θ_i y ψ_i , proporcionan los ángulos de orientación de dichos eslabones, respecto al eje X del marco de referencia.

Para el primer brazo, se obtiene la ecuación de cerradura desde un punto fijo (origen O del marco de referencia) hasta el centroide G de la plataforma móvil, como se muestra en la Figura 3.1(a); dando como resultado la ec.(3.3).

$$\overline{PG} + \overline{GA} = \overline{PD} + \overline{DA}. \quad (3.3)$$

Se obtienen sus componentes (en términos de los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j}) respecto a los ejes del marco de referencia,

$$\vec{G} + \vec{e}_1 = \vec{a}_1 + \vec{b}_1, \quad (3.4)$$

donde,

$$\begin{aligned} \vec{G} &= (G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j}), \\ \vec{e}_1 &= - \left(e_1 \cos(\phi + \frac{\pi}{6}) \mathbf{i} + e_1 \sin(\phi + \frac{\pi}{6}) \mathbf{j} \right), \\ \vec{a}_1 &= (a_1 \cos \theta_1 \mathbf{i} + a_1 \sin \theta_1 \mathbf{j}), \\ \vec{b}_1 &= (b_1 \cos(\theta_1 + \psi_1) \mathbf{i} + b_1 \sin(\theta_1 + \psi_1) \mathbf{j}). \end{aligned}$$

Derivando respecto del tiempo a la ec.(3.4), se obtiene la cadena de vectores de velocidades,

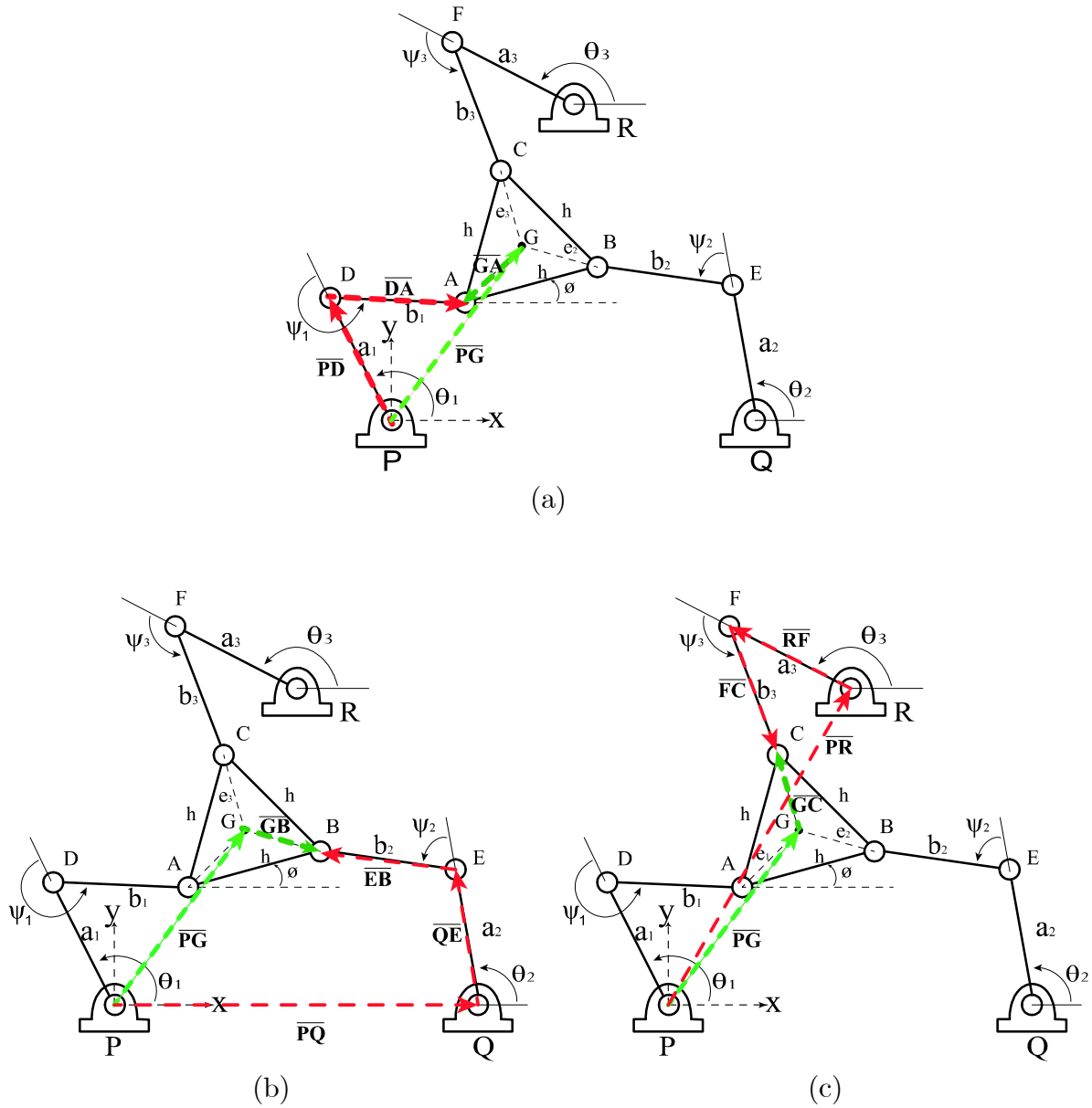


Figura 3.1: (a) Esquema del robot 3RRR a partir del cual se deriva la ec.(3.3), (b) Esquema del robot 3RRR a partir del cual se deriva la ec.(3.8), (c) Esquema del robot 3RRR a partir del cual se deriva la ec.(3.11).

$$\begin{aligned}
(\dot{G}_x \mathbf{i} + \dot{G}_y \mathbf{j}) + \left(-e_1 \sin\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \dot{\phi} \mathbf{i} + e_1 \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \dot{\phi} \mathbf{j} \right) &= (-a_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{i} + a_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{j}) \\
+ \left(-b_1 \sin(\theta_1 + \psi_1) (\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1) \mathbf{i} + b_1 \cos(\theta_1 + \psi_1) (\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1) \mathbf{j} \right). &
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Y que puede reescribirse como:

$$\mathbf{v}_g + \dot{\phi}(\mathbf{k} \times \vec{e}_1) = \dot{\theta}_1(\mathbf{k} \times \vec{a}_1) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1)(\mathbf{k} \times \vec{b}_1), \tag{3.6}$$

donde \mathbf{v}_g es la velocidad del punto G , y \mathbf{k} es el vector unitario que apunta en dirección del eje Z . Dado que $\dot{\psi}$ es una variable pasiva desconocida, se debe eliminar de la ec.(3.6). Para este propósito, se usa el producto punto en ambas partes de la ecuación y se multiplica por \vec{b}_1 . Considerando la propiedad $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = -\mathbf{U} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{V}) = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{A})$, la ecuación resultante es:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 \cdot \mathbf{v}_g + \dot{\phi} \mathbf{k} \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{b}_1) &= \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1) \mathbf{k} \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_1) \\
&\Downarrow \\
\vec{b}_1 \cdot \mathbf{v}_g + \dot{\phi} \mathbf{k} \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{b}_1) &= \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

De forma similar se realiza para la segunda cadena. Se obtiene la ecuación de cerradura y se expresa en sus componentes respecto a los ejes del marco de referencia. Esto es,

$$\overline{PG} + \overline{GB} = \overline{PQ} + \overline{QE} + \overline{EB}, \tag{3.8}$$

$$\vec{G} + \vec{e}_2 = \overline{PQ} + \vec{a}_2 + \vec{b}_2, \tag{3.9}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\vec{G} &= (G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j}), \\
\vec{e}_2 &= \left(e_2 \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) \mathbf{i} + e_2 \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) \mathbf{j} \right), \\
\overline{PQ} &= (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j}), \\
\vec{a}_2 &= (a_2 \cos \theta_2 \mathbf{i} + a_2 \sin \theta_2 \mathbf{j}), \\
\vec{b}_2 &= (b_2 \cos(\theta_2 + \psi_2) \mathbf{i} + b_2 \sin(\theta_2 + \psi_2) \mathbf{j}),
\end{aligned}$$

La ecuación resultante, después de derivar la ec. (3.9) respecto del tiempo y multiplicar por \vec{b}_2 , es:

$$\vec{b}_2 \cdot \mathbf{v}_g + \dot{\phi} \mathbf{k} \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{b}_2) = \dot{\theta}_2 \mathbf{k} \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{b}_2). \tag{3.10}$$

Para la tercer cadena, se obtiene la siguiente ecuación de cerradura:

$$\overline{PG} + \overline{GC} = \overline{PR} + \overline{RF} + \overline{FC}, \tag{3.11}$$

$$\vec{G} + \vec{e}_3 = \overline{PR} + \vec{a}_3 + \vec{b}_3, \quad (3.12)$$

donde,

$$\begin{aligned} \vec{G} &= (G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j}), \\ \vec{e}_3 &= (-e_3 \sin(\phi) \mathbf{i} + e_3 \cos(\phi) \mathbf{j}), \\ \overline{PR} &= (R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}), \\ \vec{a}_3 &= (a_3 \cos \theta_3 \mathbf{i} + a_3 \sin \theta_3 \mathbf{j}), \\ \vec{b}_3 &= (b_3 \cos(\theta_3 + \psi_3) \mathbf{i} + b_3 \sin(\theta_3 + \psi_3) \mathbf{j}), \end{aligned}$$

Y después de derivar la ec.(3.12) respecto del tiempo y multiplicar por \vec{b}_3 , resulta:

$$\vec{b}_3 \cdot \mathbf{v}_g + \dot{\phi} \mathbf{k} \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{b}_3) = \dot{\theta}_3 \mathbf{k} \cdot (\vec{a}_3 \times \vec{b}_3). \quad (3.13)$$

Reescribiendo las ecs.(3.7), (3.10) y (3.13) en forma matricial, se tiene:

$$J_x \dot{\mathbf{x}} = J_q \dot{\mathbf{q}} \quad (3.14)$$

donde, $\dot{\mathbf{x}} = [v_{gx}, v_{gy}, \dot{\phi}]^T$ y $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]^T$, siendo,

$$J_x = \begin{bmatrix} b_{1x} & b_{1y} & e_{1x}b_{1y} - e_{1y}b_{1x} \\ b_{2x} & b_{2y} & e_{2x}b_{2y} - e_{2y}b_{2x} \\ b_{3x} & b_{3y} & e_{3x}b_{3y} - e_{3y}b_{3x} \\ a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x} \end{bmatrix},$$

con,

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= (a_1 \cos \theta_1 \mathbf{i} + a_1 \sin \theta_1 \mathbf{j}), \\ \vec{a}_2 &= (a_2 \cos \theta_2 \mathbf{i} + a_2 \sin \theta_2 \mathbf{j}), \\ \vec{a}_3 &= (a_3 \cos \theta_3 \mathbf{i} + a_3 \sin \theta_3 \mathbf{j}), \\ \vec{b}_1 &= (b_1 \cos(\theta_1 + \psi_1) \mathbf{i} + b_1 \sin(\theta_1 + \psi_1) \mathbf{j}), \\ \vec{b}_2 &= (b_2 \cos(\theta_2 + \psi_2) \mathbf{i} + b_2 \sin(\theta_2 + \psi_2) \mathbf{j}), \\ \vec{b}_3 &= (b_3 \cos(\theta_3 + \psi_3) \mathbf{i} + b_3 \sin(\theta_3 + \psi_3) \mathbf{j}), \\ \vec{e}_1 &= -\left(e_1 \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \mathbf{i} + e_1 \sin\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \mathbf{j}\right), \\ \vec{e}_2 &= \left(e_2 \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) \mathbf{i} + e_2 \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) \mathbf{j}\right), \\ \vec{e}_3 &= (-e_3 \sin(\phi) \mathbf{i} + e_3 \cos(\phi) \mathbf{j}). \end{aligned}$$

Algunas veces, la matriz Jacobiana para los robots paralelos no es dimensionalmente uniforme, y esto crea algunos problemas cuando se usa la matriz Jacobiana para otros tipos

de análisis, como destreza de movimiento o la rigidez del robot. En este caso de estudio existe este problema, debido a que el manipulador no tan solo tiene grados de libertad traslacionales (como en el caso de un robot tipo Delta), sino que, además, presenta un grado de rotación en su efector final. Esto dificulta un poco el estudio de la matriz, y la vuelve dimensionalmente no homogénea. En el siguiente Capítulo se trata este problema, y se emplea una alternativa de solución, con el fin de llevar a cabo la optimización del espacio de trabajo del robot 3RRR.

3.3. Singularidades

Debido a la existencia de dos matrices Jacobianas, se dice que un robot paralelo tiene una configuración singular cuando cualquiera, J_x o J_q o ambas, son singulares. Es decir, que el determinante de dichas matrices es igual a cero.

Usando la clasificación presentada por Gosselin y Ángeles en [15], las singularidades para los robots manipuladores paralelos pueden dividirse en tres categorías: *singularidades de frontera o de la cinemática inversa*, *singularidades en el espacio de trabajo o de la cinemática directa* y las *singularidades combinadas*.

3.3.1. Singularidades de la cinemática inversa

Este tipo de singularidades, también llamadas singularidades de frontera asociadas al Jacobiano angular J_q , causan que no sea posible el seguimiento de movimientos infinitesimales en ciertas direcciones, por lo tanto, el robot pierde uno o más grados de libertad. Esto ocurre cuando uno de los elementos de la diagonal de J_q desaparece, produciendo que el determinante de J_q resulte cero, como se muestra en la ec.(3.15). Es decir, cuando un brazo está totalmente extendido o doblado sobre sí.

$$\det(J_q) = 0, \quad (3.15)$$

$$\text{si } a_{ix}b_{iy} - a_{iy}b_{ix} = 0, \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ o } 3.$$

La Figura 3.2 muestra un ejemplo de este tipo de singularidades.

3.3.2. Singularidades de la cinemática directa

Estas singularidades, también llamadas singularidades del espacio de trabajo asociadas a la matriz Jacobiana J_x , causan que la plataforma móvil gane uno o más grados de libertad, aunque los eslabones motrices se encuentren totalmente fijos. Esto sucede, por ejemplo, cuando todos los eslabones b_i se encuentran orientados en forma paralela unos a otros, y la plataforma móvil puede tener desplazamientos infinitesimales si se le aplica una fuerza en dirección perpendicular a \mathbf{b}_i ; o cuando todos los vectores \mathbf{b}_i están orientados de tal forma que al prolongarlos se intersectan en un punto, haciendo que el determinante de J_x sea igual con cero.

$$\det(J_x) = 0. \quad (3.16)$$

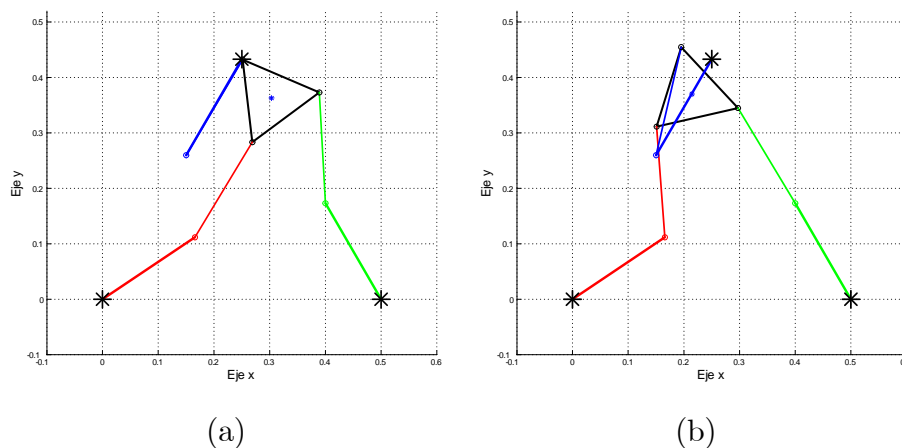


Figura 3.2: Dos posiciones singulares asociadas al Jacobiano J_q : (a) Brazo doblado sobre sí mismo y, (b) Brazo totalmente extendido.

La Figura 3.3 muestra algunas configuraciones singulares correspondientes a esta categoría.

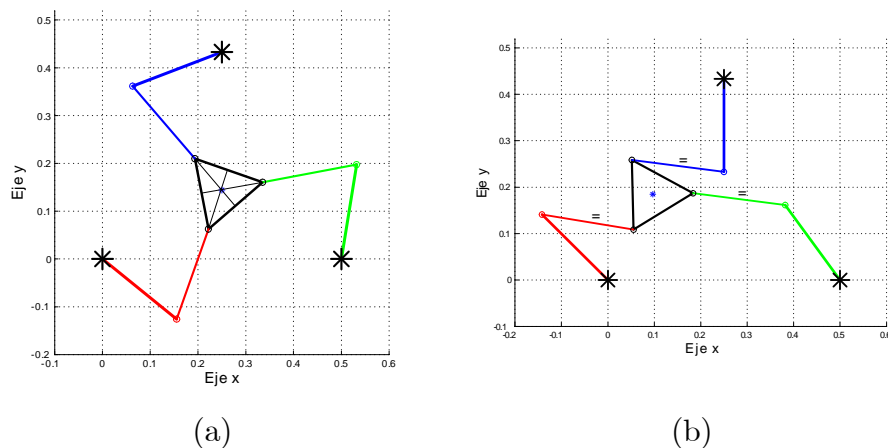


Figura 3.3: Dos posiciones singulares asociadas al Jacobiano J_x : (a) Los vectores \mathbf{b}_i se intersectan en un punto común y, (b) Todos los vectores \mathbf{b}_i son paralelos unos a otros.

3.3.3. Singularidades combinadas

Este tipo de singularidades son un poco más extrañas, ya que ocurren cuando los determinantes de ambas matrices J_q y J_x son iguales a cero. Además, estas singularidades no

solo dependen de la configuración del mecanismo, sino también de su arquitectura. Gosselin y Ángeles en [15], presentan dos arquitecturas para el robot 3RRR, las cuales poseen singularidades combinadas.

Las condiciones para la *primer arquitectura* son:

$$PQ = QR = RP = c,$$

$$AB = BC = CA = h,$$

$$a_i = \frac{c}{\sqrt{3}}, b_i = e_i, \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ y } 3.$$

Con estas restricciones de diseño, se obtiene una configuración donde es posible que las uniones de los eslabones pasivos coincidan con el centroide de la plataforma móvil, como se observa en la Figura 3.4(a).

Para la *segunda arquitectura*, las condiciones son:

$$PQ = QR = RP = AB = BC = CA,$$

$$\text{y } a_i = b_i, \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ y } 3.$$

En este caso, la plataforma móvil tiene el mismo tamaño que la plataforma fija, por lo que los eslabones actuados pueden hacer movimientos mientras que el efector final se encuentra fijo. Esta configuración se muestra en la Figura 3.4(b).

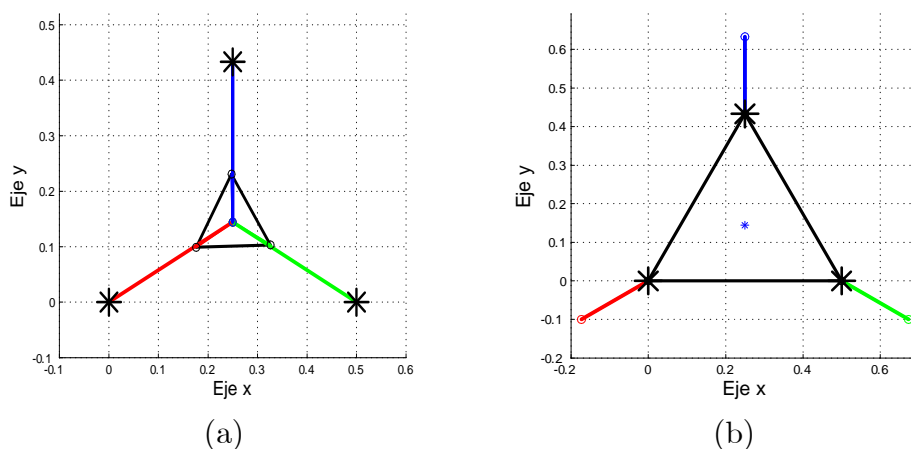


Figura 3.4: Configuraciones singulares combinadas: (a) Arquitectura 1 y (b) Arquitectura 2.

3.4. Simulaciones numéricas

A continuación se muestran algunas simulaciones numéricas de la obtención de las velocidades articulares del robot a partir de las velocidades del efector final, haciendo uso de la matriz Jacobiana dada por la ec.(3.2). En la Figura 3.5(a) se muestran las velocidades $\dot{\mathbf{q}}$ calculadas por la matriz Jacobiana dado un vector $\dot{\mathbf{x}}$ de entrada. En la Figura 3.5(b) se

observa la diferencia de las velocidades calculadas por la matriz Jacobiana y las calculadas por el programa de MATLAB. Los desplazamientos de posición del efector final se muestran en la Figura 3.5(c). Y en la Figura 3.5(d), se muestra la variación existente de la orientación ϕ de la plataforma móvil contra la propuesta en el modelo cinemático inverso¹.

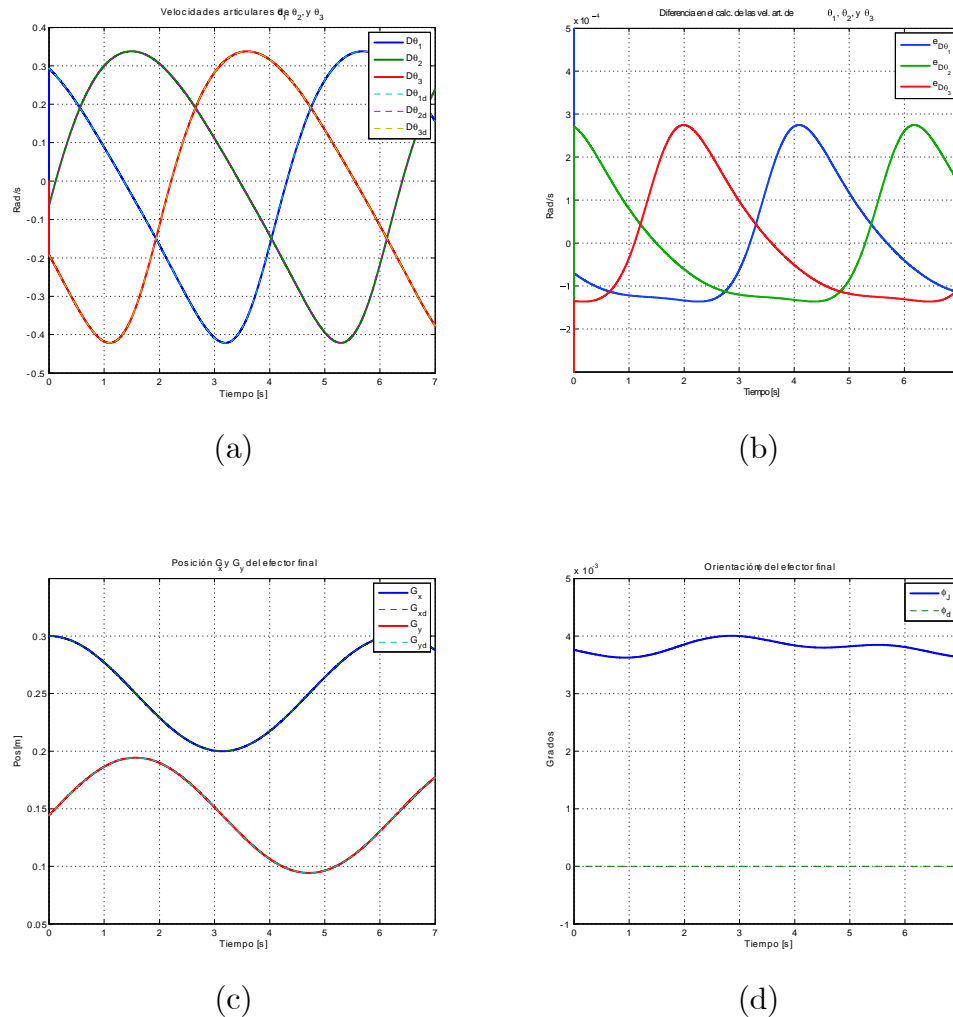


Figura 3.5: Resultados de la simulación del Jacobiano del robot paralelo planar 3RRR: (a) Velocidades articulares de θ_1 , θ_2 y θ_3 dadas por el Jacobiano vs calculadas por MATLAB, (b) Diferencia entre las velocidades calculadas por el Jacobiano y las derivadas numéricamente por MATLAB, (c) Posición cartesiana del efector final dada por el Jacobiano y la posición deseada, y (d) Orientación de la plataforma móvil calculada por el Jacobiano ϕ_J y la orientación deseada ϕ_d .

¹Para más información acerca de esta simulación numérica, ver el Apéndice B Sección B.4.

Capítulo 4

Diseño Cinemático Óptimo del Robot 3RRR

4.1. Introducción

La optimización geométrica de los parámetros de diseño es un paso fundamental en el proceso de desarrollo de un robot paralelo, y se realiza después del análisis de su cinemática. Por su naturaleza, los robots paralelos son más rápidos, fuertes y rígidos que los robots seriales. Pero es bien sabido que los robots paralelos sufren de un espacio de trabajo restringido, el cual está lleno de puntos singulares [15].

En general, la optimización de parámetros en mecanismos paralelos es obligatoria para poder explotar al máximo la capacidad de la arquitectura paralela. Se ha dicho que el retraso en las técnicas de optimización en el proceso de diseño de los robots paralelos a principios de los 90's, han resultado en el desarrollo de plataformas paralelas con un rendimiento deficiente, lo cual a repercutido en la reputación de dichos mecanismos y han retrasado su uso en la industria como una alternativa a los diseños convencionales. Afortunadamente, en las últimas dos décadas, investigadores y diseñadores de robots paralelos han notado la importancia de la optimización geométrica en el rendimiento de los robots, y ahora constituye uno de los temas más estudiados en el campo de la robótica (*véase por ejemplo* [2], [26], [28], [31]). A diferencia de los robots seriales, la optimización geométrica de los robots paralelos suele ser mucho más compleja.

Existen dos razones principales que hacen de la optimización de plataformas paralelas un proceso difícil. El primero, es la cantidad de parámetros involucrados; esto del hecho que los robots paralelos tienen muchos más eslabones y uniones que un robot serial, además de que la dependencia en los eslabones hace que cada parámetro geométrico influya en el rendimiento del robot. Otra razón que complica el proceso de optimización en los robots paralelos, es la complejidad de la función objetivo. Muchos de los criterios de optimización están basados en las propiedades de la matriz Jacobiana, tales como el número de condición¹, el cual es generalmente imposible de calcular analíticamente; en su lugar, es necesario usar

¹En robótica, el **número de condición**, ayuda a medir la capacidad del robot al desplazarse en el espacio de trabajo a lo largo de una dirección dada. Para más información acerca del número de condición, *ver* [35].

cálculos numéricos de manera intensiva, para poder evaluar el rendimiento del robot para una geometría dada.

A menudo, resulta que un diseño para el máximo espacio de trabajo pueda no ser del todo óptimo para propósitos prácticos. Es posible que este modelo optimizado tenga una controlabilidad o destreza muy pobres, que son características cinemáticas no deseadas. Un método para medir estas características fue usado por Salisbury y Craig en [18], el cual está basado en el número de condición de la matriz Jacobiana del manipulador, donde el Jacobiano mapea las velocidades de las uniones a la velocidad del efector final en el espacio cartesiano.

Este Capítulo presenta el procedimiento de optimización que fue usado para el diseño geométrico del Robot 3RRR, y las técnicas desarrolladas para superar los problemas antes planteados. También, se presenta el grupo de condiciones geométricas que son necesarias para un adecuado funcionamiento del robot 3RRR y las restricciones de diseño del manipulador. En la segunda sección se presenta la función objetivo y su desarrollo, así como la homogeneización de la matriz Jacobiana presentada en el Capítulo anterior. Otro punto mostrado, es el método de optimización utilizado, y la comparación de distintos algoritmos evolutivos para tratar con el problema. Finalmente, se muestran y analizan los resultados obtenidos en este proceso de optimización.

4.2. Parámetros cinemáticos

En esta Sección se presentan los parámetros geométricos del robot 3RRR, que se encuentran envueltos en las relaciones cinemáticas de la arquitectura del manipulador. Como se ha mencionado en Capítulos anteriores, el modelo cinemático de un mecanismo describe el movimiento de sus eslabones sin tener en cuenta la fuerza necesaria para generar dicho movimiento. Es por esto, que solo es necesario conocer la posición de los pares cinemáticos, es decir, las uniones entre eslabones para describir su cinemática. El objetivo de esta sección es entonces, definir y delimitar la menor cantidad de parámetros independientes que sean críticos para el diseño geométrico del robot 3RRR.

4.2.1. Condiciones geométricas para el robot 3RRR

Para su fácil construcción y manufactura, se considera una estructura simétrica, donde todos los eslabones actuados son de igual longitud, y todos los eslabones pasivos son idénticos entre sí. Además, las bases actuadas están en el mismo plano y a la misma distancia una de la otra, formando un triángulo equilátero, al igual que la plataforma móvil. Es decir, $a_i = a$, $b_i = b$, $e_i = e$, para $i = 1, 2, 3$; y $\|PQ\| = \|QR\| = \|RP\| = c$.

Con lo anterior, podemos definir el vector α de parámetros de diseño (ec.(4.1)), los cuales se desean optimizar.

$$\alpha = [a, b, e, c]^T. \quad (4.1)$$

siendo estos, los parámetros de longitud que definen el tamaño y forma del robot².

4.2.2. Límites de búsqueda para los parámetros de diseño

Dados los parámetros de diseño que deben ser optimizados, se puede crear un espacio de trabajo bidimensional que cambiará su tamaño y forma, según tomen valores los parámetros de diseño. Obviamente, estas dimensiones no pueden ser infinitas, por lo que se toman consideraciones prácticas en el diseño, para establecer los *límites inferiores y superiores de búsqueda* de cada parámetro. Para su fácil escalamiento, se propone la normalización de las longitudes de los eslabones, de tal forma que: $a + b + e = 1$; con el fin de no depender de unidades. Además, se propone una longitud para la distancia entre los vértices de la base fija del robot, en un intervalo de 0.8 y 2.

Por lo que los límites de búsqueda para cada parámetro quedan de la siguiente forma:

Límite inferior	Parámetro	Límite superior
0	a	1
0	b	1
0.1	e	0.2
0.8	c	2

Tabla 4.1: Límites inferior y superior de búsqueda para los parámetros de diseño del robot 3RRR.

Los primeros dos parámetros representan las longitudes de los eslabones actuados y pasivos, respectivamente. El parámetro e , es la distancia entre una arista y el centroide de la plataforma móvil. Estos límites fueron seleccionados así, para asegurar que el espacio de trabajo quede al interior del triángulo equilátero que forma la plataforma fija. En la siguiente sección se muestran, además de los límites de los parámetros de diseño, las restricciones a las que está sujeta la función objetivo.

Nótese, que los límites del tamaño de la plataforma móvil deberán estar restringidos según la aplicación que se quiera dar al dispositivo. Para el proceso de diseño del caso de estudio de interés, solo importa por el momento, observar la configuración óptima del dispositivo dentro de los límites establecidos arbitrariamente por nosotros. Un punto que se debe aclarar es, que el proceso de normalización se realiza después de seleccionar los valores para cada uno de los parámetros, no importando que valor se elija, i.e. $a + b + e = x$, entonces, $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{e}{x} = 1$, por supuesto, pueden existir configuraciones no favorables o viables del todo, es por eso que el proceso de optimización es tan importante.

²Para más detalles acerca de estos parámetros, ver los Capítulos 2 y 3.

4.3. Función objetivo

La optimización es una herramienta importante en la toma de decisiones y en el análisis de sistemas físicos. Para hacer uso de esta metodología, primero es necesario identificar un objetivo o grupo de objetivos, una cantidad medible del rendimiento del sistema de estudio. Este objetivo podría ser tiempo, energía potencial, longitud o cualquier cantidad o combinación de cantidades que pueda ser representada por un número.

El objetivo depende de ciertas características del sistema, llamadas variables. Formalmente un problema de optimización es dado por un par (Ω, h) compuesto por un espacio de búsqueda Ω y una función h :

$$h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

El problema consiste en la búsqueda del punto o conjunto de puntos $x^* \in \Omega$, tal que en caso de maximización³:

$$\forall x \in \Omega : h(x^*) \geq h(x).$$

El conjunto Ω puede ser finito o infinito, y puede estar definido por un grupo de restricciones [32].

4.3.1. Cálculo del espacio de trabajo libre de singularidades

Las regiones del espacio de trabajo que se encuentran cerca de singularidades deben ser evadidas, dado que resultan en una pobre transmisión de potencia, en el sentido de que el sistema no puede aplicar fuerzas al efector final en algunas direcciones. Por esto, en esta Sección se presenta la obtención del espacio de trabajo máximo libre de singularidades que puede alcanzar el robot 3RRR. Para esto, se toma en consideración la cinemática inversa del robot, así como algunas restricciones físicas de los eslabones actuados para evitar colisiones en la estructura; y el recíproco del número de condición de la matriz Jacobiana, con el cual, medimos la destreza⁴ de movimiento del manipulador.

Este espacio de trabajo se puede definir como el área total que el robot 3RRR puede alcanzar, respetando los límites de longitud previamente establecidos y las restricciones físicas de diseño, de la forma:

$$\begin{aligned} \kappa(J(x, \theta, \alpha)) &\geq \gamma, \\ \theta_i^{\text{mín}} &\leq \theta_i(x, \alpha) \leq \theta_i^{\text{máx}}, \\ \sum_{k=i}^q l_k(\alpha(1:3)) &= \tau, \end{aligned}$$

³Si el símbolo \geq es reemplazado por \leq en la expresión, obtendremos un problema de minimización.

⁴Si el robot puede mover el efector final con una velocidad alta, en comparación con la velocidad de los actuadores, entonces, se considera que el robot posee buena destreza. De otra forma, se dice que el robot tiene baja destreza.

donde, κ es el recíproco del número de condición de la matriz Jacobiana dimensionalmente homogénea; γ es un valor dado por el diseñador para asegurar un cierto nivel de manipulabilidad del robot; θ_i para $i = 1, 2, 3$, son los ángulos de los eslabones actuados; y τ es una constante normalizada definida como $\tau = 1$, en este trabajo.

La expresión del número de condición de la matriz Jacobiana, se define en [36] como:

$$\text{cond}(J) = \frac{\sigma_{\text{máx}}(J)}{\sigma_{\text{mín}}(J)} \quad (4.2)$$

donde, $\sigma_{\text{mín}}(J)$ y $\sigma_{\text{máx}}(J)$ representan al mínimo y máximo valores singulares de la matriz Jacobiana, respectivamente.

Debido a que el valor del número de condición de la matriz Jacobiana se encuentra entre $1 \leq \text{cond}(J) \leq \infty$, se suele usar el inverso del número de condición, donde: $\text{cond}(J)^{-1} = \kappa(J) \in [0, 1]$.

4.3.1.1. Homogenización de la matriz Jacobiana

Si se observa la matriz Jacobiana obtenida en el Capítulo anterior, se puede notar claramente que se trata de una matriz no homogénea. Esto debido a que la matriz J_q tiene unidades físicas uniformes, mientras que en J_x los elementos de la tercera columna poseen unidades distintas a las dos primeras, porque el vector $\dot{\mathbf{x}}$ está conformado por dos velocidades cartesianas y una angular. Como ya se mencionó anteriormente, se han desarrollado varias formas de medir la manipulabilidad y la destreza en los mecanismos, tales como: el *número de condición*, los *valores singulares mínimos* de la matriz Jacobiana, *índice de destreza* de movimiento o el *grado operacional*.

Sin embargo, usar el número de condición de una matriz Jacobiana no homogénea en control u optimización, podría causar muchos problemas, como lo mencionan Lipkin y Duffy en [24]. Cuando se insertan tanto posición como orientación del efector final en las ecuaciones cinemáticas, se verá que el número de condición de la matriz Jacobiana varía de acuerdo a las dimensiones o escalamientos del manipulador. Es por esto, que se vuelve necesario el desarrollo de una matriz Jacobiana que contenga las mismas unidades físicas. Es decir, que sea homogénea dimensionalmente, y así, el número de condición no se vea afectado por el escalamiento en las magnitudes del manipulador.

Varios investigadores han trabajado en la obtención de matrices Jacobianas dimensionalmente homogéneas. Gosselin en [25], propone expresar la velocidad del efector final mediante la descripción de dos puntos ubicados en éste, obteniendo así una matriz Jacobiana homogénea de (4×3) . Kim y Ryu en [27], proponen una nueva formulación para el cálculo de la matriz Jacobiana homogénea en manipuladores paralelos, usando tres puntos ubicados en el efector final en lugar de dos. Esta metodología puede ser aplicada a robots con más de tres grados de libertad, y resulta en una matriz Jacobiana dimensionalmente homogénea, cuyo tamaño es de (6×9) para manipuladores de 6-GDL o (3×6) para 3-GDL. Otro método utilizado, es propuesto por Hosseini, Daniali y Taghirad en [28], y Lou, Liu y Li en [26], donde muestran una forma distinta y más sencilla de lograr homogenizar la matriz Jacobiana, basada en la división de las columnas no uniformes (con unidades) sobre un factor de

ponderación que elimine dichas no uniformidades. Considerando el último método propuesto, podemos reescribir la matriz Jacobiana $J = J_q^{-1}J_x$ (obtenida en el Capítulo anterior) de la siguiente forma:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{1x}b_{1y}-a_{1y}b_{1x}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{2x}b_{2y}-a_{2y}b_{2x}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{3x}b_{3y}-a_{3y}b_{3x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1x} & b_{1y} & \mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \vec{b}_1) |\vec{e}_1| \\ b_{2x} & b_{2y} & \mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_2 \times \vec{b}_2) |\vec{e}_2| \\ b_{3x} & b_{3y} & \mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \vec{b}_3) |\vec{e}_3| \end{bmatrix},$$

donde, \mathbf{e}_i es el vector unitario de \vec{e}_i para $i = 1, 2$ y 3 .

Como se mencionó anteriormente, esta matriz J es dimensionalmente no homogénea, y podemos homogenizarla dividiendo los elementos de la tercera columna con su correspondiente módulo de \vec{e}_i ; tal y como se muestra en la ec.(4.3).

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} \frac{b_{1x}}{a_{1x}b_{1y}-a_{1y}b_{1x}} & \frac{b_{1y}}{a_{1x}b_{1y}-a_{1y}b_{1x}} & \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \vec{b}_1) |\vec{e}_1|}{(a_{1x}b_{1y}-a_{1y}b_{1x}) |\vec{e}_1|} \\ \frac{b_{2x}}{a_{2x}b_{2y}-a_{2y}b_{2x}} & \frac{b_{2y}}{a_{2x}b_{2y}-a_{2y}b_{2x}} & \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_2 \times \vec{b}_2) |\vec{e}_2|}{(a_{2x}b_{2y}-a_{2y}b_{2x}) |\vec{e}_2|} \\ \frac{b_{3x}}{a_{3x}b_{3y}-a_{3y}b_{3x}} & \frac{b_{3y}}{a_{3x}b_{3y}-a_{3y}b_{3x}} & \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \vec{b}_3) |\vec{e}_3|}{(a_{3x}b_{3y}-a_{3y}b_{3x}) |\vec{e}_3|} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Con esto, obtenemos una matriz Jacobiana \hat{J} escalada cinemáticamente, la cual es dimensionalmente homogénea, con la que es posible evaluar la manipulabilidad y/o destreza del mecanismo sin importar su escalamiento en tamaño.

4.3.2. Máximo espacio de trabajo regular

A partir de la observación de que en la mayoría de las máquinas es deseable un espacio de trabajo regular, ya sea, por ejemplo, un círculo o un rectángulo para robots bidimensionales, o un paralelepípedo o esfera para robots tridimensionales; en esta sección se aborda el problema de maximizar el espacio regular de trabajo del robot paralelo planar 3RRR. Este problema está sujeto a restricciones que garantizan un funcionamiento adecuado del sistema, y que lo mantienen alejado de puntos singulares, proveyendo así, una alta destreza en el movimiento.

El espacio regular W que se consideró en este trabajo es en forma de un cuadrado, cuya longitud de un lado es denotado como 2ℓ , y es usado para generar la función objetivo. Además, se busca que dicho espacio de trabajo W permita una rotación del efector final en el intervalo $[-30^\circ, 30^\circ]$, en cualquier punto dentro de él. Con esto, la función objetivo la definimos como ℓ , que es la mitad de la longitud del lado del cuadrado, y cuyo centroide estará ubicado en el centro de la plataforma fija, debido a que el robot 3RRR de estudio es simétrico.

Por lo que el *problema de optimización* se expresa de la siguiente manera:

$$\max_{\alpha} \quad \ell \quad (4.4)$$

sujeta a:

$$\begin{aligned}
\kappa \left(\hat{J}(x, \theta, \alpha) \right) &\geq 0.2, \\
\frac{-\pi}{3} &\leq \theta_1(x, \alpha) \leq \frac{\pi}{3}, \\
\frac{\pi}{3} &\leq \theta_2(x, \alpha) \leq \pi, \\
\pi &\leq \theta_3(x, \alpha) \leq \frac{5\pi}{3}, \\
\phi &= [-30^\circ, 0^\circ, 30^\circ], \\
a + b + e &= 1, \\
a, b &\in [0, 1], \quad e \in [0.1, 0.2], \quad c \in [0.8, 2].
\end{aligned}$$

Para este caso de estudio, la evaluación de cada vector α propuesto, se lleva a cabo considerando los pasos siguientes:

1. Se proyectan nueve puntos equidistantes de longitud Δ_s ⁵, ubicados al centro de la plataforma fija, dado como $\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{\sqrt{12}}\right)$. Las restricciones de la ec.(4.4), se deben cumplir para cada punto.
2. Si todos los puntos cumplen todas las condiciones, la longitud del lado ℓ del cuadrado, que inicialmente es de 0.0, aumenta en $\ell_{t+1} = \ell_t + \Delta_s$. De otra forma, Δ_s decrece a la mitad y ℓ disminuye en $\ell_{t+1} = \ell_t - \Delta_s$ si y solo si $\ell_t > 0$.
3. Este ciclo se repite hasta que Δ_s sea menor a una tolerancia de $1e^{-8}$.

4.4. Métodos de optimización

Con el fin de aproximar las soluciones óptimas de un problema, se hace necesario el uso de métodos de optimización. Varios algoritmos de optimización han sido estudiados e implementados en las últimas décadas, entre ellos podemos encontrar algoritmos basados en gradientes con múltiples puntos de inicio, algoritmos de búsqueda aleatoria controlada o CRS (por sus siglas en inglés), algoritmos evolutivos, entre otros.

Los métodos de optimización adecuados para trabajar en optimización de estructuras y control pueden ser categorizados como basados en gradiente y de búsqueda directa. Un método basado en gradiente, requiere de una función continua, derivable y convexa, ya sea analítica o numérica para poder realizar las derivadas, mientras que los métodos de búsqueda directa solo requieren de evaluaciones de la función objetivo. Los algoritmos evolutivos, son métodos de búsqueda directa; y solamente requieren de la evaluación de la función objetivo (y restricciones), dada una solución candidata sin depender de información derivable, así mismo, estos algoritmos son muy robustos y pueden manejar problemas discontinuos, no-derivables, no lineales e inclusive, problemas que no estén completamente definidos. Estos algoritmos, han sido ampliamente usados en optimización de funciones, optimización combinatoria, control automático, procesamiento de imágenes, robótica y más (*ver* [29], [30], [31]).

⁵ Δ_s deberá iniciar con un número mayor a la tolerancia sugerida, que en nuestro caso es de $1e^{-8}$.

4.4.1. Algoritmos evolutivos

Los *Algoritmos Evolutivos* (EA's, por sus siglas en inglés) son un grupo de técnicas de optimización, con la característica en común de que están inspirados en la evolución de las especies. En la naturaleza, la evolución de las especies se da a través de cambios aleatorios y selección natural. Estas características se pueden aplicar a sistemas computacionales, que, siguiendo los principios de la evolución establecida por Darwin en 1895, evolucionan para optimizar una función dada. En otras palabras, estos algoritmos primero generan una población de candidatos de la solución, después de evaluarlos, se seleccionan a los mejores de la población; entonces se pasan por procesos de variación, mezcla y/o mutación para generar una nueva población con mejores características (genes), es decir, más próximos a una solución óptima. Este proceso se repite a través de generaciones hasta alcanzar el óptimo deseado o un criterio de paro. Básicamente, estos algoritmos tratan de modelar el proceso de evolución natural de los seres vivos, tomando sus componentes y algunas nomenclaturas de esta área. Por ejemplo, hablamos acerca de poblaciones para referirnos a un grupo de soluciones, cada solución es llamada como individuo o cromosoma y cada parte de una solución individual es llamado gen.

Las principales ventajas de los EA's, respecto a los métodos clásicos de optimización son los siguientes: los EA's son ampliamente aplicables, pueden tratar con problemas de multicriterio, multimodales, o con problemas que tengan discontinuidades o restricciones. Los algoritmos evolutivos, también tienen algunas desventajas, por ejemplo, no se garantiza el encontrar la solución óptima global. Además, estos métodos requieren de un alto poder de computo.

Los algoritmos evolutivos usados en este trabajo pueden ser clasificados en tres categorías: Algoritmos de Estimación de Distribución (EDA's) [32], Estrategias Evolutivas (ES's) [33] y Algoritmos Genéticos (GA's) [34]. A pesar de que cada uno de los algoritmos antes mencionados tienen su forma particular de trabajar, todos pueden ser clasificados como algoritmos evolutivos.

4.4.1.1. BUMDA

El Algoritmo de Distribución Marginal Boltzmann Univariado (BUMDA, por sus siglas en inglés) [37], es un EDA que usa un modelo Gaussiano univariado para aproximar la distribución de Boltzmann, cuya función de energía está relacionada con la función objetivo. Esto significa que entre mejor es un individuo, la probabilidad de muestrear en esa región aumenta. BUMDA muestrea candidatos de la solución a partir de distribuciones normales y se ha demostrado que es capaz de obtener soluciones óptimas con un bajo esfuerzo computacional, además, puede ser usado para todos los problemas de optimización. Más información acerca de este algoritmo, así como del código usado en este trabajo puede ser consultada en [38].

4.4.1.2. CMA-ES

La Estrategia Evolutiva de Adaptación de la Matriz de Covarianza (CMA-ES por sus siglas en inglés) [39], es un algoritmo evolutivo robusto, diseñado para tratar con problemas de difícil optimización, como problemas no lineales o no convexos en un dominio continuo, además, este algoritmo puede ser aplicado a problemas con o sin restricciones.

CMA-ES, usa un modelo Gaussiano multivariado. Las soluciones padres son usadas para determinar el tamaño, la posición y la orientación de la distribución Gaussiana usada para muestrear a la población de hijos candidatos para la solución. Una de las más importantes características de CMA-ES es, que la orientación del modelo Gaussiano multivariado direcciona la búsqueda a regiones donde es más probable encontrar una mejor solución y los candidatos son muestreados a partir de una distribución normal multivariada. Información extra acerca de este algoritmo, así como el código en el que se basa este trabajo puede ser consultado en [40].

4.4.1.3. NSGA-II

El Algoritmo Genético de Clasificación No Dominada (NSGA-II, por sus siglas en inglés) [41], es quizás el algoritmo genético mas usado. Este se basa en la recombinación de las soluciones candidatas más prometedoras y realiza selecciones mediante torneo binario, además de que la exploración la realiza mediante un operador de mutación. De forma similar a BUMDA, NSGA-II muestrea en las regiones con mejores individuos.

En nuestro caso, utilizamos este algoritmo para resolver un problema de un solo objetivo. Sin embargo, este algoritmo puede ser aplicado desde problemas mono-objetivo hasta multi-objetivo con o sin restricciones en dominio discreto o continuo. El código en el que se basa este trabajo ser consultado en [42]. Para más información acerca del funcionamiento de este algoritmo véase [43], [44], [45].

4.5. Metodología de optimización propuesta

Una vez que se han introducido el problema de optimización y las herramientas o algoritmos para solucionarlo, tenemos las bases para poder dar a conocer al lector la metodología propuesta para la optimización del espacio de trabajo del robot paralelo planar 3RRR. Es importante resaltar, que, aunque esta metodología se probó con el robot de estudio de esta tesis, puede ser utilizada para la optimización de cualquier otro mecanismo paralelo desde problemas cinemáticos (como en este caso) hasta problemas dinámicos, o inclusive problemas de diseño concurrente en los que se requiera optimizar tanto parámetros geométricos como de control de manera simultánea.

En la Figura 4.1 se muestra una representación gráfica de la metodología, la cual se describe a continuación.

1. Primeramente, seleccionar y describir (modelos cinemáticos o dinámicos según sea el caso, así como sus restricciones) el mecanismo a ser optimizado. Para este trabajo de tesis, usamos el robot paralelo planar 3RRR, pero puede ser cualquier otro.

2. En segundo lugar, seleccionar la función objetivo, así como un espacio de trabajo, trayectoria y/o método de control (dependiendo del tipo de optimización).
3. En tercer lugar, seleccionar un algoritmo de optimización (de los 3 propuestos anteriormente) e ingresar todos los parámetros que este requiera.
4. Por último, ejecutar el proceso de optimización.

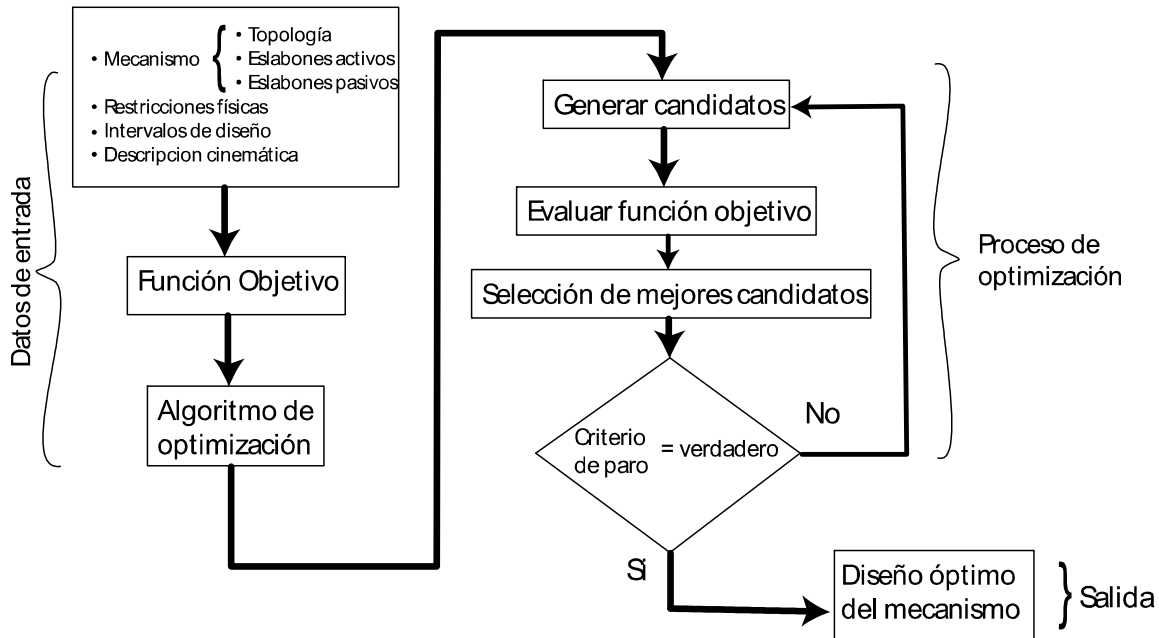


Figura 4.1: Representación gráfica de la metodología de optimización propuesta.

4.6. Resultados

En esta Sección se presentan los resultados obtenidos al problema de optimizar el espacio regular de trabajo del robot paralelo planar 3RRR utilizando los tres algoritmos evolutivos descritos anteriormente. Cada método de optimización fue ejecutado 10 veces. Los criterios de paro para cada algoritmo fueron los siguientes: el BUMDA se detiene si la máxima varianza de las soluciones es menor a 10^{-8} , para una población de 150 individuos. El CMA-ES se detiene después de 90 generaciones o si la diferencia entre dos valores objetivo consecutivos es menor a 10^{-20} . El NSGA-II, se detiene hasta que alcanza las 90 generaciones. Todos los algoritmos se detienen en un máximo de $13500 \cdot \text{length}(\phi)$ evaluaciones, para $\text{length}(\phi) = 3$ en nuestro caso.

Después de ejecutar el proceso de optimización por cada algoritmo, los mejores parámetros de diseño óptimo obtenidos por cada uno son los mostrados en la Tabla 4.2. De estas

configuraciones óptimas, la mejor solución fue dada por el algoritmo CMA-ES. Los resultados de la configuración óptima se muestran gráficamente en la Figura 4.3(a); se observa a simple vista que dicho espacio de trabajo W podría ser mayor, si se mueve de manera adecuada el centroide del espacio de trabajo a un lugar distinto al centro de la base del robot, como originalmente se había planteado. Por lo que anexando a la función objetivo la búsqueda de los parámetros del centroide del espacio de trabajo W , la nueva α sería $\alpha = [a, b, e, c, W_x, W_y]^T$. Después de ejecutar el proceso de optimización nuevamente, se obtiene un nuevo juego de parámetros geométricos óptimos, así como un espacio de trabajo regular mayor. Estos resultados se muestran en la Tabla 4.3, y se muestra gráficamente en la Figura 4.3(b).

Nótese, que estos resultados obtenidos tienen en cuenta el mayor espacio de trabajo regular generado dentro del espacio total del robot 3RRR, para los tres ángulos $\phi = [-30^\circ, 0^\circ, 30^\circ]$, propuestos al mismo tiempo y respetando todas las restricciones anteriormente establecidas.

Con motivos de comparación y que el lector comprenda la importancia de los procesos de optimización del espacio de trabajo, en la Figura 4.2 se muestra el espacio generado por una configuración geométrica no óptima, dada arbitrariamente como $\alpha = [0.4, 0.45, 0.15, 1]$ y cuyo valor objetivo es de $\ell = 0.074$. Además, se muestran también las distribuciones del inverso del número de condición para esta configuración con los tres ángulos $\phi = [-30^\circ, 0^\circ, 30^\circ]$.

AEs	a	b	e	c	$\mathcal{F}(\alpha)$
BUMDA	0.51118	0.388346	0.100473	1.079802	0.171696
CMA-ES	0.503907	0.396078	0.100015	1.08328	0.172193
NSGA-II	0.495418	0.403346	0.101236	1.088016	0.171082

Tabla 4.2: Parámetros óptimos de diseño $\{a, b, e, c\}$ y valor óptimo para el espacio regular de trabajo del robot 3RRR.

AEs	a	b	e	c	W_x	W_y	$\mathcal{F}(\alpha)$
BUMDA	0.516893	0.378633	0.104474	1.116067	0.561310	0.350882	0.179907
CMA-ES	0.4923	0.4076	0.1	1.0928	0.5462	0.3587	0.1848
NSGA-II	0.494040	0.397307	0.108654	1.085320	0.5414	0.3395	0.176982

Tabla 4.3: Parámetros óptimos de diseño $\{a, b, e, c, W_x, W_y\}$ y valor óptimo para el espacio regular del robot 3RRR.

La Figura 4.4 muestra la distribución y las curvas de nivel del inverso del número de condición de la matriz Jacobiana homogénea, para los parámetros óptimos de diseño obtenidos por CMA-ES, de acuerdo a la Tabla 4.3, cuando $\phi = -30^\circ, 0^\circ$ y 30° respectivamente. Estas curvas de nivel, así como en los mapas topográficos ilustran las diferencias en altitud de un punto a otro en el terreno, dan al lector una noción fácil y rápida acerca del espacio de

trabajo que puede alcanzar el robot manteniendo un cierto nivel de destreza en su movimiento para una orientación angular dada de la plataforma móvil. Comparando la distribución de estas curvas de nivel del mecanismo optimizado con las obtenidas por la configuración no óptima de la Figura 4.2, se aprecia claramente la diferencia en el cambio del espacio de trabajo por cada nivel de destreza (niveles del inverso del número de condición) que cada configuración puede alcanzar.

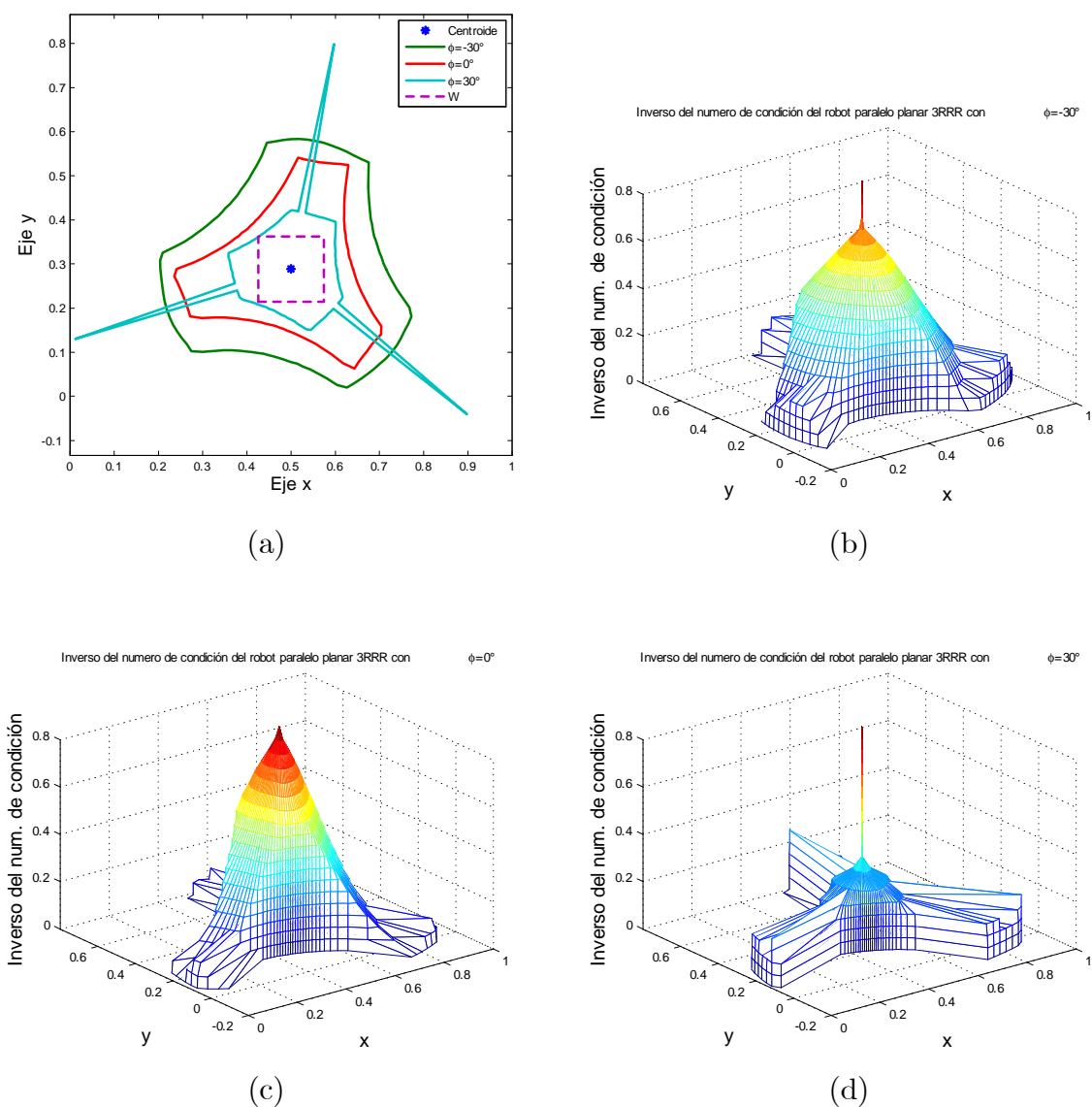


Figura 4.2: (a) Espacio de trabajo regular generado por la configuración geométrica no óptima, (b) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = -30^\circ$, (c) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = 0^\circ$, (d) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = 30^\circ$.

4.7. Conclusiones

En este Capítulo se mostró la obtención de un espacio regular óptimo de trabajo para el robot 3RRR. Se emplearon tres tipos de algoritmos evolutivos y se compararon para saber cual generó el mejor resultado. También, se logró ampliar aún más el espacio de trabajo regular, al incluir al proceso de optimización la posición del centroide de dicho espacio, y no simplemente fijarlo al centro de la plataforma fija como se había propuesto primeramente. Se debe hacer notar que, para obtener el espacio de trabajo mas grande del mecanismo, el tamaño de la plataforma móvil tiende a reducirse.

Además, de que, si se desea que el espacio sea lo mayor posible, se puede dejar fija la plataforma móvil a cierto ángulo ϕ , tal que maximice el espacio de trabajo. Es decir, maximizar el espacio de trabajo en función de α , donde $\alpha = [a, b, e, c, W_x, W_y, \phi]^T$. Esto podría ser muy útil en tareas en donde no sea necesario el tercer grado de libertad (rotación) que posee la plataforma móvil; o bien en tareas en que se reemplace dicho grado de libertad de la plataforma móvil, por uno que posea la herramienta en el efector final.

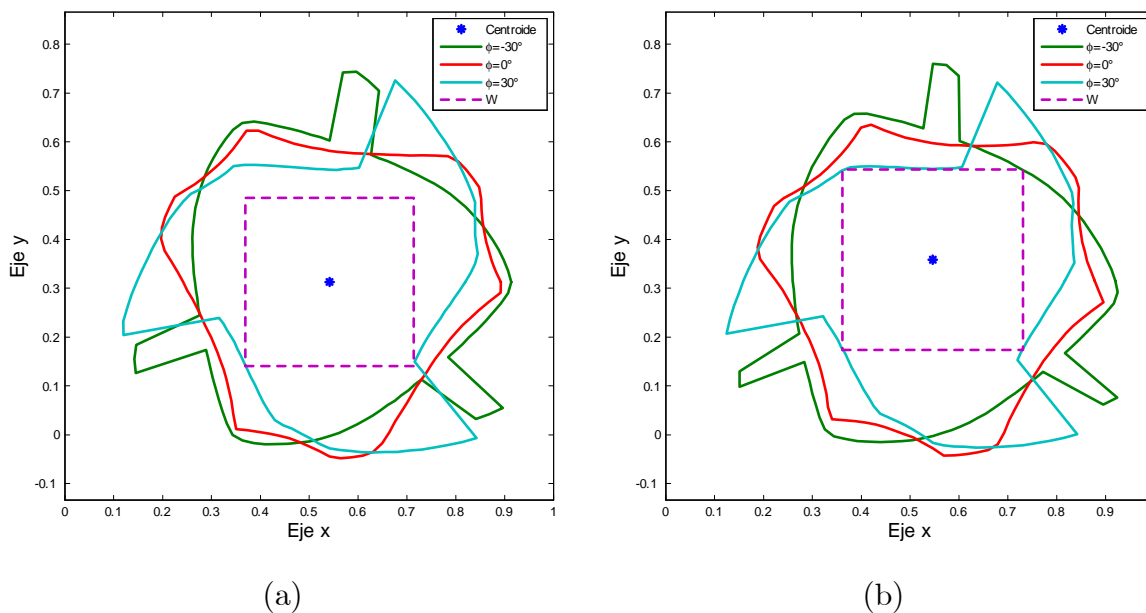


Figura 4.3: Espacios generados por la geometría óptima: (a) Optimización del espacio de trabajo con el centroide fijo en el centro de la plataforma fija, (b) Optimización del espacio de trabajo con centroide optimizado.

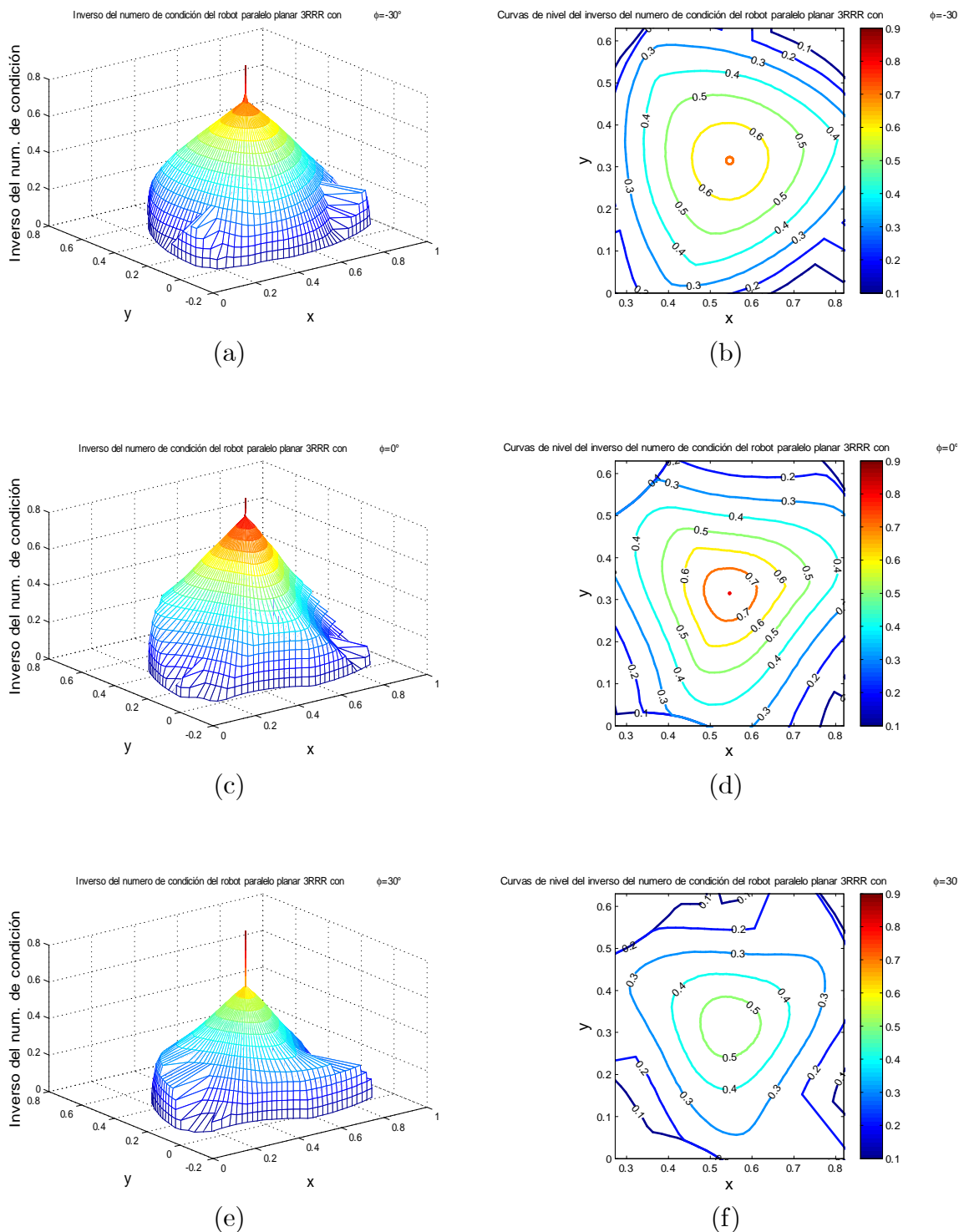


Figura 4.4: (a) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = -30^\circ$, (b) Curvas de nivel del número de condición de \hat{J} con $\phi = -30^\circ$, (c) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = 0^\circ$, (d) Curvas de nivel del número de condición de \hat{J} con $\phi = 0^\circ$, (e) Inverso del número de condición de \hat{J} con $\phi = 30^\circ$, (f) Curvas de nivel del número de condición de \hat{J} con $\phi = 30^\circ$.

Capítulo 5

Modelo Dinámico

5.1. Introducción

En este Capítulo se presenta el estudio de la *dinámica* del robot paralelo planar 3RRR en su estructura típica (ver Figura 2.1 en la pág. 8 de la Sección 2.1). Para afrontar este Capítulo, se decidió usar el método de formulación *Lagrangiana*, dada la eficiencia que posee ante el método de *Newton-Euler* o el *Principio del Trabajo Virtual*, para el estudio de plataformas relativamente sencillas.

La formulación Lagrangiana está basada en la premisa de que la dinámica inversa de algunos manipuladores paralelos relativamente simples, puede ser resuelta aplicando las ecuaciones de Lagrange de primer tipo. Estas pueden ser escritas en términos de un grupo de coordenadas redundantes, por lo que el sistema requiere de un grupo de ecuaciones de restricción derivada de la cinemática del mecanismo. Las ecuaciones Lagrangianas de primer tipo pueden ser escritas como (ver [1]):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j}, \quad \text{para } j = 1 \text{ a } n, \quad (5.1)$$

donde, L es el Lagrangiano del mecanismo (la diferencia de la energía cinética total E_c y la energía potencial total E_p , $L = E_c - E_p$); q_j es la j -ésima coordenada generalizada; \dot{q}_j denota la derivada respecto del tiempo de la j -ésima coordenada generalizada; Q_j es la fuerza generalizada aplicada en la j -ésima coordenada generalizada; Γ_i denota la i -ésima función de restricción; k el número de funciones de restricción y, λ_i es el i -ésimo multiplicador de Lagrange.

Mediante el arreglo de las ecuaciones de Lagrange en dos partes, la solución a las ecuaciones de movimiento puede ser menos compleja. Una parte que contenga a los multiplicadores de Lagrange como las únicas variables desconocidas, y otra que contenga las fuerzas generalizadas dadas por los actuadores, como variables desconocidas adicionales. La primera

parte puede ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \widehat{Q}_j, \quad (5.2)$$

donde \widehat{Q}_j , si existe, representa las fuerzas generalizadas contribuidas por un agente externo. Para el estudio de la dinámica inversa, \widehat{Q}_j es dada, por lo que toda la parte derecha de la ec.(5.2) es conocida. Al escribir la ec.(5.2) para cada sistema coordinado redundante, resulta un grupo de k ecuaciones lineales en función de los k multiplicadores de Lagrange. Una vez que los multiplicadores de Lagrange son calculados, las fuerzas o pares de los actuadores pueden ser determinadas por las ecuaciones restantes.

Estas ecuaciones restantes son el segundo grupo descrito anteriormente, y que puede ser escrito como:

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j}, \quad \text{para } j = k + 1 \text{ hasta } n, \quad (5.3)$$

donde Q_j , como ya se describió anteriormente, representa la fuerza o par aplicado por los actuadores.

5.2. Lagrangiano del robot

Se ha considerado que todos los eslabones del robot 3RRR típico, son cuerpos rígidos. En la Figura 5.1 se muestran los parámetros dinámicos de un brazo del robot, donde m_{ai} y m_{bi} representan las masas del i -ésimo eslabón activo y pasivo, respectivamente; I_{ai} e I_{bi} representan los momentos de inercias de masa del i -ésimo eslabón activo y pasivo, respectivamente; m_G e I_G representan la masa y el momento de inercia de la plataforma móvil, respectivamente; l_{ai} y l_{bi} representan las distancias al centro de masa del i -ésimo eslabón activo y pasivo, respectivamente. Cómo se había comentado anteriormente, a_i y b_i representan las longitudes del i -ésimo eslabón activo y pasivo, respectivamente; θ_i y ψ_i representan los desplazamientos angulares del i -ésimo eslabón activo y pasivo, respectivamente; y ϕ , el desplazamiento angular de la plataforma móvil.

Para empezar con el desarrollo del modelo dinámico, se necesitan definir las coordenadas generalizadas. Teóricamente, el análisis dinámico del robot 3RRR puede lograrse usando únicamente tres coordenadas generalizadas¹: θ_1 , θ_2 , y θ_3 ; esto a partir del hecho de que es un robot de 3GDL. Sin embargo, hacer esto llevaría a trabajar con expresiones demasiado complejas; por lo que, en lugar de usar únicamente tres coordenadas generalizadas, se introducen otras tres coordenadas generalizadas, redundantes²: G_x , G_y , y ϕ . A partir de lo anterior, las

¹Estas variables fueron consideradas en el estudio de la cinemática inversa del robot (ver Capítulo 2). Es importante comentar, que éstas son las variables angulares de los eslabones actuados.

²Estas coordenadas describen la posición y orientación de la plataforma móvil (efector final), y que fueron estudiadas en la cinemática directa (ver Capítulo 2).

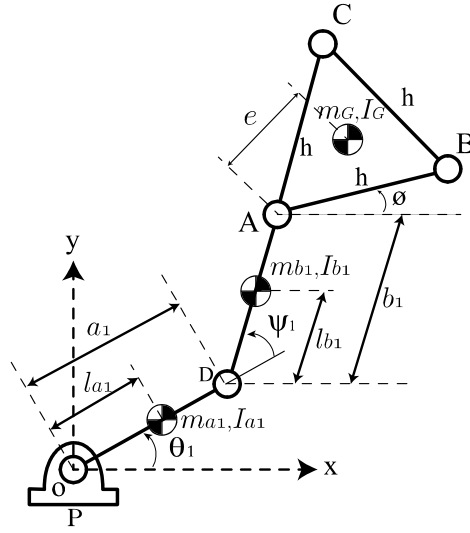


Figura 5.1: Parámetros dinámicos de un brazo del robot paralelo 3RRR típico.

coordenadas generalizadas definidas para el estudio de la dinámica del robot, son: G_x , G_y , ϕ , θ_1 , θ_2 , y θ_3 .

El Lagrangiano del robot se reduce a $L = E_c$, ya que está desprovisto de energía potencial; debido a que el movimiento del robot se realiza solamente en el plano horizontal.

Entonces, la energía cinética total del robot manipulador 3RRR está dado por:

$$E_c = K_G + \sum_{i=1}^3 (K_{ai} + K_{bi}), \quad (5.4)$$

donde, K_G es la energía cinética de la plataforma móvil; K_{ai} es la energía cinética del i -ésimo eslabón actuado; y K_{bi} es la energía cinética del i -ésimo eslabón pasivo. Particularmente,

$$\begin{aligned} K_G &= \frac{1}{2} m_G (\dot{G}_x^2 + \dot{G}_y^2) + \frac{1}{2} I_G \dot{\phi}^2, \\ K_{ai} &= \frac{1}{2} m_{ai} (\dot{x}_{ai}^2 + \dot{y}_{ai}^2) + \frac{1}{2} I_{ai} \dot{\theta}_i^2, \\ K_{bi} &= \frac{1}{2} m_{bi} (\dot{x}_{bi}^2 + \dot{y}_{bi}^2) + \frac{1}{2} I_{bi} (\dot{\psi}_i + \dot{\theta}_i)^2. \end{aligned}$$

Las coordenadas de los centros de masa de cada eslabón activo y pasivo, están dadas por:

$$\begin{aligned} x_{a1} &= x_P + l_{a1} \cos \theta_1, & y_{a1} &= y_P + l_{a1} \sin \theta_1, \\ x_{a2} &= x_Q + l_{a2} \cos \theta_2, & y_{a2} &= y_Q + l_{a2} \sin \theta_2, \\ x_{a3} &= x_R + l_{a3} \cos \theta_3, & y_{a3} &= y_R + l_{a3} \sin \theta_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{b1} &= x_P + a_1 \cos \theta_1 + l_{b1} \cos(\theta_1 + \psi_1), & y_{b1} &= y_P + a_1 \sin \theta_1 + l_{b1} \sin(\theta_1 + \psi_1), \\ x_{b2} &= x_Q + a_2 \cos \theta_2 + l_{b2} \cos(\theta_2 + \psi_2), & y_{b2} &= y_Q + a_2 \sin \theta_2 + l_{b2} \sin(\theta_2 + \psi_2), \\ x_{b3} &= x_R + a_3 \cos \theta_3 + l_{b3} \cos(\theta_3 + \psi_3), & y_{b3} &= y_R + a_3 \sin \theta_3 + l_{b3} \sin(\theta_3 + \psi_3), \end{aligned}$$

y sus derivadas respecto del tiempo, corresponden a:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{a1} &= -l_{a1} \sin \theta_1 \dot{\theta}_1, & \dot{y}_{a1} &= l_{a1} \cos \theta_1 \dot{\theta}_1, \\ \dot{x}_{a2} &= -l_{a2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_2, & \dot{y}_{a2} &= l_{a2} \cos \theta_2 \dot{\theta}_2, \\ \dot{x}_{a3} &= -l_{a3} \sin \theta_3 \dot{\theta}_3, & \dot{y}_{a3} &= l_{a3} \cos \theta_3 \dot{\theta}_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{b1} &= -a_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_{b1} \sin(\theta_1 + \psi_1)(\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1), & \dot{y}_{b1} &= a_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_{b1} \cos(\theta_1 + \psi_1)(\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1), \\ \dot{x}_{b2} &= -a_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 - l_{b2} \sin(\theta_2 + \psi_2)(\dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2), & \dot{y}_{b2} &= a_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_{b2} \cos(\theta_2 + \psi_2)(\dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2), \\ \dot{x}_{b3} &= -a_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 - l_{b3} \sin(\theta_3 + \psi_3)(\dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3), & \dot{y}_{b3} &= a_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_{b3} \cos(\theta_3 + \psi_3)(\dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3).\end{aligned}$$

Como se puede observar, en la energía de los eslabones pasivos aparece involucrada la variable pasiva ψ_i , la cual puede ser expresada en términos de otras variables. Si observamos la Figura 5.1, se puede considerar al brazo del robot 3RRR como un robot planar de 2GDL; y de donde se puede obtener a ψ_i en función de la posición de A , B o C , según sea el caso. Tomando la solución para la cinemática inversa de un robot planar de 2GDL (ver [17]), se puede expresar a ψ_1 de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\cos \psi_1 &= \left(\frac{x_A^2 + y_A^2 - a_1^2 - b_1^2}{2a_1b_1} \right) := D, \\ \psi_1 &= \cos^{-1}(D).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Sin embargo, ese mismo ángulo puede ser expresado con la función tangente. Si el $\cos(\psi_1)$ es dado por la ec.(5.5), entonces el $\sin(\psi_1)$, es presentado como:

$$\sin \psi_1 = \pm \sqrt{1 - D^2},\tag{5.6}$$

y por lo tanto, ψ_1 puede ser calculado por:

$$\psi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\pm \sqrt{1 - D^2}}{D} \right),\tag{5.7}$$

donde, x_A y y_A toman su valor de la ec.(2.26). Para los otros dos ángulos, ψ_2 y ψ_3 , se realiza el mismo procedimiento.

Sabiendo que la derivada de la función \tan^{-1} es:

$$y = \tan^{-1}(z), \quad y' = \frac{z'}{1+z^2},$$

y si $z = \frac{u}{v}$, entonces $z' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Para el caso de ψ_1 , las variables u y v corresponden a: $u = \pm \sqrt{1 - D^2}$ y $v = D$. Por lo que la derivada de ψ_1 resulta:

$$\dot{\psi}_1 = \frac{-D'}{\pm \sqrt{1 - D^2}},\tag{5.8}$$

donde,

$$D' = \frac{x_A \dot{x}_A + y_A \dot{y}_A}{a_1 b_1}.$$

Nótese que la ec.(5.8) contiene a la derivada de x_A y y_A , las cuales hacen inmenso el cálculo de la derivada de ψ . Debido a que existe un cociente de restas de productos en función de múltiples variables en el tiempo. Otra alternativa es, calcular a ϕ a partir de la cinemática directa, para hacer uso de las ecuaciones que relacionan a la orientación del efector final con la posición de los vértices de éste; de manera similar a las ecs.(2.3) y (2.4).

Con todo esto, y empleando las identidades trigonométricas de:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i &= 1, \\ \sin \theta_i \sin (\theta_i + \psi_i) + \cos \theta_i \cos (\theta_i + \psi_i) &= \cos (\theta_i - \theta_i - \psi_i) = \cos (-\psi_i) = \cos \psi_i, \end{aligned}$$

el Lagrangiano del robot queda expresado finalmente como:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_G (\dot{G}_x^2 + \dot{G}_y^2) + \frac{1}{2} I_G \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_{a1} l_{a1}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{a1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_{a2} l_{a2}^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{a2} \dot{\theta}_2^2 \\ &+ \frac{1}{2} m_{a3} l_{a3}^2 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} I_{a3} \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} m_{b1} \left(a_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{b1}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1)^2 + 2a_1 l_{b1} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\psi}_2) \cos \psi_1 \right) \\ &+ \frac{1}{2} I_{b1} (\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_{b2} \left(a_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_{b2}^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2)^2 + 2a_2 l_{b2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\psi}_2) \cos \psi_2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} I_{b2} (\dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2)^2 + \frac{1}{2} m_{b3} \left(a_3^2 \dot{\theta}_3^2 + l_{b3}^2 (\dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3)^2 + 2a_3 l_{b3} (\dot{\theta}_3^2 + \dot{\theta}_3 \dot{\psi}_3) \cos \psi_3 \right) \\ &+ \frac{1}{2} I_{b3} (\dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3)^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ahora, es necesario determinar las funciones de restricción del robot, a partir de su arquitectura cinemática.

5.3. Funciones de restricción

Siguiendo con la formulación Lagrangiana en que se usan seis coordenadas generalizadas para describir la dinámica del robot 3RRR, de las cuales tres son redundantes, se hace necesario el uso de tres funciones de restricción: Γ_i para $i = 1, 2, 3$. Estas funciones surgen del hecho en que la distancia entre las uniones D y A , E y B , F y C en el robot 3RRR, siempre se mantienen iguales a la longitud de los eslabones pasivos: b_1 , b_2 , y b_3 , respectivamente.

La primera función de restricción puede ser obtenida al considerar la ecuación de cerradura del primer brazo del robot, tal como se muestra en la Figura 5.2(a), quedando expresada la función de restricción como:

$$\Gamma_1 = \|\overline{DA}\|^2 - b_1^2 = 0, \quad (5.10)$$

donde, $\overline{DA} = \overline{PG} + \overline{GA} - \overline{PD}$; y puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \left(G_x - e_1 \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \cos \theta_1 \right)^2 \\
 &\quad + \left(G_y - e_1 \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \sin \theta_1 \right)^2 - b_1^2 \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

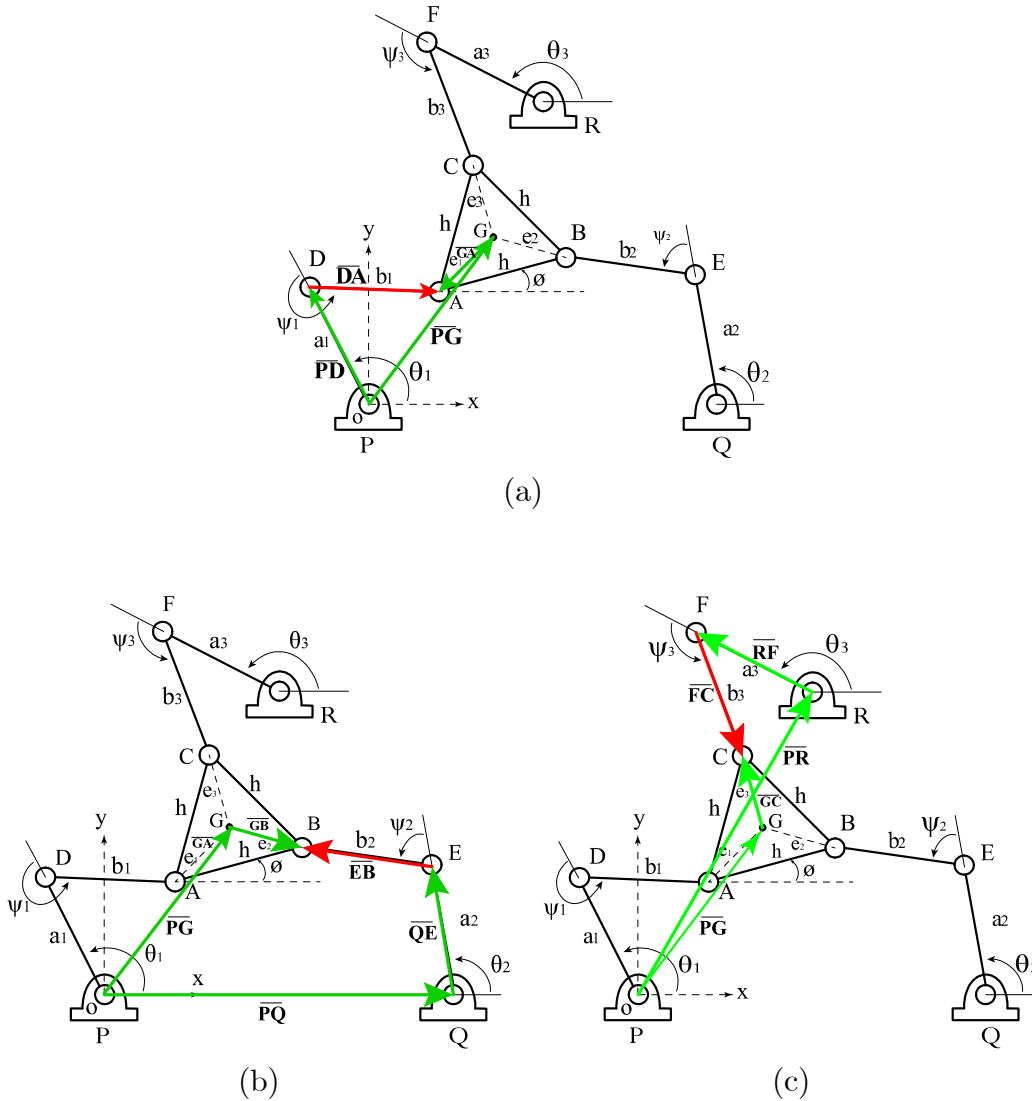


Figura 5.2: Esquemas del robot 3RRR a partir del cual se obtienen las funciones de restricción. (a) Diagrama para la función de restricción Γ_1 . (b) Diagrama para la función de restricción Γ_2 . (c) Diagrama para la función de restricción Γ_3 .

Para obtener la segunda función de restricción, se procede de la misma manera. Con-

siderando la ecuación de cerradura del segundo brazo del robot, mostrada en la Figura 5.2(b), la función de restricción puede ser expresada como:

$$\Gamma_2 = \|\overline{EB}\|^2 - b_2^2 = 0, \quad (5.12)$$

donde, $\overline{EB} = \overline{PG} + \overline{GB} - \overline{PQ} - \overline{QE}$; y que puede reescribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \left(G_x + e_2 \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - x_Q - a_2 \cos \theta_2 \right)^2 \\ &\quad + \left(G_y + e_2 \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - y_Q - a_2 \sin \theta_2 \right)^2 - b_2^2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Por último, se obtiene la tercera función de restricción. De acuerdo a la ecuación de cerradura del tercer brazo del robot mostrada en la Figura 5.2(c), puede expresarse también como:

$$\Gamma_3 = \|\overline{FC}\|^2 - b_3^2 = 0, \quad (5.14)$$

donde, $\overline{FC} = \overline{PG} + \overline{GC} - \overline{PR} - \overline{RF}$; y que puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= (G_x - e_3 \sin(\phi) - x_R - a_3 \cos \theta_3)^2 \\ &\quad + (G_y + e_3 \cos(\phi) - y_R - a_3 \sin \theta_3)^2 - b_3^2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Una vez obtenidas las funciones de restricción, se procede a realizar los cálculos de las ecuaciones de Lagrange del robot 3RRR.

5.4. Ecuaciones de movimiento

Hasta el momento se han definido las coordenadas generalizadas (tres redundantes y tres no redundantes), se ha calculado el Lagrangiano (ec.(5.9)) y las tres funciones de restricción (ecs.(5.11), (5.13) y (5.15)). Ahora, pueden ser presentadas las ecuaciones de Lagrange para el robot 3RRR, a partir de las ecs.(5.2) y (5.3).

Por consiguiente, para las coordenadas generalizadas redundantes G_x , G_y y ϕ , es decir para $j = 1, 2$ y 3 , se determinan los multiplicadores de Lagrange como sigue:

$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial G_x} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial G_x} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial G_x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{G}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial G_x} - f_{G_x}, \quad (5.16)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial G_y} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial G_y} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial G_y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{G}_y} \right) - \frac{\partial L}{\partial G_y} - f_{G_y}, \quad (5.17)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \phi} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \phi} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} - \tau_\phi, \quad (5.18)$$

donde f_{G_x} y f_{G_y} son las componentes de alguna fuerza externa en la plataforma móvil, y τ_ϕ es un par externo aplicado en ϕ . Las ecs.(5.16), (5.17) y (5.18) forman un conjunto de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, de las cuales pueden determinarse los tres multiplicadores de Lagrange λ_1 , λ_2 y λ_3 del sistema. Una vez obtenidos éstos multiplicadores, los pares en los actuadores se pueden determinar mediante sustitución en las siguientes ecuaciones:

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_1} - \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_1} - \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_1}, \quad (5.19)$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_2} - \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_2} - \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_2}, \quad (5.20)$$

$$\tau_3 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} - \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_3} - \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_3} - \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_3}, \quad (5.21)$$

para $j = 4, 5$ y 6 ; es decir, para las coordenadas generalizadas no redundantes, θ_1 , θ_2 y θ_3 .

El cálculo de las derivadas, del Lagrangiano y de las funciones de restricción, respecto de las coordenadas generalizadas redundantes, son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{G}_x} \right) &= m_G \ddot{G}_x, & \frac{\partial L}{\partial G_x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{G}_y} \right) &= m_G \ddot{G}_y, & \frac{\partial L}{\partial G_y} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= I_G \ddot{\phi}, & \frac{\partial L}{\partial \phi} &= - \sum_{i=1}^3 m_{bi} a_i l_{bi} \left(\dot{\theta}_i^2 + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \right) \sin(\psi_i) \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial G_x} &= 2 \left(G_x - e_1 \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \cos \theta_1 \right), \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial G_x} &= 2 \left(G_x + e_2 \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - x_Q - a_2 \cos \theta_2 \right), \\ \frac{\partial \Gamma_3}{\partial G_x} &= 2 \left(G_x - e_3 \sin \phi - x_R - a_3 \cos \theta_3 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial G_y} &= 2 \left(G_y - e_1 \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \sin \theta_1 \right), \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial G_y} &= 2 \left(G_y + e_2 \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - y_Q - a_2 \sin \theta_2 \right), \\ \frac{\partial \Gamma_3}{\partial G_y} &= 2 \left(G_y + e_3 \cos \phi - y_R - a_3 \sin \theta_3 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \phi} &= 2 \left(G_x - e_1 \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \cos \theta_1 \right) \left(e_1 \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) \right) \\
&\quad - 2 \left(G_y - e_1 \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \sin \theta_1 \right) \left(e_1 \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) \right), \\
\frac{\partial \Gamma_2}{\partial \phi} &= -2 \left(G_x + e_2 \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - x_Q - a_2 \cos \theta_2 \right) \left(e_2 \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\
&\quad + 2 \left(G_y + e_2 \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - y_Q - a_2 \sin \theta_2 \right) \left(e_2 \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \right), \\
\frac{\partial \Gamma_3}{\partial \phi} &= -2e_3 \cos \phi (G_x - e_3 \sin \phi - x_R - a_3 \cos \theta_3) - 2e_3 \sin \phi (G_y + e_3 \cos \phi - y_R - a_3 \sin \theta_3).
\end{aligned}$$

Como se puede observar, las derivadas parciales del Lagrangiano L respecto a G_x y G_y , son cero; debido a que la ec.(5.7), para el cálculo de los ángulos pasivos ψ_i (para $i = 1, 2$ y 3), está en función de x_A y y_A , las cuales a su vez están escritas en función de ϕ , θ_1 , θ_2 y θ_3 .

Ahora, los cálculos de las derivadas del Lagrangiano y las funciones de restricción, respecto de las coordenadas generalizadas no redundantes, resultan:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= - \sum_{i=1}^3 m_{bi} a_i l_{bi} \left(\dot{\theta}_i^2 + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \right) \sin(\psi_i) \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_1}, \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= - \sum_{i=1}^3 m_{bi} a_i l_{bi} \left(\dot{\theta}_i^2 + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \right) \sin(\psi_i) \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_2}, \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_3} &= - \sum_{i=1}^3 m_{bi} a_i l_{bi} \left(\dot{\theta}_i^2 + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \right) \sin(\psi_i) \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_3}, \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_{a1} l_{a1}^2 \ddot{\theta}_1 + I_{a1} \ddot{\theta}_1 + I_{b1} \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\psi}_1 \right) \\
&\quad + m_{b1} \left[a_1^2 \ddot{\theta}_1 + l_{b1}^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\psi}_1 \right) + a_1 l_{b1} \left(\left(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\psi}_1 \right) \cos \psi_1 - \left(2\dot{\theta}_1 \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1^2 \right) \sin \psi_1 \right) \right], \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_{a2} l_{a2}^2 \ddot{\theta}_2 + I_{a2} \ddot{\theta}_2 + I_{b2} \left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\psi}_2 \right) \\
&\quad + m_{b2} \left[a_2^2 \ddot{\theta}_2 + l_{b2}^2 \left(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\psi}_2 \right) + a_2 l_{b2} \left(\left(2\ddot{\theta}_2 + \ddot{\psi}_2 \right) \cos \psi_2 - \left(2\dot{\theta}_2 \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_2^2 \right) \sin \psi_2 \right) \right], \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) &= m_{a3} l_{a3}^2 \ddot{\theta}_3 + I_{a3} \ddot{\theta}_3 + I_{b3} \left(\ddot{\theta}_3 + \ddot{\psi}_3 \right) \\
&\quad + m_{b3} \left[a_3^2 \ddot{\theta}_3 + l_{b3}^2 \left(\ddot{\theta}_3 + \ddot{\psi}_3 \right) + a_3 l_{b3} \left(\left(2\ddot{\theta}_3 + \ddot{\psi}_3 \right) \cos \psi_3 - \left(2\dot{\theta}_3 \dot{\psi}_3 + \dot{\psi}_3^2 \right) \sin \psi_3 \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_1} &= 2a_1 \sin \theta_1 \left(G_x - e_1 \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \cos \theta_1 \right) \\ &\quad - 2a_1 \cos \theta_1 \left(G_y - e_1 \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \sin \theta_1 \right),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial \theta_1} = 0, \quad \text{para } i = 2, 3.,$$

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial \theta_2} = 0, \quad \text{para } i = 1, 3.,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_2} &= 2a_2 \sin \theta_2 \left(G_x + e_2 \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - x_Q - a_2 \cos \theta_2 \right) \\ &\quad - 2a_2 \cos \theta_2 \left(G_y + e_2 \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - y_Q - a_2 \sin \theta_2 \right),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial \theta_3} = 0, \quad \text{para } i = 1, 2.,$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_1} = 2a_3 \sin \theta_3 (G_x - e_3 \sin \phi - x_R - a_3 \cos \theta_3) - 2a_3 \cos \theta_3 (G_y + e_3 \cos \phi - y_R - a_3 \sin \theta_3).$$

Sustituyendo las derivadas tanto de la función de Lagrange como de las funciones de restricción, correspondientes a las coordenadas generalizadas redundantes, en las ecs.(5.16), (5.17), (5.18), se obtiene:

$$\lambda_1 \eta_{11} + \lambda_2 \eta_{12} + \lambda_3 \eta_{13} = m_G \ddot{G}_x - f_{Gx}, \quad (5.22)$$

$$\lambda_1 \eta_{21} + \lambda_2 \eta_{22} + \lambda_3 \eta_{23} = m_G \ddot{G}_y - f_{Gy}, \quad (5.23)$$

$$\lambda_1 \eta_{31} + \lambda_2 \eta_{32} + \lambda_3 \eta_{33} = I_G \ddot{\phi} - \left(- \sum_{i=1}^3 m_{bi} a_i l_{bi} \left(\dot{\theta}_i^2 + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \right) \sin(\psi_i) \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi} \right) - \tau_\phi, \quad (5.24)$$

donde,

$$\eta_{11} = 2 \left(G_x - e_1 \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \cos \theta_1 \right),$$

$$\eta_{12} = 2 \left(G_x + e_2 \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - x_Q - a_2 \cos \theta_2 \right),$$

$$\eta_{13} = 2 (G_x - e_3 \sin \phi - x_R - a_3 \cos \theta_3),$$

$$\eta_{21} = 2 \left(G_y - e_1 \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \sin \theta_1 \right),$$

$$\eta_{22} = 2 \left(G_y + e_2 \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - y_Q - a_2 \sin \theta_2 \right),$$

$$\eta_{23} = 2 (G_y + e_3 \cos \phi - y_R - a_3 \sin \theta_3),$$

$$\begin{aligned}
\eta_{31} &= 2 \left(G_x - e_1 \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \cos \theta_1 \right) \left(e_1 \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) \right) \\
&\quad - 2 \left(G_y - e_1 \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \sin \theta_1 \right) \left(e_1 \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) \right), \\
\eta_{32} &= -2 \left(G_x + e_2 \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - x_Q - a_2 \cos \theta_2 \right) \left(e_2 \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\
&\quad + 2 \left(G_y + e_2 \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - y_Q - a_2 \sin \theta_2 \right) \left(e_2 \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \right), \\
\eta_{33} &= -2e_3 \cos \phi (G_x - e_3 \sin \phi - x_R - a_3 \cos \theta_3) - 2e_3 \sin \phi (G_y + e_3 \cos \phi - y_R - a_3 \sin \theta_3).
\end{aligned}$$

Así también, sustituyendo las derivadas tanto de la función de Lagrange como de las funciones de restricción, correspondientes a las coordenadas generalizadas no redundantes, en las ecs.(5.19), (5.20) y (5.21), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= m_{a1} l_{a1}^2 \ddot{\theta}_1 + I_{a1} \ddot{\theta}_1 + I_{b1} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\psi}_1) + \Theta_1 \\
&\quad - \left(- \sum_{i=1}^3 m_{bi} a_i l_{bi} (\dot{\theta}_i^2 + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i) \sin(\psi_i) \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_1} \right) - \lambda_1 \gamma_{11}, \quad (5.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= m_{a2} l_{a2}^2 \ddot{\theta}_2 + I_{a2} \ddot{\theta}_2 + I_{b2} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\psi}_2) + \Theta_2 \\
&\quad - \left(- \sum_{i=1}^3 m_{bi} a_i l_{bi} (\dot{\theta}_i^2 + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i) \sin(\psi_i) \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_2} \right) - \lambda_2 \gamma_{22}, \quad (5.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= m_{a3} l_{a3}^2 \ddot{\theta}_3 + I_{a3} \ddot{\theta}_3 + I_{b3} (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\psi}_3) + \Theta_3 \\
&\quad - \left(- \sum_{i=1}^3 m_{bi} a_i l_{bi} (\dot{\theta}_i^2 + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i) \sin(\psi_i) \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_3} \right) - \lambda_3 \gamma_{33}, \quad (5.27)
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= m_{b1} \left[a_1^2 \ddot{\theta}_1 + l_{b1}^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\psi}_1) + a_1 l_{b1} \left((2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\psi}_1) \cos \psi_1 - (2\dot{\theta}_1 \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1^2) \sin \psi_1 \right) \right], \\
\Theta_2 &= m_{b2} \left[a_2^2 \ddot{\theta}_2 + l_{b2}^2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\psi}_2) + a_2 l_{b2} \left((2\ddot{\theta}_2 + \ddot{\psi}_2) \cos \psi_2 - (2\dot{\theta}_2 \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_2^2) \sin \psi_2 \right) \right], \\
\Theta_3 &= m_{b3} \left[a_3^2 \ddot{\theta}_3 + l_{b3}^2 (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\psi}_3) + a_3 l_{b3} \left((2\ddot{\theta}_3 + \ddot{\psi}_3) \cos \psi_3 - (2\dot{\theta}_3 \dot{\psi}_3 + \dot{\psi}_3^2) \sin \psi_3 \right) \right], \\
\gamma_{11} &= 2a_1 \sin \theta_1 \left(G_x - e_1 \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \cos \theta_1 \right) \\
&\quad - 2a_1 \cos \theta_1 \left(G_y - e_1 \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - a_1 \sin \theta_1 \right), \\
\gamma_{22} &= 2a_2 \sin \theta_2 \left(G_x + e_2 \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - x_Q - a_2 \cos \theta_2 \right) \\
&\quad - 2a_2 \cos \theta_2 \left(G_y + e_2 \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - y_Q - a_2 \sin \theta_2 \right), \\
\gamma_{33} &= 2a_3 [\sin \theta_3 (G_x - e_3 \sin \phi - x_R - a_3 \cos \theta_3) - \cos \theta_3 (G_y + e_3 \cos \phi - y_R - a_3 \sin \theta_3)],
\end{aligned}$$

Las ecs.(5.22), (5.23) y (5.24), en conjunto con las ecs.(5.25), (5.26) y (5.27), representan el modelo dinámico completo del robot paralelo planar 3RRR; que además, pueden ser usados para el control en tiempo real de éste. Es importante comentar de la complejidad que conlleva calcular la derivada de los ángulos pasivos ψ_i . Es fácil entonces darse cuenta de la necesidad de una reducción de la complejidad del modelo dinámico, ya que estos ángulos aparecen múltiples veces y en forma de productos en la ecuación de Lagrange. En el siguiente Capítulo se presenta una estrategia de simplificación de la complejidad del modelo dinámico para el robot 3RRR.

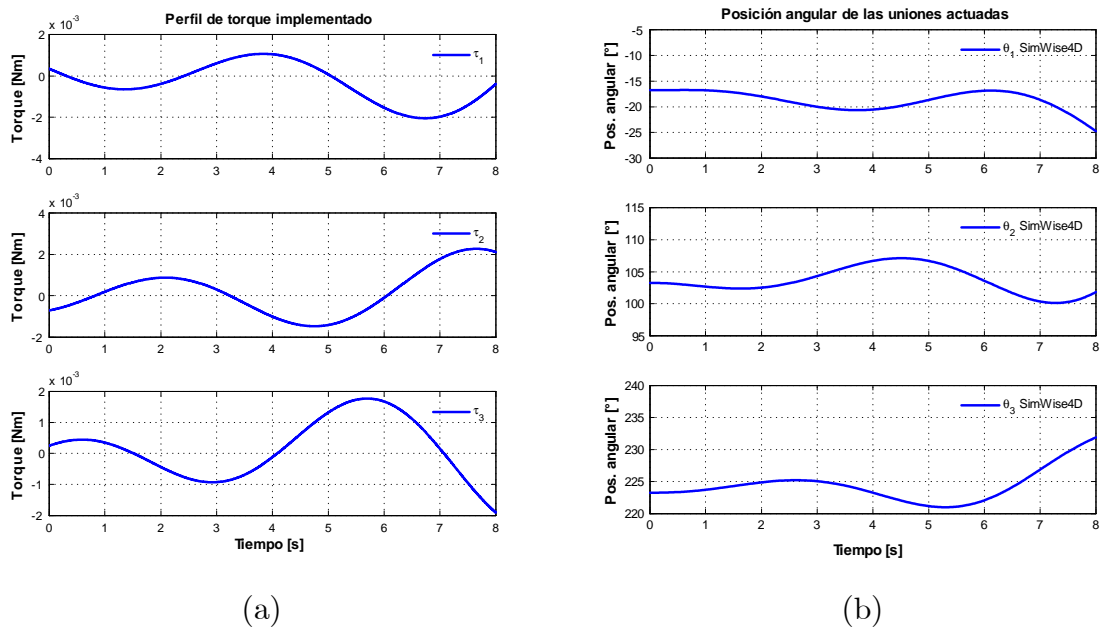
5.5. Simulaciones dinámicas

A continuación se muestran algunos resultados de la simulación dinámica de un prototipo virtual del robot paralelo planar 3RRR completo (*ver* Figura C.1 en el Apéndice C). Las simulaciones se realizaron mediante el programa SimWise 4D³ trabajando en conjunto con el programa MATLAB/Simulink (*ver* Figura B.3 en el Apéndice B). Dado que la simulación se realizó en lazo abierto, solo se le asignó un perfil de par conocido a cada eslabón actuado, programado desde Matlab/Simulink. En un primer estudio, se emplearon los pares descritos en el inciso (a) de la Tabla 5.1, y las variables del sistema tuvieron un desempeño en el tiempo tal como se muestra en la Figura 5.3. En el segundo estudio, se consideraron los pares descritos en el inciso (b) de la Tabla 5.1, y el sistema tuvo un desempeño dinámico tal como se muestra en la Figura 5.4.

a. Perfil de par propuesto 1	
$\tau_1 = 0.0027 \sin(1.027t + 3.385) + 0.00206 \sin(0.8593t + 0.5063)$	
$\tau_2 = 0.0039 \sin(1.042t - 0.946) + 0.00321 \sin(0.9551t + 2.2460)$	
$\tau_3 = 0.0016 \sin(1.126t + 0.891) + 0.00116 \sin(0.8604t - 2.103)$	
b. Perfil de par propuesto 2	
$\tau_1 = 0.0017 \sin(1.027t + 3.385) + 0.00206 \sin(0.8593t + 0.5063)$	
$\tau_2 = 0.0039 \sin(1.042t - 0.946) + 0.00221 \sin(0.9551t + 2.2460)$	
$\tau_3 = 0.0016 \sin(1.126t + 0.891) + 0.00116 \sin(0.8604t - 2.103)$	

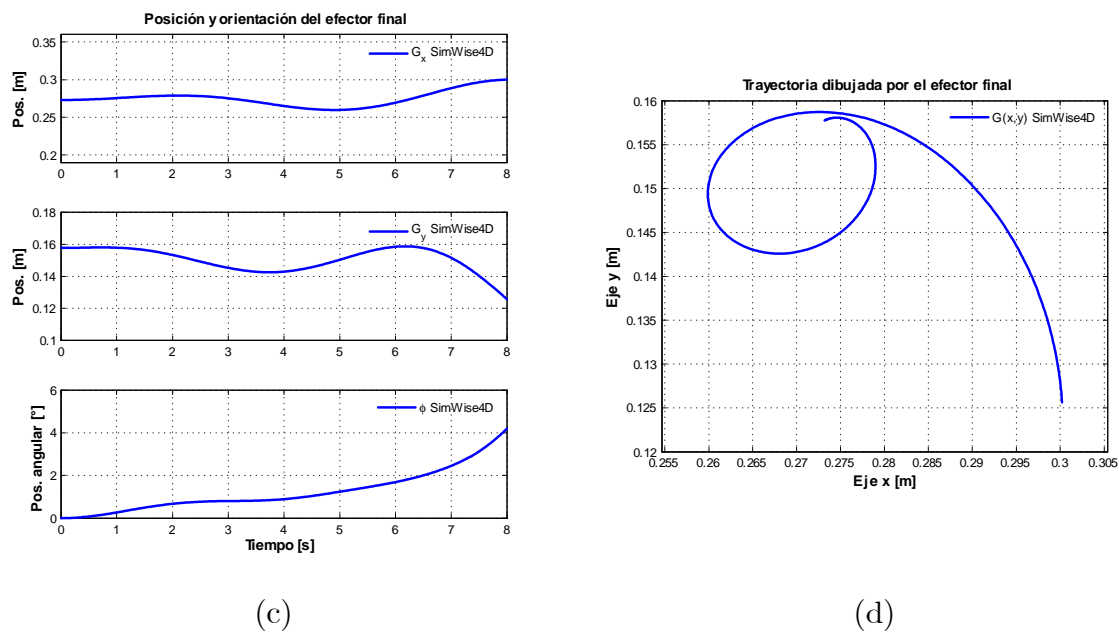
Tabla 5.1: Ecuaciones que describen los perfiles de par implementados para el primer y segundo estudio de la respuesta en lazo abierto del robot 3RRR.

³SimWise 4D es un software propiedad de Design Simulation Technologies con el que es posible simular la dinámica de cuerpos rígidos, determinar interferencias y colisiones, identificar esfuerzos de estrés introducidos por movimientos del mecanismo, y verificar el funcionamiento de sistemas de control; así como reproducir animaciones del comportamiento físico del mecanismo y sus materiales. Para más información acerca de este programa *ver* Apéndice B Sección B.1



(a)

(b)



(c)

(d)

Figura 5.3: Primer estudio de la simulación dinámica del Robot 3RRR típico realizada con SimWise 4D: (a) Pares introducido en las uniones actuadas (τ_1 , τ_2 y τ_3), (b) Desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3), (c) Posición y orientación del efector final (G_x , G_y y ϕ), (d) Trayectoria dibujada en el plano cartesiano por el efector final $G(x, y)$.

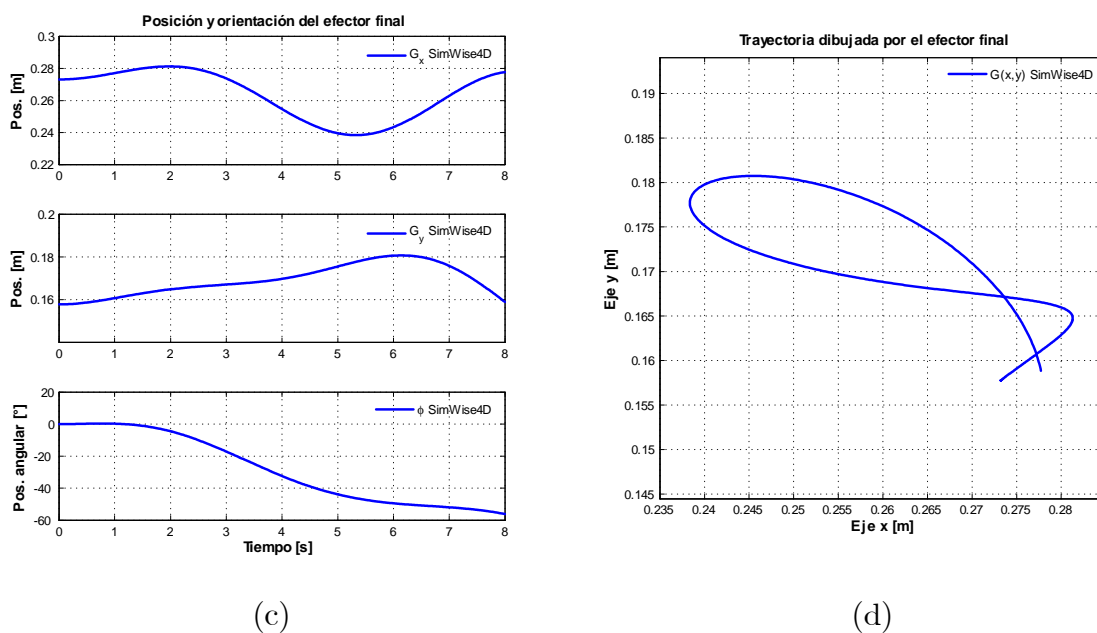
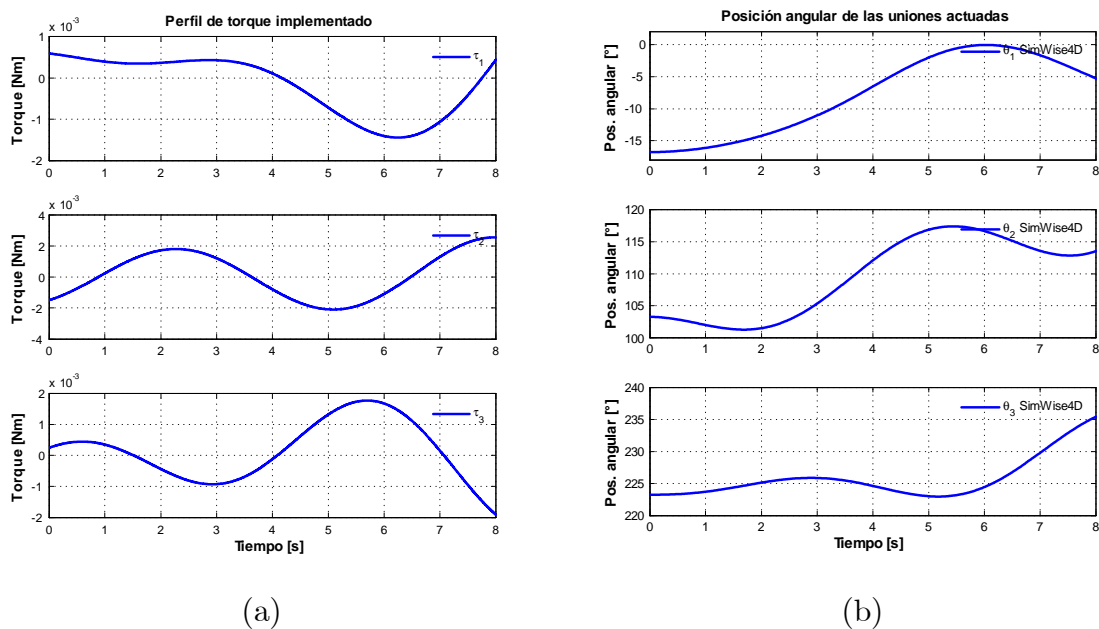


Figura 5.4: Segundo estudio de la simulación dinámica del Robot 3RRR típico realizada con SimWise 4D: (a) Pares introducidos en las uniones actuadas (τ_1 , τ_2 y τ_3), (b) Desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3), (c) Posición y orientación del efector final (G_x , G_y y ϕ), (d) Trayectoria dibujada en el plano cartesiano por el efector final $G(x, y)$.

Capítulo 6

Simplificación de la Complejidad del Modelo Dinámico

En este Capítulo se presenta una estrategia para la reducción o simplificación de la complejidad del modelo dinámico del robot 3RRR, debido a la gran cantidad de términos que aparecen en el sistema al intentar obtener el modelo dinámico del robot típico (*ver* Figura 2.1), por llamarlo de alguna manera. Lo anterior se observa principalmente al estar inmiscuida en la función de Lagrange y sus respectivas derivadas la variable pasiva ψ_i , una para cada codo de los brazos del robot; de las cuales no se tiene conocimiento directo de sus valores, y que hace necesario un gran poder de cómputo para su cálculo en línea. Resultando inviable el uso de algoritmos de control y/o compensación que usen directamente éste modelo dinámico.

6.1. Descripción de la estrategia de simplificación

La estrategia que se presenta considera el rediseño mecánico del robot típico mostrado en la Figura 2.1. Principalmente, el rediseño está inspirado en la arquitectura del *Manipulador de la Universidad de Maryland*, propuesto por Lung Wen Tsai en [47] y desarrollado por R. Stamper en su trabajo doctoral (*ver* [3]). El manipulador de Maryland, emplea barras esbeltas y homogéneas en sus eslabones pasivos; con el fin de modelarlos como péndulos con masa puntual, ubicando estratégicamente sus centros de masa en los extremos de los eslabones activos y en la plataforma móvil. Esto ayuda a evadir la dependencia con la variable que describe el desplazamiento angular de los eslabones pasivos, es decir, solamente habrá dependencia con las coordenadas generalizadas; facilitando el cálculo del modelo dinámico (para más detalles, *ver* [48] y [1]).

A partir de lo anterior, en el rediseño del robot 3RRR, se consideran dos barras esbeltas y homogéneas por cada eslabón pasivo, tal como se muestra en la Figura 6.1; explotando la posibilidad de eliminar la variable ψ_i que describe el desplazamiento angular de los eslabones pasivos.

En este nuevo diseño del mecanismo, podemos asumir entonces que la masa de los eslabones pasivos es puntual para cada uno de ellos, y que estas pueden estar divididas y

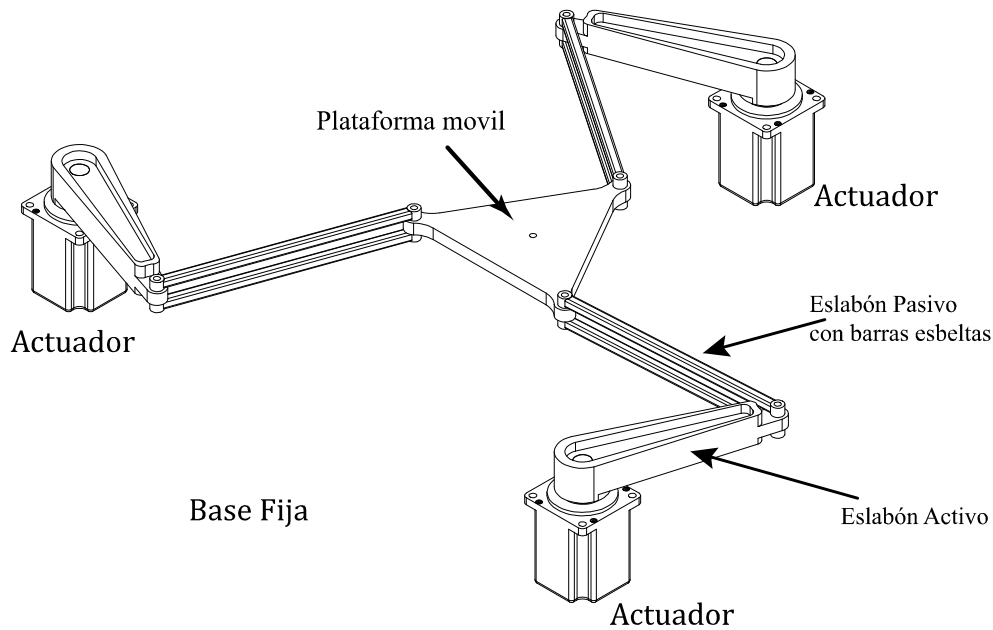


Figura 6.1: Robot Paralelo Planar 3RRR: Diseño mecánico propuesto.

asentadas en los extremos de cada eslabón pasivo. Es decir, la masa de una barra esbelta ubicada en la plataforma móvil, y la otra, en el eslabón activo; así como se muestra en la Figura 6.2. Esto para cada brazo del robot.

6.2. Ecuaciones de movimiento

Como ya se mencionó en el Capítulo anterior, la función de Lagrange L queda expresada únicamente por la energía cinética total E_c del robot, siendo $L = E_c$; ya que no está bajo los efectos de la gravedad, debido a que sus movimientos se encuentran en el plano horizontal. Permanecen también sin cambios, las coordenadas generalizadas definidas anteriormente para el caso del robot 3RRR típico; las coordenadas redundantes y no redundantes.

La energía cinética total del nuevo diseño del robot está dada por:

$$E_c = K_G + \sum_{i=1}^3 (K_{ai} + K_{bi}), \quad (6.1)$$

donde, K_G es la energía cinética de la plataforma móvil; K_{ai} es la energía cinética del i -ésimo eslabón actuado; K_{bi} es la energía cinética del i -ésimo eslabón pasivo. Particularmente, y a partir de considerar a los eslabones pasivos con dos barras esbeltas y homogéneas, se tiene

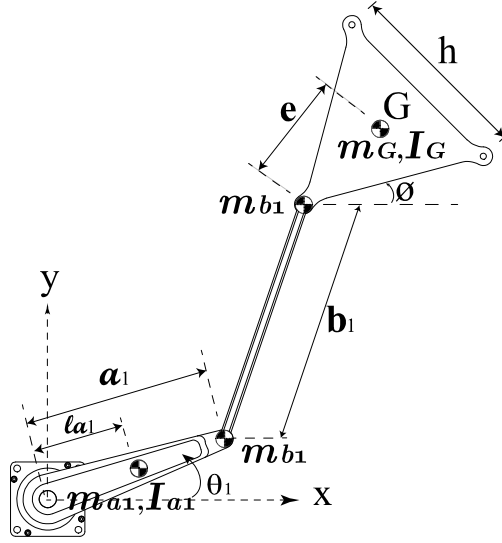


Figura 6.2: Configuración de un brazo típico del robot paralelo planar 3RRR simplificado.

que:

$$\begin{aligned}
 K_G &= \frac{1}{2}m_G \left(\dot{G}_x^2 + \dot{G}_y^2 \right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\phi}^2, \\
 K_{a_i} &= \frac{1}{2}m_{a_i} \left(\dot{x}_{a_i}^2 + \dot{y}_{a_i}^2 \right) + \frac{1}{2}I_{a_i}\dot{\theta}_i^2, \\
 K_{b_i} &= \frac{1}{2}m_{b_i} \left[\left(\dot{G}_x^2 + \dot{G}_y^2 \right) + \left(\dot{a}_{x_i}^2 + \dot{a}_{y_i}^2 \right) \right] + \frac{1}{2}I_{b_{G_i}}\dot{\phi}^2,
 \end{aligned}$$

dónde: m_G , I_G , m_{a_i} , I_{a_i} , x_{a_i} , y_{a_i} , son parámetros que fueron descritos en el Capítulo anterior para el robot 3RRR típico, y permanecen igual. Ahora m_{b_i} describe la masa puntual de una de las dos conexiones pasivas por cada eslabón pasivo, e $I_{b_{G_i}}$ es el momento de inercia de m_{b_i} puntual respecto a la plataforma móvil. Con esto, la función de Lagrange queda expresada como:

$$L = K_G + K_{a_1} + K_{a_2} + K_{a_3} + K_{b_1} + K_{b_2} + K_{b_3},$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2}m_G \left(\dot{G}_x^2 + \dot{G}_y^2 \right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_{a_1}l_{a_1}^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_{a_2}l_{a_2}^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_{a_3}l_{a_3}^2\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}I_{a_1}\dot{\theta}_1^2 \\
 &+ \frac{1}{2}I_{a_2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_{a_3}\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}m_{b_1} \left(\dot{G}_x^2 + \dot{G}_y^2 \right) + \frac{1}{2}m_{b_2} \left(\dot{G}_x^2 + \dot{G}_y^2 \right) + \frac{1}{2}m_{b_3} \left(\dot{G}_x^2 + \dot{G}_y^2 \right) + \frac{1}{2}m_{b_1}a_{x_1}^2\dot{\theta}_1^2 \\
 &+ \frac{1}{2}m_{b_2}a_{x_2}^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_{b_3}a_{x_3}^2\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}I_{b_{G_1}}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{b_{G_2}}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{b_{G_3}}\dot{\phi}^2.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Asumiendo que todos los eslabones (actuados con actuados y pasivos con pasivos) son iguales y homogéneos, su masa e inercia debe ser equivalente. Por lo tanto, $m_{a_i} = m_a$, $m_{b_i} = m_b$, $I_{a_i} = I_a$, $I_{b_{G_i}} = I_{b_G}$; y lo mismo para las longitudes: $l_{a_i} = l_a$ y $a_i = a$, para $i = 1, 2$ y 3 .

Entonces, la función de Lagrange queda reducida a:

$$L = \frac{1}{2} (m_G + 3m_b) (\dot{G}_x^2 + \dot{G}_y^2) + \frac{1}{2} (I_G + 3I_{bG}) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (m_a l_a^2 + m_b a^2 + I_a) (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2). \quad (6.3)$$

Ahora, respecto a las funciones de restricción del nuevo diseño del robot, estas son las mismas que del caso del robot 3RRR típico, dado por las ecs.(5.11), (5.13) y (5.15); ya que no se presentó un cambio estructural en su cinemática, sino más bien en su dinámica. Las ecuaciones de Lagrange referidas a las coordenadas redundantes: G_x , G_y , ϕ ; y no redundantes: θ_1 , θ_2 , θ_3 ; permanecen idénticas a las ecs.(5.16),(5.17),(5.18),(5.19),(5.20) y (5.21); a excepción del cálculo de las derivadas del Lagrangiano L respecto de las coordenadas generalizadas redundantes y no redundantes. Esto debido al cambio en la estructura dinámica del robot, que modificó al Lagrangiano.

Calculando las derivadas del Lagrangiano del robot (ec.(6.3)), respecto a las seis coordenadas generalizadas G_x , G_y , ϕ , θ_1 , θ_2 y θ_3 , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{G}_x} \right) &= (m_G + 3m_b) \ddot{G}_x, & \frac{\partial L}{\partial G_x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{G}_y} \right) &= (m_G + 3m_b) \ddot{G}_y, & \frac{\partial L}{\partial G_y} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= (I_G + 3I_{bG}) \ddot{\phi}, & \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_a l_a^2 + m_b a^2 + I_a) \ddot{\theta}_1, & \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= (m_a l_a^2 + m_b a^2 + I_a) \ddot{\theta}_2, & \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) &= (m_a l_a^2 + m_b a^2 + I_a) \ddot{\theta}_3, & \frac{\partial L}{\partial \theta_3} &= 0, \end{aligned}$$

Obsérvese que con la estrategia de simplificación propuesta para este nuevo modelo dinámico, la variable pasiva ψ_i desapareció de la ecuación de Lagrange mostrada en la ec.(6.3), y de sus respectivas derivadas; haciendo notar a primera vista una importante reducción del modelo original.

Entonces, sustituyendo las derivadas de la función de Lagrange (ec.(6.3)) y las derivadas de las funciones de restricción (ecs.(5.11), (5.13) y (5.15), mostradas en el Capítulo anterior), en las ecs.(5.16), (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) y (5.21), se obtiene un sistema de ecuaciones dinámicas. Para las coordenadas generalizadas redundantes: G_x , G_y y ϕ ; es decir, para $j = 1$, 2 y 3, el sistema de ecuaciones está dado por:

$$2\lambda_1 (G_x - e \cos(\phi + \frac{\pi}{6}) - a \cos \theta_1) + 2\lambda_2 (G_x + e \cos(\phi - \frac{\pi}{6}) - x_Q - a \cos \theta_2) + 2\lambda_3 (G_x - e \sin \phi - x_R - a \cos \theta_3) = (m_G + 3m_b) \ddot{G}_x - f_{G_x}, \quad (6.4)$$

$$2\lambda_1 (G_y - e \sin(\phi + \frac{\pi}{6}) - a \sin \theta_1) + 2\lambda_2 (G_y + e \sin(\phi - \frac{\pi}{6}) - y_Q - a \sin \theta_2) + 2\lambda_3 (G_y + e \cos \phi - y_R - a \sin \theta_3) = (m_G + 3m_b) \ddot{G}_y - f_{G_y}, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned}
& 2e\lambda_1 \begin{pmatrix} (G_x - e \cos(\phi + \frac{\pi}{6}) - a \cos \theta_1) \sin(\phi + \frac{\pi}{6}) \\ - (G_y - e \sin(\phi + \frac{\pi}{6}) - a \sin \theta_1) \cos(\phi + \frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} \\
& + 2e\lambda_2 \begin{pmatrix} - (G_x + e \cos(\phi - \frac{\pi}{6}) - x_Q - a \cos \theta_2) \sin(\phi - \frac{\pi}{6}) \\ + (G_y + e \sin(\phi - \frac{\pi}{6}) - y_Q - a \sin \theta_2) \cos(\phi - \frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} \\
& - 2e\lambda_3 \begin{pmatrix} \cos \phi (G_x - e \sin \phi - x_R - a \cos \theta_3) \\ + \sin \phi (G_y + e \cos \phi - y_R - a \sin \theta_3) \end{pmatrix} = (I_G + 3I_{bG}) \ddot{\phi} - \tau_\phi, \quad (6.6)
\end{aligned}$$

Así como se describió anteriormente, f_{Gx} y f_{Gy} son las componentes de alguna fuerza externa en la plataforma móvil, y τ_ϕ es un par externo aplicado en ϕ .

De igual forma, las ecs.(6.4), (6.5) y (6.6) forman un conjunto de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, de las cuales puede determinarse los tres multiplicadores de Lagrange λ_1 , λ_2 y λ_3 . Una vez obtenidos los multiplicadores, los pares en los actuadores se pueden determinar mediante sustitución en las ecs.(6.7), (6.8) y (6.9); que son ecuaciones para $j = 4$, 5 y 6, es decir, para las coordenadas generalizadas no redundantes: θ_1 , θ_2 y θ_3 ; cuyo sistema de ecuaciones resultante es:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= (m_a l_a^2 + m_b a^2 + I_a) \ddot{\theta}_1 - 2a\lambda_1 [\sin \theta_1 (G_x - e \cos(\phi + \frac{\pi}{6}) - a \cos \theta_1) \\
&\quad - \cos \theta_1 (G_y - e \sin(\phi + \frac{\pi}{6}) - a \sin \theta_1)], \quad (6.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= (m_a l_a^2 + m_b a^2 + I_a) \ddot{\theta}_2 - 2a\lambda_2 [\sin \theta_2 (G_x + e \cos(\phi - \frac{\pi}{6}) - x_Q - a \cos \theta_2) \\
&\quad - \cos \theta_2 (G_y + e \sin(\phi - \frac{\pi}{6}) - y_Q - a \sin \theta_2)], \quad (6.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= (m_a l_a^2 + m_b a^2 + I_a) \ddot{\theta}_3 - 2a\lambda_3 [\sin \theta_3 (G_x - e \sin \phi - x_R - a \cos \theta_3) \\
&\quad - \cos \theta_3 (G_y + e \cos \phi - y_R - a \sin \theta_3)]. \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Estos dos conjuntos de ecuaciones pueden ser usados para el control en tiempo real de la nueva estructura dinámica del robot manipulador 3RRR. En la siguiente Sección se muestran los resultados de la simulación numérica de estas ecuaciones y su comparación con las obtenidas por la simulación dinámica realizada con el programa SimWise 4D del prototipo virtual rediseñado.

6.3. Simulaciones y validación del modelo

En esta Sección se muestran los resultados de las simulaciones realizadas al modelo dinámico simplificado dado por las ecs.(6.4) a (6.9), y se comparan con los resultados obtenidos a partir de la simulación del modelo virtual realizada en el programa SimWise 4D.

Para la realización de las simulaciones en ambos sistemas, tanto modelo virtual como modelo numérico, se realizaron los siguientes pasos:

1. Se aplicó un perfil de par a cada unión actuada (τ_1 , τ_2 y τ_3).

2. Se ejecutó la simulación durante ocho segundos y se observó el desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3), así como el desplazamiento del efector final (G_x, G_y) y su orientación angular ϕ en el plano cartesiano.
3. Se compararon las salidas de ambos sistemas.

En las Figuras 6.3 y 6.4 se pueden observar los resultados de la simulación vía SimWise 4D del prototipo virtual (*ver* Figura C.2 del Apéndice C) y del modelo dinámico simplificado dado por las ecs.(6.4) a (6.9), para dos casos de estudio; siendo los pares propuestos según se definen en la Tabla 5.1.

Otro punto importante de las simulaciones numéricas del modelo dinámico, es que pueden ser utilizadas en procesos de diseño para calcular el par necesario en los actuadores al realizar ciertos movimientos. Para esto, se usó el modelo dinámico inverso y una trayectoria totalmente conocida mostrada en la Tabla 6.1; como una función de prueba para el sistema. El resultado de esta simulación se muestra en la Figura 6.6.

$G_x(t)$	$G_y(t)$	$\phi(t)$
$0.2732 + 0.00625t \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$0.1577 + 0.00625t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$-0.0625t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

Tabla 6.1: Trayectoria de prueba descrita en términos de posición y orientación del efector final para el robot 3RRR.

Los parámetros físicos del robot 3RRR utilizados para estas simulaciones se muestran en la Tabla C.2 del Apéndice C; y los diagramas de simulación pueden consultarse en el Apéndice B, Sección B.2 y B.3.

6.4. Conclusiones

En este Capítulo fue presentada estrategia para la simplificación de la complejidad del modelo dinámico de un robot paralelo planar 3RRR, la cual, puede ser extrapolada a otros mecanismos de naturaleza similar. Se desarrollaron simulaciones del modelo simplificado en lazo abierto con el fin de observar su respuesta libre y se compararon con las resultantes del modelo virtual implementado en SimWise 4D y MATLAB/Simulink. Dichos resultados nos permiten argumentar el cercano comportamiento del modelo, tal como se observa en las Figuras 6.5(a) y 6.5(b), la diferencia de valores angulares calculados por el modelo simplificado y el modelo virtual oscila entre ± 1.5 grados.

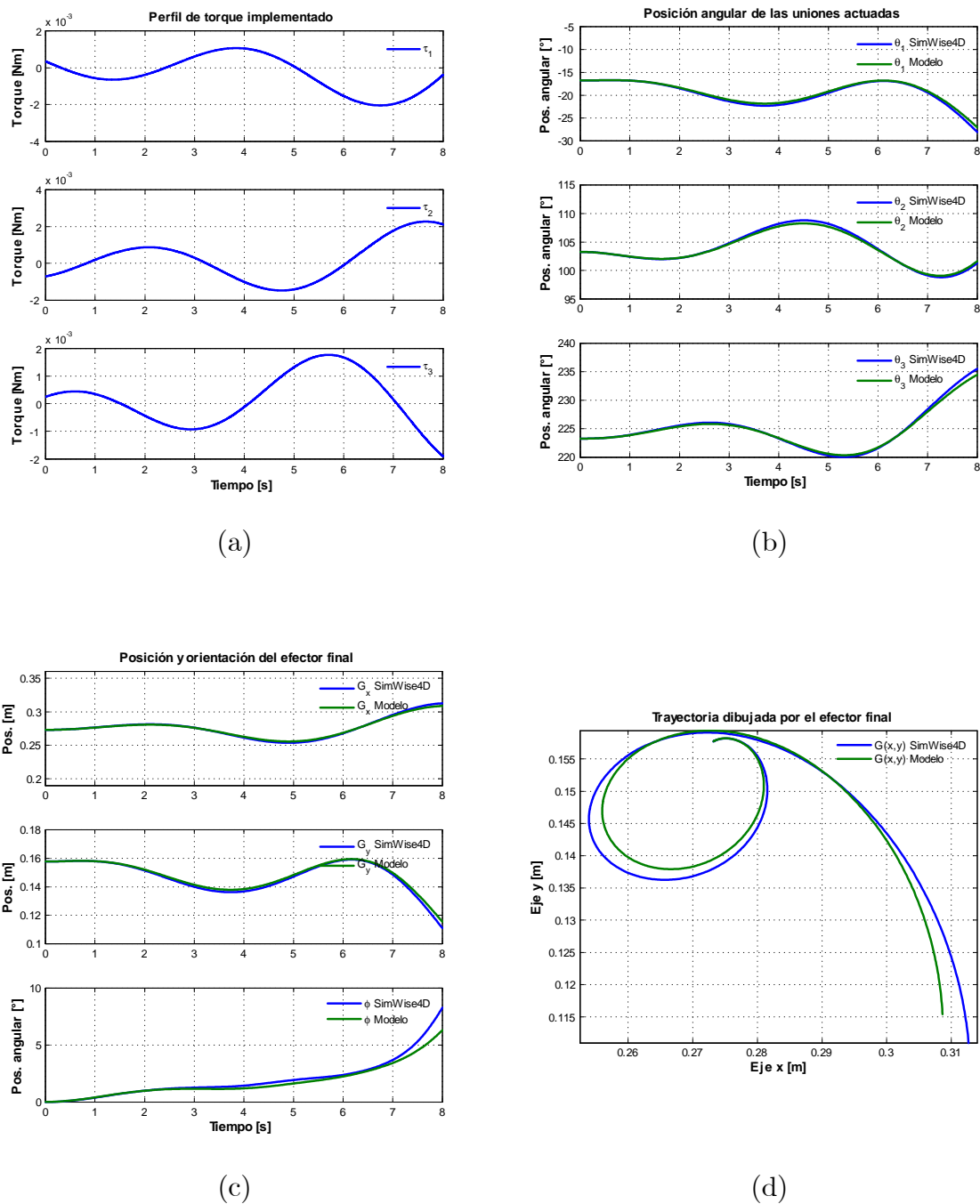
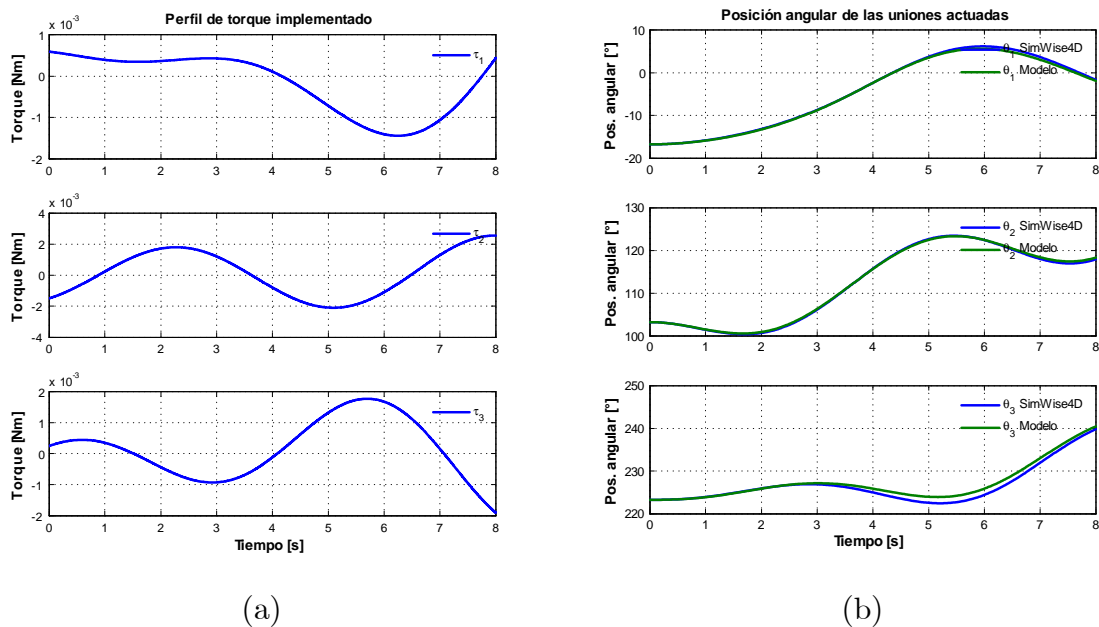
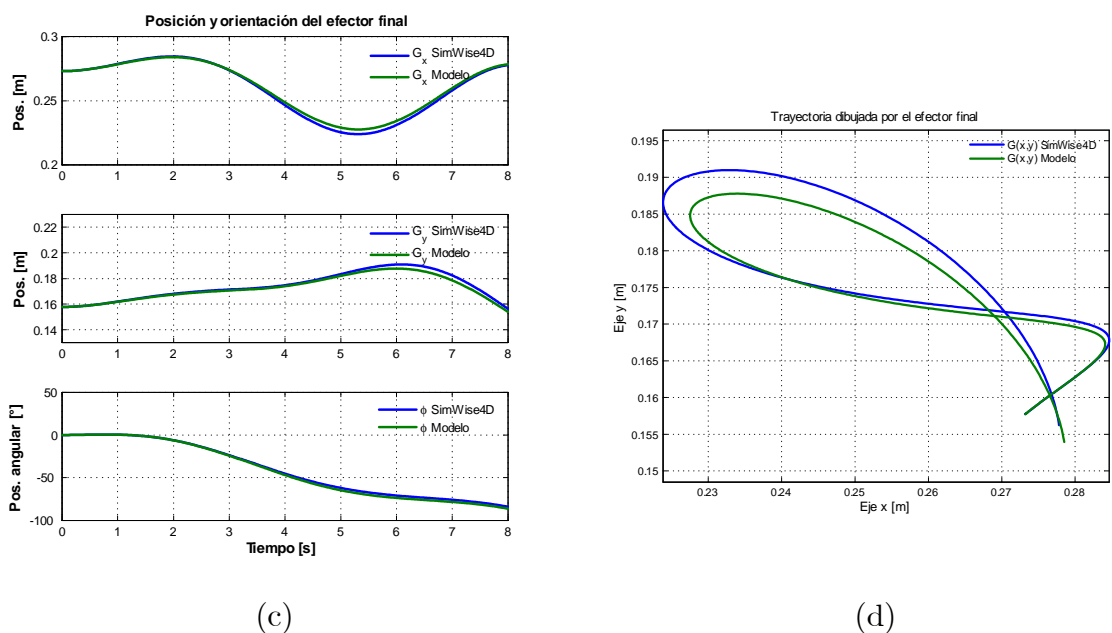


Figura 6.3: Comparación del primer estudio de la simulación dinámica realizada con SimWise 4D y la simulación numérica del modelo simplificado del Robot 3RRR. (a) Pares introducidos en las uniones actuadas (τ_1 , τ_2 y τ_3). (b) Desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3) (c) Posición y orientación del efector final (G_x , G_y y ϕ). (d) Trayectoria dibujada en el plano cartesiano por el efector final $G(x, y)$.



(a)

(b)



(c)

(d)

Figura 6.4: Comparación del segundo estudio de la simulación dinámica realizada con SimWise 4D y la simulación numérica del modelo simplificado del Robot 3RRR. (a) Torque introducido en las uniones actuadas (τ_1 , τ_2 y τ_3). (b) Desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3) (c) Posición y orientación del effector final (G_x , G_y y ϕ). (d) Trayectoria dibujada en el plano cartesiano por el effector final $G(x, y)$.

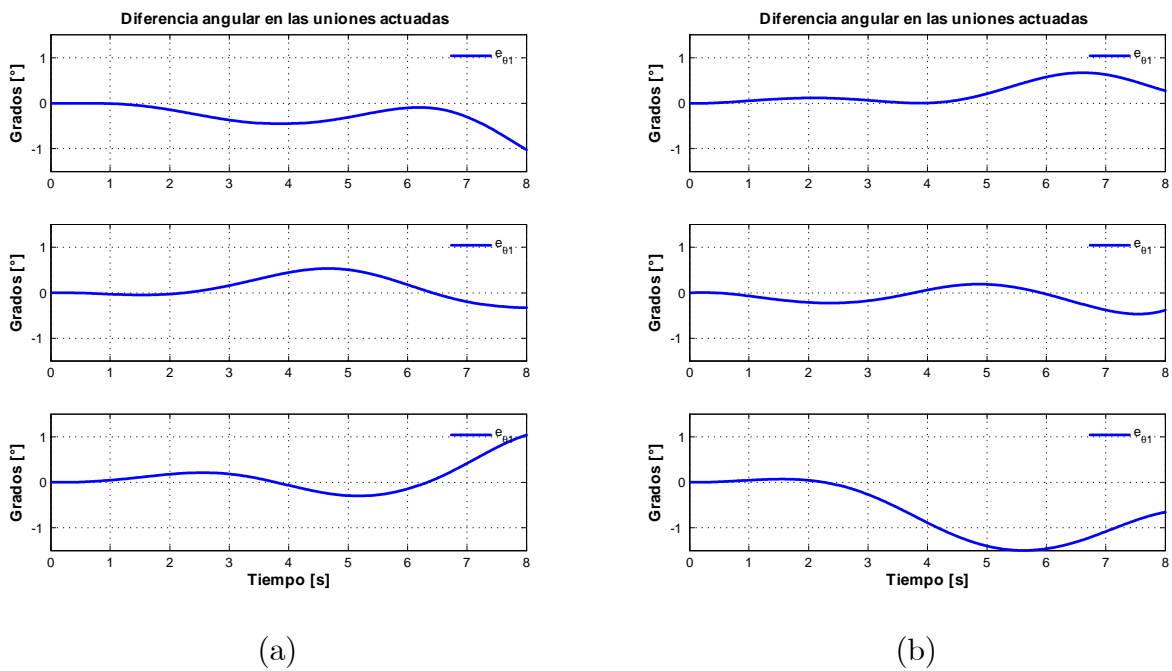


Figura 6.5: Diferencia angular existente entre la posición de los eslabones actuados del modelo dinámico simplificado y los de la simulación de su modelo virtual. (a) Diferencia angular en θ_1 , θ_2 y θ_3 referente a la simulación mostrada en la Figura 6.3. (b) Diferencia angular en θ_1 , θ_2 y θ_3 referente a la simulación mostrada en la Figura 6.4.

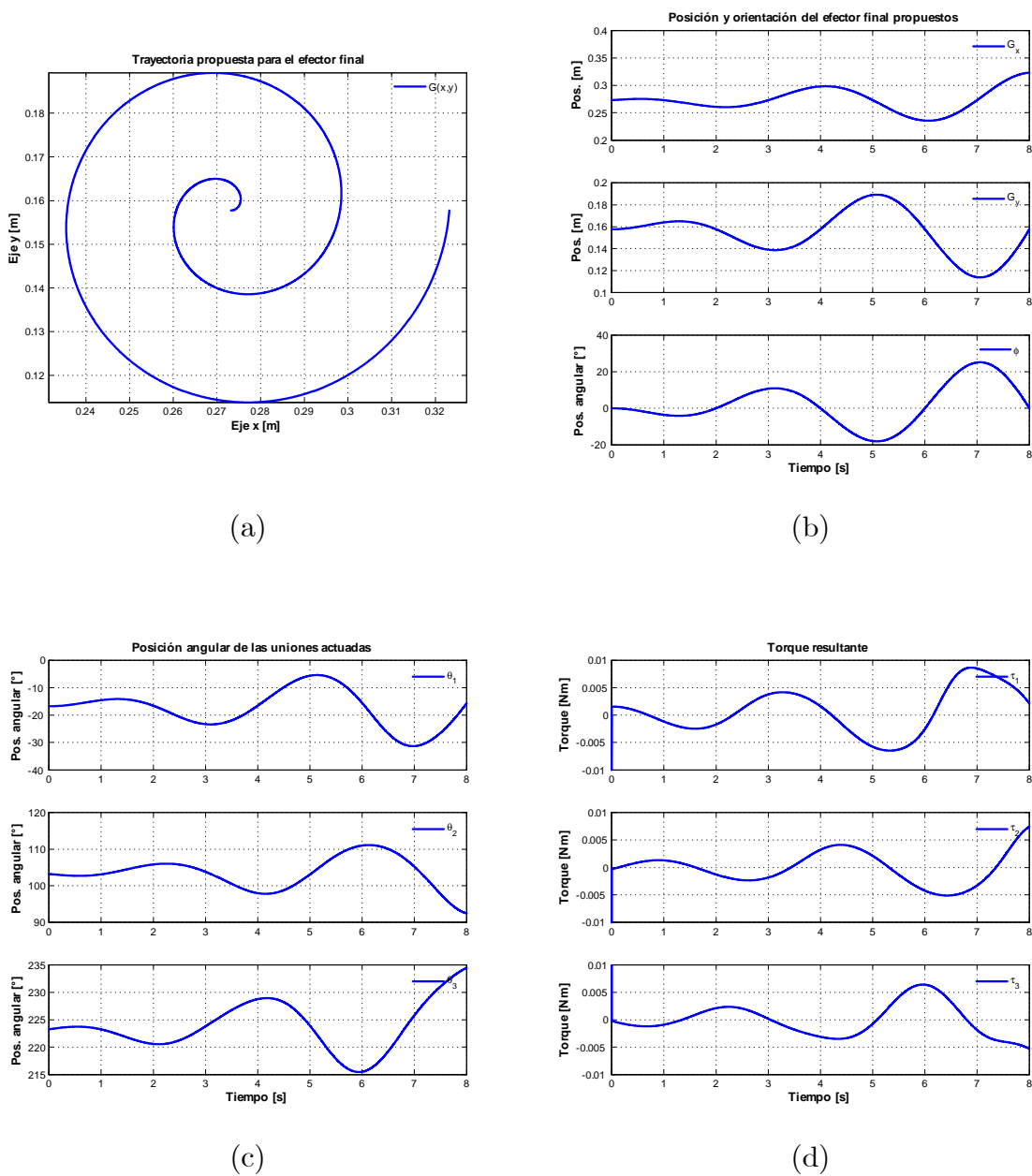


Figura 6.6: Simulación de la dinámica inversa del Robot 3RRR simplificado. (a) Trayectoria deseada en el plano cartesiano para el efector final $G(x, y)$. (b) Posición y orientación del efector final (G_x , G_y y ϕ). (c) Desplazamiento angular de las uniones actuadas (θ_1 , θ_2 y θ_3). (d) Pares desarrollados por los actuadores (τ_1 , τ_2 y τ_3).

Capítulo 7

Conclusiones y Perspectivas

7.1. Conclusiones generales

En este trabajo, se estudió y analizó un robot paralelo planar del tipo 3RRR. El robot posee tres grados de libertad, de los cuales, la plataforma móvil está restringida a dos grados traslacionales en el plano XY y a un grado rotacional ϕ respecto al eje Z . Las principales ventajas de este manipulador paralelo son: que los actuadores pueden estar unidos directamente a la plataforma fija, están disponibles soluciones usando ecuaciones de cadena cerrada para la cinemática directa e inversa, la plataforma móvil tiene el grado de orientación ϕ extra que puede ser aprovechado por tareas como el reacomodo de piezas, además, este manipulador paralelo, puede ser construido con únicamente uniones del tipo revoluta. La desventaja más significativa es el espacio relativamente limitado en comparación a un manipulador serial de tamaño comparable.

El estudio de este robot, se llevó a cabo en varias fases. En el Capítulo 2 se realizó la descripción de la geometría del mecanismo, y se analizó tanto la cinemática inversa como la cinemática directa, utilizando ecuaciones de lazo cerrado para facilitar el cálculo. Así mismo, se muestran algunas consideraciones que se deben hacer ante la gran cantidad de posibles soluciones a dichos modelos cinemáticos. En el Capítulo 3 se abordó el estudio de la cinemática diferencial, que se basa en analizar como se desarrollan las velocidades de las uniones ante un movimiento del efector final, o viceversa. Para esto, se usaron las derivadas en el tiempo de las ecuaciones de lazo cerrado, utilizadas previamente en el análisis cinemático estático. Otro punto importante desarrollado en este Capítulo, es el análisis de las singularidades atribuidas a los Jacobianos traslacional y rotacional, y que imponen los límites físicos y de controlabilidad a los que puede o no acceder el manipulador, por lo que el robot puede ganar o perder instantáneamente grados de libertad.

En el Capítulo 4 se realizó el análisis del espacio de trabajo del robot paralelo planar 3RRR, considerando la menor cantidad de variables para delimitar ese espacio. Un punto importante en este Capítulo, fue el uso del inverso del número de condición de la matriz Jacobiana como medida de la destreza de movimiento del robot; así como la homogenización la matriz, debido a que esta resulta dimensionalmente no homogénea a causa de que los grados de libertad que posee el manipulador son de diferente naturaleza (dos traslacionales y uno

rotacional). También se definió una función objetivo, que permite mapear el espacio regular de trabajo tomando en cuenta parámetros de restricción físicos y de controlabilidad. Además, se describió un procedimiento para la evaluación de cada vector candidato α de solución, es decir, de los parámetros de diseño del manipulador. Para aproximar las soluciones óptimas a este problema, se propuso un grupo de algoritmos evolutivos. Los métodos de optimización se ejecutaron siguiendo la metodología desarrollada en la Sección 4.5 de éste Capítulo, y se compararon usando un método de muestreo intensivo, el cual, nos permite determinar que algoritmo de optimización es más adecuado para este proceso. Se realizaron dos procesos de optimización para el espacio regular de trabajo. En el primero, se optimizaron las longitudes de los eslabones, el radio de la plataforma móvil, y la distancia entre actuadores; y su resultado puede ser consultado en la Tabla 4.2. En el segundo proceso de optimización, se tomaron en cuenta no solo los parámetros usados en el primer proceso de optimización, sino también la posición del centroide del espacio regular de trabajo, logrando un mayor espacio de trabajo regular. Los resultados fueron mostrados en la Tabla 4.3. De acuerdo a los mejores resultados obtenidos, se sugiere el uso de la CMA-ES, como método de optimización para resolver problemas de diseño del espacio de trabajo para mecanismos paralelos. Este resultado concuerda con los obtenidos en [46].

En el Capítulo 5 se realizó un estudio y desarrollo matemático del modelo dinámico de un robot paralelo planar 3RRR en su configuración completa. Para llevar a cabo el modelado, se utilizó el método de formulación Lagrangiana. A lo largo de esta etapa, se mostró la complejidad que conlleva el calcular cada parte del sistema, teniendo conocimiento de la posición angular de los eslabones activos y pasivos. Es por esto, que no se realiza la simulación numérica del modelo matemático obtenido, y en su lugar se muestran resultados de simulación dinámica de un prototipo virtual con el programa SimWise 4D.

Por último, en el Capítulo 6 se presentó una estrategia para la simplificación del modelo dinámico obtenido en el Capítulo anterior, evadiendo el cálculo de las variables pasivas del robot, mediante un rediseño mecánico del mecanismo. Con esto, se redefinieron las ecuaciones de energía del robot, logrando un nuevo y reducido conjunto de ecuaciones dinámicas, que pueden ser fácilmente simuladas. Los resultados de este nuevo modelo matemático de la dinámica del robot paralelo planar 3RRR fueron mostrados en las Figuras 6.3, 6.4, y 6.5 de la Sección 6.3 de este Capítulo, y nos permiten demostrar la validación del modelo dinámico reducido en complejidad, ante el comportamiento obtenido por el modelo virtual en SimWise 4D. Es importante hacer notar que como todo modelo matemático este no es perfecto, y presenta pequeñas desviaciones en los resultados, debido principalmente a las consideraciones que se realizan durante el modelado del sistema; por ejemplo, que el centro de masa de los eslabones pasivos se pueden dividir en sus extremos. Otro resultado mostrado respecto al nuevo y reducido modelo dinámico, es la simulación de la dinámica inversa (*ver* Figura 6.6), donde a partir de una trayectoria conocida, se puede obtener el mapa de pares necesarios en cada eslabón para que el robot pueda desarrollar la trayectoria.

Adicionalmente a este trabajo, es de interés hacer la observación de que el modelo dinámico puede reducirse un poco más, mediante el balance de los centros de masa de los eslabones actuados, usando contrapesos que muevan esos centros al eje de giro del actuador, o a otra posición conveniente. Aunque este balanceo no reduzca de manera significativa la compleji-

dad del modelo dinámico del manipulador, es importante para la distribución de fuerzas y minimización de vibraciones mecánicas.

7.2. Trabajo futuro

Como se puede notar, este trabajo apenas involucra una primera etapa en el estudio del robot 3RRR, en cuanto al modelado dinámico y a la optimización de parámetros. Es por esto, que se proponen como trabajos futuros los siguientes trabajos de investigación:

1. Modelar el sistema por otros métodos. Por ejemplo, los citados en [16], o usar observadores de perturbación para modelar aquellas dinámicas faltantes en el modelo; y realizar comparaciones dinámicas para observar cual aproxima de mejor manera el comportamiento real del sistema.
2. Realizar optimización a nivel de estructura-control para el robot, esto es, modificar parámetros inerciales, longitudes y ganancias de control para trayectorias propuestas, con lo que se obtendría un modelo mecánico altamente controlable.
3. Construir un prototipo físico para la validación real de los resultados obtenidos en este proyecto y de las nuevas propuestas.

Bibliografía

- [1] Lung-Wen Tsai. 1999. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. Wiley.
- [2] C. Gosselin, J. Angeles. 1988. *The Optimum Kinematic Design of a Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator*. ASME Journal of Mechanisms, Trans. and Automation in Design. Vol. 110, No. 1. pp. 35-41.
- [3] R. E. Stamper. 1997. *A Three Degree of Freedom Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of Freedom*. Ph.D. thesis, University of Maryland.
- [4] J. P. Merlet. 2006. *Parallel Robots*, Second Edition.
- [5] J.P. Merlet. 1996. *Direct Kinematics of Planar Parallel Manipulators*. IEEE International Conference on Robotics and Automation. pp. 3744-3749. U.S.A.
- [6] S. Staicu. 2008. *Kinematics of 3-RRR Planar Parallel Robot*. U.P.B. Sci. Bull., Series D. Vol. 70, No. 2. pp. 3-14.
- [7] Oetomo, D., Liaw, H., Alici, G., Shirinzadeh, B. 2006. *Direct Kinematics and Analytical Solution to 3RRR Parallel Planar Mechanisms*. IEEE International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision. pp. 2251-2256.
- [8] S. Staicu, I. Stroe. 2010. *Comparative Analysis in Dynamics of the 3-RRR Planar Parallel Robot*. Proceeding of the Romanian Academy, Series A, Vol. 11, No. 4. pp. 347-354.
- [9] Q.H. Zhang, X.M. Zhang. 2012. *Kinematics and Dynamics Analysis of Planar 3-RRR Parallel Robots*. Applied Mechanics and Material, Vols. 229-231, pp. 582-587.
- [10] V.H. Arakelian, M.R. Smith. 2008. *Design of Planar 3-DOF 3-RRR Reactionless Parallel Manipulators*. Mechatronics. ELSEVIER. Vol. 18. pp. 601-606.
- [11] V. Arakelian, S. Briot, V. Glazunov. 2008. *Increase Singularity-Free Zones in the Workspace of Parallel Manipulators using Mechanisms of Variable Structure*. Mechanism and Machine Theory. ELSEVIER. Vol. 43. pp. 1129-1140.
- [12] V. Arakelian, A. Samsonyan, N. Arakelyan. 2015. *Optimum Shaking Force Balancing of Planar 3-RRR Parallel Manipulators by means of an Adaptive Counterweight System*. Journal of Robotics and Mechanical Engineering Research. Vol. 1, No. 2. pp. 36-41.

- [13] A. Zubizarreta, I., Cabanes, M. Marcos, C. Pinto, E. Portillo. 2009. *Redundant Dynamic Modelling of the 3RRR Parallel Robot for Control Error Reduction*. IEEE European Control Conference Conference. pp. 2205-2210.
- [14] J.J. Uicker, Jr., G.R. Pennock, J.E. Shigley. 2003. *Theory of Machines and Mechanisms*. Oxford University Press, Third Edition.
- [15] Gosselin, C. and Angeles, J. 1990. *Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains*, IEEE Trans. on Robot. Autom. Vol. 6, No. 3, pp. 281-290.
- [16] Zlatanov, D., Fenton, R. G., and Benhabib, B. 1994. *Singularity Analysis of Spatial Mechanisms and Robots Via a Motion-Space Model of the Instantaneous Kinematics*. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 2, pp. 980-991.
- [17] W. Spong, M. Hutchinson, S. and Vidyasagar, M. 1989. *Robot Modeling and Control*. First Edition, John Wiley & Sons, Inc.
- [18] Salisbury, J., and Craig, J. 1982. *Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues*. The International Journal of Robotics Research, Vol. 1, pp. 4-17.
- [19] Baker, J. E. 1980. *On Relative Freedom Between Links in Kinematic Chains with Cross-Jointing*. Mech. Mach. Theory, Vol. 15, pp. 397-413.
- [20] Davies, T. H. and Primrose, E. J. F. 1971. *An Algebra for the Screw Systems of a Pair of Bodies in a Kinematic Chain*. Proc. 3rd World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Paper D-14, pp. 199-212.
- [21] Mohamed, M. G., Sanger, J., and Duffy, J. 1983. *Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Devices*. Proc. 6th IFToMM Congress on theory of Machines and Mechanisms, New Delhi, India.
- [22] Waldron, K. J. 1966. *The Constraint Analysis of Mechanisms*. J. Mech., Vol. 2, pp.101-114.
- [23] Waldron, K., and Hunt, K. 1988. *Series-Parallel Dualities in Actively Coordinated Mechanisms*. Proceedings of the 4th International Symposium on Robotic Research, MIT Press, pp. 175-181.
- [24] H. Lipkin and J. Duffy. 1988. *Hybrid twist and wrench control for a robotic manipulator*. ASME J. Mech. Trans. Automat. Des., Vol. 110, pp. 138-144.
- [25] C. Gosselin. 1990. *Dexterity indices for planar and spatial robotic manipulators*. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, Cincinnati, OH, pp. 650-655.
- [26] Y.J. Lou, G.F. Liu and Z.X. Li. 2005. *A General Approach for Optimal Design of Parallel Manipulators*. IEEE Automation science and Engineering.

- [27] S.-G. Kim, J. Ryu. 2003. *New dimensionally homogeneous Jacobian matrix formulation by three end-effector points for optimal design of parallel manipulators*. IEEE Transactions on Robotics and Automation 19(4), 731–737.
- [28] Mir Amin Hosseini, Hamid-Reza M. Daniali & Hamid D. Taghirad. 2011. *Dexterous Workspace Optimization of a Tricept Parallel Manipulator*. Advanced Robotics, 25:13-14, 1697-1712, DOI: 10.1163/016918611X584640.
- [29] Dulpichet Rerkpreedapong, Amer Hasanovic, Ali Feliachi. 2003. *Robust Load Frequency Control Using Genetic Algorithms and Linear Matrix Inequalities*, IEEE Transactions On Power Systems, Vol. 18, No. 2.
- [30] Dae N. Chun, Hyun S. Yang. 1996. *Robust image segmentation using genetic algorithm with a fuzzy measure*. Pattern Recognition, Vol. 29, Issue 7, pp. 1195-1211.
- [31] Foteini D. Passa. 2011. *Optimization Approaches for the Design of Parallel Haptic Devices*. Master of Science Thesis, Stockholm, Sweden, KTH Industrial Engineering and Management Machine Design.
- [32] Pedro Larranaga and Jose A Lozano. 2002. *Estimation of distribution algorithms: A new tool for evolutionary computation*. Volume 2. Springer Science & Business Media.
- [33] Hans-Paul Paul Schwefel 1991. *Evolution and optimum seeking: the sixth generation*. John Wiley & Sons, Inc.
- [34] Lawrence Davis. 1991. *Handbook of genetic algorithms*.
- [35] Belsley, David A.; Kuh, Edwin; Welsch, Roy E. (1980). *The Condition Number*. Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity. New York: John Wiley & Sons. pp. 100–104. ISBN 0-471-05856-4.
- [36] Charles A. Klein and Bruce E. Blaho. 1987. *Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators*. The International Journal of Robotics Research, 6(2):72-83.
- [37] S Ivvan Valdez, Arturo Hernández and Salvador Botello. 2013. *A boltzmann based estimation of distribution algorithm*. Information Sciences, 236:126-137.
- [38] <http://personal.cimat.mx:8181/~ivvan/public/bumda.html>
- [39] Nikolaus Hansen, Andre SP Niederberger, Lino Guzzella, and Petros Koumoutsakos. 2009. *A method for handling uncertainty in evolutionary optimization with an application to feedback control of combustion*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 13(1):180-197.
- [40] <https://www.lri.fr/~hansen/>

- [41] Nidamarthi Srinivas and Kalyanmoy Deb. 1994. *Multiobjective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms*. Evolutionary computation, 2(3):221-248.
- [42] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10429-nsga-ii--a-multi-objective-optimization-algorithm>
- [43] Kalyanmoy Deb, A. Pratap, S. Agrawal, and T. Meyarivan. April 2002. *A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 6, No. 2.
- [44] Kalyanmoy Deb, S. Agrawal, A. Pratap, T. Meyarivan. *A fast Elitist Non.dominates Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization :NSGA-II*. International Conference on Parallel Problem Solving from Nature VI, PP. 849-858.
- [45] Jason Brownlee, 2011. *Clever Algorithms: Nature-Inspired Programming Recipes*. Ed. Lulu.com.
- [46] S. Botello-Aceves. 2016. *Concurrent design optimization of kinematically complex mechanisms*. Master's thesis, Center for Research in Mathematics, CIMAT. Mexico.
- [47] Tsai, L. W and Stamper R. 1996. *A Parallel Manipulator with Only Traslational Degrees of Freedom*. 96 DETC-MECH-1152, ASME 1996 Design Engineering Technical Conferences, Irvin, CA.
- [48] Stamper R. and Tsai, L. W 1998. *Dynamic Modelling of a Parallel Manipulator with Three Traslational Degrees of Freedom*. DETC98/MECH-5956, Proc. ASME Design Engineering Technical Conferences, Atlanta, GA.

Apéndice

Apéndice A

Constantes de la cinemática directa

A continuación se muestran las constantes para el cálculo de las δ_i para $i = 0, 1$ y 2 , de la cinemática directa mostradas en la ec.(2.28) pertenecientes a la ec.(2.27) y la ec.(2.30) en su forma extendida.

$$\begin{aligned} A_0 &= 4x_Q y_R - 4x_R y_Q + 4a_1 y_Q \cos(\theta_1) - 4a_3 y_Q \cos(\theta_3) - 4a_1 y_R \cos(\theta_1) + 4a_2 y_R \cos(\theta_2) \\ &\quad - 4a_1 a_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) - 4a_1 a_3 \cos(\theta_1) \sin(\theta_3) + 4a_1 a_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_1) \\ &\quad + 4a_2 a_3 \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) - 4a_2 a_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) + 4a_1 a_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ &\quad - 4a_1 x_Q \sin(\theta_1) + 4a_3 x_Q \sin(\theta_3) + 4a_1 x_R \sin(\theta_1) - 4a_2 x_R \sin(\theta_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_o &= 2hy_Q - 4hy_R - 2\sqrt{3}hx_Q + 2a_1 h \sin(\theta_1) + 2a_2 h \sin(\theta_2) - 4a_3 h \sin(\theta_3) \\ &\quad + 2\sqrt{3}a_1 h \cos(\theta_1) - 2\sqrt{3}a_2 h \cos(\theta_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -2hx_Q + 4hx_R - 2\sqrt{3}hy_Q - 2a_1 h \cos(\theta_1) - 2a_2 h \cos(\theta_2) + 4a_3 h \cos(\theta_3) \\ &\quad + 2\sqrt{3}a_1 h \sin(\theta_1) - 2\sqrt{3}a_2 h \sin(\theta_2); \end{aligned}$$

$$\zeta_0 = 2\sqrt{3}h^2;$$

$$\mu_0 = 2\sqrt{3}h^2;$$

$$\gamma_0 = 0;$$

$$\begin{aligned}
A_1 = & 2a_1^2y_Q - 2a_3^2y_Q - 2a_1^2y_R + 2a_2^2y_R - 2b_1^2y_Q + 2b_3^2y_Q + 2b_1^2y_R - 2b_2^2y_R - 2h^2y_Q \\
& + 2h^2y_R + 2x_Q^2y_R - 2x_R^2y_Q - 2y_Qy_R^2 + 2y_Q^2y_R - 2a_1a_2^2\sin(\theta_1) + 2a_1a_3^2\sin(\theta_1) \\
& + 2a_1^2a_2\sin(\theta_2) - 2a_2a_3^2\sin(\theta_2) - 2a_1^2a_3\sin(\theta_3) + 2a_2^2a_3\sin(\theta_3) + 2a_1b_2^2\sin(\theta_1) \\
& - 2a_1b_3^2\sin(\theta_1) - 2a_2b_1^2\sin(\theta_2) + 2a_2b_3^2\sin(\theta_2) + 2a_3b_1^2\sin(\theta_3) - 2a_3b_2^2\sin(\theta_3) \\
& - 2a_2h^2\sin(\theta_2) + 2a_3h^2\sin(\theta_3) - 2a_1x_Q^2\sin(\theta_1) + 2a_3x_Q^2\sin(\theta_3) + 2a_1x_R^2\sin(\theta_1) \\
& - 2a_2x_R^2\sin(\theta_2) - 2a_1y_Q^2\sin(\theta_1) + 2a_3y_Q^2\sin(\theta_3) + 2a_1y_R^2\sin(\theta_1) - 2a_2y_R^2\sin(\theta_2) \\
& + 4a_2x_Qy_R\cos(\theta_2) - 4a_3x_Ry_Q\cos(\theta_3) + 4a_2y_Qy_R\sin(\theta_2) - 4a_3y_Ry_Q\sin(\theta_3) \\
& - 4a_1a_2x_Q\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) + 4a_2a_3x_Q\cos(\theta_2)\sin(\theta_3) + 4a_1a_3x_R\cos(\theta_3)\sin(\theta_1) \\
& - 4a_2a_3x_R\cos(\theta_3)\sin(\theta_2) - 4a_1a_2y_Q\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + 4a_2a_3y_Q\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) \\
& + 4a_1a_3y_R\sin(\theta_1)\sin(\theta_3) - 4a_2a_3y_R\sin(\theta_2)\sin(\theta_3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = & -\sqrt{3}h^3 - 4hx_Qy_R + 2hx_Ry_Q + \sqrt{3}a_1^2h - \sqrt{3}a_2^2h - \sqrt{3}b_1^2h + \sqrt{3}b_2^2h - \sqrt{3}hx_Q^2 \\
& - 2\sqrt{3}a_2hx_Q\cos(\theta_2) - 2\sqrt{3}a_2hy_Q\sin(\theta_2) + 2\sqrt{3}a_3hy_Q\sin(\theta_3) - 2\sqrt{3}a_1hy_R\sin(\theta_1) \\
& - \sqrt{3}hy_Q^2 + 2a_3hy_Q\cos(\theta_3) - 4a_2hy_R\cos(\theta_2) + 4a_1hx_Q\sin(\theta_1) - 4a_3hx_Q\sin(\theta_3) \\
& + 2\sqrt{3}a_2hy_R\sin(\theta_2) - 2\sqrt{3}a_1a_3h\sin(\theta_1)\sin(\theta_3) + 2\sqrt{3}a_2a_3h\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) \\
& - 2a_1a_3h\cos(\theta_3)\sin(\theta_1) - 4a_2a_3h\cos(\theta_2)\sin(\theta_3) + 2a_2a_3h\cos(\theta_3)\sin(\theta_2) \\
& - 2a_1hx_R\sin(\theta_1) + 2a_2hx_R\sin(\theta_2) + 2\sqrt{3}hy_Qy_R + 4a_1a_2h\cos(\theta_2)\sin(\theta_1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 = & h^3 - a_1^2h - a_2^2h + 2a_3^2h + b_1^2h + b_2h - 2b_3^2h - hx_Q^2 + 2hx_R^2 - hy_Q^2 + 2hy_R^2 - 2hy_Qy_R \\
& - 2a_2hx_Q\cos(\theta_2) + 4a_3hx_R\cos(\theta_3) - 2\sqrt{3}a_2a_3h\cos(\theta_3)\sin(\theta_2) + 2\sqrt{3}a_1a_3h\cos(\theta_3)\sin(\theta_1) \\
& - 2\sqrt{3}a_2hx_R\sin(\theta_2) + 2\sqrt{3}a_1hx_R\sin(\theta_1) - 2\sqrt{3}a_3hy_Q\cos(\theta_3) - 2a_2a_3h\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) \\
& + 4a_1hy_Q\sin(\theta_1) - 2a_1a_3h\sin(\theta_1)\sin(\theta_3) + 4a_1a_2h\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) - 2a_2hy_Q\sin(\theta_2) \\
& - 2a_3hy_Q\sin(\theta_3) - 2a_1hy_R\sin(\theta_1) - 2a_2hy_R\sin(\theta_2) + 4a_3hy_R\sin(\theta_3) - 2\sqrt{3}hx_Ry_Q;
\end{aligned}$$

$$\zeta_1 = 2\sqrt{3}h^2x_Q + 2\sqrt{3}a_2h^2\cos(\theta_2);$$

$$\mu_1 = 2h^2y_Q - 2h^2y_R + 2\sqrt{3}h^2x_R + 2a_2h^2\sin(\theta_2) - 2a_3h^2\sin(\theta_3) + 2\sqrt{3}a_3h^2\cos(\theta_3);$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = & 2h^2x_Q - 2h^2x_R + 2\sqrt{3}h^2y_Q - 2\sqrt{3}h^2y_R + 2\sqrt{3}a_2h^2\sin(\theta_2) - 2\sqrt{3}a_3h^2\sin(\theta_3) \\
& + 2a_2h^2\cos(\theta_2) - 2a_3h^2\cos(\theta_3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= 2a_3^2x_Q - 2a_1^2x_Q + 2a_1^2x_R - 2a_2^2x_R + 2b_1^2x_Q - 2b_3^2x_Q - 2b_1^2x_R + 2b_2^2x_R + 2h^2x_Q - 2h^2x_R \\
&\quad + 2x_Qx_R^2 - 2x_Q^2x_R + 2x_Qy_R^2 - 2x_Ry_Q^2 + 2a_1a_2^2\cos(\theta_1) - 2a_1a_3^2\cos(\theta_1) - 2a_1^2a_2\cos(\theta_2) \\
&\quad + 2a_2a_3^2\cos(\theta_2) + 2a_1^2a_3\cos(\theta_3) - 2a_2^2a_3\cos(\theta_3) - 2a_1b_2^2\cos(\theta_1) + 2a_1b_3^2\cos(\theta_1) \\
&\quad + 2a_2b_1^2\cos(\theta_2) - 2a_2b_3^2\cos(\theta_2) - 2a_3b_1^2\cos(\theta_3) + 2a_3b_2^2\cos(\theta_3) + 2a_2h^2\cos(\theta_2) \\
&\quad - 2a_3h^2\cos(\theta_3) + 2a_1x_Q^2\cos(\theta_1) - 2a_3x_Q^2\cos(\theta_3) - 2a_1x_R^2\cos(\theta_1) + 2a_2x_R^2\cos(\theta_2) \\
&\quad + 2a_1y_Q^2\cos(\theta_1) - 2a_3y_Q^2\cos(\theta_3) - 2a_1y_R^2\cos(\theta_1) + 2a_2y_R^2\cos(\theta_2) - 4a_2x_Qx_R\cos(\theta_2) \\
&\quad + 4a_3x_Qx_R\cos(\theta_3) - 4a_2x_Ry_Q\sin(\theta_2) + 4a_3x_Qy_R\sin(\theta_3) + 4a_1a_2x_Q\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \\
&\quad - 4a_2a_3x_Q\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - 4a_1a_3x_R\cos(\theta_1)\cos(\theta_3) + 4a_2a_3x_R\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) \\
&\quad + 4a_1a_2y_Q\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - 4a_2a_3y_Q\cos(\theta_3)\sin(\theta_2) - 4a_1a_3y_R\cos(\theta_1)\sin(\theta_3) \\
&\quad + 4a_2a_3y_R\cos(\theta_2)\sin(\theta_3); \\
\alpha_2 &= -h^3 + a_1^2h + a_2^2h - 2a_3^2h - b_1^2h - b_2^2h + 2b_3^2h + hx_Q^2 - 2hx_R^2 + hy_Q^2 - 2hy_R^2 + 2hx_Qx_R \\
&\quad - 4a_1a_2h\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + 2a_1a_3h\cos(\theta_1)\cos(\theta_3) + 2a_2a_3h\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - 4a_1hx_Q\cos(\theta_1) \\
&\quad - 4a_3hy_R\sin(\theta_3) - 2\sqrt{3}hx_Qy_R + 2\sqrt{3}a_1hy_R\cos(\theta_1) - 2\sqrt{3}a_2hy_R\cos(\theta_2) - 2\sqrt{3}a_3hx_Q\sin(\theta_3) \\
&\quad + 2a_2hx_Q\cos(\theta_2) + 2a_3hx_Q\cos(\theta_3) + 2a_1hx_R\cos(\theta_1) + 2a_2hx_R\cos(\theta_2) - 4a_3hx_R\cos(\theta_3) \\
&\quad + 2\sqrt{3}a_1a_3h\cos(\theta_1)\sin(\theta_3) - 2\sqrt{3}a_2a_3h\cos(\theta_2)\sin(\theta_3); \\
\beta_2 &= -\sqrt{3}h^3 - 2hx_Qy_R + 4hx_Ry_Q + \sqrt{3}a_1^2h - \sqrt{3}a_2^2h - \sqrt{3}b_1^2h + \sqrt{3}b_2^2h - \sqrt{3}hx_Q^2 - \sqrt{3}hy_Q^2 \\
&\quad - 4a_1hy_Q\cos(\theta_1) + 2a_2hy_Q\sin(\theta_2) + 4a_3hy_Q\cos(\theta_3) + 2a_1hy_R\cos(\theta_1) - 2a_2hy_R\cos(\theta_2) \\
&\quad - 2\sqrt{3}a_2hx_Q\cos(\theta_2) + 2\sqrt{3}a_3hx_Q\cos(\theta_3) - 2\sqrt{3}a_1hx_R\cos(\theta_1) + 2\sqrt{3}a_2hx_R\cos(\theta_2) \\
&\quad - 2\sqrt{3}a_2hy_Q\sin(\theta_2) - 2\sqrt{3}a_1a_3h\cos(\theta_1)\cos(\theta_3) + 2\sqrt{3}a_2a_3h\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) \\
&\quad + 2a_1a_3h\cos(\theta_1)\sin(\theta_3) - 2a_2a_3h\cos(\theta_2)\sin(\theta_3) + 4a_2a_3h\cos(\theta_3)\sin(\theta_2) \\
&\quad - 2a_3hx_Q\sin(\theta_3) + 4a_2hx_R\sin(\theta_2) + 2\sqrt{3}hx_Qx_R - 4a_1a_2h\cos(\theta_1)\sin(\theta_2); \\
\zeta_2 &= -2h^2x_Q + 2h^2x_R + 2\sqrt{3}h^2y_R - 2a_2h^2\cos(\theta_2) + 2a_3h^2\cos(\theta_3) + 2\sqrt{3}a_3h^2\sin(\theta_3); \\
\mu_2 &= 2\sqrt{3}h^2y_Q + 2\sqrt{3}a_2h^2\sin(\theta_2); \\
\gamma_2 &= -2h^2y_Q + 2h^2y_R - 2a_2h^2\sin(\theta_2) + 2a_3h^2\sin(\theta_3) + 2\sqrt{3}h^2x_Q - 2\sqrt{3}h^2x_R \\
&\quad + 2\sqrt{3}a_2h^2\cos(\theta_2) - 2\sqrt{3}a_3h^2\cos(\theta_3);
\end{aligned}$$

Apéndice B

Diagramas de simulación

En este Capítulo se muestran algunos diagramas importantes para la realización de las simulaciones presentes en este proyecto de Tesis.

B.1. SimWise 4D

SimWise 4D es un programa de simulación de movimiento y análisis estructural, es independiente del CAD y puede obtener la geometría desde muchos sistemas de diseño. Es una aplicación que te apoya en diseño al reducir fallas y minimizar costos. SimWise 4D puede realizar simulaciones cinemáticas y dinámicas de cuerpos rígidos sometidos a fuerzas dinámicas bajo diferentes fenómenos en piezas y ensambles, además, puede identificar esfuerzos. Este software maneja el concepto 4D que es la integración de dos tecnologías, la de SimWise y SimWise FEA en una sola interfaz, permitiendo manejar en un mismo ambiente, esfuerzos generados desde cargas dinámicas inducidas por el movimiento. Entre los paquetes de software que incluye SimWise 4D, los usados en este trabajo de tesis fueron el de SimWise Motion, que ofrece simulación de movimiento dinámico y cinemático en piezas independientes y ensambles, y el paquete de Simulink, que es parte de la aplicación Motion que permite el enlace MatLab/Simulink para simular mediante controladores de movimiento o simplemente para la adquisición de datos a partir del modelo virtual.

En la Figura B.1 se muestra un diagrama del proceso que se siguió para el desarrollo de las simulaciones de movimiento dinámico del prototipo virtual, y en la Figura B.2 se muestra el entorno gráfico del software SimWise 4D, con un modelo totalmente configurado (restricciones de movimiento, sensores y actuadores) para simular.

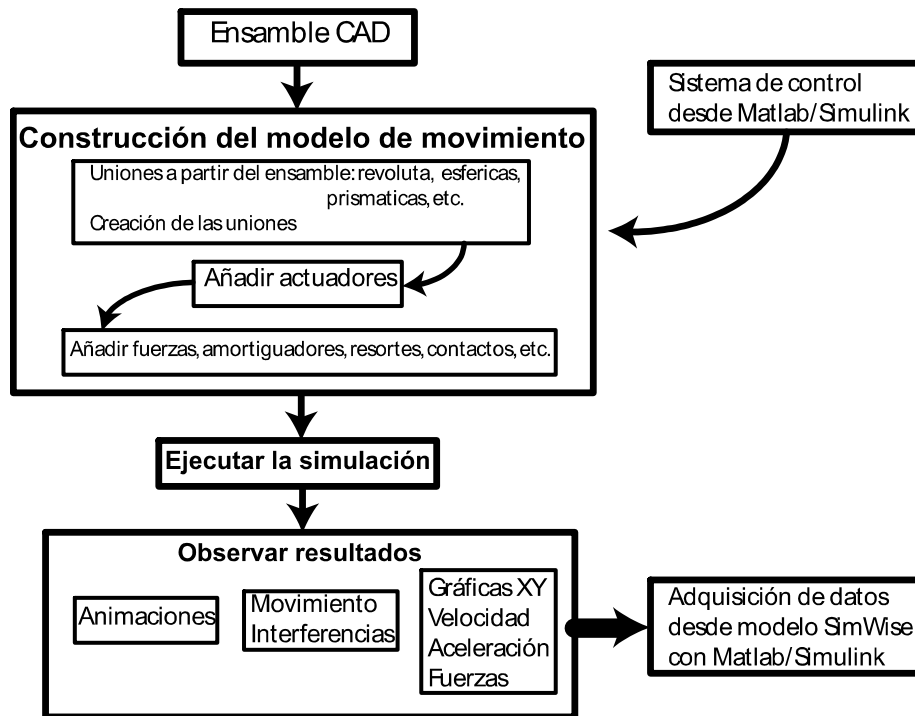


Figura B.1: Diagrama de flujo de las simulaciones dinámicas con SimWise 4D Motion



Figura B.2: Entorno de trabajo del software SimWise 4D.

B.2. Dinámica directa

En la Figura B.3 se muestra el diagrama a bloques para la simulación de los prototipos virtuales del robot 3RRR mostrados en las Figuras C.1 y C.2 usando MATLAB/Simulink y el paquete Simulink de SimWise 4D.

Nótese que este diagrama muestra únicamente la estructura para simulaciones dinámicas en lazo abierto del prototipo virtual enlazado con el programa SimWise 4D.

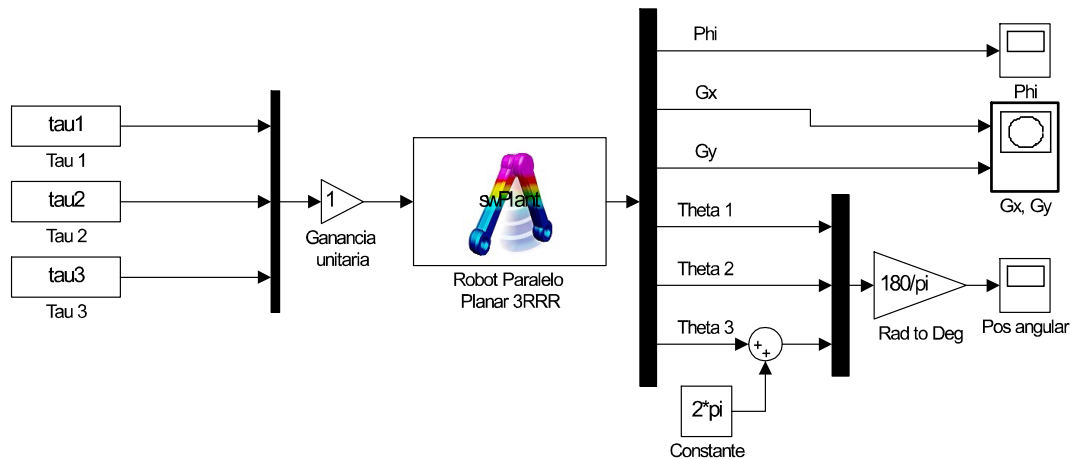


Figura B.3: Diagrama a bloques en Simulink de la simulación dinámica del robot paralelo planar 3RRR

En la Figura B.4 se muestran los bloques para la realización de la simulación numérica de la dinámica directa del robot paralelo planar 3RRR mostrada en las Figuras 6.3 y 6.4 ocupando el modelo simplificado mostrado por las ecs.(6.4) a (6.9).

B.3. Dinámica inversa

En la Figura B.5 se muestran los bloques para la realización de la simulación numérica de la dinámica inversa del robot paralelo planar 3RRR mostrada en la Figura 6.6 ocupando el modelo simplificado mostrado por las ecs.(6.4) a (6.9).

Nótese que para este proceso de simulación, la trayectoria del efector final es totalmente conocida (posición, velocidad y aceleración), y lo que se desea obtener es la cantidad de energía necesaria para desarrollar dicha trayectoria.

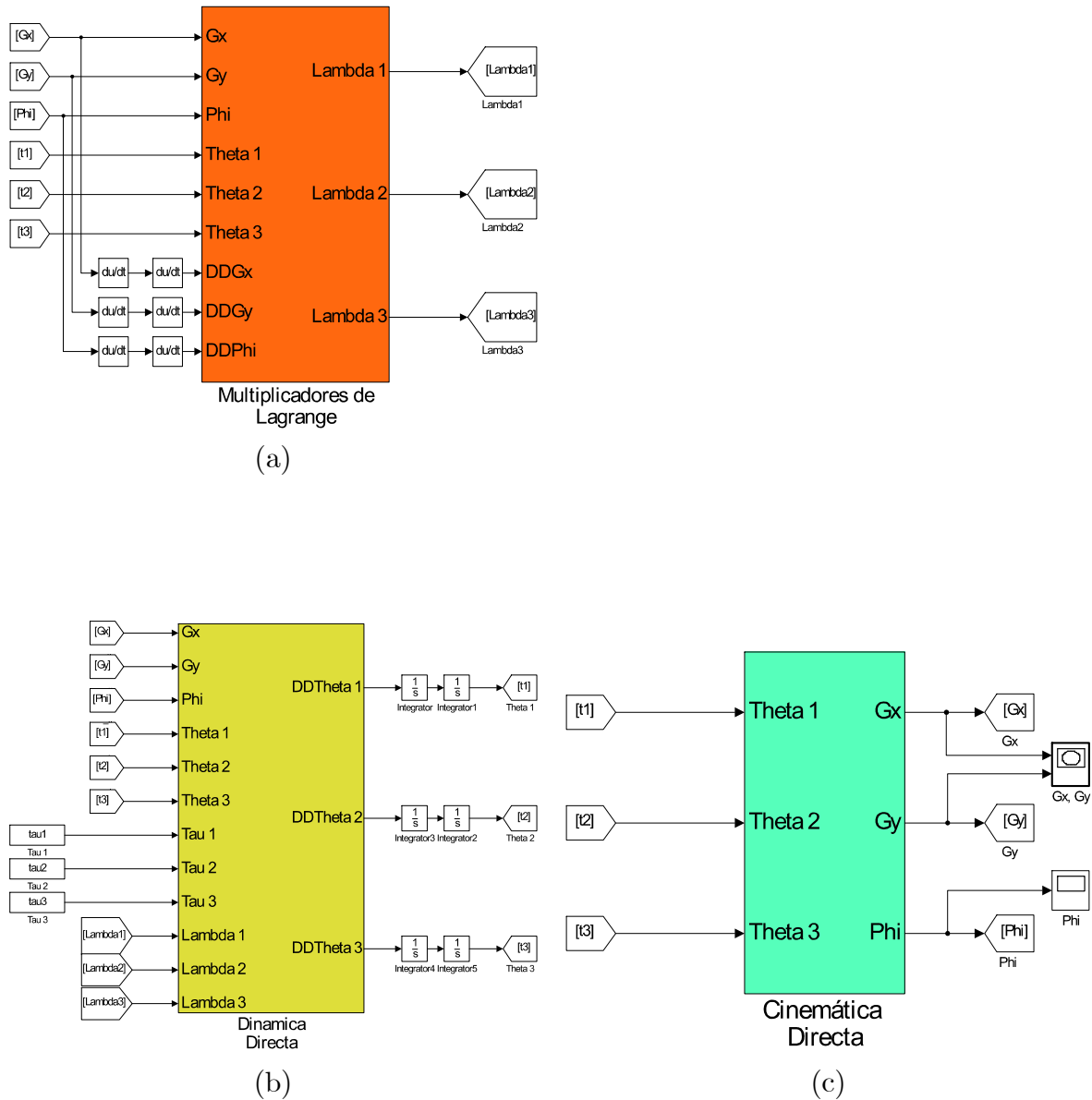


Figura B.4: Bloques de Simulink para la simulación del modelo dinámico directo del robot 3RRR simplificado. (a) Multiplicadores de Lagrange (λ_1 , λ_2 y λ_3). (b) Dinámica Directa (obtención de θ_1 , θ_2 y θ_3) (c) Cinemática Directa (obtención de G_x , G_y y ϕ).

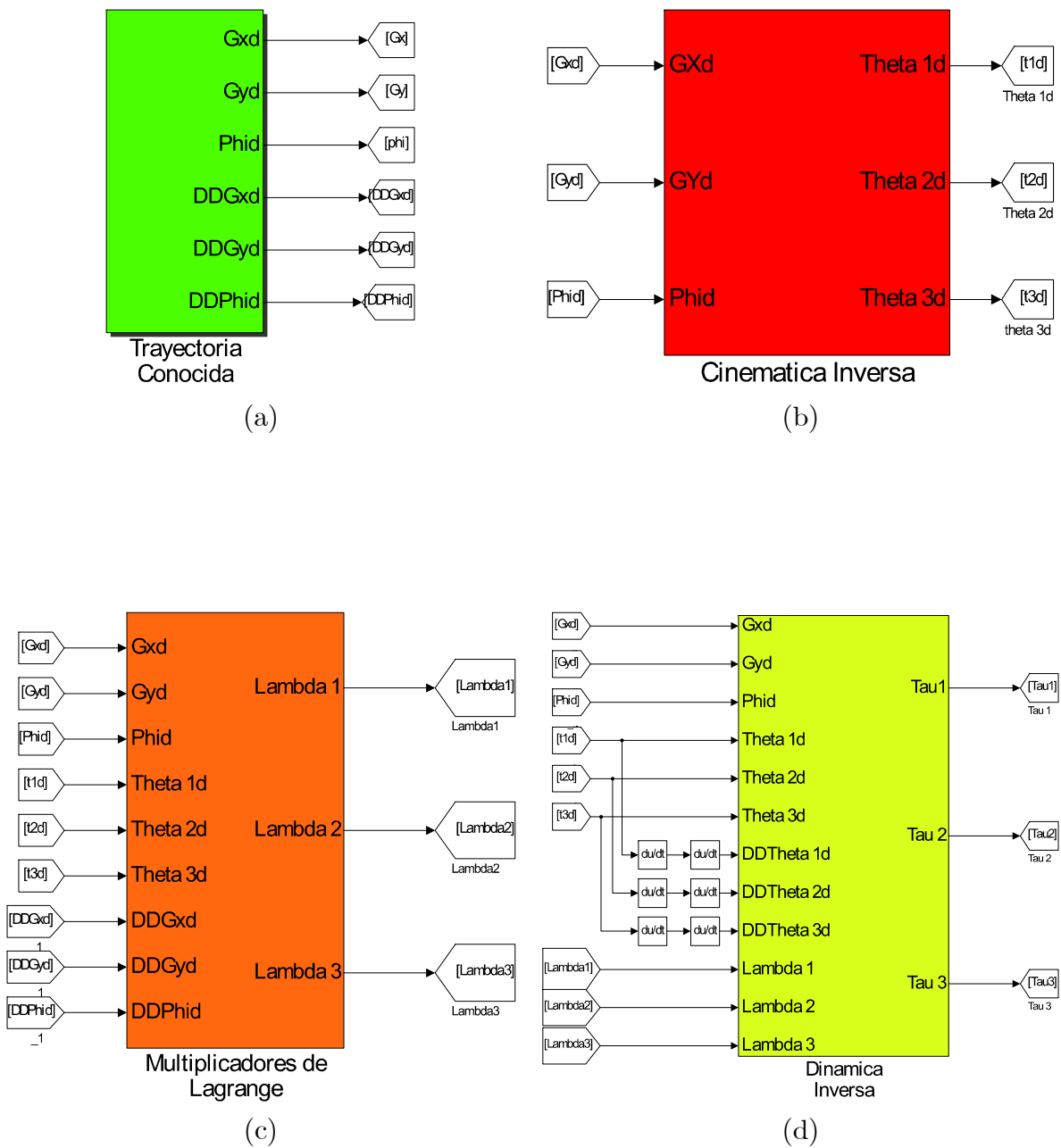


Figura B.5: Bloques de Simulink para la simulación del modelo dinámico inverso del robot 3RRR simplificado. (a) Trayectoria propuesta dependiente del tiempo (G_x , G_y y ϕ). (b) Cinemática Inversa (obtención de θ_1 , θ_2 y θ_3). (c) Multiplicadores de Lagrange (λ_1 , λ_2 y λ_3). (d) Dinámica Inversa (obtención de τ_1 , τ_2 y τ_3).

B.4. Jacobiano

En la Figura B.6 se muestra el diagrama a bloques de Simulink usado para la validación del Jacobiano mostrado en la ec.(3.14), y cuyos resultados se observan en la Figura 3.5.

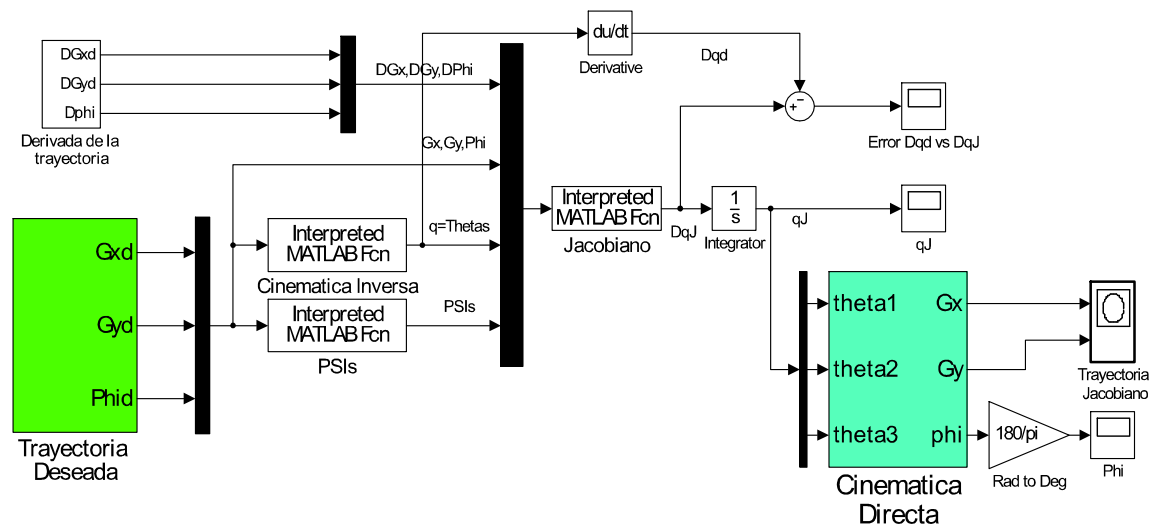


Figura B.6: Diagrama a bloques de Simulink del Jacobiano del robot paralelo planar 3RRR.

Apéndice C

Prototipos Virtuales

En este Capítulo se muestran los diseños de los prototipos virtuales así como las tablas de parámetros físicos de cada robot usados para la simulación dinámica del modelo completo y de la validación del modelo dinámico simplificado de los Capítulos 5 y 6 respectivamente.

$a = 24.615 \text{ cm}$	$c = 54.64 \text{ cm}$	$m_a = 0.473 \text{ kg}$	$I_a = 0.00238 \text{ kgm}^2$
$b = 20.38 \text{ cm}$	$\ell_a = 11.3 \text{ cm}$	$m_b = 0.127 \text{ kg}$	$I_b = 4.396 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
$e = 5 \text{ cm}$	$\ell_b = 10.19 \text{ cm}$	$m_G = 0.126 \text{ kg}$	$I_G = 1.92 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$

Tabla C.1: Parámetros de diseño del robot paralelo planar 3RRR clásico.

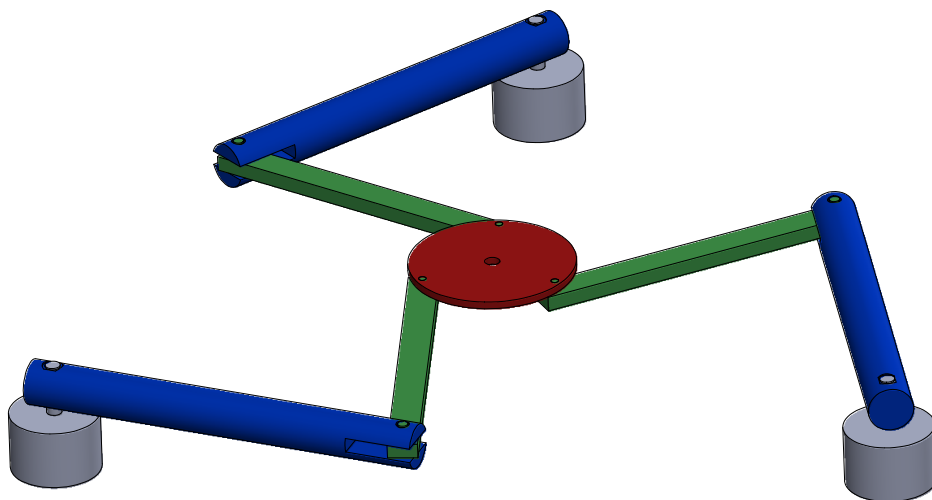


Figura C.1: Prototipo virtual de un robot paralelo planar 3RRR modelo clásico.

$a = 24.615 \text{ cm}$	$c = 54.64 \text{ cm}$	$m_b = 0.0095 \text{ kg}$	$I_G = 1.92 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
$b = 20.38 \text{ cm}$	$\ell_a = 11.3 \text{ cm}$	$m_G = 0.126 \text{ kg}$	$I_{bG} = 2.3975 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$
$e = 5 \text{ cm}$	$m_a = 0.473 \text{ kg}$	$I_a = 0.00238 \text{ kgm}^2$	

Tabla C.2: Parámetros de diseño del robot paralelo planar 3RRR con barras esbeltas y homogéneas como eslabones pasivos.

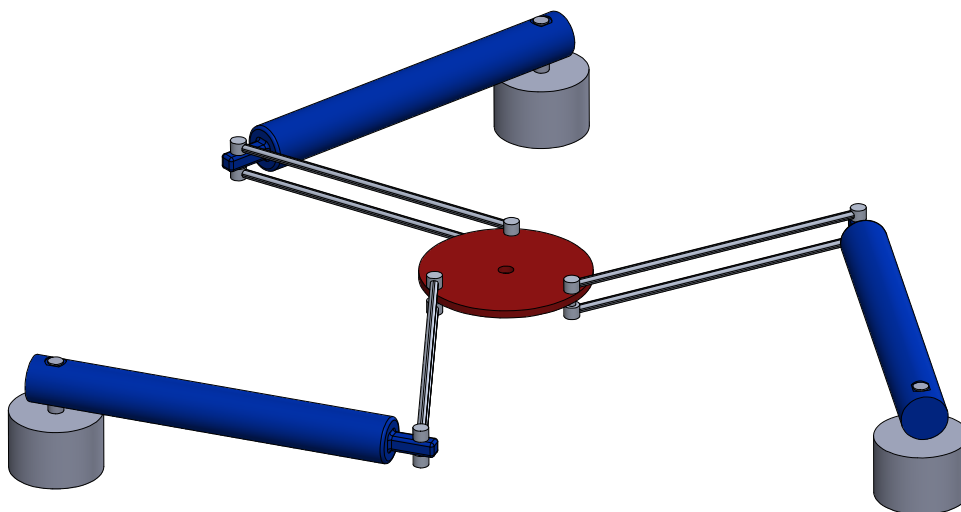


Figura C.2: Prototipo virtual de un robot paralelo planar 3RRR con barras esbeltas y homogéneas como eslabones pasivos.