

UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

**APLICACIÓN DE LAS ACCIONES DEL
GRUPO DE SIMETRÍAS EN EL DISEÑO
DE CIRCUITOS DIGITALES**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

COSME LÓPEZ JUÁREZ

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. AURA LUCINA KANTÚN MONTIEL

CO-DIRECTORA DE TESIS:

DRA. JUANA ROSAURA KANTÚN MONTIEL

LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO

2021



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

LA PRESENTE TESIS TITULADA “**APLICACIÓN DE LAS ACCIONES DEL GRUPO DE SIMETRÍAS EN EL DISEÑO DE CIRCUITOS DIGITALES**” PRESENTADA POR EL SUSTENTANTE DE LA LICENCIATURA **C. COSME LÓPEZ JUÁREZ** BAJO LA DIRECCIÓN DE LA **DRA. AURA LUCINA KANTÚN MONTIEL** Y LA **DRA. JUANA ROSAURA KANTÚN MONTIEL**, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR LA COMISIÓN REVISORA PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE **LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**.

**DRA. AURA LUCINA KANTÚN
MONTIEL
DIRECTORA**

**DRA. JUANA ROSAURA KANTÚN
MONTIEL
CO-DIRECTORA**

**DR. VÍCTOR MANUEL
MÉNDEZ SALINAS
REVISOR**

**DRA. ANAHÍ ROJAS
CARRASCO
REVISORA**

LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO

2021



Universidad del Papaloapan

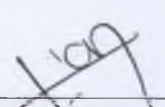
FECHA:	08 de Septiembre del 2021
AREA:	Vice-Rectoría Académica
OFICIO NUMERO:	UNPA/VRA/074/2021
ASUNTO:	Autorización de Impresión de tesis.

C. COSME LÓPEZ JUÁREZ
PRESENTE:

En base al artículo 120 del reglamento de alumnos, por medio de la presente se aprueba la impresión de la tesis titulada *“Aplicación de las acciones del grupo de simetrías en el diseño de circuitos digitales”* así como la programación del examen profesional bajo la dirección de la Dra. Aura Lucina Kantún Montiel.

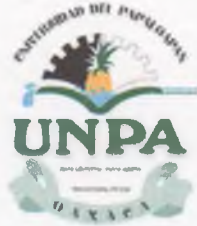
Sin más por el momento aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente.
terra ubérrima, mens aperta
Bou Lo-tama, chi jí jú


MC. HÉCTOR LÓPEZ ARJONA
Vice-Rector Académico.



C.c.p. Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas Jefe de Carrera de la Lic. En Zootecnia
C.c.p. L.P. Yesenia Barrientos Arenal. Jefa del Departamento de Servicios Escolares
C.c.p. Dra. Aura Lucina Kantún Montiel. Director de Tesis.
C.c.p. Archivo.



UNIVERSIDAD DEL PAPA LOAPAN

Campus Loma Bonita

Oficio No. MA058/2021

Loma Bonita Oaxaca a 7 de septiembre del 2021

Asunto: Asignación de sinodales de tesis

M.E. Yesenia Barrientos Arenal

Jefa del departamento de servicios escolares

PRESENTE

Por este medio le informo que la Vicerrectoría Académica, ha designado a los siguientes profesores como sinodales del examen profesional del alumno **Cosme López Juárez**, quien defenderá su trabajo de tesis titulado "*Aplicación de las acciones del grupo de simetrías en el diseño de circuitos digitales*", para obtener el título de Licenciado en Matemáticas Aplicadas.

Titulares:

Presidente: Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas

Secretario: Dr. José Nobel Méndez Alcocer

Vocal: Dra. Anahí Rojas Carrasco

Suplentes:

Dra. Aura Lucina Kantún Montiel

Dr. Juan Manuel Pérez Abarca

Sin otro particular me despido quedando a sus ordenes para cualquier aclaración.

Atentamente

Vo.Bp.

Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas

Jefe de carrera de la Lic. en Matemáticas Aplicadas

M.C. Héctor López Arjona

Vicerrector Académico



c.c.p. M.C. Héctor López Arjona. Vicerrector académico

c.c.p. Archivo

Dedicado a mi familia

Agradecimientos

Gracias a mi creador por la vida, por que cada día me da la fortaleza para ser una mejor persona y sin él nada de esto sería posible. También quiero agradecer a dos personas maravillosas: mis padres; por darme vida, amor incondicional y la oportunidad de seguir adelante, sin el esfuerzo de ellos nada de esto hubiera sido posible, gracias por el esfuerzo y el trabajo que realiza a diario. Muchas gracias por todo, papá y mamá.

Agradezco de todo corazón a mis estimados profesores: la Dra. Aura Lucina Kantún Montiel, Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas y la Dra. Beatriz Carely Luna Olivera; por apoyarme siempre, confiar en mí, ser pacientes conmigo y por sus enseñanzas y amor en la profesión que cada día nos transmitieron a cada uno de nosotros, sus estudiantes.

A todos mis profesores en general ya que cada uno de ellos me compartieron sus conocimientos y la motivación para ejercer esta profesión. Agradezco a la Dra. Rosaura Kantún por aceptar codirigir mi tesis y a los Doctores Víctor Méndez y Anahí Rojas sus valiosas correcciones para el mejoramiento de esta tesis.

A mi familia en general, a mis hermanos y mi padrino por darme la fortaleza y ayudarme cada día para seguir adelante, con su gran apoyo he logrado llegar hasta este punto donde me encuentro.

También agradezco a todos mis amigos que me brindaron su apoyo durante este trayectoria. Y a mi compañera, una gran amiga, Alfa Karen que estuvo siempre en buenos y malos momentos durante estos largos años. Y por último a la Universidad del Papaloapan por abrirme las puertas y ser parte de mi hogar para fortalecer mis conocimientos, muchas gracias.

Gracias, gracias y gracias.

Cosme López Juárez

Resumen

El estudio de los grupos de permutaciones está fuertemente relacionado con el de los grupos de simetría geométrica. En particular nos centraremos en las simetrías del triángulo y su respectivo grupo de permutaciones S_3 .

En el diseño de circuitos electrónicos con entradas y salidas binarias se tiene un gran número de funciones de conmutación. A mayor tamaño del circuito, mayor será el costo que genere, por lo que es deseable reducir el tamaño del circuito aplicando las propiedades adecuadas e identificando las funciones que puedan ser equivalentes. Muchas veces se puede transformar una función de conmutación en otra más simple permutando las entradas del circuito, para ello aplicaremos las acciones del grupo de simetrías S_n en las entradas de los circuitos electrónicos para reducir costos de fabricación. Con este fin estudiaremos algunas propiedades del álgebra de Boole y sus aplicaciones en la electrónica.

Palabras clave: Grupo, acciones, funciones de conmutación, compuertas lógicas.

Abstract

The study of permutation groups is strongly related to that of symmetry groups. In particular we will focus on the symmetries of the triangle and its respective permutation group S_3 .

In the designing of electronic circuits with binary inputs and outputs we have a large number of switching functions. The larger the circuit, the higher the cost it will generate, so it is desirable to reduce the size of the circuit by applying the appropriate properties and identifying functions that may be equivalent. A switching function can be transformed into a simpler one by permuting the inputs of the circuit, for that we will apply the actions of the symmetries group S_n in the inputs of the electronic circuits to reduce manufacturing costs. To this end we will study some properties of Boolean algebra and its applications in electronics.

Keywords: Group, actions, switching functions, logic gates.

Índice de figuras

1.1. Representación gráfica de ρ_0	12
1.2. Representación gráfica de ρ_1	12
1.3. Representación gráfica de ρ_2	12
1.4. Ejes de simetría axial.	13
1.5. Representación gráfica de μ_0	13
1.6. Representación gráfica de μ_1 y la composición.	13
1.7. Representación gráfica de μ_2 y la composición.	13
2.1. Compuerta NOT.	27
2.2. Compuerta OR.	28
2.3. Compuerta AND.	29
2.4. Diagrama de la función $f(x_1, x_2, x_3)$	31
2.5. Compuerta de distribución AND y OR.	31
2.6. Compuerta NAND.	32
2.7. Compuerta NOR.	33
2.8. Compuertas de distribución NAND y NOR.	33
2.9. Diagrama de la función f	36
2.10. Diagrama simplificado de f_m	37
2.11. Paquete en línea doble y estructura del chip 7404.	39
2.12. Dispositivo lógico programable como caja negra.	39
2.13. Oblea de silicio.	40
3.1. Diagrama de la función lógica para la selección de lechugas.	48
3.2. Diagrama de la función lógica para la selección de aguacate.	50
3.3. Diagrama de la función lógica para la selección de tomate.	51
3.4. Circuito con interruptor.	53
3.5. Interruptor conmutador rotativo 3 circuitos y 4 posiciones.	53

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
Índice de Figuras	VI
Introducción	1
1. Grupos	4
1.1. Conceptos básicos	4
1.2. Grupo Simétrico	8
1.3. Simetrías del triángulo	11
1.4. Acciones de grupos en conjuntos	16
2. Circuitos digitales	20
2.1. Álgebra de Boole	20
2.2. Compuertas Lógicas.	26
2.3. Hardware	38
2.4. Ciclo de diseño básico	40
3. Acciones del grupo simétrico en entradas de circuitos digitales	42
3.1. Acción de S_n en las funciones de conmutación	42
3.2. Diseño de un circuito para resolver un problema de selección de vegetales	47
Conclusiones	54
Bibliografía	54

Introducción

En los últimos 80 años el álgebra abstracta ha tenido gran importancia no solo en el área de las matemáticas sino en otras áreas de la ciencia. Los resultados y conceptos del álgebra abstracta han sido de gran importancia y ayuda para algunas disciplinas tales como la física, química, electrónica, ciencias de la computación, etc.

Dentro de las matemáticas el álgebra ha desempeñado dos grandes funciones:

1. Vínculo unificador entre distintas ramas de la matemática.
2. Como área de investigación en sí misma.

El álgebra abstracta ha tenido grandes avances en los últimos años y en la actualidad. En el siglo XX el álgebra alcanzó grandes avances en las matemáticas convirtiéndose en una de las áreas de mayor importancia, ya que se llegaron a demostrar grandes resultados en teoría de grupos, teoría de anillos conmutativos y no conmutativos, matemáticas combinatorias, etc. (ver e.g. [7])

La teoría de grupos surgió del estudio de ecuaciones polinomiales. La solubilidad de una ecuación está determinada por un grupo de permutaciones de sus raíces; Lagrange (1770) y Cauchy (1812) fueron los primeros en adentrarse en la investigación de permutaciones y demostrar precursores de los teoremas que llevan sus nombres. El término *grupo* fue abordado por Galois, lo que ahora llamamos los *grupos clásicos*, concepto que desarrollo después de 1850, hasta que el Programa Erlanger de Klein (1872) enfatizó su papel en la geometría.

Históricamente, los grupos se originaron mucho antes de que fuera definido el concepto de grupo abstracto. En los trabajos de Lagrange, Abel, Galois y otros, encontramos resultados sobre grupos de permutaciones que fueron demostrados a finales del siglo XVIII y a principios del XIX. Sin embargo, no fue sino hasta mediados del siglo XIX que Cayley introdujo el concepto abstracto de grupo.

La teoría de grupos moderna comenzó cuando se aplicó el método axiomático a los resultados anteriores. La teoría de los grupos de orden finito de Burnside (1897) marca el comienzo de una nueva disciplina, el álgebra abstracta, en la que las estructuras están definidas por axiomas y la naturaleza de sus elementos es irrelevante.

Lagrange fue el primero en pensar las permutaciones como funciones de un conjunto en sí mismo, pero fue Cauchy quién desarrolló los teoremas básicos y la notación para las permutaciones, él fue el primero en usar la notación cíclica.

La definición de grupo surgió de las propiedades fundamentales del grupo simétrico S_n . Pero hay otra característica importante de S_n : sus elementos son funciones que actúan sobre algún conjunto

subyacente. La noción de G -conjunto es la abstracción apropiada de esta idea. También aprovecharemos algunas de las aplicaciones de los G -conjuntos al conteo, a saber, el Lema de Burnside (ver e.g. [5, Teorema 17.1]). Burnside (1852-1927) escribió aproximadamente 150 artículos en matemáticas aplicadas, geometría diferencial y probabilidades, pero sus contribuciones más famosas fueron en teoría de grupos, aunque cabe mencionar que lo que hoy conocemos como Lema de Burnside fue probado por Frobenius en 1887, como el mismo Burnside escribió en la primera edición de su libro en 1897.

En 1854, George Boole introdujo el formalismo que se usa en el tratamiento sistemático de la lógica, que ahora se denomina álgebra Booleana cuya definición formal fue formulada en 1904 por E. V. Huntington. El álgebra Booleana se ocupa de variables binarias y operaciones lógicas. Una función booleana descrita por una expresión algebraica consta de variables binarias, esta función booleana se puede transformar de una expresión algebraica a un diagrama de circuitos hecho con compuertas lógicas. En 1938, C. E. Shannon aplicó esta álgebra en particular para demostrar que las propiedades de los circuitos de conmutación eléctricos se podían representar con un álgebra Booleana bivaluada que se denominó álgebra de conmutación. Los circuitos lógicos se estudian principalmente porque se usan en las computadoras digitales. Sin embargo, también constituyen la base de muchos otros sistemas digitales.

La tecnología para construir hardware digital ha evolucionado con el paso de las décadas, en 1960 los circuitos lógicos se construían por medio de componentes voluminosos, como transistores y resistores que se unían por separado. Al principio los circuitos estaban formados por pocos transistores, pero con el paso del tiempo fueron evolucionando y haciéndose más grandes.

En la década de los 70 se implementaron todos los circuitos necesarios para elaborar un microprocesador de un solo chip, aunque los primeros microprocesadores no eran lo suficientemente rápidos para cumplir con los estándares de la actualidad, pero gracias a ello se abrieron nuevas puertas a la revolución del procesamiento de medios para construir computadoras personales y circuitos que hoy conocemos.

En el decenio de 1980, los rápidos avances en la tecnología de los circuitos integrados impulsaron el desarrollo de prácticas estándar de diseño para los circuitos digitales.

Dentro de la estructura bajo la cual funciona la manipulación y el almacenamiento de la información, los circuitos digitales tienen un papel fundamental. En el entorno móvil representan un motor que se debe conocer y que también se aplica en la comunicación entre otros tipos de máquina.

En el presente trabajo aplicaremos algunos conceptos básicos del álgebra al desarrollo de circuitos electrónicos. Con este fin estudiaremos el álgebra Booleana y trabajaremos con el grupo de simetrías S_n empleando las permutaciones para reducir el tamaño de los circuitos electrónicos y de esta manera reducir costos.

Para ello, hemos dividido el presente trabajo en tres partes, en la primera se presentan los conceptos básicos del álgebra abstracta prestando atención a los conceptos de grupo, grupos de simetrías, simetrías del triángulo y acciones de grupos en conjuntos. De especial interés para este trabajo es el Teorema de Burnside ya que nos ofrece un método de calcular el número de maneras distinguibles en que algo puede ser realizado, además de tener aplicaciones geométricas y aplicaciones en la teoría de conmutación en la cual estaremos trabajando en el último capítulo. Dada una acción de un grupo en un conjunto, las órbitas forman una partición del conjunto, y el Teorema de Burnside nos dice

cuántas órbitas tiene el G -conjunto a partir de los conjuntos de puntos fijos.

En el segundo capítulo se presentan conceptos básicos, teoremas y propiedades del Álgebra de Boole y su aplicación a la electrónica, se presentarán las compuertas lógicas básicas así como algunos ejemplos y teoremas. Los teoremas presentados en este capítulo nos permiten reducir ciertas funciones a una función equivalente y así reducir el costo generado para hacer un circuito electrónico.

El tercer capítulo se divide en dos secciones, en la primera estudiaremos las acciones de S_n en las funciones de conmutación, cómo se definen y un ejemplo de cómo conocer el número de funciones equivalentes aplicando el Teorema de Burnside. En la segunda sección veremos el diseño de un circuito digital para la selección de ciertos vegetales, pero para disminuir el costo que genera la construcción de cada circuito, aplicaremos la acción de un grupo de permutaciones en las entradas de los circuitos para así hacer uno solo que esté en función de los otros.

Capítulo 1

Grupos

A continuación daremos a conocer algunos conceptos básicos, propiedades y teoremas del álgebra abstracta que serán de utilidad a lo largo de este trabajo. Nos centraremos en el concepto de grupo, pondremos especial atención en las acciones de grupos, grupo simétrico y las simetrías del triángulo. Veremos algunos ejemplos importantes. Para mas información en estos temas recomendamos [1], [2], [3], [5], [7], [8] y [10].

1.1. Conceptos básicos

Definición 1.1.1. Una **operación binaria** \star en un conjunto S es una función $\star : S \times S \rightarrow S$. En otras palabras, es una regla que asigna a cada par ordenado de elementos de S algún otro elemento de S .

Definición 1.1.2. Un **grupo** (G, \star) es un conjunto G , cerrado bajo una operación binaria \star de modo que se satisfacen los siguientes axiomas.

I) Para todo $a, b, c \in G$ se cumple

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c.$$

II) Existe un elemento $e \in G$ tal que para toda $x \in G$

$$x \star e = e \star x = x.$$

A este elemento se le conoce como **elemento neutro** o **identidad**.

III) Para todo $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ al que llamamos inverso de a tal que

$$a^{-1} \star a = e = a \star a^{-1}.$$

Definición 1.1.3. Un grupo G es **abeliano** si su operación binaria \star es conmutativa. Esto es, si para todo $a, b \in G$

$$a \star b = b \star a.$$

Definición 1.1.4. Sea (G, \star) un grupo cuyo elemento neutro es e . Se dice que un subconjunto H de G es un **subgrupo** de G si H tiene las tres propiedades siguientes:

I) $e \in H$.

II) Si $a, b \in H$ entonces $a \star b \in H$.

III) Si $a \in H$ entonces $a^{-1} \in H$.

Si H es un subgrupo de G , se denota como $H < G$.

En la práctica, la operación binaria se omite cuando no hay lugar a confusión, y escribimos simplemente G en lugar de (G, \star) , de esta manera podemos escribir las condiciones de la definición 1.1.2 como

I) Para todo $a, b, c \in G$ se cumple

$$a(bc) = (ab)c.$$

II) Existe un elemento $e \in G$ tal que para toda $x \in G$

$$xe = ex = x.$$

III) Para todo $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que

$$a^{-1}a = e = aa^{-1}.$$

Proposición 1.1.5. Dado un subconjunto H de un grupo G no vacío, H es un subgrupo de G si y sólo si $ab^{-1} \in H$ para toda $a, b \in H$.

Demostración. \Rightarrow) Sea H un subgrupo de G y sean $a, b \in H$. Como H es un subgrupo, $b^{-1} \in H$ y por lo tanto $ab^{-1} \in H$.

\Leftarrow) Sea $a \in H$. Por hipótesis, $e = aa^{-1} \in H$. Si $b \in H$ entonces $b^{-1} = eb^{-1} \in H$. Finalmente, si $a, b \in H$, entonces $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$. Por lo tanto, H es un subgrupo de G . \square

Definición 1.1.6. Si G es un grupo finito, entonces el **orden** $|G|$ de G es el número de elementos de G .

Teorema 1.1.7. Sea G un grupo y sea $x \in G$. Entonces

$$H = \{x^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

es un subgrupo de G y es el menor subgrupo de G que contiene a x , esto es, cada subgrupo que contiene a x contiene a H .

Definición 1.1.8. El subgrupo H del Teorema 1.1.7 es el **subgrupo cíclico** de G generado por x y se denota por $\langle x \rangle$.

Definición 1.1.9. Un elemento a del grupo G es un **generador** de G si $\langle a \rangle = G$. Un grupo G es cíclico si existe algún elemento x en G que genera a G .

Definición 1.1.10. Sean G un grupo, H un subgrupo de G y $g \in G$. La **clase lateral izquierda** gH de H es el conjunto

$$gH = \{gh : h \in H\}.$$

La **clase lateral derecha** puede ser definida similarmente como

$$Hg = \{hg : h \in H\}.$$

Definición 1.1.11. Sean G un grupo y H un subgrupo de G . El conjunto de **clases laterales izquierdas de H** se denota por G/H , esto es

$$G/H = \{aH | a \in G\}.$$

Análogamente, el conjunto de **clases laterales derechas de H** se denota por $H \backslash G$, esto es

$$H \backslash G = \{Ha | a \in G\}.$$

Definición 1.1.12. Sea G un grupo. Se dice que un subgrupo N de G es un **subgrupo normal** de G si $aN = Na$, para todo $a \in G$. Es decir, un subgrupo normal de un grupo G es un subgrupo para el que las clases laterales derechas e izquierdas coinciden.

Definición 1.1.13. Sea G un grupo. El conjunto G/N de las clases laterales izquierdas de un subgrupo normal N de G con la ley de composición interna

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

se denomina el **grupo cociente** de G por N .

Lema 1.1.14. Sean G un grupo y H un subgrupo de G y supongamos que $g_1, g_2 \in G$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I) $g_1H = g_2H$,
- II) $g_2 \in g_1H$,
- III) $g_1^{-1}g_2 \in H$.

Demostración. I) \Rightarrow II) $g_2 = g_2e \in g_2H = g_1H$.

II) \Rightarrow III) Si $g_2 \in g_1H$, entonces $g_2 = g_1h$ para alguna $h \in H$, entonces $g_1^{-1}g_2 = g_1^{-1}g_1h = eh \in H$.

III) \Rightarrow I) Si $g_1^{-1}g_2 \in H$ entonces $g_1^{-1}g_2H = H$ luego $g_1H = g_1g_1^{-1}g_2H = g_2H$. \square

Proposición 1.1.15. Sean G un grupo y H un subgrupo de G . Entonces las clases laterales izquierdas de H en G particionan a G . Es decir, el grupo G es la unión disjunta de las clases laterales izquierdas de H en G .

Demostración. Sean g_1H y g_2H dos clases laterales de H en G .

Supongamos que $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$ y sea $a \in g_1H \cap g_2H$. Entonces por definición de las clases laterales izquierdas, $a = g_1h_1 = g_2h_2$ para ciertos elementos h_1 y h_2 en H . Luego $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$ y como, por la Proposición 1.1.5, $h_2h_1^{-1} \in H$, se sigue que $g_1 \in g_2H$. Por lo tanto, por el Lema 1.1.14, $g_1H = g_2H$. \square

Análogamente, el conjunto de las clases laterales derechas forman una partición de G .

Lema 1.1.16. *Sea $H < G$, entonces para todo $g \in G$, $|gH| = |H|$.*

Demostración. Sea $g \in G$. Definamos

$$L_g : H \rightarrow gH \text{ como } L_g(h) = gh.$$

Veamos que L_g es biyectiva. Sea $x, y \in H$ tales que $L_g(x) = L_g(y)$ esto es $gx = gy$.

De aquí

$$g^{-1}gx = g^{-1}gy$$

luego

$$x = g^{-1}gy.$$

Concluimos que $x = y$. Por lo tanto L_g es inyectiva.

Además L_g es sobreyectiva ya que para todo $w \in gH$, $w = gh$ para alguna $h \in H$.

Por lo tanto,

$$L_g(h) = gh = w.$$

\square

Definición 1.1.17. Sea H un subgrupo de un grupo G . Se define el **índice** de H en G como el número de clases laterales izquierdas de H en G , esto es $|G/H|$, y lo denotaremos por $[G : H]$.

Teorema 1.1.18. (de Lagrange) *Sea G un grupo finito y sea H un subgrupo de G . Entonces $|G|/|H| = [G : H]$.*

Demostración. Sea k el número de clases laterales distintas definidas en G . Sean

$$g_1H, g_2H, \dots, g_kH$$

representantes de cada una de las k clases laterales. Por la Proposición 1.1.15,

$$g_1H \sqcup g_2H \sqcup \dots \sqcup g_kH = G,$$

luego

$$|g_1H| + |g_2H| + \dots + |g_kH| = |G|,$$

y como por el Lema 1.1.16 cada clase tiene $|H|$ elementos, entonces

$$k|H| = |G|, \text{ así } [G : H] = k = |G|/|H|.$$

\square

1.2. Grupo Simétrico

Todo grupo finito puede verse como un subgrupo del grupo simétrico S_n . Este resultado fue probado por el matemático inglés Arthur Cayley, en esta sección daremos la demostración de este teorema.

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto no vacío. Una **permutación** de X es una función biyectiva $\sigma : X \rightarrow X$.

Así, una transformación σ uno a uno del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ en sí mismo es una permutación. En este caso denotaremos a la permutación σ como

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

donde $j_i = \sigma(i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Al conjunto de todas las permutaciones de X se le denota por S_X :

$$S_X = \{\alpha : X \rightarrow X \mid \alpha \text{ es biyectiva}\}.$$

En el caso especial cuando

$$X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

escribimos el conjunto de todas las permutaciones como S_n en lugar de S_X .

Observación 1.2.2. $|S_n| = n!$

Definición 1.2.3. Decimos que una permutación $\sigma \in S_m$ es un **ciclo de longitud n** o un n -ciclo si existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ tales que

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{n-1}) = a_n, \sigma(a_n) = a_1$$

y $\sigma(x) = x$ para todo $x \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. En este caso denotamos a σ por $(a_1 a_2 \dots a_n)$.

Un ciclo de longitud 1 representa la función de identidad.

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1) = (2) = (3) = \cdots = (n)$$

Un ciclo de longitud 2 es una transposición.

Ejemplo 1.2.4. La siguiente permutación es un producto de transposiciones.

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 1 & 10 & 9 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 3)(2 \ 6)(4 \ 10)(5 \ 9)(7 \ 8)$$

Ejemplo 1.2.5. A continuación se muestra una permutación y su notación cíclica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 7 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 10)(2 \ 8 \ 6 \ 3 \ 7 \ 9 \ 4)$$

Definición 1.2.6. Sean X, Y y Z conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones. Definimos una nueva función, la **composición** de f y g de X en Z , como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ejemplo 1.2.7. Sean $\rho, \mu \in S_7$ las permutaciones definidas como

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

y

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} (\rho \circ \mu)(1) &= \rho(\mu(1)) = \rho(7) = 7, \\ (\rho \circ \mu)(2) &= \rho(\mu(2)) = \rho(4) = 4, \\ (\rho \circ \mu)(3) &= \rho(\mu(3)) = \rho(1) = 5, \\ (\rho \circ \mu)(4) &= \rho(\mu(4)) = \rho(6) = 2, \\ (\rho \circ \mu)(5) &= \rho(\mu(5)) = \rho(2) = 3, \\ (\rho \circ \mu)(6) &= \rho(\mu(6)) = \rho(5) = 1, \\ (\rho \circ \mu)(7) &= \rho(\mu(7)) = \rho(3) = 6, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} (\rho \circ \mu) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A continuación demostraremos que el conjunto de todas las permutaciones S_X cumple las condiciones para ser un grupo, a este grupo se le conoce como **grupo simétrico** o **grupo de simetrías**.

Proposición 1.2.8. S_X es un grupo con la ley de composición.

Demostración. Sea X un conjunto no vacío y sea S_X la familia de todas las permutaciones de X . Sean ρ, μ y $\tau \in S_X$. Veamos que la composición de funciones de permutación es asociativa. Para toda $a \in X$ tenemos que

$$[\rho \circ (\mu \circ \tau)](a) = \rho[(\mu \circ \tau)(a)] = \rho[\mu(\tau(a))] = (\rho \circ \mu)(\tau(a)) = [(\rho \circ \mu) \circ \tau](a).$$

Por lo tanto

$$(\rho \circ \mu) \circ \tau = \rho \circ (\mu \circ \tau).$$

Luego, se satisface la condición I) de la Definición 1.1.2.

Sean $a \in X$, $\rho \in S_X$ y $\rho_0 : X \rightarrow X$ la función identidad definida como $\rho_0(x) = x$, para todo $x \in X$. Se cumple que

$$(\rho_0 \circ \rho)(a) = \rho_0(\rho(a)) = \rho(a) \text{ y } (\rho \circ \rho_0)(a) = \rho(\rho_0(a)) = \rho(a).$$

Por lo cual ρ_0 satisface la condición II) de la Definición 1.1.2.

Sea $\rho \in S_X$. Como la función ρ es uno a uno y sobreyectiva, podemos definir ρ^{-1} como la permutación que invierte la dirección de la transformación ρ , esto es, $\rho^{-1}(a)$ es el elemento a' de X tal que $\rho(a') = a$. Entonces

$$(\rho \circ \rho^{-1})(a) = \rho(\rho^{-1}(a)) = \rho(a') = a = \rho_0(a)$$

y también

$$\rho_0(a') = a' = \rho^{-1}(a) = \rho^{-1}(\rho(a')) = (\rho^{-1} \circ \rho)(a')$$

de manera que $\rho^{-1} \circ \rho$ y $\rho \circ \rho^{-1}$ son ambas la permutación identidad. Por lo tanto se satisface la condición III) de la Definición 1.1.2. \square

Definición 1.2.9. Sean G y G' dos grupos. Decimos que una función $\varphi : G \rightarrow G'$ es un **homomorfismo** si

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

para cada $a, b \in G$.

Proposición 1.2.10. Si φ es un homomorfismo de G en G' , entonces:

- a) $\varphi(e) = e'$, el elemento neutro de G' .
- b) $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ para cualquier $a \in G$.
- c) $Im(\varphi) < G'$, donde $Im(\varphi)$ es la imagen de la función.

Demostración. Sea φ un homomorfismo de G en G' .

a) Sean e y e' las identidades de G y G' . Entonces

$$e'\varphi(e) = \varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)\varphi(e)$$

de aquí cancelando $\varphi(e)$ tenemos que $\varphi(e) = e'$.

b) Por otro lado, tenemos que

$$\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(e) = e'.$$

Luego

$$\varphi(a)^{-1}\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}e', \text{ esto es } e'\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}e'.$$

Por lo tanto $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

c) Para probar que la $Im(\varphi)$ es un subgrupo de G' tenemos que mostrar que es cerrado bajo la multiplicación y que todo elemento de $Im(\varphi)$ tiene su inverso en $Im(\varphi)$. Como podemos notar, por el inciso a) tenemos que $e' \in Im(\varphi)$. Si $\varphi(a), \varphi(b) \in Im(\varphi)$ entonces

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in Im(\varphi)$$

y por último, por el inciso b) tenemos si $\varphi(a) \in Im(\varphi)$ entonces

$$\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in Im(\varphi).$$

□

Definición 1.2.11. Sean G y G' dos grupos y $f : G \rightarrow G'$ una función. Decimos que f es un **isomorfismo** si y sólo si f es un homomorfismo y es biyectiva.

Como mencionamos en la introducción, los grupos se empezaron a estudiar en un principio como permutaciones y con el paso del tiempo se generalizó la definición de grupo, de hecho, todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones.

Teorema 1.2.12. (Cayley) *Todo grupo G es isomorfo a un grupo de permutaciones de sus propios elementos.*

Demostración. Para cada $g \in G$, definamos la función $t_g : G \rightarrow G$ como $t_g(x) = gx$. Veamos que t_g es biyectiva. Si $x_1, x_2 \in G$ son tales que $t_g(x_1) = t_g(x_2)$, esto es $gx_1 = gx_2$, entonces $x_1 = g^{-1}gx_2$, de donde concluimos que $x_1 = x_2$. Por lo que t_g es inyectiva.

Además t_g es sobreyectiva ya que para cada $y \in G$, el elemento $g^{-1}y \in G$ cumple que

$$t_g(g^{-1}y) = gg^{-1}y = y.$$

Por lo tanto, t_g es una permutación para todo $g \in G$.

Sea $\varphi : G \rightarrow S_G$ definida como $\varphi(g) = t_g$. Entonces $\varphi(g_1g_2) = t_{g_1g_2}$ pero

$$\begin{aligned} t_{g_1g_2}(x) &= g_1g_2x = t_{g_1}(g_2x) \\ &= t_{g_1}(t_{g_2}(x)) \\ &= (t_{g_1} \circ t_{g_2})(x). \end{aligned}$$

Así, $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$.

Ahora bien, si $g_1, g_2 \in G$ son tales que $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, entonces $t_{g_1} = t_{g_2}$. Luego

$$t_{g_1}(e) = t_{g_2}(e)$$

por lo que

$$g_1(e) = g_2(e)$$

es decir $g_1 = g_2$. Por lo tanto, G es isomorfo a la imagen $Im(\varphi)$, que es un subgrupo de S_G . □

En particular, si $|G| = n$ entonces G puede encajarse en S_n (G es isomorfo a un subgrupo de S_n).

1.3. Simetrías del triángulo

Una simetría de una figura geométrica es un reposicionamiento de la figura que preserva las relaciones entre sus lados y sus vértices tales como la distancia y los ángulos. Una función del plano en sí mismo que representa la simetría de un objeto se llama **movimiento rígido**. Podemos interpretar la simetría de una figura como la transformación de la figura en sí misma.

Por ejemplo, el triángulo equilátero tiene simetría rotacional y axial, lo cual significa que coincide consigo mismo en ciertos movimientos sin deformarse. Estos movimientos son:

ρ_0 : Corresponde al movimiento rígido de rotar en sentido contrario de las agujas del reloj el triángulo en 2π radianes o 360° . Notemos que esto es equivalente a no hacer ningún movimiento, esto es 0 radianes o 0° como podemos ver en la Figura 1.1.

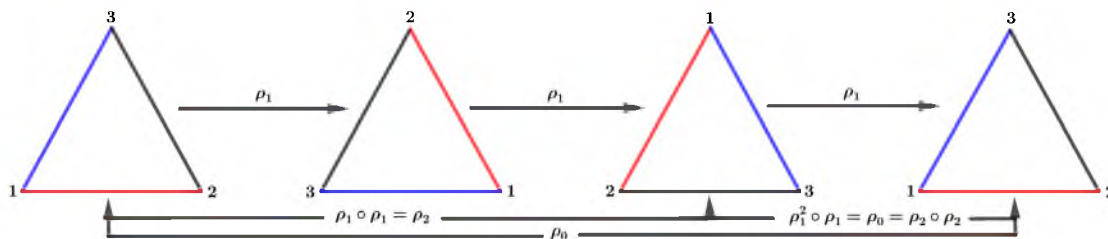


Figura 1.1: Representación gráfica de ρ_0 .

ρ_1 : Corresponde al movimiento rígido de rotar en sentido contrario de las agujas del reloj el triángulo en $2\pi/3$ radianes o 120° , alrededor de su centro de gravedad como se representa en la Figura 1.2.

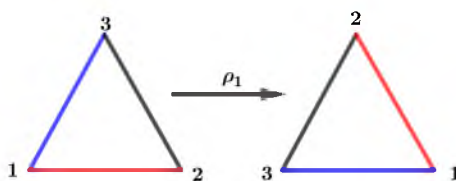


Figura 1.2: Representación gráfica de ρ_1 .

ρ_2 : Corresponde al movimiento rígido de rotar en sentido contrario de las agujas del reloj el triángulo en $4\pi/3$ radianes o 240° , alrededor de su centro de gravedad como se muestra en la Figura 1.3.

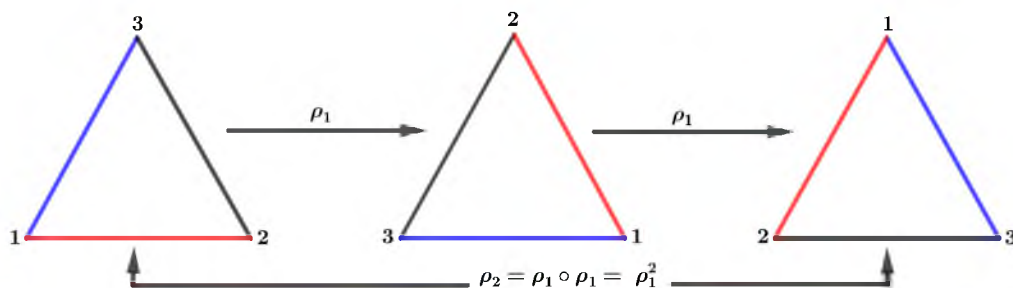


Figura 1.3: Representación gráfica de ρ_2 .

Los tres ejes de simetría axial que podemos hallar en el triángulo equilátero son las alturas o mediatrices que pasan por cada vértice. Es decir el triángulo equilátero al reflejarse coincide consigo mismo en su plano como se muestra en la Figura 1.4.

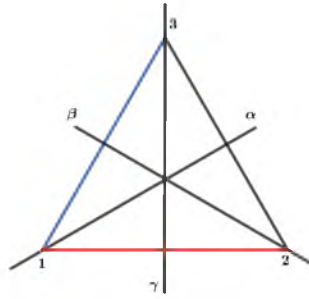


Figura 1.4: Ejes de simetría axial.

μ_0 : Reflexión de la recta α que pasa por el vértice 1 (deja fijo el vértice 1), como se representa en el diagrama de la Figura 1.5.

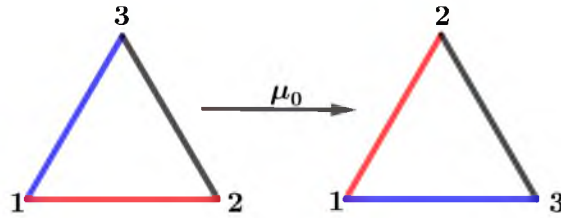


Figura 1.5: Representación gráfica de μ_0 .

μ_1 : Reflexión de la recta β que pasa por el vértice 2 (deja fijo el vértice 2), como se representa en el diagrama de la Figura 1.6.

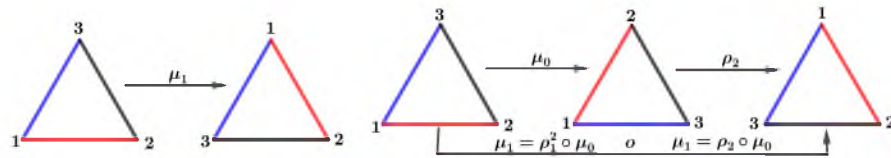


Figura 1.6: Representación gráfica de μ_1 y la composición.

μ_2 : Reflexión de la recta γ que pasa por el vértice 3 (deja fijo el vértice 3), como se representa en el diagrama de la Figura 1.7.

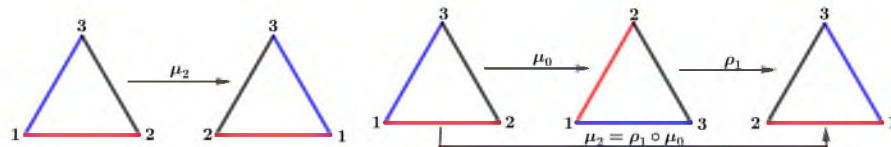


Figura 1.7: Representación gráfica de μ_2 y la composición.

Notemos que estos movimientos corresponden a los elementos de S_3 .

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1) & \mu_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23) \\ \rho_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) & \mu_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13) \\ \rho_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) & \mu_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)\end{aligned}$$

En el Cuadro 1.1 podemos hallar la composición de estas permutaciones.

\circ	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_0	μ_1	μ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_0	μ_1	μ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_1	μ_2	μ_0
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_0	μ_1
μ_0	μ_0	μ_2	μ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_1
μ_1	μ_1	μ_0	μ_2	ρ_1	ρ_0	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_1	μ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_0

Cuadro 1.1: Tabla de composición.

Para hallar el orden de los subgrupos de S_3 apliquemos el Teorema 1.1.18.

Como el orden de $|S_3| = 6$ y los divisores de 6 son 1,2,3 y 6, entonces los subgrupos de S_3 , si existen, serán de orden 1,2,3 o 6. Los subgrupos triviales o impropios son: $\{\rho_0\}$ y S_3 . El orden $|\{\rho_0\}| = 1$ y el orden $|S_3| = 6$.

La tabla de operación de los subgrupos de orden 2 debe estar compuesta por el elemento identidad ρ_0 y otro elemento x que satisfaga $x^{|H|} = x^2 = \rho_0$, donde H es un subgrupo de S_3 . Los elementos de S_3 que satisfacen esta condición son μ_0, μ_1 y μ_2 puesto que

$$\mu_0^2 = \mu_1^2 = \mu_2^2 = \rho_0.$$

De esta manera, los subgrupos de orden 2 del grupo S_3 son:

$$H_1 = \{\rho_0, \mu_0\}; H_2 = \{\rho_0, \mu_1\}; H_3 = \{\rho_0, \mu_2\}$$

además,

$$H_1 = \langle \mu_0 \rangle; H_2 = \langle \mu_1 \rangle \text{ y } H_3 = \langle \mu_2 \rangle .$$

Los subgrupos H_1, H_2 y H_3 de S_3 no son subgrupos normales ya que

$$H_1\rho_2 = \{\rho_0\rho_2, \mu_0\rho_2\} = \{\rho_2, \mu_1\}.$$

Por otro lado,

$$\rho_2 H_1 = \{\rho_2 \rho_0, \rho_2 \mu_0\} = \{\rho_2, \mu_2\}.$$

Para H_2 se tiene

$$H_2 \mu_0 = \{\rho_0 \mu_0, \mu_1 \mu_0\} = \{\mu_0, \rho_1\}.$$

Por otro lado

$$\mu_0 H_2 = \{\mu_0 \rho_0, \mu_0 \mu_1\} = \{\mu_0, \rho_2\}.$$

Y por ultimo para H_3 se tiene

$$H_3 \mu_1 = \{\rho_0 \mu_1, \mu_2 \mu_1\} = \{\mu_1, \rho_1\}.$$

Por otro lado

$$\mu_1 H_2 = \{\mu_1 \rho_0, \mu_1 \mu_2\} = \{\mu_1, \rho_2\}.$$

Notemos que, H_1 , H_2 y H_3 son abelianos ya que

$$\rho_0 \mu_0 = \mu_0 \rho_0,$$

$$\rho_0 \mu_1 = \mu_1 \rho_0,$$

y

$$\rho_0 \mu_2 = \mu_2 \rho_0.$$

Si un subgrupo H es de orden 3 estará formado por la identidad y otro elemento x que satisface

$$x^{|H|} = x^3 = \rho_0.$$

Como

$$(\rho_1)^3 = \rho_2 \rho_1 = \rho_0$$

y

$$(\rho_2)^3 = (\rho_2)^2 \rho_2 = \rho_1 \rho_2 = \rho_0$$

el único subgrupo de orden 3 de S_3 es

$$H_4 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$$

H_4 es un subgrupo normal de S_3 ya que

$$H_4 \rho_0 = \rho_0 H_4,$$

$$H_4 \rho_1 = \{\rho_0 \rho_1, \rho_1 \rho_1, \rho_2 \rho_1\} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_0\} = \{\rho_1 \rho_0, \rho_1 \rho_1, \rho_1 \rho_2\} = \rho_1 H_4,$$

$$H_4 \rho_2 = \{\rho_0 \rho_2, \rho_1 \rho_2, \rho_2 \rho_2\} = \{\rho_2, \rho_0, \rho_1\} = \{\rho_2 \rho_0, \rho_2 \rho_1, \rho_2 \rho_2\} = \rho_2 H_4,$$

$$H_4 \mu_0 = \{\rho_0 \mu_0, \rho_1 \mu_0, \rho_2 \mu_0\} = \{\mu_0, \mu_1, \mu_2\} = \{\mu_0 \rho_0, \mu_0 \rho_2, \mu_0 \rho_1\} = \mu_0 H_4,$$

$$H_4 \mu_1 = \{\rho_0 \mu_1, \rho_1 \mu_1, \rho_2 \mu_1\} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_0\} = \{\mu_1 \rho_0, \mu_1 \rho_2, \mu_1 \rho_1\} = \mu_1 H_4,$$

$$H_4 \mu_2 = \{\rho_0 \mu_2, \rho_1 \mu_2, \rho_2 \mu_2\} = \{\mu_2, \rho_0, \rho_1\} = \{\mu_2 \rho_0, \mu_2 \rho_2, \mu_2 \rho_1\} = \mu_2 H_4.$$

Notemos que H_4 es un subgrupo abeliano de S_3 .

1.4. Acciones de grupos en conjuntos

En esta sección nos adentraremos en el estudio de los G -conjuntos, veremos que toda acción es equivalente a una representación por permutación y enunciaremos un teorema que nos permite contar el número de órbitas en un G -conjunto. La importancia de las acciones de grupos en conjuntos radica en que, en la Sección 3.1, aplicaremos la acción del grupo S_3 a las funciones de conmutación para reducir el número de ellas, aplicando este método, en la Sección 3.2 diseñaremos un circuito digital para la selección de ciertos vegetales.

Definición 1.4.1. Sean (G, \star) un grupo y X un conjunto no vacío. Una **acción (izquierda)** de G en X es una función $\theta : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g * x$ tal que

- para todo $x \in X$

$$e * x = x$$

donde e es el elemento neutro en G ;

- para todo $g, h \in G$ y para todo $x \in X$

$$g * (h * x) = (g \star h) * x.$$

Bajo estas dos condiciones decimos que X es un **G -conjunto**.

Cuando no hay lugar a confusión con las operaciones se acostumbra omitir la operación y suelen escribirse las condiciones de la definición de la siguiente manera.

- Para todo $x \in X$

$$ex = x.$$

- Para todo $g, h \in G$ y para todo $x \in X$

$$g(hx) = (gh)x.$$

Definición 1.4.2. Sea X un G -conjunto.

- La **G -órbita** de $x \in X$ es el conjunto

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X.$$

- Al conjunto de todas las órbitas se le conoce como **espacio orbital** y se denota como

$$X/G = \{G(x) \mid x \in X\}.$$

- El **estabilizador** o **subgrupo de isotropía** de $x \in X$ es el conjunto

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G.$$

- Se dice que la acción de G en X es **transitiva** si sólo tiene una órbita; es decir, para cada $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que

$$y = gx.$$

Definición 1.4.3. Sea X un G -conjunto y $g \in G$. El conjunto de puntos de X que son fijos bajo la acción de $\{g\}$ se llaman **puntos fijos** y se denota por

$$X_g = \{x \in X \mid gx = x\}.$$

Definición 1.4.4. Una **representación por permutación** de un grupo G en un conjunto X es un homomorfismo de G en el conjunto de todas las permutaciones de X .

El concepto de acción de un grupo G en un conjunto X y el de representación por permutación de G en X son equivalentes.

Teorema 1.4.5. Si X es un G -conjunto con acción $\theta : G \times X \rightarrow X$, entonces existe un homomorfismo $\bar{\theta} : G \rightarrow S_X$. Recíprocamente, todo homomorfismo $\varphi : G \rightarrow S_X$ define una acción que convierte a X en un G -conjunto.

Demostración. Supongamos que X es un G -conjunto con acción θ . Para cada $g \in G$, definamos $\bar{\theta}_g : X \rightarrow X$ como $\bar{\theta}_g(x) = gx = \theta(g, x)$, para cada $x \in X$. Si $g, h \in G$ y $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} [\bar{\theta}_g \circ \bar{\theta}_h](x) &= \bar{\theta}_g[\bar{\theta}_h(x)] \\ &= \bar{\theta}_g(hx) = g(hx) \\ &= (gh)x = \bar{\theta}_{(gh)}(x). \end{aligned}$$

Además $\bar{\theta}_e = Id_X$ ya que $\bar{\theta}_e(x) = ex = x = Id_X(x)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_g \circ \bar{\theta}_{g^{-1}} &= \bar{\theta}_{(gg^{-1})} = \bar{\theta}_e \\ &= Id_X \\ &= \bar{\theta}_{(g^{-1}g)} \\ &= \bar{\theta}_{g^{-1}} \circ \bar{\theta}_g \end{aligned}$$

y por lo tanto, las funciones $\bar{\theta}_g$ y $\bar{\theta}_{g^{-1}}$ son inversas una de la otra, lo que significa que ambas son biyectivas. Esto es, $\bar{\theta}_g, \bar{\theta}_{g^{-1}}$ son permutaciones. Luego, $\bar{\theta} : G \rightarrow S_X$ definida como $\bar{\theta}(g) = \bar{\theta}_g$ es un homomorfismo.

Ahora supongamos que $\varphi : G \rightarrow S_X$ es un homomorfismo. Entonces $\varphi(g) : X \rightarrow X$ es una permutación para cada $g \in G$. Definamos la función $v : G \times X \rightarrow X$ como $v(g, x) = gx = \varphi(g)(x)$ para cada $(g, x) \in G \times X$. Como φ es un homomorfismo, se cumple que $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$ para cada par $g, h \in G$. Luego

$$\begin{aligned} (gh)(x) &= \varphi(gh)(x) = [\varphi(g) \circ \varphi(h)](x) \\ &= \varphi(g)[\varphi(h)(x)] \\ &= \varphi(g)(hx) \end{aligned}$$

$$= g(hx).$$

Mas aún, como φ es un homomorfismo $\varphi(e) = Id_X$, así que $ex = \varphi(e)(x) = Id_X(x) = x$ para cada $x \in X$. \square

Teorema 1.4.6. Sean X un G -conjunto y $x \in X$. Se cumple lo siguiente:

- 1) $|G(x)| = [G : G_x]$,
- 2) Si G es finito, entonces $|G(x)|$ es un divisor de $|G|$.

Demostración. Para cada $y \in G(x)$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Definamos una función

$$\varphi : G(x) \rightarrow G/G_x \text{ como } \varphi(y) = gG_x.$$

Veamos que φ está bien definida. Sea $y = gx$ y supongamos que también existe $g' \in G$ tal que $g'x = y$. Entonces $g'x = gx$, de modo que $g^{-1}g'x = g^{-1}gx$. De lo anterior deducimos que $x = g^{-1}g'x$. Por lo tanto, $g^{-1}g' \in G_x$ luego, por el Lema 1.1.14, $gG_x = g'G_x$.

Veamos que φ es inyectiva. Sean $y_1, y_2 \in G(x)$ tales que $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$. Entonces existen $g_1, g_2 \in G$, tales que

$$y_1 = g_1x \text{ y } y_2 = g_2x.$$

Por otro lado $\varphi(y_1) = g_1G_x$ y $\varphi(y_2) = g_2G_x$, luego $g_1G_x = g_2G_x$ y por el Lema 1.1.14, $g_2 \in g_1G_x$. Como $g_2 = g_1g$ para alguna $g \in G_x$, de aquí

$$y_2 = g_2x = (g_1g)x = g_1(gx) = g_1x = y_1.$$

Por lo tanto, $y_1 = y_2$, así φ es inyectiva.

Ahora veamos que φ es sobreyectiva. Sea $w \in G/G_x$, entonces existe $g_0 \in G$ tal que $w = g_0G_x$. Como $g_0x \in G(x)$, entonces

$$\varphi(g_0x) = g_0G_x = w.$$

Por tanto, φ es una biyección y

$$|G(x)| = |G/G_x| = [G : G_x]$$

y por Teorema 1.1.18, si G es finito,

$$|G|/|G_x| = [G : G_x]$$

\square

A continuación se presenta el Teorema de Conteo de Burnside que es de importancia para el contexto de este trabajo ya que nos ofrece un método para calcular el número de maneras distinguibles en que algo puede ser realizado. Además de las aplicaciones geométricas, el teorema tiene interesantes aplicaciones en la teoría de conmutación.

Teorema 1.4.7 (Lema de Burnside). *Sea X un G -conjunto tal que X y G son finitos, y sea K el número de G -órbitas en X . Entonces*

$$K = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Demostración. Sea $J = \{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}$. Para cada $g \in G$, existen $|X_g|$ elementos de J con g como primer elemento, de esta forma

$$|J| = \sum_{g \in G} |X_g|. \quad (1)$$

Por otro lado, para cada $x \in X$, hay $|G_x|$ elementos de J con x como segundo elemento. Así que

$$|J| = \sum_{x \in X} |G_x|.$$

Por el Teorema 1.4.6 , $|G(x)| = [G : G_x]$ y por el Teorema 1.1.18 $[G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}$. Esto implica que

$$|G_x| = \frac{|G|}{|G(x)|}$$

luego

$$|J| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G(x)|} = |G| \left(\sum_{x \in X} \frac{1}{|G(x)|} \right).$$

Sea $O \in X/G$, entonces

$$\sum_{x \in O} \frac{1}{|G(x)|} = 1$$

por lo que $|J| = |G| \cdot K$, igualando con (1) obtenemos

$$|G| \cdot K = \sum_{g \in G} |X_g|$$

por lo tanto

$$K = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

□

Capítulo 2

Circuitos digitales

La Electrónica Digital es la parte de la Electrónica que trabaja con variables discretas. Los circuitos digitales se pueden utilizar en diversas tecnologías como son: la mecánica, la electromecánica, la óptica y la magnética; en la actualidad se utiliza la tecnología microelectrónica, ya que permite integrar millones de dispositivos para operar de manera conjunta en un periodo de tiempo reducido. En este capítulo daremos una introducción al Álgebra de Boole tratando algunas definiciones y propiedades importantes, a la vez presentaremos las compuertas lógicas básicas, su funcionamiento y sus diagramas. También veremos cómo definir una función lógica partiendo del comportamiento deseado. Para conocer más sobre estos temas recomendamos [4], [6], [11] y [12].

2.1. Álgebra de Boole

Definición 2.1.1. Sea R una relación sobre un conjunto S , tal que para todo $a, b, c \in S$ satisface las tres propiedades siguientes:

1. (Reflexiva) aRa .
2. (Antisimétrica) Si aRb y bRa , entonces $a = b$.
3. (Transitiva) Si aRb y bRc , entonces aRc .

Entonces R se denomina **orden parcial** de S . El conjunto S con el orden parcial se denomina **conjunto parcialmente ordenado** o simplemente conjunto ordenado.

Una retícula es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada subconjunto $\{a, b\}$ de dos elementos tiene un $\inf\{a, b\}$ y $\sup\{a, b\}$, específicamente, una retícula cumple con las propiedades de la siguiente definición.

Definición 2.1.2. Sea S un conjunto no vacío cerrado bajo dos operaciones binarias $+$ y \cdot . Entonces S es una **retícula** si para todo $a, b, c \in S$ se cumplen los siguientes axiomas:

1. *Ley conmutativa:*

(a) $a + b = b + a$

(b) $a \cdot b = b \cdot a$

2. *Ley asociativa:*

(a) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(b) $(a + b) + c = a + (b + c)$

3. *Ley de absorción:*

(a) $a \cdot (a + b) = a$

(b) $a + (a \cdot b) = a$

Un retícula S es **distributiva** si para elementos arbitrarios a, b, c en S se tiene lo siguiente.

4. *Ley distributiva:*

(a) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(b) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

Sea S una retícula acotada con cota inferior 0 y cota superior 1. Decimos que S es **complementado** si para todo $a \in S$, existe $x \in S$ tal que $a + x = 1$ y $a \cdot x = 0$.

Al elemento $x \in S$ se le denomina **complemento** de a .

Los complementos no necesariamente existen y no requieren ser únicos.

Definición 2.1.3. Un **Álgebra Booleana** es una retícula con supremo 1 e ínfimo 0, que es distributiva y complementada.

Así, un álgebra Booleana B es un conjunto S que contiene elementos distintos 0 y 1, operadores binarios $+$ y \cdot en S , y un operador unitario $'$ en S que satisface las leyes asociativas, conmutativas, distributivas, y las siguientes:

5. *Leyes de identidad:*

(a) $x + 0 = x$

(b) $x \cdot 1 = x$

6. *Leyes de complementos:*

(a) $x + x' = 1$

(b) $x \cdot x' = 0$

Si B es un álgebra Booleana escribimos $B = (S, +, \cdot, ', 0, 1)$.

Como hemos visto, un álgebra Booleana no es un “álgebra” sino una retícula, sin embargo para continuar con la convención, le seguiremos llamando de esta manera.

Teorema 2.1.4. *En el álgebra Booleana, el elemento x' de la Definición 2.1.3 es único. Específicamente, si $x + y = 1$ y $xy = 0$, entonces $y = x'$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
 y &= y1 && 5.(a) \\
 &= y(x + x') && 6.(b) \\
 &= yx + yx' && 4.(a) \\
 &= 0 + yx' && \text{Proporcionado} \\
 &= xx' + yx' && 6.(b) \\
 &= x'x + x'y && 1.(b) \\
 &= x'(x + y) && \text{Proporcionado} \\
 &= x'1 && 5.(b) \\
 &= x'
 \end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.5. *Sea $B = (S, +, \cdot, ', 0, 1)$ un álgebra Booleana. Si $x, y, z \in S$, entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

Leyes de idempotencia:

- $x + x = x$
- $x \cdot x = x$

Leyes de acotación:

- $x + 1 = 1$
- $x \cdot 0 = 0$

Leyes de absorción:

- $x + x \cdot y = x$
- $x \cdot (x + y) = x$

Leyes de involución:

- $(x')' = x$

Leyes de 0 y 1:

- $0' = 1$

- $1' = 0$

Leyes de De Morgan para álgebras Booleanas:

- $(x + y)' = x' \cdot y'$

- $(x \cdot y)' = x' + y'$

Demostración. Emplearemos las propiedades de las definiciones 2.1.2 y 2.1.3. Probaremos las leyes de idempotencia:

$$\begin{aligned}
 x &= x + 0 && 5.(a) \\
 &= x + (x \cdot x') && 6.(b) \\
 &= (x + x)(x + x') && 4.(b) \\
 &= (x + x) \cdot 1 && 5.(b) \\
 &= x + x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x \cdot x &= (x + 0) \cdot x && 5.(a) \\
 &= x(x + 0) && 6.(b) \\
 &= x
 \end{aligned}$$

Probaremos las leyes de acotación:

$$\begin{aligned}
 x + 1 &= (x + 1) \cdot 1 && 5.(b) \\
 &= (x + 1)(x + x') && 6.(b) \\
 &= x + x \cdot 1 && 4.(b) \\
 &= x + x' && 5.(b) \\
 &= 1 && 6.(a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x \cdot 0 &= x \cdot 0 + 0 && 5.(a) \\
 &= x \cdot 0 + x \cdot x' && 6.(b) \\
 &= 0(0 + x') && 4.(a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x(x' + 0) && 1.(a) \\
&= x \cdot x' && 5.(a) \\
&= 0 && 6.(l)
\end{aligned}$$

Probaremos las leyes de absorción:

$$\begin{aligned}
x + x \cdot y &= x \cdot 1 + x \cdot y && 5.(b) \\
&= x(1 + y) && 4.(a) \\
&= x(y + 1) && 1.(a) \\
&= x \cdot 1 && \text{Ley de acotación} \\
&= x && 5.(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(x + y) &= x \cdot x + x \cdot y && 4.(a) \\
&= x + x \cdot y && \text{Ley de idempotencia} \\
&= x && 3.(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x')' &= x' + (x')' && 6.(a) \\
&= x + x' && 6.(a) \\
&= x' + x && 1.(a) \\
&= x
\end{aligned}$$

Probaremos las leyes de 0 y 1:

$$\begin{aligned}
0' &= 0' + 1 && 5.(b) \\
&= (0' + 0) \cdot 1 && 5.(a) \\
&= 1 \cdot 0' + 1 \cdot 0 && 4.(a) \\
&= 0' + 0 && 5.(b) \\
&= 1 && 6.(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1' &= 1' + 0 && 5.(a) \\
&= 1' + (0 \cdot 0) && \text{Ley de idempotencia} \\
&= (1' + 0)(1' + 0) && 4.(b) \\
&= 0 + 0 && \text{Ley de cero} \\
&= 0 && \text{Ley de idempotencia}
\end{aligned}$$

Para demostrar las leyes de De Morgan probaremos primero que

$$(x + y)(x'y') = 0$$

y

$$(x + y) + x'y' = 1$$

$$\begin{aligned}
 (x + y)(x'y') &= (x'y')(x + y) && 1.(b) \\
 &= (x'y')x + (x'y')y && 4.(a) \\
 &= x(x'y') + (x'y')y && 1.(b) \\
 &= (xx')y' + x(yy') && 2.(a) \\
 &= 0y' + x0 && 6.(b) \\
 &= y'0 + x0 && 1.(b) \\
 &= 0 + 0 && \text{Leyes de acotación.} \\
 &= 0 && 5.(a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x + y) + x'y' &= ((x + y) + x')((x + y) + y') && 4.(b) \\
 &= ((y + x) + x')((x + y) + y') && 1.(a) \\
 &= (y + (x + x'))(x + (y + y')) && 2.(b) \\
 &= (y + 1)(x + 1) && 6.(a) \\
 &= (1)(1) && \text{Leyes de acotación.} \\
 &= 1 && 5.(b)
 \end{aligned}$$

Ahora notemos que, por el Teorema 2.1.4, $(x + y)(x'y') = 0$ y $(x + y) + x'y' = 1$ implican que $x'y' = (x + y)'$.

Ahora probaremos que

$$(xy)(x' + y') = 0$$

y

$$xy + (x' + y') = 1$$

$$\begin{aligned}
 (xy)(x' + y') &= (xy)x' + (xy)y' && 4.(a) \\
 &= x'(xy) + (xy)y' && 1.(b) \\
 &= (x'x)y + x(yy') && 2.(a) \\
 &= (xx')y + x(yy') && 1.(b) \\
 &= 0y + x0 && 6.(b) \\
 &= y0 + x0 && 1.(b)
 \end{aligned}$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

Leyes de acotación.
5.(a)

$$\begin{aligned}
 (xy) + (x' + y') &= (x' + y') + (xy) && 1.(a) \\
 &= ((x' + y') + x)((x' + y') + y) && 4.(b) \\
 &= ((y' + x') + x)((x' + y') + y) && 1.(a) \\
 &= (y' + (x' + x))(x' + (y' + y)) && 2.(b) \\
 &= (y' + (x + x'))(x' + (y + y')) && 1.(a) \\
 &= (y' + 1)(x' + 1) && 6.(a) \\
 &= (1)(1) && \text{Leyes de acotación.} \\
 &= 1 && 5.(b)
 \end{aligned}$$

Finalmente, notemos que, por el Teorema 2.1.4, $(xy)(x' + y') = 0$ y $(xy) + (x' + y') = 1$ implican que $(xy)' = x' + y'$.

2.2. Compuertas Lógicas.

Definición 2.2.1. Una **compuerta lógica** es una función $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ donde $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

Una compuerta lógica puede tener una o más entradas y una sola salida. También son representadas por medio de tablas, donde en las primeras columnas se escriben todas las posibles combinaciones de las entradas de la función y en la última columna, la salida de la función. Estas tablas son llamadas tablas de verdad y son de gran utilidad para describir la información relacionada con las funciones lógicas.

Se acostumbra describir las compuertas por medio de diagramas o esquemas, que constan de símbolos gráficos que las representan.

Las compuertas básicas son: AND, OR y NOT.

Definición 2.2.2. La **compuerta NOT (o complemento)** es la función $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2, x \mapsto \bar{x}$, donde el valor de esta función es el inverso del valor de la variable de entrada

$$\bar{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Podemos visualizar esta función mediante el Cuadro 2.1.

La compuerta NOT se representa mediante el diagrama mostrado en la Figura 2.1.

Entrada	Salida
x	\bar{x}
0	1
1	0

Cuadro 2.1: Función NOT.

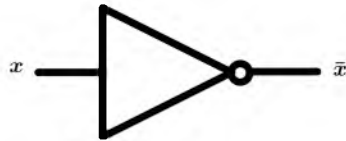


Figura 2.1: Compuerta NOT.

Definición 2.2.3. La **Compuerta OR** es la función $\mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \vee x_2$, donde

$$x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = 1 \text{ o } x_2 = 1 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Podemos visualizar esta función mediante el Cuadro 2.2.

Entrada		Salida
x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Cuadro 2.2: Función \vee .

La compuerta OR se representa mediante el diagrama mostrado en la Figura 2.2.

Definición 2.2.4. La **compuerta AND** es la función \wedge de \mathbb{Z}_2^2 en \mathbb{Z}_2 .

Una compuerta AND recibe entradas x_1 y x_2 y produce una salida denotada por $x_1 \wedge x_2$, donde

$$x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 1 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Podemos visualizar esta función mediante el Cuadro 2.3.

La compuerta AND se representa mediante el diagrama mostrado en la Figura 2.3.

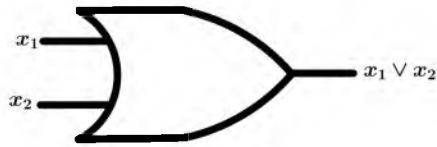


Figura 2.2: Compuerta OR.

Entrada		Salida
x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Cuadro 2.3: Función \wedge .

Teorema 2.2.5. $(\mathbb{Z}_2, \wedge, \vee, ^-)$ es un álgebra Booleana.

Demostración. Queremos probar que $(\mathbb{Z}_2, \wedge, \vee, ^-)$ cumple las propiedades de las definiciones 2.1.3 y 2.1.2.

La ley conmutativa es inmediata por medio de la tabla de verdad 2.2 y 2.3 para todo $a, b \in \mathbb{Z}_2$. De acuerdo a las definiciones 2.2.4 y 2.2.3 obtenemos las siguientes tablas de verdad para todo a, b y $c \in \mathbb{Z}_2$.

$a b c$	$(a \wedge b)$	$((a \wedge b) \wedge c)$	$(b \wedge c)$	$(a \wedge (b \wedge c))$
1 1 1	1	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	1	0
0 1 0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0
0 0 0	0	0	0	0

$a b c$	$(a \vee b)$	$((a \vee b) \vee c)$	$(b \vee c)$	$(a \vee (b \vee c))$
1 1 1	1	1	1	1
1 1 0	1	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1
0 1 1	1	1	1	1
0 1 0	1	1	1	1
0 0 1	0	1	1	1
0 0 0	0	0	0	0

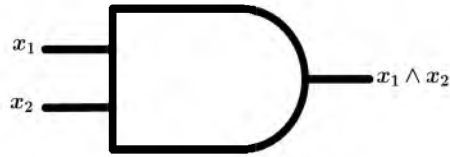


Figura 2.3: Compuerta AND.

De donde concluimos que se cumple la ley asociativa.

En las siguientes tablas podemos observar que se cumplen las leyes de absorción.

a	b	$(a \vee b)$	$(a \wedge (a \vee b))$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

a	b	$(b \wedge a)$	$(a \vee (b \wedge a))$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

Probaremos las leyes distributivas. Para todo a, b y $c \in \mathbb{Z}_2$ se tienen las siguientes tablas de verdad.

a	b	c	$(b \vee c)$	$(a \wedge (b \vee c))$	$(a \wedge b)$	$(a \wedge c)$	$((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Para probar las leyes de identidad para $a \in \mathbb{Z}_2$ tenemos los siguientes casos.

Si $a = 0$ entonces $a \vee a = 0 \vee 0 = 0 = a$ y si $a = 1$ entonces $a \vee a = 1 \vee 1 = 1 = a$.

Si $a = 1$ entonces $a \wedge a = 1 \wedge 1 = 1 = a$ y si $a = 0$ entonces $a \wedge a = 0 \wedge 0 = 0 = a$.

Probaremos ahora las leyes de complementos, sea $a \in \mathbb{Z}_2$.

Si $a = 0$ entonces $a \vee \bar{a} = 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1$ y si $a = 1$ entonces $a \vee \bar{a} = 1 \vee \bar{1} = 1 \vee 0 = 1$.

Si $a = 0$ entonces $a \wedge \bar{a} = 0 \wedge \bar{0} = 0 \wedge 1 = 0$ y si $a = 1$ entonces $a \wedge \bar{a} = 1 \wedge \bar{1} = 1 \wedge 0 = 0$. □

a	b	c	$(b \wedge c)$	$(a \vee (b \wedge c))$	$(a \vee b)$	$(a \vee c)$	$((a \vee b) \wedge (a \vee c))$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Debido a las aplicaciones que obtendremos en este proyecto, nos centraremos a estudiar especialmente esta álgebra Booleana.

Definición 2.2.6. Las **expresiones Booleanas** en símbolos x_1, \dots, x_n sobre un álgebra Booleana arbitraria $B = (S, +, \cdot, ', 0, 1)$ se definen de manera recursiva como.

- Para cada $s \in S$, s es una expresión booleana.
- x_1, \dots, x_n son expresiones booleanas.

Si X_1 y X_2 son expresiones booleanas, también lo son X_1' , $X_1 + X_2$ y $X_1 \cdot X_2$.

Definición 2.2.7. Sea $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una expresión booleana.

Una función f de la forma $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se llama **función booleana**.

Una función Booleana sobre S se define como una función de S^n a S de la forma $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde X es la expresión Booleana en los símbolos x_1, x_2, \dots, x_n .

Las tres compuertas básicas AND, OR y NOT pueden usarse para implementar funciones lógicas de cualquier complejidad.

Ejemplo 2.2.8. A continuación se emplean las compuertas básicas AND, OR y NOT para definir una función de \mathbb{Z}_2^3 en \mathbb{Z}_2

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \vee (x_2 \wedge x_3).$$

Esta función se representa como en el diagrama la Figura 2.4.

Ejemplo 2.2.9. Ahora consideremos n entradas para una compuerta AND, es decir la función $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ dada por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \wedge x_4) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \wedge x_n).$$

Pero como la compuerta AND es una operación asociativa podemos escribir de la siguiente manera (ver [13, Theorem 1.8]),

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \wedge x_n.$$

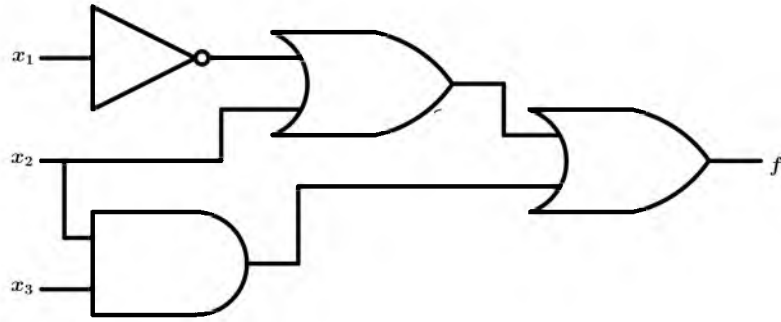


Figura 2.4: Diagrama de la función $f(x_1, x_2, x_3)$.

Análogamente, si tenemos la función

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \vee x_2) \vee (x_3 \vee x_4) \vee \dots \vee (x_{n-1} \vee x_n).$$

Podemos escribir simplemente

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_{n-1} \vee x_n.$$

De manera que podemos representar gráficamente estas funciones como se observa en la Figura 2.5.

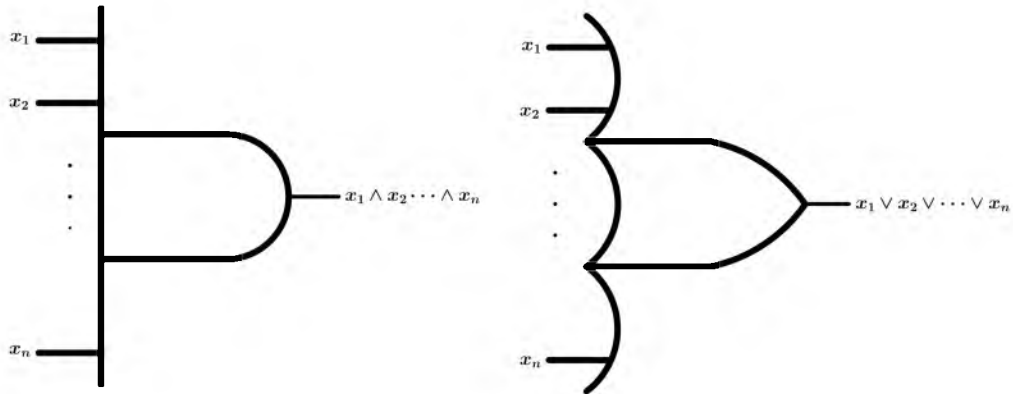


Figura 2.5: Compuerta de distribución AND y OR.

Al realizar la composición de las compuertas AND y OR con la compuerta NOT tenemos las compuertas $(NOT \circ AND) = NOT(AND) = NAND$ y $(NOT \circ OR) = NOT(OR) = NOR$ a continuación daremos a conocer sus representaciones gráficas y cómo se definen por medio de tablas de verdad.

Definición 2.2.10. Una **compuerta NAND** recibe entradas x_1 y x_2 y produce una salida denotada por $x_1 \uparrow x_2$, donde

$$x_1 \uparrow x_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 1 \\ 1 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

La salida de esta compuerta es el complemento de la salida de una compuerta AND.

Podemos visualizar esta función mediante el Cuadro 2.4.

Entrada		Salida
x_1	x_2	$x_1 \uparrow x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Cuadro 2.4: Función \uparrow .

La compuerta NAND se representa mediante el diagrama mostrado en la Figura 2.6.

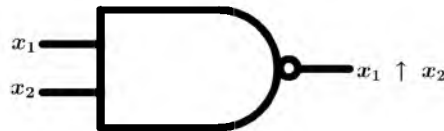


Figura 2.6: Compuerta NAND.

Definición 2.2.11. Una **compuerta NOR** recibe entradas x_1 y x_2 y produce una salida denotada por $x_1 \downarrow x_2$, donde

$$x_1 \downarrow x_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 1 \\ 1 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

La salida de esta compuerta es el complemento de la salida de una compuerta OR.

Podemos visualizar esta función mediante el Cuadro 2.5.

La compuerta NOR se representa mediante el diagrama mostrado en la Figura 2.7.

Entrada		Salida
x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Cuadro 2.5: Función \downarrow .

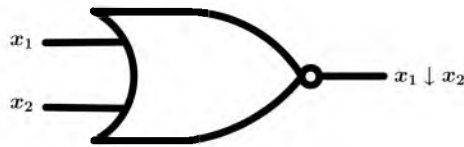


Figura 2.7: Compuerta NOR.

Al igual que las compuertas AND y OR, las compuertas NAND y NOR son asociativas, por lo que podemos definir las para n variables, en este caso se representan como se muestra en Figura 2.8.

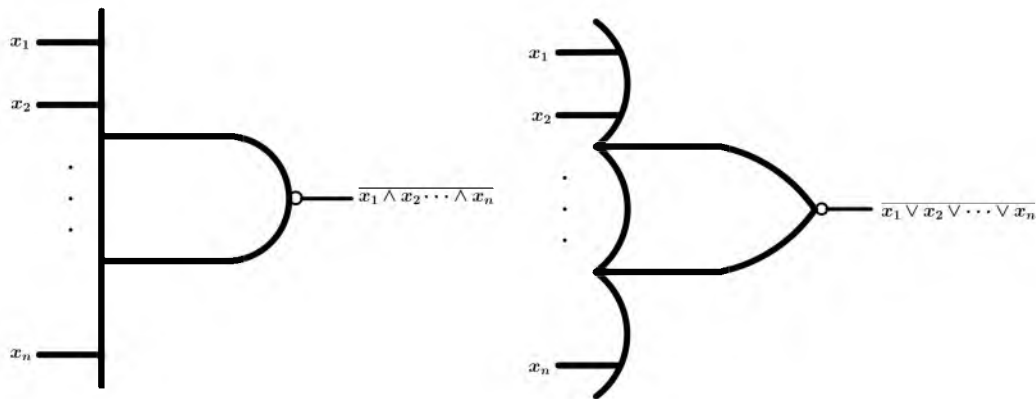


Figura 2.8: Compuertas de distribución NAND y NOR.

Existen dos tareas básicas en el diseño de sistemas digitales, el análisis y la síntesis. El análisis consiste en determinar el funcionamiento de una red lógica existente y la síntesis en diseñar una nueva red que desempeñe cierto comportamiento y definir una función que lo describa. Estamos interesados en el proceso de síntesis para generar circuitos lógicos a partir de especificaciones iniciales. Durante el diseño del circuito, sin importar el tipo de diseño que se esté utilizando, las expresiones lógicas iniciales producidas por la herramienta de síntesis no tendrá una forma óptima, ya que refleja lo que el diseñador ingrese en la herramienta CAD. La importancia de las herramientas de síntesis es manipular el diseño del usuario a fin de generar de manera automática un circuito equivalente, pero mejor que el anterior y reduciendo el tamaño.

El proceso de síntesis en mintérminos y maxtérminos, que se explicará más adelante, consiste en derivar una expresión en suma canónica de productos o al contrario derivar una expresión en producto canónico de sumas y luego esa expresión puede manipularse aplicando los teoremas y propiedades vistos en la Sección 2.1 a fin de hallar una expresión funcionalmente equivalente de suma de productos o producto de sumas que sea más barata.

La complejidad de una red tiene un efecto directo en su costo. Como siempre es deseable reducir el costo de los productos fabricados, es importante encontrar formas de implementar los circuitos lógicos lo más barato posible. Una función lógica puede implementarse con redes diferentes, algunas de las cuales son más simples que otras; por tanto, resulta prudente buscar soluciones que representen el costo mínimo.

Dada una expresión booleana, a veces es posible obtener una expresión más simple para la misma función aplicando las reglas del álgebra booleana y así reducir el número de compuertas del circuito.

Definición 2.2.12. Un **mintérmino** es una expresión booleana de la forma

$$y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 \wedge \dots \wedge y_n$$

donde cada y_i es ya sea x_i o \bar{x}_i , donde x_i es la i -ésima coordenada de $(x_1, \dots, x_n) \in Z_2^n$.

Teorema 2.2.13. Sea $f : Z_2^n \rightarrow Z_2$ una función booleana, tal que f no es la función constante cero, sean A_1, \dots, A_k elementos de Z_2^n tales que, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, $f(A_j) = 1$. Para cada $A_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, sea

$$m_i = y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_n}$$

donde

$$y_{i_\alpha} = \begin{cases} x_\alpha & \text{si } a_{i_\alpha} = 1 \\ \bar{x}_\alpha & \text{si } a_{i_\alpha} = 0 \end{cases}$$

entonces

$$f(x_1, \dots, x_n) = m_1 \vee m_2 \vee \dots \vee m_k.$$

Demostración. Sea $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in Z_2^n$. Sea $m_i(B)$ el resultado de evaluar B en m_i , sustituyendo cada x_α por b_α . Por definición de m_i se tiene que $m_i(A_i) = 1$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Si $B \neq A_i$, entonces existe $\alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $b_\alpha \neq a_{i_\alpha}$; si $a_{i_\alpha} = 0$ entonces $y_{i_\alpha} = \bar{x}_\alpha$, lo que significa que al sustituir $b_\alpha = 1$, obtendremos $m_i(B) = 0$, de igual forma si $a_{i_\alpha} = 1$, entonces $y_{i_\alpha} = x_\alpha$, lo que significa que al sustituir $b_\alpha = 0$, obtendremos $m_i(B) = 0$.

Supongamos que $f(B) = 1$, entonces existe $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $B = A_j$, entonces $m_j(B) = m_j(A_j) = 1$ y $m_1(B) \vee \dots \vee m_k(B) = 1$.

Por otro lado, si $f(B) = 0$, entonces $B \neq A_j$ para toda $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ y por lo tanto $m_1(B) \vee \dots \vee m_k(B) = 0$. \square

Definición 2.2.14. Un **maxtérmino** es una expresión booleana de la forma

$$y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee \dots \vee y_n$$

donde cada y_i es ya sea x_i o \bar{x}_i , donde x_i es la i -ésima coordenada de $(x_1, \dots, x_n) \in Z_2^n$.

La demostración del siguiente teorema es análogo a la demostración del Teorema 2.2.13.

Teorema 2.2.15. Sea $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ una función booleana tal que f no es la función constante uno, sean A_1, \dots, A_k elementos de \mathbb{Z}_2^n tales que, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, $f(A_j) = 0$. Para cada $A_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, sea

$$M_i = y_{i_1} \vee y_{i_2} \vee \dots \vee y_{i_n}$$

donde

$$y_{i_\beta} = \begin{cases} \bar{x}_\beta & \text{si } a_{i_\beta} = 1 \\ x_\beta & \text{si } a_{i_\beta} = 0 \end{cases}$$

entonces $f(x_1, \dots, x_n) = M_1 \wedge M_2 \wedge \dots \wedge M_k$.

A continuación daremos un ejemplo para entender mejor cómo aplicar estos dos teoremas.

Ejemplo 2.2.16. Supongamos que tenemos una función $f : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ definida como $f(x_1, x_2, x_3) = w$ donde los valores de w son como se muestra en la siguiente tabla.

	Entrada			Salida
	x_1	x_2	x_3	w
A_1	0	0	0	0
A_2	0	0	1	1
A_3	0	1	0	0
A_4	0	1	1	1
A_5	1	0	0	0
A_6	1	0	1	1
A_7	1	1	0	1
A_8	1	1	1	0

De acuerdo con el Teorema 2.2.13, $m_i = y_{i_1} \wedge y_{i_2} \wedge y_{i_3}$, donde $y_{i_\alpha} = x_\alpha$ o $y_{i_\alpha} = \bar{x}_\alpha$. Por ejemplo, como $A_1 = (a_{1_1}, a_{1_2}, a_{1_3}) = (0, 0, 0)$, entonces $y_{1_1} = \bar{x}_1$, $y_{1_2} = \bar{x}_2$ y $y_{1_3} = \bar{x}_3$ por lo que $m_1 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$; de la misma forma como $A_6 = (a_{6_1}, a_{6_2}, a_{6_3}) = (1, 0, 1)$, entonces $y_{6_1} = x_1$, $y_{6_2} = \bar{x}_2$ y $y_{6_3} = x_3$ por lo que $m_6 = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$.

Esto se resume en la siguiente tabla.

	Entrada			Salida	Mintérmino
	x_1	x_2	x_3	w	m_i
A_1	0	0	0	0	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$
A_2	0	0	1	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$
A_3	0	1	0	0	$\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$
A_4	0	1	1	1	$\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
A_5	1	0	0	0	$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$
A_6	1	0	1	1	$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$
A_7	1	1	0	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$
A_8	1	1	1	0	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

Ahora escogemos aquellos A_j tales que $f(A_j) = 1$, estos son A_2, A_4, A_6 y A_7 luego la función se define como $f_m(x_1, x_2, x_3) = m_2 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7 = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$.

El diagrama de f_m se muestra en la Figura 2.9.

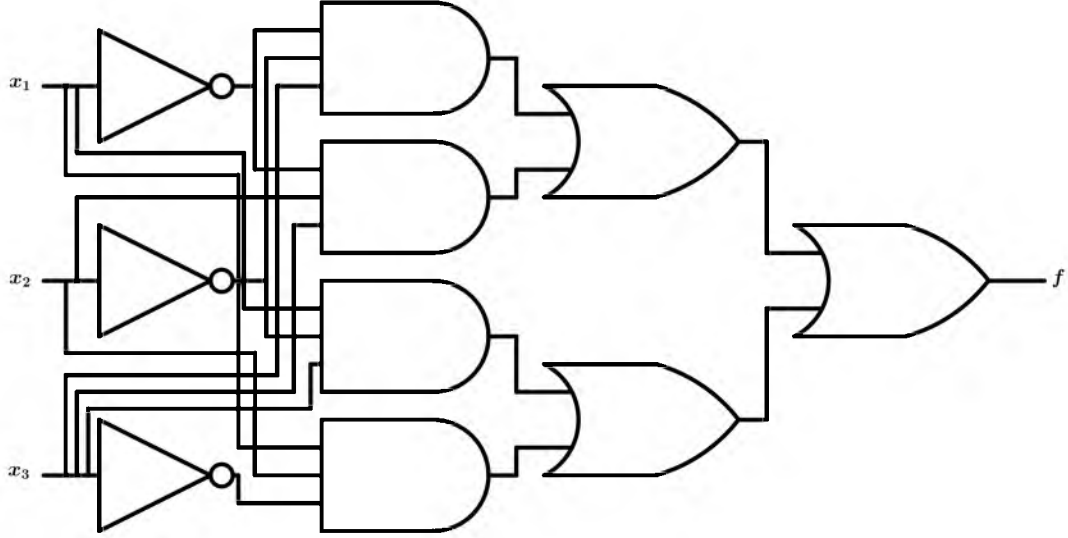


Figura 2.9: Diagrama de la función f .

Como se puede ver, en la Figura 2.9 se muestra un circuito completo y muy complejo, por eso se quiere buscar uno más simple y por tanto menos costoso.

Aplicando las siguientes propiedades del Teorema 2.1.5 y Definición 2.1.2, simplificamos a una función equivalente.

$$\begin{aligned}
 f_m(x_1, x_2, x_3) &= \\
 &= (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \\
 &= ((\bar{x}_1 \vee x_1)\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) && 4.(a) \\
 &= (\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) && \text{Ley de idempotencia} \\
 &= (\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_2) \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) && 4(a) \\
 &= (\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3).
 \end{aligned}$$

Así, f_m se representa mediante el diagrama de la Figura 2.10.

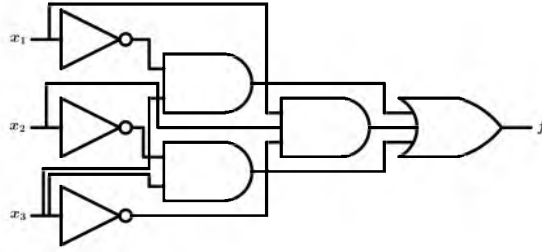


Figura 2.10: Diagrama simplificado de f_m .

Análogamente, de acuerdo al Teorema 2.2.15, $M_i = y_{i_1} \wedge y_{i_2} \wedge y_{i_3}$, donde $y_{i_\alpha} = x_\alpha$ o $y_{i_\alpha} = \bar{x}_\alpha$. Por ejemplo, como $A_8 = (a_{8_1}, a_{8_2}, a_{8_3}) = (1, 1, 1)$ entonces $y_{8_1} = \bar{x}_1$, $y_{8_2} = \bar{x}_2$ y $y_{8_3} = \bar{x}_3$, por lo que $M_8 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$; de la misma forma, como $A_4 = (a_{4_1}, a_{4_2}, a_{4_3}) = (0, 1, 1)$ entonces $y_{4_1} = x_1$, $y_{4_2} = \bar{x}_2$ y $y_{4_3} = \bar{x}_3$ por lo que $M_4 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$.

Esto se resume en la siguiente tabla.

	Entrada			Salida	Maxitérmino
	x_1	x_2	x_3	w	M_i
A_1	0	0	0	0	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
A_2	0	0	1	1	$x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
A_3	0	1	0	0	$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$
A_4	0	1	1	1	$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$
A_5	1	0	0	0	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$
A_6	1	0	1	1	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
A_7	1	1	0	1	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$
A_8	1	1	1	0	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$

Ahora escogemos aquellos A_j tales que $f(A_j) = 0$. Estos son A_1 , A_3 , A_5 y A_8 luego la función se define como $f_M(x_1, x_2, x_3) = M_1 \wedge M_3 \wedge M_5 \wedge M_8 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

Aplicando las siguientes propiedades del Teorema 2.1.5 y Definición 2.1.2, simplificamos a una función equivalente.

$$\begin{aligned}
 f_M(x_1, x_2, x_3) &= \\
 &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \\
 &= (x_1 \vee (x_2 \wedge \bar{x}_2) \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) && 4.(a) \\
 &= (x_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) && \text{Ley de idempotencia} \\
 &= (x_1 \vee x_3) \wedge ((x_1 \wedge \bar{x}_1) \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) && 4.(a) \\
 &= (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).
 \end{aligned}$$

A continuación, con la ayuda de las Definiciones 2.1.2 y 2.1.3 y del Teorema 2.1.5, veamos que las funciones

$$f_m(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$$

y

$$f_M(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

son equivalentes:

$$\begin{aligned}
f_M(x_1, x_2, x_3) &= \\
&= (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \\
&= (x_3 \vee x_1) \wedge (x_3 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) && 1.(b) \\
&= (x_3 \vee (x_1 \wedge x_2)) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) && 4.(b) \\
&= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_3 \vee (x_1 \wedge x_2)) && 1.(b) \\
&= ((\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge x_3) \vee ((\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \wedge x_2)) && 4.(a) \\
&= (x_3 \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)) \vee ((x_1 \wedge x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)) && 1.(b) \\
&= (x_3 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_3 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) && 4.(a) \\
&= (x_3 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_3 \wedge \bar{x}_3) \vee ((x_1 \wedge \bar{x}_1) \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge (x_2 \wedge \bar{x}_2)) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) && 2.(a) \\
&= (x_3 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee (0) \vee (0 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge 0) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) && 6.(b) \\
&= (x_3 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee (0) \vee (x_2 \wedge 0) \vee (x_1 \wedge 0) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) && 1.(b) \\
&= (x_3 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) && \text{Ley de acotación} \\
&= (\bar{x}_1 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) && 1.(b) \\
&= (\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) && 1.(a) \\
&= f_m(x_1, x_2, x_3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las dos funciones son iguales.

2.3. Hardware

Para las implementaciones de los circuitos digitales es posible usar los tres tipos principales de chips: los chips estándares (ver Figura 2.11), los dispositivos lógicos programables y los chips “a la medida”. Nos referimos al chip estándar como el que cumple un estándar con el que está de acuerdo en términos de funcionalidad y configuración física, cada chip estándar contiene una pequeña fracción de circuito de menos de 100 transistores y efectúa una función simple. Los chips estándares son los que más se usaron para construir circuitos lógicos antes de 1980. El tamaño de un transistor se mide con un parámetro denominado longitud de compuerta. En el 2004 la mínima longitud de compuertas posible se podía fabricar con confiabilidad de 90nm y en el 2012 se redujo alrededor de 22nm. El tamaño de un transistor determina cuántos de ellos pueden colocarse en ciertas áreas de chip. En la actualidad se alcanza un máximo cercano de 100 millones de transistores por centímetro cuadrado.

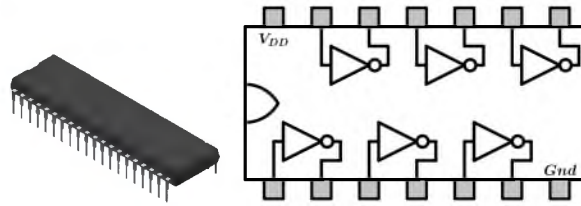


Figura 2.11: Paquete en línea doble y estructura del chip 7404.

Los dispositivos lógicos programables (ver Figura 2.12), son chips estándares cuyas funciones son fijas, estos chips los puede configurar el usuario para usarlos en una amplia variedad de circuitos. Estos chips tienen una estructura que incluye una serie de interruptores programables que permiten configurar sus circuitos internos. Los chips a la medida (ver Figura 2.13) son chips programables y se usan para implementar la mayoría de los circuitos lógicos que se encuentran en el hardware digital. Estos chips pueden programarse desde cero, primero se diseñan los circuitos lógicos que se desea incluir en el chip, luego se elige la tecnología apropiada para su implementación y por último se mandan a fabricar con la empresa que cuenta con las instalaciones para su elaboración. La ventaja de estos chips es que nos permiten optimizar su diseño para que cumpla una tarea concreta, lo que suele desembocar en un mejor desempeño.

En la Sección 3.2 nuestra finalidad será optimizar el hardware de un circuito digital que se implementa con chips estándar de un sistema con tres funciones diferentes, pero para reducir el costo de infraestructura tenemos que implementar un método aplicando las bases de electrónica y álgebra abstracta para hacer un solo hardware de circuitos lógicos que esté en función de los tres circuitos, en lugar de hacer un hardware para cada uno de ellos ya que esto significaría mayor costo.

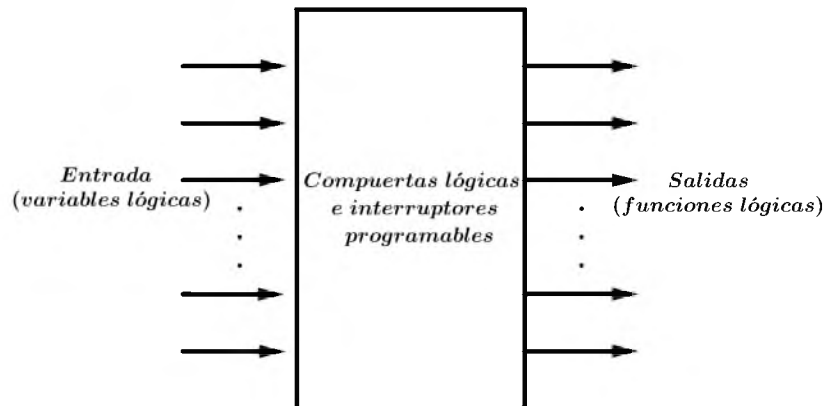


Figura 2.12: Dispositivo lógico programable como caja negra.

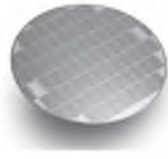


Figura 2.13: Oblea de silicio.

Familia de circuitos TTL. La tecnología denominada Lógica de Transistor a Transistor, comunmente conocida como TTL son los sistemas digitales que más se usaron en las décadas de 1970 a 1980. El TTL estándar (Standard) se basa en las especificaciones originales y fue el primer tipo de estos circuitos introducidos en la década de 1960. Con el paso del tiempo, la familia original se amplió mediante el conjunto de familias lógicas, éstas son más eficientes en cuanto a la velocidad de propagación, consumo de energía y costo, todos compatibles entre sí, es decir, que en un mismo sistema digital se pueden utilizar componentes de varias familias de TTL sin problemas de interconexión entre ellos. Los circuitos TTL utilizan un suministro de corrientes de 5 voltios máximo. Las compuertas TTL pueden tener diferentes configuraciones de entrada. Además de la configuración de salida normal, existen compuertas que tienen salidas triestado o salidas de colector abierto.

2.4. Ciclo de diseño básico

Lo esencial de este trabajo es considerar los pasos del diseño básico que emplearemos en la trayectoria de nuestro problema. El proceso empieza con la definición de las especificaciones del producto. En el paso dos, a partir de un conjunto completo de especificaciones, es necesario definir la estructura general de un diseño inicial del producto.

En el tercer paso, las herramientas CAD permiten a los diseñadores simular el comportamiento de productos increíblemente complejos y tales simulaciones se usan para determinar si el diseño obtenido satisface las especificaciones requeridas.

En el cuarto paso se realizan los cambios adecuados en caso de encontrar errores y se repite la verificación del nuevo diseño mediante simulación.

Para ciertas áreas son usados los diagramas de flujos para poder desglosar cualquier problema complejo. La idea de esto es comenzar a desglosar lo más básico, conociendo las características principales y al final se establece el método para crear el producto deseable. La herramienta CAD es la más recomendada para hacer dichos diseños ya que va desde la parte individual del sistema hasta la estructura global de un producto completo. La herramienta CAD permite a los diseñadores simular el comportamiento de productos complejos y se usan tales simulaciones para determinar si el diseño obtenido satisface las necesidades deseadas o adquiridas.

Al aplicar las condiciones en la entrada, el simulador comprobará que el producto diseñado desempeñe el rol que ha solicitado el cliente. Si la simulación revela que existe algún error, hay que cambiar el diseño a fin de superarlos. La versión rediseñada se simula de nuevo para determinar si los errores desaparecen y así sucesivamente el ciclo se repite hasta que la simulación se ajuste a las especificaciones.

Existen diversas tecnologías para la implementación del prototipo como son los chips estándar de la serie 7400. Esta tecnología era muy usada en la década de 1980, consistía en conectar juntos varios chips, cada uno de ellos con tan solo unas cuantas compuertas lógicas. Hay una variedad de chips con diferentes tipos de compuertas, por ejemplo la serie 7400 son chips constituidos por chips cuya referencia comienza por 74. A partir de la construcción de los chips de la serie 7400 se construyen con muchas variantes de diferentes tecnologías, por ejemplo, los llamados 74LS00 que se construye con un tecnología denominada lógica transistor–transistor (TTL, transistor–transistor logic), mientras que los chips de la serie 74HC00 se fabricaron con tecnología CMOS. Los chips estándares son usados rara vez en la práctica ya que son de baja capacidad lógica. Conforme la tecnología ha avanzado, han mejorado mucho los circuitos integrados, así evolucionó un sistema de clasificación de chips de acuerdo con sus tamaños. Los primeros chips de la serie de 7400 contaban con pocas compuertas lógicas, la tecnología empleada para producir dichos chips se conoce como integración de pequeña escala. Con el paso del tiempo los chips incluyen alrededor de 10 a 1000 compuertas y se representan como integración de mediana escala. Hasta mediados de la década de 1980, los chips muy grandes se clasifican como integración de gran escala (LSI). La mayoría de los circuitos integrados en la actualidad, contienen miles o millones de transistores, sin importar su tamaño exacto, estos chips están hechos con tecnología de integración de muy gran escala (VLSI).

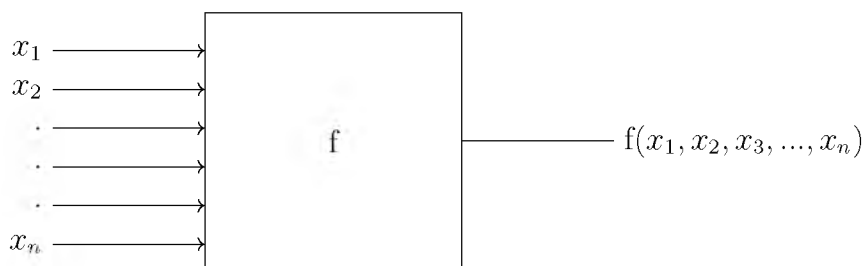
Capítulo 3

Acciones del grupo simétrico en entradas de circuitos digitales

Este capítulo se divide en dos secciones, en la primera trabajaremos con acciones de S_n en las funciones de conmutación y veremos un ejemplo de cómo podemos reducir el número de funciones identificando aquellas que se encuentran en la misma órbita. En la segunda sección, se presenta un problema de selección de ciertos vegetales para el cual estableceremos las funciones lógicas necesarias para construir el circuito electrónico deseado para posteriormente reducir a una función equivalente y poder construir nuestro circuito electrónico pero a un menor costo.

3.1. Acción de S_n en las funciones de conmutación

En la teoría de conmutación, estamos interesados en el diseño de circuitos electrónicos con entradas y salidas binarias. El más simple de tales circuitos es una función de conmutación que tiene n entradas y una sola salida.

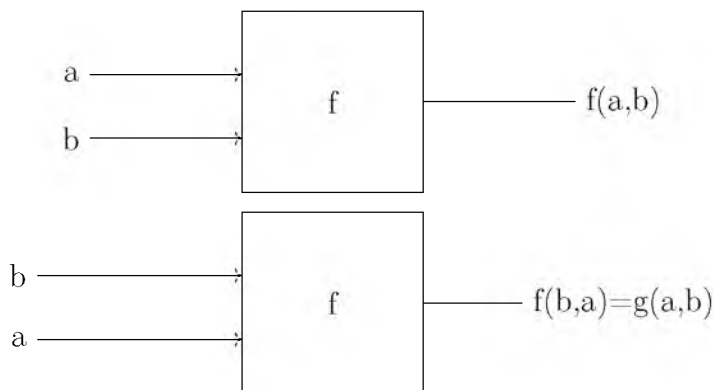


Esto es, una **función de conmutación** o **función Booleana** de n variables es una función $f: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

El problema es que incluso para un circuito simple existe un gran número de funciones de conmutación. Una función de conmutación puede tomar dos valores para cada n -tupla binaria, hay 2^n n -tuplas binarias, y por lo tanto existen 2^{2^n} funciones de conmutación para n variables.

Ejemplo 3.1.1. Para el caso de cuatro entradas y una sola salida, podemos construir $2^{2^4} = 65, 536$ funciones de conmutación diferentes.

Muchas veces podemos transformar una función de conmutación en otra permutando las entradas del circuito.



En general, permitir las permutaciones de las entradas reduce significativamente el número de módulos de diferentes tipos requeridos para construir un circuito grande.

Para esto consideremos la acción del grupo de simetría S_n en el conjunto de todas los posibles funciones de conmutación $X = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{2^{2^n}-1}\}$,

$$* : S_n \times X \rightarrow X$$

definida como

$$\sigma_i * f_k(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = f_k(\sigma_i(a_0), \sigma_i(a_1), \dots, \sigma_i(a_{n-1})).$$

Las funciones equivalentes bajo las permutaciones pertenecen a la misma órbita. Aplicaremos el Teorema de Burnside para calcular el número de distintas funciones de conmutación bajo el grupo de permutaciones S_n .

$$K = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

Para cada σ_i el conjunto de puntos fijos es:

$$X_{\sigma_i} = \{f_k \in X \mid f_k(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = f_k(\sigma_i(a_0), \sigma_i(a_1), \dots, \sigma_i(a_{n-1}))\}.$$

Ejemplo 3.1.2. Si $n = 3$ existen $2^{2^3} = 256$ funciones de conmutación.

En el Cuadro 3.1 se presentan algunas de ellas.

Entrada	Salida																							
	f_0	f_1	...	f_8	f_9	...	f_{36}	f_{37}	...	f_{92}	f_{93}	...	f_{162}	f_{163}	...	f_{218}	f_{219}	...	f_{246}	f_{247}	...	f_{254}	f_{255}	
000	0	1	...	0	1	...	0	1	...	0	1	...	0	1	...	0	1	...	0	1	...	1	1	1
001	0	0	...	0	1	...	0	1	...	0	1	...	0	1	...	0	1	...	1	1	...	0	1	1
010	0	0	...	0	0	...	0	1	...	0	1	...	0	1	...	1	1	...	0	1	...	1	1	1
011	0	0	...	0	0	...	0	0	...	0	1	...	1	1	...	0	1	...	1	1	...	1	1	1
100	0	0	...	0	0	...	0	0	...	1	0	...	0	1	...	1	1	...	1	1	...	1	1	1
101	0	0	...	0	0	...	1	0	...	0	0	...	1	0	...	1	1	...	1	1	...	1	1	1
110	0	0	...	0	0	...	0	0	...	1	0	...	1	0	...	1	0	...	1	1	...	1	1	1
111	0	0	...	1	0	...	1	0	...	1	0	...	1	0	...	1	0	...	1	1	...	1	1	1

Cuadro 3.1: Cuadro de funciones de conmutación.

Consideremos el grupo actuante $G = S_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2\}$, en donde $\rho_0 = (a)$, $\rho_1 = (abc)$, $\rho_2 = (acb)$, $\mu_0 = (bc)$, $\mu_1 = (ac)$, $\mu_2 = (ab)$.

Notemos que los conjuntos de puntos fijos son:

$$X_{\rho_0} = \{f_k \in X \mid \rho_0 * f_k = f_k\} = \{f_k \in X \mid f_k(a, b, c) = f_k(a, b, c)\} = X,$$

$$\begin{aligned} X_{\rho_1} &= \{f_k \in X \mid \rho_1 * f_k = f_k\} = \{f_k \in X \mid f_k(a, b, c) = f_k(b, c, a)\} \\ &= \{f_k \in X \mid f_k(0, 0, 1) = f_k(0, 1, 0) = f_k(1, 0, 0) \text{ y } f_k(1, 1, 0) = f_k(1, 0, 1) = f_k(0, 1, 1)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\rho_2} &= \{f_k \in X \mid \rho_2 * f_k = f_k\} = \{f_k \in X \mid f_k(a, b, c) = f_k(c, a, b)\} \\ &= \{f_k \in X \mid f_k(0, 0, 1) = f_k(1, 0, 0) = f_k(0, 1, 0) \text{ y } f_k(0, 1, 1) = f_k(1, 0, 1) = f_k(1, 1, 0)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\mu_0} &= \{f_k \in X \mid \mu_0 * f_k = f_k\} = \{f_k \in X \mid f_k(a, b, c) = f_k(a, c, b)\} \\ &= \{f_k \in X \mid f_k(0, 0, 1) = f_k(0, 1, 0) \text{ y } f_k(1, 0, 1) = f_k(1, 1, 0)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\mu_1} &= \{f_k \in X \mid \mu_1 * f_k = f_k\} = \{f_k \in X \mid f_k(a, b, c) = f_k(c, b, a)\} \\ &= \{f_k \in X \mid f_k(0, 0, 1) = f_k(1, 0, 0) \text{ y } f_k(0, 1, 1) = f_k(1, 1, 0)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\mu_2} &= \{f_k \in X \mid \mu_2 * f_k = f_k\} = \{f_k \in X \mid f_k(a, b, c) = f_k(b, a, c)\} \\ &= \{f_k \in X \mid f_k(0, 1, 0) = f_k(1, 0, 0) \text{ y } f_k(0, 1, 1) = f_k(1, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, consideremos la permutación $\rho_2 = (acb)$, observando las entradas del Cuadro 3.1, queremos ver cuales funciones cumplen con la condición $f_k(0, 0, 1) = f_k(1, 0, 0) = f_k(0, 1, 0)$ y $f_k(0, 1, 1) = f_k(1, 0, 1) = f_k(1, 1, 0)$, estas funciones se presentan en el Cuadro 3.2.

Entrada				Salida															
x_1	x_2	x_3	f_0	f_1	f_8	f_{21}	f_{48}	f_{90}	f_{98}	f_{122}	f_{149}	f_{162}	f_{180}	f_{212}	f_{220}	f_{247}	f_{248}	f_{255}	
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	
0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	

Cuadro 3.2: Funciones que permanecen fijas bajo la acción de ρ_2 .

Así tenemos 16 funciones que permanecen fijas bajo la acción de ρ_2 . De igual forma calculamos el

número de funciones fijas para cada uno de los elementos de S_3 y obtenemos

$$|X_{\rho_0}| = 256, |X_{\rho_1}| = 16, |X_{\rho_2}| = 16, |X_{\mu_0}| = 64, |X_{\mu_1}| = 64, |X_{\mu_2}| = 64.$$

Aplicando el Teorema de Burnside calculemos el número de órbitas en X bajo la acción de S_3 ,

$$K = |X/S_3| = \frac{1}{6}(256 + 16 + 16 + 64 + 64 + 64) = 80.$$

Por lo tanto, permitiendo permutaciones en las entradas del circuito, podemos reducir las posibles funciones de conmutación de 256 a 80.

En la siguiente sección, seguiremos este procedimiento para reducir el diseño de 3 circuitos a uno sólo, identificando las funciones pertenecientes a la misma órbita bajo la acción de un subgrupo de S_3 .

3.2. Diseño de un circuito para resolver un problema de selección de vegetales

Debido a la similitud entre las operaciones booleanas y las aritméticas, las operaciones OR y AND con frecuencia se denominan operaciones de suma y multiplicación lógica por lo que en esta sección emplearemos el símbolo $+$ para denotar la operación OR, y escribiremos la operación AND como un producto.

Se desea diseñar un circuito digital para automatizar la selección de calidad de ciertos vegetales por su color, peso y tamaño para ser aceptados en el mercado local. Emplearemos las siguientes variables de entrada discretizadas: x representa el color, y representa el tamaño y z representa el peso, donde 0 significa que es no aceptable y 1 que sí es aceptable. Las variables de salida son f_L , f_A y f_T que representan las señales de selección de la lechuga, aguacate y tomate respectivamente, donde 0 significa que no es apto para la venta local mientras que 1 significa que es aceptable para la venta local. El proceso de discretización de las señales de color, peso y tamaño, así como el funcionamiento de los actuadores debido a f_L , f_A y f_T escapan del estudio de la presente tesis.

Las lechugas serán aceptadas en el mercado local siempre que cumplan una de las dos condiciones siguientes.

- Que tengan un peso correcto.
- Que tengan un color y tamaño aceptable.

Si no cumplen ninguna de las condiciones anteriores serán rechazadas. Por otro lado, si tienen un buen tamaño, color y peso serán enviadas a un mercado nacional y por lo tanto no serán enviadas al mercado local.

Entrada			Salida
x	y	z	f_L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Notemos que esta función es la misma que analizamos en el Ejemplo 2.2.16 donde aplicamos el Teorema 2.2.13 y definimos la función como

$$f_L(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}.$$

Aplicando las siguientes propiedades del Teorema 2.1.5 y Definición 2.1.2, simplificamos a una función equivalente.

$$\begin{aligned}
 f_L(x, y, z) &= \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} \\
 &= (\bar{x} + x)\bar{y}z + \bar{x}yz + xy\bar{z} && 4.(a) \\
 &= \bar{y}z + \bar{x}yz + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z && \text{Ley de idempotencia} \\
 &= \bar{y}z + \bar{x}(y + \bar{y})z + xy\bar{z} && 4(a) \\
 &= \bar{y}z + \bar{x}z + xy\bar{z}
 \end{aligned}$$

En la Figura 3.1 se muestra el diagrama de esta función lógica.

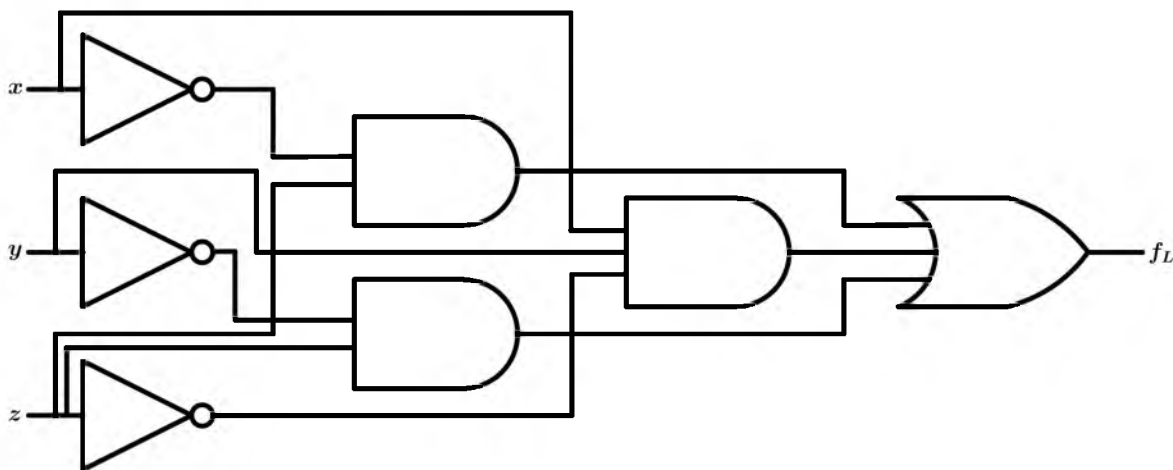


Figura 3.1: Diagrama de la función lógica para la selección de lechugas.

Los aguacates serán aceptados en el mercado local siempre que cumplan alguna de las siguientes dos condiciones.

- Que tengan un buen tamaño.
- Que tengan un color y peso aceptable.

Si no se llega a cumplir ninguna de las condiciones anteriores serán rechazados. Por otro lado, si tienen un buen tamaño, color y peso serán enviados a un mercado nacional, por lo que no serán enviados al mercado local.

Entrada			Salida
x	y	z	f_A
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Por el Teorema 2.2.13 esta función se puede escribir de la siguiente manera

$$f_A(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}.$$

Aplicando las siguientes propiedades del Teorema 2.1.5 y Definición 2.1.2, simplificamos a una función equivalente.

$$\begin{aligned}
 f_A(x, y, z) &= \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} \\
 &= (\bar{x} + x)y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z} && 4.(a) \\
 &= y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} && \text{Ley de idempotencia} \\
 &= y\bar{z} + \bar{x}y(z + \bar{z}) + x\bar{y}z && 4.(a) \\
 &= y\bar{z} + \bar{x}y + x\bar{y}z
 \end{aligned}$$

En la Figura 3.2 se muestra el diagrama de esta función lógica.

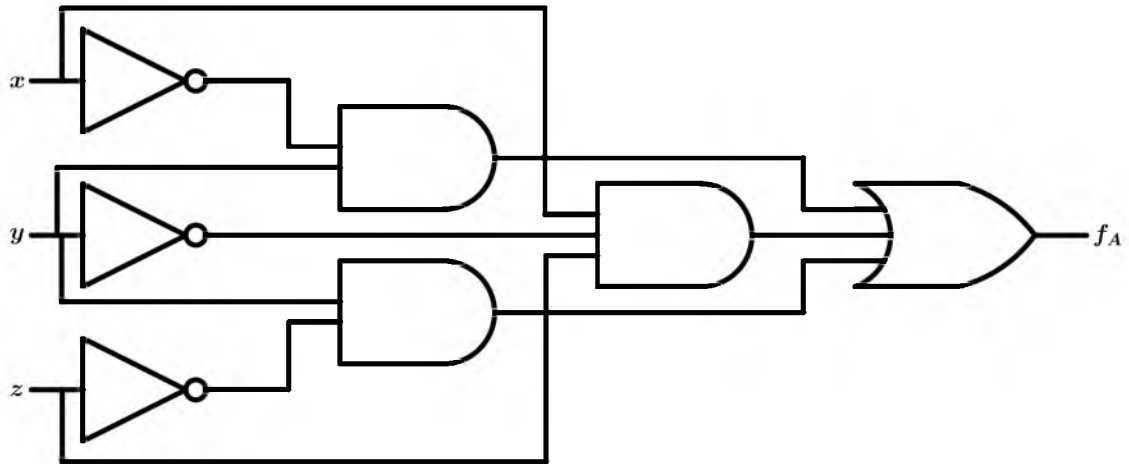


Figura 3.2: Diagrama de la función lógica para la selección de aguacate.

Los tomates serán enviados en el mercado local siempre que lleguen a cumplir una de las dos condiciones.

- Que tengan un color vivo.
- Que tengan un tamaño y peso aceptable.

Si no se llegan a cumplir ninguna de las condiciones, serán rechazados. Por otro lado, si tienen un color, peso y tamaño aceptable serán procesados en un mercado nacional y por lo cual no serán vendidos en el mercado local.

Entrada			Salida
x	y	z	f_T
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Por el Teorema 2.2.13 esta función se puede escribir de la siguiente manera

$$f_T(x, y, z) = \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z}.$$

Aplicando las siguientes propiedades del Teorema 2.1.5 y Definición 2.1.2, simplificamos a una función equivalente.

$$f_T(x, y, z) = \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{x}yz + x\bar{y}(\bar{z} + z) + xy\bar{z} && 4.(a) \\
&= \bar{x}yz + x\bar{y} + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} && \text{Ley de idempotencia} \\
&= \bar{x}yz + x\bar{y} + x(y + \bar{y})\bar{z} && 4.(a) \\
&= \bar{x}yz + x\bar{y} + x\bar{z}
\end{aligned}$$

En la Figura 3.3 se muestra el diagrama de esta función lógica.

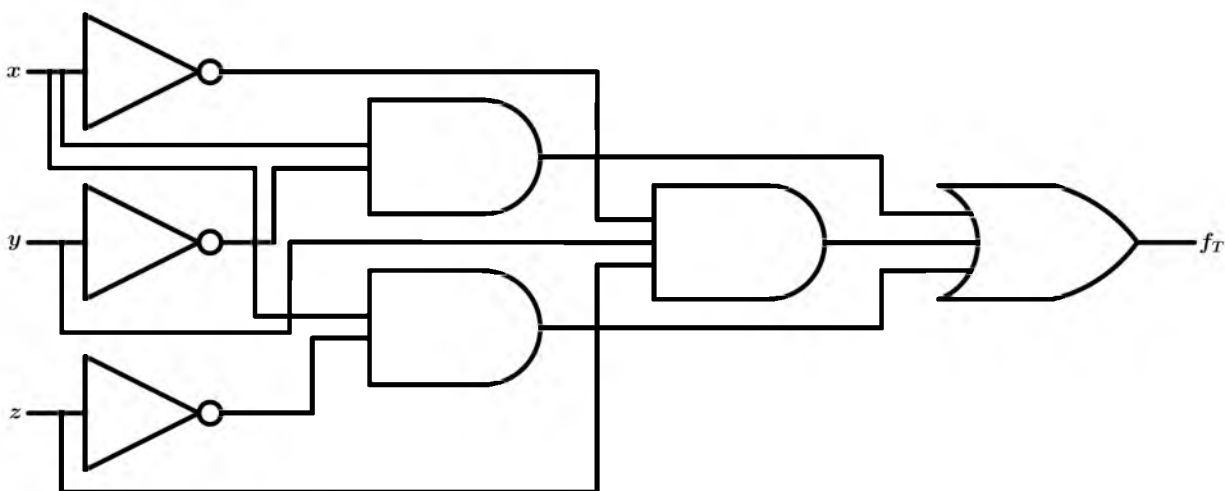


Figura 3.3: Diagrama de la función lógica para la selección de tomate.

En resumen, tenemos las siguientes 3 funciones

Entrada			Salida		
x	y	z	f_L	f_A	f_T
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Para evitar hacer tres circuitos diferentes vamos a aplicar la acción de un subgrupo de S_3 de forma que permutando las entradas podamos trabajar con un único circuito.

Sea $B = \{f_L, f_A, f_T\}$, entonces $B \subseteq X$, donde X es el conjunto de todas las posibles funciones de conmutación descrito en la Sección 3.1.

Consideremos el subgrupo $H_4 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ de S_3 descrito en la Sección 1.3. Esto es, las permutaciones

$$\rho_i : \{x, y, z\} \rightarrow \{x, y, z\}$$

dadas por $\rho_0 = (x)$, $\rho_1 = (x \ y \ z)$ y $\rho_2 = (x \ z \ y)$.

Consideremos la acción $\theta : H_4 \times B \rightarrow B$ definida como $\rho_i \cdot f_\alpha = f_\alpha \circ \rho_i$, esto es

$$\rho_i \cdot f_\alpha(x, y, z) = f_\alpha(\rho_i(x), \rho_i(y), \rho_i(z))$$

donde $\alpha \in \{L, A, T\}$, entonces claramente

$$\rho_0 f_\alpha = f_\alpha,$$

para todo $\alpha \in \{L, A, T\}$.

Como $\rho_1 \cdot f_\alpha(x, y, z) = f_\alpha(y, z, x)$, entonces

$$\rho_1 f_L = f_T,$$

$$\rho_1 f_T = f_A,$$

y

$$\rho_1 f_A = f_L.$$

Además, como $\rho_2 \cdot f_\alpha(x, y, z) = f_\alpha(z, x, y)$, tenemos

$$\rho_2 f_L = f_A,$$

$$\rho_2 f_T = f_L,$$

y

$$\rho_2 f_A = f_T.$$

Entonces la órbita

$$H_4(f_L) = \{\rho_0 f_L, \rho_1 f_L, \rho_2 f_L\} = \{f_L, f_T, f_A\} = B,$$

por lo que f_L , f_A y f_T están en la misma órbita

$$H_4(f_L) = H_4(f_A) = H_4(f_T) = B$$

esto es, la acción de H_4 en B es transitiva.

Por lo tanto, para desarrollar el dispositivo de selección de vegetales en sus tres modalidades ya no será necesario implementar los tres circuitos representados por sus diagramas lógicos en las Figuras 3.1, 3.2 y 3.3. Bastará implementar sólo un circuito como el representado por su diagrama lógico en la Figura 3.4, observe que corresponde al circuito de la Figura 3.1 con la diferencia de que se ha agregado en la entrada una etapa de permutación que consiste de un interruptor conmutador rotativo. Este interruptor se muestra en la Figura 3.5.

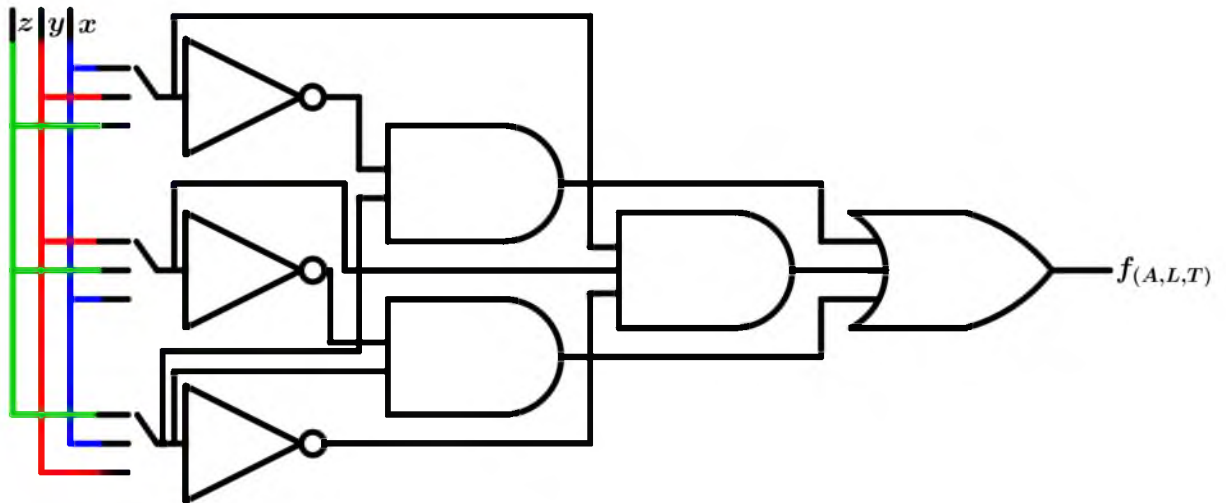


Figura 3.4: Circuito con interruptor.



Figura 3.5: Interruptor conmutador rotativo 3 circuitos y 4 posiciones.

Conclusiones

En esta tesis se han estudiado algunos conceptos básicos de grupos, sus acciones y del álgebra de Boole. Trabajamos con el grupo de simetrías empleando las permutaciones en el diseño de circuitos electrónicos.

Se analizaron las definiciones, propiedades y teoremas básicos de teoría de grupos, tales como el Teorema de Lagrange, el Teorema de Burnside entre otros; también se estudiaron algunas definiciones y propiedades del álgebra de Boole que aplicamos al análisis de las compuertas lógicas para el diseño de circuitos electrónicos.

Se realizó el diseño de un circuito para automatizar la selección de tres vegetales considerando su color, tamaño y peso, para ser aceptados en el mercado local. Para este fin, se definieron las funciones de conmutación que satisficieran los requisitos deseados. Cuanto mayor sea el tamaño de un circuito mayor será la inversión requerida, por lo que a las funciones lógicas de mayor tamaño se les aplicaron las propiedades del álgebra de Boole para reducirlas a una función lógica equivalente.

Posteriormente se aplicó la acción de un grupo de permutaciones en las entradas de las funciones de conmutación definidas para así reducir el tamaño y el costo que se generaba al diseñar todos los circuitos. Para ello consideramos la acción del grupo de simetrías S_n en el conjunto de todas las funciones de conmutación y aplicando el Teorema de Burnside se calcularon el número de distintas funciones de conmutación identificando aquellas que pertenecen a la misma órbita bajo la acción del grupo de permutaciones de S_n .

De esta forma se logró realizar un sólo circuito que esté en función de los otros tres y así se disminuyeron el número de módulos requeridos, gracias a ello se redujeron los costos de fabricación.

Bibliografía

- [1] G. Pierre Antoine, *Abstract Algebra*, Board, 2000.
- [2] D. Avella *et al.*, *Grupos I*, 3a ed., Papirhos, México, 2017.
- [3] D. Avella, *et al.*, *Grupos II*, 1a ed., Papirhos, México, 2016.
- [4] S. Brown, Z. Vranesic, *Fundamentos de Lógica Digital con Diseño VHDL*, Mcgraw-Hill/Interamericana, 2000.
- [5] J. B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, Adisson-Wesley, 1998.
- [6] A. José, S. Gómez, *Fundamentos de Circuitos*, Ediciones Uniandes, Colombia, 2009.
- [7] I.N. Heirnstein, *Álgebra Abstracta*, Iberoamérica, 1986.
- [8] N. Jacobson, *Basic Algebra*, W. H. Freeman and company, Estados Unidos, 1985.
- [9] R. Johnsonbaugh, *Matemáticas Discretas*, Pearson ed., México, 2005.
- [10] T. W. Judson, *Álgebra Abstracta Teoría y Aplicaciones*, antoniobehn.cl/aata, 2017.
- [11] S. Lipschutz, M. Lipson, *Matemáticas Discretas*, McGrawHill, 2009.
- [12] M. Morris Mano, *Diseño Digital*, Pearson ed., México 2003.
- [13] J.J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Board, 1994.