

**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN**  
**CAMPUS LOMA BONITA**

---

**INGENIERÍA EN MECATRÓNICA**

**ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN LAZO ABIERTO DE  
SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN TIPO SUB-AMORTIGUADOS.**

Tesis profesional para obtener el título de  
**INGENIERO EN MECATRÓNICA**

Presenta:

**C. DAVID BEN SHAMAIM LINALDI GUTIERREZ**

Director de tesis:

**Dr. Hiram Netzahualcóyotl García Lozano**

Co-director de tesis:

**Dr. Alejandro Díaz Sánchez**



# UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

## INGENIERIA MECATRONICA

LA PRESENTE TESIS TITULADA "ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN LAZO ABIERTO DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN TIPO SUBAMORTIGUADOS" PRESENTADA POR EL SUSPENDIDO DE LICENCIATURA C. DAVID BEN SHAMAIM LINALDI GUTIÉRREZ BAJO LA DIRECCION DEL DR. HIRAM NETZAHUALCOYOTL GARCIA LOZANO, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITE EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO EN MECATRÓNICA.

M. en C. José Luis Nájera Sánchez.  
Jefe de la carrera de Ingeniería en  
Mecatrónica.

Dr. Hiram Nezahualcoyotl García Lozano.  
Director de tesis

M. en C. Rafael Fernando González Z.  
Presidente.

M. en C. José Luis Najera Sánchez  
Secretario.

Dr. Hiram Nezahualcoyotl García L.  
Vocal.



# Universidad del Papaloapan

*Lettera Ulterima, Mens Aperta*

**INGENIERÍA EN MECATRÓNICA**

Oficio No. JCIM/045/18

Loma Bonita, Oaxaca, a 30 de Octubre de 2018

**ASUNTO: JURADO DE EXAMEN PROFESIONAL**

**M.E. YESENIA BARRIENTOS ARENAL**  
**JEFA DEL DEPTO. DE SERVICIOS ESCOLARES**  
**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN**  
**PRESENTE**

Mediante la presente, le informo que la Vice-Rectoría académica, ha designado a los siguientes profesores como sinodales del examen profesional del alumno C. **David Ben Shamaim Linaldi Gutiérrez**, quien defenderá su trabajo de tesis titulado "**Estimación de parámetros en lazo abierto de sistemas de segundo orden tipo subamortiguados**", para obtener el título de **Licenciado en Ingeniería en Mecatrónica**.

Como titulares:

*M.C. Rafael Fernando González Zárate .- Presidente*  
*M.C. José Luis Najera Sánchez .- Secretario*  
*Dr. Hiram Netzahualcoyotl García Lozano .- Vocal*

Como suplentes:

*M.C. Esteban Chávez conde .- Primer suplente*  
*Dr. Jesus Santiaguillo Salinas .- Segundo Suplente*

Sin más por el momento y agradeciendo el apoyo y tiempo que invertirá en el proceso, le envío saludos cordiales.

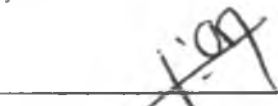
Atentamente,

*Lettera Ulterima, Mens Aperta*

*Lettera Tama, Chi Ji Ju*



**M. C. José Luis Najera Sánchez**  
Jefe de la Carrera de Ingeniería en  
Mecatrónica



**Vo. Bo. M. C. Héctor López Arjona**  
Vice-Rector Académico

c.c.p. M. C. Héctor López Arjona.- Vice-Rector Académico  
c.c.p. Archivo.



# Dedicatoria

*La presente tesis la dedico a mi madre, a mi padre y a mi hermana y a mi novia quienes estuvieron conmigo en todo momento.*

*Al resto de mi familia.*

*A todos mis excelentes maestros.*

*A mis compañeros y ex-compañeros de salón.*



# Agradecimientos

*Gracias a Dios, por haberme prestado la vida y permitirme cumplir una etapa más en mi vida.*

*A mis padres Teresa y Arturo a quienes no tengo como agradecerles, porque en todo momento estuvieron conmigo, brindándome su amor y apoyo incondicional. Por que sin su ayuda y motivación no hubiera podido seguir adelante en los momentos más difíciles. Muchas Gracias.*

*A mi hermana quien fue una de las principales personas que influyeron en mi decisión de ingresar a la universidad. Por su apoyo y palabras de aliento que no me dejaron desistir. Gracias.*

*A mis abuelos, porque son un ejemplo para mi vida en todos los sentidos.*

*A mi novia, quien me brindo todo su apoyo incondicional, amor y paciencia cuando más lo necesitaba. Por estar conmigo en los momentos más complicados y no dejar vencerme. Gracias Maythé Hdez.*

*A todos los amigos, compañeros y maestros que conocí a lo largo de este trayecto. En especial con aquellos que culminamos esto juntos en las buenas y malas, Filio, Belem e itza. Gracias.*

*Tambien quiero agradecer a mi director de tesis quien fue de gran apoyo a lo largo de la carrera y en la culminación de este proyecto, muchas gracias Profesor Hiram y profesor Rafa. De igual forma agradecer al Dr. Alejandro Díaz del cual pude obtener este tema de tesis. Muchas gracias.*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelado y estimación paramétrica.</b>	<b>5</b>
2.1. Modelado matemático. . . . .	5
2.2. Tipos de modelados. . . . .	6
2.3. Clasificación de Sistemas Dinámicos. . . . .	8
2.4. Sistemas de segundo orden. . . . .	10
2.5. Parámetros Principales de la Respuesta Transitoria. . . . .	12
2.6. Identificación de sistemas. . . . .	14
2.6.1. Técnicas en línea y fuera de línea. . . . .	16
2.7. Estado del arte. . . . .	17
<b>3. Diseño de estimadores.</b>	<b>21</b>
3.1. Metodología . . . . .	21
3.1.1. Implementación de los estimadores. . . . .	22
3.2. Ecuación en el tiempo de sistemas subamortiguados. . . . .	23
3.2.1. Cálculo de las derivadas analíticas . . . . .	25
3.2.2. Validación de las derivadas . . . . .	26
3.3. Obtención de los estimadores . . . . .	27
3.4. Derivación numérica. . . . .	28
3.4.1. Método de derivación empleando dos puntos. . . . .	29
<b>4. Resultados.</b>	<b>33</b>
4.1. Resultados de simulación numérica. . . . .	33
4.2. Resultados experimentales. . . . .	38
4.3. Resultados con Interpolación de datos . . . . .	40
4.4. Resultados usando filtro media móvil. . . . .	42
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>51</b>

<b>Apéndices.</b>	<b>53</b>
A. Programas y bloques de simulación. . . . .	55
B. Hojas de datos de dispositivos. . . . .	61

# Resumen

La estimación paramétrica puede ser definida como el conjunto de estudios, teorías y algoritmos que permiten obtener la estructura y los parámetros de un modelo matemático (generalmente dinámico). Ésta permite obtener, con suficiente exactitud para los fines de control automático, los parámetros de un proceso o sistema real objeto de estudio, ante el mismo conjunto de variables de entrada. En el caso de sistemas dinámicos, se refiere a obtener los parámetros principales de un sistema a partir de la respuesta transitoria del mismo.

Distintos métodos se han propuesto para realizar la estimación paramétrica en sistemas dinámicos. Uno de ellos, se basa en obtener de forma gráfica los valores de ciertas características de la curva transitoria y a partir de ellos calcular los parámetros principales. Otros se basan en conocer la dinámica de los sistemas a través de la relación que se establece entre la entrada y la salida (Lazo abierto), también denominados de caja negra.

En esta tesis, se propone un método para la estimación de los parámetros principales  $\zeta$  y  $\omega_n$  correspondientes al factor de amortiguamiento y a la frecuencia natural de sistemas cuyo comportamiento sea similar a uno de segundo orden tipo sub-amortiguado.

Se ha demostrado que es posible obtener los parámetros empleando derivadas numéricas y utilizando únicamente una porción de la respuesta transitoria. Sin embargo, las ecuaciones resultantes son sensibles al ruido en las señales físicas, obtenidas mediante tarjetas de adquisición de datos.

Con la metodología propuesta, se pretende estimar los parámetros de sistemas físicos que tengan el comportamiento aproximado a un sistema de segundo orden empleando a su vez algoritmos que permitan eliminar el ruido de tal forma que este no afecte en el resultado de la estimación.

Los estimadores propuestos serán la base de trabajos posteriores que se centren en la obtención y corrección de la respuesta en lazo abierto para sistemas de segundo orden. También podrán ser aplicados para la reconstrucción de señales e implementación de nuevos algoritmos de control.



# Abstract

Parametric estimation can be defined as the set of studies, theories and algorithms that allows to obtain the structure and parameters of a mathematical model (usually dynamic). This let us to obtain, with sufficient accuracy for automatic control purposes , the parameters of a real process or system being study, using the same set of input variables. In dynamic systems, it refers to solve for the main parameters of a system based on its transitory response.

Different methods have been proposed to perform the dynamic systems's parametric estimation. One of them is based on graphically obtaining the values of certain characteristics of the transient curve and then calculate the main parameters. Another ones are based on knowing system's dynamic through the relationship established between the input and output (open loop), also called black box.

This thesis, proposed a method to the estimation of the main parameters  $\zeta$  and  $\omega_n$  corresponding to the damping factor and to the natural frequency of systems whose behavior is similar to a second-order sub-damped type.

It's shown that is possible to obtain the parameters using numerical derivatives and using only a portion of the transient response. However, the resulting equations are sensitive to noise in physical signals, obtained by the data acquisition cards.

With the proposed methodology, we try to estimate the parameters of physical systems whose behavior is similar to a second-order system, using algorithms that eliminate noise in such a way that it does not affect the result of the estimation.

The estimators proposed will be the beginning of future work that focuses on obtaining and correcting the open loop response to second order systems. They can also be applied to signals's reconstruction and implementation of new control algorithms.



# Índice de figuras

1.1. Partes que conforman un sistema . . . . .	1
2.1. a) Análisis de sistema en viga, b) Circuito de resistencias. . . . .	6
2.2. a) Sistema masa-resorte, b) Circuito RLC . . . . .	7
2.3. Respuesta de un sistema de primer orden . . . . .	8
2.4. Masa resorte amortiguador. . . . .	9
2.5. Sistema masa resorte sin amortiguador . . . . .	10
2.6. Representación de la transformada de Laplace . . . . .	11
2.7. Respuesta del sistema ante diferentes factores de amortiguamiento . . . . .	12
2.8. Identificación de parámetros en la respuesta de un sistema subamortiguado .	13
2.9. Técnica fuera de línea. . . . .	16
2.10. Técnica en línea. . . . .	16
2.11. Respuesta oscilante del sistema de segundo orden a la excitación de una entrada escalón. . . . .	17
2.12. Parámetros principales en sistemas de primer orden. . . . .	18
2.13. Señal con retardos homogéneos . . . . .	19
3.1. Diagrama de flujo para la obtención de los estimadores. . . . .	21
3.2. Diagrama del funcionamiento de los estimadores. . . . .	22
3.3. Retardos homogéneos. . . . .	23
3.4. Programación correspondiente a la validación de las derivadas. . . . .	26
3.5. Derivadas algebraicas vs derivadas de simulación. . . . .	27
3.6. Casos para la aproximación de la derivada. . . . .	29
3.7. Derivada numérica vs Derivada algebraica . . . . .	30
3.8. Diferencia mínima entre ambas derivadas . . . . .	30
3.9. Diferencia que existe entre ambas señales. . . . .	31
3.10. Gráfica para la obtención de derivadas. . . . .	31
4.1. Programación en simulink para corroborar las derivadas. . . . .	33
4.2. Resultados empleando los estimadores desde $t = 0$ . . . . .	34
4.3. a) Función original vs. Estimada. b) Acercamiento de ambas señales. . . . .	35
4.4. Resultados empleando los estimadores desde $t=0.04$ . . . . .	36
4.5. Resultados de simulación con $\zeta = 0,5$ y $\omega_n = 12$ . . . . .	36
4.6. Resultados de simulación con $\zeta = 0,8$ y $\omega_n = 15$ . . . . .	37

4.7. Circuito equivalente a un sistema de segundo orden . . . . .	38
4.8. Resultados de las derivadas de la respuesta adquirida. . . . .	39
4.9. Curva interpolada . . . . .	41
4.10. Resultados con interpolación de datos . . . . .	42
4.11. Respuesta filtrada . . . . .	43
4.12. Resultados de la estimación de la respuesta A . . . . .	44
4.13. Resultados de la estimación de la respuesta B . . . . .	45
4.14. Resultados de la estimación de la respuesta C . . . . .	46

# Índice de tablas.

4.1. Error en simulación . . . . .	37
4.2. Resistencias y capacitores . . . . .	38
4.3. Cálculo del error en la estimación con datos reales . . . . .	47



# Capítulo 1

## Introducción

Un sistema, en su expresión más simple, es un conjunto de partes interactuando entre sí para realizar una tarea específica, ésto puede ser un objeto, cantidad de materia, o cualquier región del espacio. Existen diversas maneras de definirlos por ejemplo, el sistema gramatical o de números, que consiste en reglas, principios o medidas que se relacionan entre sí con el fin de representar un sistema mediante ecuaciones matemáticas; el sistema eléctrico o de signos que es un conjunto de elementos o partes coordinadas que responden a una ley, o que, ordenadamente relacionadas entre sí, contribuyen a determinado objeto o función.

Es posible definir las partes que conforman un sistema básicamente en cuatro como se muestra en la siguiente figura.

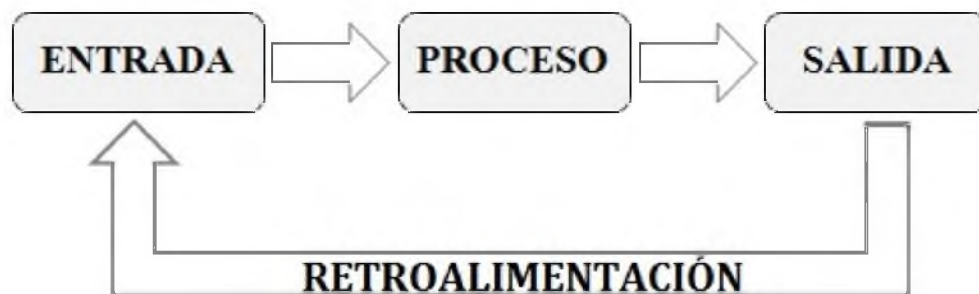


Figura 1.1: Partes que conforman un sistema

- Entrada: lugar por el cual se adquiere toda la información.
- Proceso: es donde los elementos del sistema sufren un cambio o transformación.
- Salida: como su nombre lo indica, es el lugar donde sale un nuevo elemento transformado.
- Retroalimentación: permite analizar el proceso, al cual ha sido sometida la entrada, para determinar las fallas y así mismo poder corregirlas.

Desde épocas remotas el ser humano ha tenido la necesidad de representar sistemas, es decir, buscar la forma de obtener la mayor información posible para su estudio individual. Es posible referirse a una representación abstracta, gráfica o visual, física, matemática, los cuales pueden ser de fenómenos, sistemas o procesos a fin de analizar, describir, ó simular. En general se trata de explorar y predecir esos fenómenos o procesos.

Los romanos, en tiempos de guerra, ocupaban un método en particular que consistía en dibujar mapas del territorio donde estaban situados sus enemigos y con ésto disponían de todas las ubicaciones necesarias para lograr una mejor toma de decisiones con el fin de invadir nuevos territorios. Ésta era una forma de representar un modelo mediante dibujos.

La historia de la arquitectura se divide en muchos periodos, desde las primeras piedras que fueron puestas para formar un puente, hasta las grandes estructuras arquitectónicas. En este ámbito se emplea otro tipo de modelación, por medio de maquetas. Éstas se llevan a cabo para poder juzgar, de manera fácil, una obra de construcción antes de iniciar su ejecución. Grandes empresas las usan para plasmar todas las áreas de trabajo en la que se divide la empresa y también para poder detectar fallas en alguno de sus procesos, logrando reducir tiempo y costos al detectar donde se originó algún error durante su proceso.

En matemáticas este concepto tiene un significado muy distinto. En esta área de las ciencias los modelos son construidos a partir de símbolos alfanuméricos. Éstos son utilizados con el propósito de predecir el comportamiento de un sistema. Un modelo matemático tiene distintas formas, puede ser un esquema, una ecuación, un diagrama o una teoría entre otras.

Es importante resaltar que los modelos no proporcionan una información directa o exacta de lo que está ocurriendo realmente, si no únicamente son aproximaciones del objeto de estudio. Las predicciones del modelo deberán ser validadas mediante resultados empíricos (Pruebas).

Algunos de los términos más importantes, cuando se modela matemáticamente un sistema, son los parámetros, es decir, los motivos, situaciones o entidades físicas por las cuales rige su comportamiento. Un ejemplo de ésto es en meteorología, cuando se desea predecir las probabilidades de lluvia de un lugar se emplean parámetros medibles como la humedad relativa del lugar, velocidad del aire, entre otros. Estos parámetros se ven involucrados con una serie de datos probabilísticos que se transforman en modelos matemáticos.

Existen sistemas en los cuales no es posible conocer la estructura interna ó los parámetros físicos de los elementos que lo conforman. Este tipo de sistemas se conocen como sistemas cerrados, que por lo regular poseen una entrada y una salida. Por ejemplo para determinar las características eléctricas de un motor (Resistencia de armadura  $R_a$ , inductancia de armadura  $L_a$ , y fuerza electromotriz  $F_{em}$ ), no es recomendado desarmarlo por completo, debido a que existe un alto riesgo de daño. Con la finalidad de conocer el valor numérico de estas características pueden ser utilizadas diversas técnicas entre las cuales, en esta tesis se destaca la identificación paramétrica. Esta técnica se basa en la obtención de los parámetros por medio de experimentos, donde los datos de entrada-salida que se tomen correspondan a señales fácilmente accesibles que no requieran ningún tipo de desmonte (Beira A., [1]).

Existen distintas formas de definir la identificación paramétrica, una de ellas es la técnica de construir un modelo a partir de las variables medidas del proceso: entradas o variables de control, salidas o variables controladas y, posiblemente, perturbaciones. También puede ser

definida como el conjunto de estudios, teorías y algoritmos que permiten obtener la estructura y los parámetros de un modelo matemático, generalmente dinámico, con suficiente exactitud para los fines de control automático.

La modelación matemática como la *Identificación Paramétrica* aporta a los procesos industriales una ayuda indiscutible. Éstas permiten desde la mejora de calidad de productos fabricados en una empresa, eficiencia en los procesos, incluso puede minimizar el consumo de energía, hasta la seguridad en las plantas industriales. En la actualidad, cada vez más, el trabajo de un ingeniero consiste en la realización de modelos matemáticos de los procesos estudiados (Ljung L., [2]): bioingeniería, construcción, economía, meteorología incluso procesos químicos.

Existen referencias en las cuales se puede constatar que los inicios del modelado matemático e identificación paramétrica en conjunto se aplicaron por primera vez en los años 70's. No fue hasta los años 90's que estas técnicas se empezaron a aplicar a procesos industriales.

Debido a la gran demanda y competitividad que existe en la actualidad en el mercado, la industria se ve en la necesidad de automatizar cada uno de sus procesos, y ésto se logra con la ayuda de grandes avances tecnológicos, los cuales pueden llevarse a cabo solo gracias a estas dos técnicas.

Dentro del proceso de identificación de sistemas se destacan cuatro etapas: Planificación experimental, selección de la estructura del modelo, *estimación de parámetros* y validación. En estas etapas la estimación de parámetros es la que define al sistema.

Esta tesis se centra en el desarrollo de un método para el cálculo de parámetros para sistemas cerrados, (un caso particular, sistemas de segundo orden del tipo sub-amortiguados) mediante un método de derivación numérica. Ésto con la finalidad de ser empleado sobre plataformas experimentales.



# Capítulo 2

## Modelado y estimación paramétrica.

En este capítulo se explica que es el modelado matemático, tipos de modelos, entre otras características se explica su clasificación así como la importancia del caso especial de los sistemas de segundo orden. Se construye su modelo matemático y se presentan sus parámetros principales. Se analiza el efecto de cada uno de ellos en la respuesta a diferentes entradas. También se introduce el término identificación paramétrica, en que consiste y que tipos existen. Por último se presentan brevemente trabajos previos a esta tesis.

### 2.1. Modelado matemático.

El área de ingeniería de Control, puede considerarse como el arte de conducir, dirigir e incluso gobernar algunos sistemas y procesos (Behar A., [3]). Con este fin, se requiere del modelado y la identificación de procesos (identificación paramétrica) como herramientas indispensables para obtener una representación de la realidad de dichos sistemas o procesos, mediante la elaboración de un modelo, normalmente matemático.

Un modelo matemático representa, mediante símbolos abstractos, como se relacionan los componentes de un sistema entre sí y con el medio que lo rodea. Intenta reconstruir el objeto de estudio mediante una descripción matemática para observar su comportamiento con exactitud, o al menos una aproximación de este. Es por ello que modelar sistemas es una de las partes más importantes en el análisis y diseño de sistemas de control.

Existen diversas formas de obtener un modelo matemático. Entre ellas se encuentran dos formas más utilizadas:

*Fuera de línea.* Ésta se basa en obtener un modelo matemático utilizando leyes o principios. Mediante técnicas de identificación se produce un modelo susceptible de ser aplicado posteriormente al diseño de controladores de parámetros fijos.

*En línea.* Permite obtener un modelo matemático basado en técnicas de identificación paramétricas, mediante la actualización de datos en cada periodo de muestreo. Este tipo de métodos tienen restricciones de cálculo y son muy importantes.

## 2.2. Tipos de modelados.

De acuerdo con el comportamiento de los sistemas es necesario utilizar una herramienta matemática distinta. Existen sistemas en los cuales las relaciones que guardan entre sus componentes y su entorno son estáticas, por ejemplo la fuerza de una viga. En cambio algunos otros varían algunos de sus parámetros con respecto del tiempo, como en el caso de una pelota que gira. Estas relaciones permiten realizar una clasificación entre ambas. En esta sección se profundiza en este tipo de clasificación y se dan algunos detalles adicionales de cómo se obtienen algunos modelos.

### ■ Sistemas algebraicos.

Considere el sistema de la figura (2.1 a). En este se estudian los esfuerzos que afectan al sistema, donde podría fallar el material, encontrar fuerzas de reacción en soportes, momentos flexionantes, tensiones, compresiones y cargas a las que está sometida la viga. Es decir, se estudian cómo se relacionan las diferentes fuerzas que interactúan en él. Como se puede ver todas son constantes, y de esta manera las relaciones que guardan son estrictamente algebraicas, que podemos resolver con operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división, entre otras. A este tipo de sistemas se les llama algebraicos.

Otro ejemplo de este tipo de sistemas es el circuito resistivo de la figura (2.1 b). En este caso es posible aplicar las leyes de corriente de Kirchoff (relaciones algebraicas) para calcular tanto resistencia, voltaje y corriente en el circuito. Es por esto que la descripción matemática de este sistema también puede ser encontrada mediante ecuaciones algebraicas.

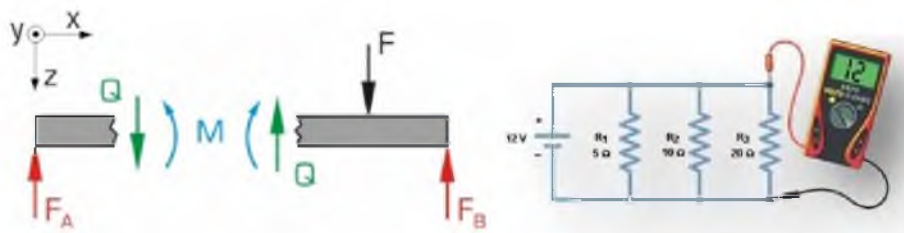


Figura 2.1: a) Análisis de sistema en viga, b) Circuito de resistencias.

### ■ Sistemas Dinámicos.

Existen sistemas cuya relación con el medio no puede ser representada por ecuaciones algebraicas. Por ejemplo una pelota que se arroja en el aire, tiende a subir y posteriormente bajar por la ley de la gravedad. La razón de cambio de la posición de la pelota con respecto del tiempo se denomina velocidad. Los sistemas en los cuales al menos un componente varía con respecto a otro se denominan sistemas dinámicos y la entidad matemática que permite representar estos cambios se conoce como derivada. De acuerdo a esto, el movimiento que describe la pelota con respecto del tiempo debe ser representada por una ecuación

que contenga derivadas. Tales ecuaciones se denominan ecuaciones diferenciales. Existen gran variedad de sistemas dinámicos, como son: mecánicos, eléctricos, térmicos, u otros, cuyo comportamiento de todos ellos es descrito en términos de ecuaciones diferenciales. Un ejemplo, muy utilizado para describir este tipo de sistemas, es una masa pendiendo de un resorte, (figura 2.2 a). Si se aplica una fuerza que excite al sistema, este tiende a bajar y subir debido a la deformación que sufrirá el resorte. Cuando se requiere determinar el tiempo en que volverá a su estado original, es necesario saber la rigidez del resorte, la cantidad de masa así como la fuerza aplicada al sistema. El comportamiento de este sistema puede ser aproximado por la siguiente ecuación diferencial:

$$m\ddot{x} + kx = f(t)$$

En el caso de un circuito RLC (figura 2.2 b) su respuesta en el tiempo corresponde a la siguiente ecuación:

$$V_c(t) = (1 - e^{-t/RC})$$

La ecuación diferencial empleada para conocer la corriente del capacitor es la siguiente:

$$I_c = C \frac{d}{dt} V_c(t) = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$$

Para este circuito es posible obtener parámetros tales como la resistencia (Omhs), y la capacitancia (Faradios) mediante tablas de especificaciones. Sin embargo el valor del parámetro de la bobina (Henrios) solamente puede ser determinado experimentalmente. En el caso de un sistema masa resorte, el coeficiente de restitución del resorte, tampoco puede ser determinado de manera directa. A fin de establecer estos parámetros es necesario aplicar un proceso de identificación de parámetros, ya sea de forma visual, analítica o mediante algoritmos.



Figura 2.2: a) Sistema masa-resorte, b) Circuito RLC

### 2.3. Clasificación de Sistemas Dinámicos.

Una parte importante del estudio de los sistemas dinámicos consiste en, por medio de técnicas cuantitativas y cualitativas, entender cualquier movimiento, es decir, cualquier cambio o variación de un objeto con respecto al tiempo. Una forma de simplificar este estudio es clasificando los tipos de sistemas, dependiendo el grado de su ecuación diferencial que los describe y su respuesta producida ante algunas condiciones de entrada. Básicamente los sistemas dinámicos se dividen en tres grupos.

- **Sistemas de primer orden:** Este tipo de sistemas son lentos, cuya respuesta aumenta gradualmente y se aproxima a un límite establecido. El comportamiento de estos sistemas se modelada mediante una ecuación diferencial de primer orden mostrada a continuación:

$$k_1 \dot{c}(t) + k_2 g(t) = r(t)$$

La salida de la ecuación en el tiempo que define este tipo de sistemas es la siguiente:

$$c(t) = 1 - e^{-(t/T)}$$

donde  $\frac{1}{T}$  equivale a la tasa de cambio o pendiente y  $t$  es la variable asignada para el tiempo. Como se muestra en la figura (2.3) su respuesta es de tipo exponencial.

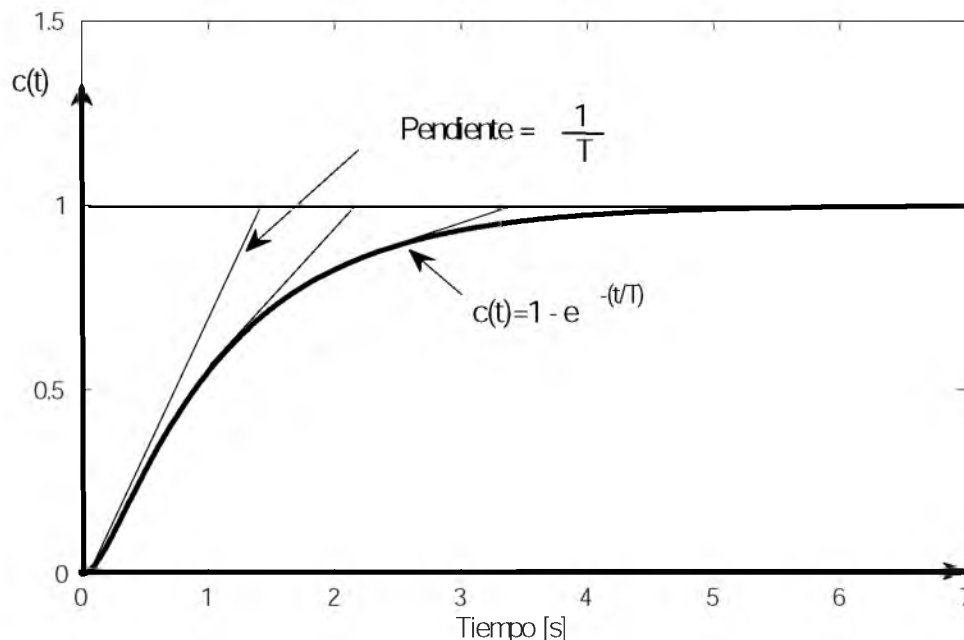


Figura 2.3: Respuesta de un sistema de primer orden

■ **Sistemas de segundo orden.**

Este tipo de sistemas puede o no presentar oscilaciones en su respuesta, dependiendo de parámetros como la rigidez del sistema o la fricción existente. La ecuación diferencial que define el comportamiento de este tipo de sistemas es:

$$k_1\ddot{c}(t) + k_2\dot{c}(t) + k_3c(t) = r(t)$$

Un ejemplo de este tipo de sistemas es el mostrado en la figura (2.4). En este caso la variable de salida es el desplazamiento  $y(t)$ . El parámetro  $k_1$  representa la masa del sistema, el parámetro  $k_2$  el coeficiente de fricción viscosa del amortiguador y el parámetro  $k_3$  determina el coeficiente de restitución del resorte. Cuando el amortiguador presenta una fricción muy alta, después de aplicar una fuerza que lo mueva del estado de reposo, la respuesta se puede asemejar a la de un sistema de primer orden. Este tipo de respuesta se presenta en la figura (2.4). Aquí, el sistema llega a un estado de reposo de manera gradual, sin presentar oscilaciones. La ecuación resultante del sistema masa resorte amortiguador es (2.1):

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t) \quad (2.1)$$

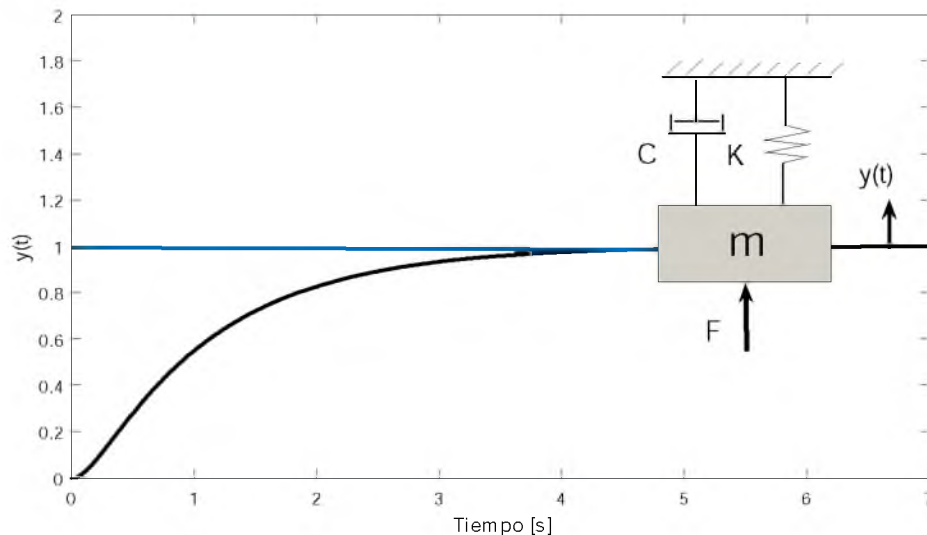


Figura 2.4: Masa resorte amortiguador.

Sin embargo, para el caso del masa resorte sin amortiguador al cual se le aplica una fuerza suficientemente grande de manera tal que deforme al resorte, éste presentará múltiples oscilaciones, como se puede observar en la figura (2.5).

La ecuación correspondiente al sistema masa resorte es (2.2):

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = f(t) \quad (2.2)$$

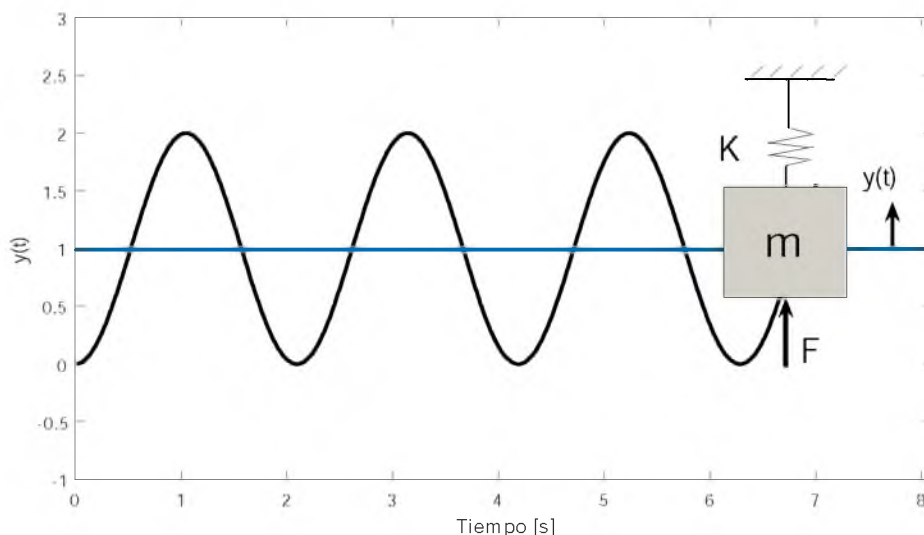


Figura 2.5: Sistema masa resorte sin amortiguador

- Sistemas de orden superior.** Este tipo de sistemas son una combinación lineal de sistemas de primer y segundo orden. Es por esta razón, bajo ciertas circunstancias, los sistemas de orden superior tienen una respuesta de primer orden o de segundo orden, o una combinación de ambas, por lo que son analizados de igual manera que en los casos anteriores.

## 2.4. Sistemas de segundo orden.

La mayoría de los sistemas físicos pueden aproximarse como sistemas de segundo orden, debido a cómo se comporta con respecto del tiempo, los sobre picos que ésta presenta, y oscilaciones en algunos casos (Nise N, [4]). Debido a ésto, poder determinar sus características principales de manera experimental es importante en el proceso de modelado.

Un método para analizar sistemas es mediante la función de transferencia. Para su definición ésta hace uso de una herramienta matemática llamada transformada de Laplace, la cual pasa una ecuación diferencial del dominio del tiempo al dominio de la variable compleja  $s$ . La función de transferencia es una representación del sistema, mediante la transformada de Laplace de salida  $R(t)$  entre la transformada de Laplace de la entrada  $C(t)$  con condiciones iniciales iguales a cero. Un diagrama gráfico del mismo es el que se muestra a continuación (2.6).

$$\frac{\mathcal{L}[r(t)]}{\mathcal{L}[c(t)]} = \frac{R(s)}{C(s)} = G(s)$$



Figura 2.6: Representación de la transformada de Laplace

En forma general, la función de transferencia para los sistemas de segundo orden es (2.3):

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.3)$$

El factor  $k$  se le conoce como la ganancia que representa la amplitud o la referencia a la cual se estabiliza el sistema. Para esta función los parámetros principales son  $\zeta$  (factor de amortiguamiento) y  $\omega_n$  (frecuencia natural no amortiguada). Estos dos últimos valores son los que determinan como se comporta el sistema. El denominador de la función de transferencia se conoce como polinomio característico, cuyas raíces determinan la estabilidad del sistema.

Estos sistemas, describen trayectorias en las cuales, dependiendo del valor que adopte  $\zeta$ , sobrepasa el nivel deseado, presenta oscilaciones o simplemente llega de forma exponencial a un valor estable. Es por ésto que el valor  $\zeta$  puede ser utilizado para construir una clasificación de la respuesta del sistema en cuatro tipos como se muestra a continuación:

- Sin amortiguamiento ( $\zeta = 0$ ): En la figura (2.7), la línea verde representa este tipo de respuesta. Ésta presenta oscilaciones sostenidas, ésto se debe a que no existe ningún dispositivo que intente atenuarlas.
- Sub-amortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ): Un sistema de este tipo presenta un máximo sobre impulso. Su respuesta transitoria presenta oscilaciones dependiendo del valor del factor de amortiguamiento. La línea roja en figura (2.7) representa este tipo de sistemas.
- Críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ ): En este tipo no se presenta oscilación alguna, véase figura (2.7) línea azul. Su respuesta converge a la referencia de la forma más rápida posible sin sobrepasarla.
- Sobre-amortiguado ( $\zeta > 1$ ): La respuesta es similar que el caso anterior. El tiempo del transitorio depende del valor del factor de amortiguamiento, entre más grande sea éste mayor será el tiempo de establecimiento (ver 2.7 línea color morado).

Cada caso en particular requiere de un análisis por separado debido a que cada una posee diferente comportamiento. En este trabajo se analizarán sistemas de segundo orden tipo sub-amortiguados.

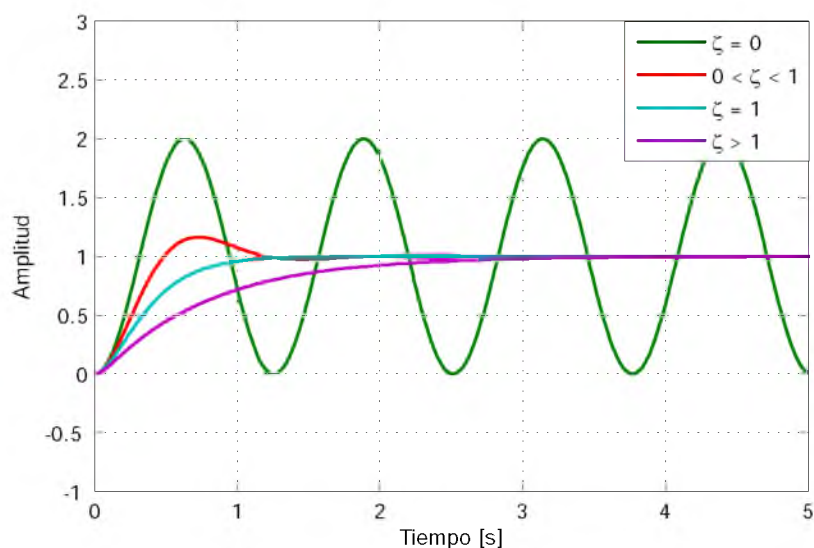


Figura 2.7: Respuesta del sistema ante diferentes factores de amortiguamiento

## 2.5. Parámetros Principales de la Respuesta Transitoria.

La respuesta de un sistema es la variación del mismo al ser perturbado por una fuerza ajena, es decir, si éste presenta oscilaciones, sobre impulsos, entre otras características. La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable.

La respuesta transitoria es aquella que va del estado inicial, de reposo del sistema, hasta que se estabiliza entre un 3 o 5%, después de aplicarle una fuerza que lo perturbe. La respuesta en estado estable, es la que obtiene cuando el tiempo es muy grande es decir conforme  $t$  tiende a infinito. (Ogata K., [5]).

*Señales de prueba típicas.* Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón rampa, parábola, impulso, senoidales, entre otras. Con estas señales de prueba, es posible realizar el análisis matemático y experimental del sistema de control, dado que las señales son funciones del tiempo muy simples.

Cada tipo de sistemas (Sub-amortiguados, sobre-amortiguados, sin amortiguamiento y amortiguamiento crítico) tienen diferente respuesta transitoria. En esta tesis se analizan únicamente sistemas del tipo sub amortiguados.

La respuesta transitoria de los sistemas de segundo orden subamortiguados, posee diversos parámetros ó características que la identifican, las cuales se pueden mostrar en la gráfica continuación

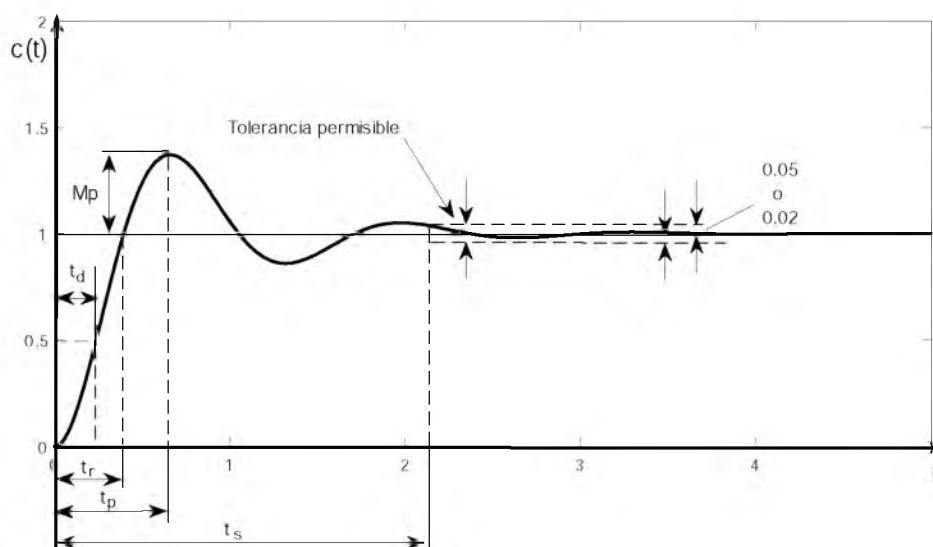


Figura 2.8: Identificación de parámetros en la respuesta de un sistema subamortiguado

Donde :

**Mp** Es el máximo sobre impulso, el cual está dado por:  $Mp = 1 + e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\beta}\right)}$

**td** Es cuando la señal alcanza el 50% antes de llegar a la referencia.

**tr** Es el tiempo que toma la respuesta para subir desde el 10% al 90% de la amplitud del escalón de entrada.

**tp** Este es el tiempo en que se produce la máxima amplitud de salida y está dado por:  

$$tp = \frac{\pi}{\zeta\omega_n\beta}$$

**ts** Este parámetro mide el tiempo en que la respuesta queda acotada a una cierta banda de amplitud, dependiendo del criterio que se requiera (5% ó 2%).  $t = \frac{4}{\zeta\omega_n}$  ó  $t = \frac{3}{\zeta\omega_n}$

A partir de los parámetros y las ecuaciones mencionadas anteriormente (figura 2.8), es posible encontrar los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$  de forma gráfica una vez obtenida la respuesta. Sin embargo, ésta no es la única forma de conocer dichos términos.

Cuando en un sistema no es posible conocer el funcionamiento interno ni los parámetros principales es necesario, a través de la salida del sistema, poder obtener por medio de algún algoritmo. En el área de control, existe la *identificación de sistemas*, que nos permite obtener los modelos matemáticos. Una forma de obtener los parámetros es mediante un estimador de parámetros, que es parte fundamental de esta área (Estimación paramétrica). Dicho estimador se construye a partir de la ecuación en el tiempo del sistema. Cabe mencionar que debido a que la respuesta varía según el tipo de sistema a emplear, la ecuación de la respuesta en el tiempo no es la misma para todos los casos.

## 2.6. Identificación de sistemas.

La identificación de sistemas puede ser definida como el estudio de técnicas que tienen como objetivo la obtención de los modelos matemáticos de sistemas dinámicos a partir de mediciones experimentales realizadas durante el proceso [6]. Existen diversos enfoques y métodos de identificación por ejemplo: **Identificación analítica o de primeros principios**, que consiste en desarrollar un modelo basado en las relaciones físico-químicas del proceso a identificar. En este método se plantean ecuaciones cinemáticas, dinámicas, de balance tanto de masa, energía, de cinética química, entre otros. Este enfoque generalmente se basa a modelos complejos y no lineales que deben pasar por un proceso de linealización. Tiene un inconveniente principal que es necesario el conocimiento muy especializado sobre la tecnología del proceso, que no siempre está disponible. Otra variante es **la identificación experimental mediante señales especiales**. Ésta resulta generalmente la más directa y permite obtener el modelo de un proceso a más corto plazo, empleando señales como escalones y otras llamadas secuencias binarias pseudoaleatorias. Una limitante de esta técnica es que se obtienen exclusivamente modelos determinísticos. Sin embargo **la estimación** consiste en estimar los parámetros reales o aproximados por los cuales rige su comportamiento un sistema.

De acuerdo con [7] y [1] las técnicas de estimación también se pueden clasificar en paramétricas y no paramétricas.

Las técnicas de **estimación paramétrica** describen las relaciones entre las variables del sistema mediante expresiones matemáticas; ecuaciones diferenciales en sistemas continuos y ecuaciones de diferencias en sistemas discretos. Para las técnicas de estimación paramétricas se debe tener en cuenta cierta estructura para el modelo, es decir, seleccionar un modelo matemático y establecer un conjunto de parámetros a partir de la información de entrada-salida que caracterizan el modelo.

Los parámetros del modelo se calculan minimizando ciertos criterios de error entre el modelo y el proceso.

Uno de los métodos utilizados en estimación de parámetros es el de Identificación paramétrica por *Mínimos Cuadrados Recursivos*. Con este método es posible realizar el ajuste de los parámetros en cada intervalo de tiempo. Sin embargo, esta tesis se centra únicamente en las técnicas de estimación no paramétricas.

Las **no paramétricas** se pueden dividir de la siguiente manera.

1. **Análisis de la respuesta transitoria.** Ésta se basa en la obtención de la respuesta del sistema ante una entrada que puede ser un impulso o un escalón unitario.
2. **Análisis de correlación.** En este método se analiza dominio temporal, útil para sistemas lineales y con señales continuas o discretas. Como resultado del mismo se obtiene la función de correlación entre las variables de interés y, como caso especial, una función de pesos.
3. **Técnicas frecuenciales.** Éstas son utilizadas directamente para estimar la respuesta frecuencial del sistema. Dentro de las técnicas frecuenciales podemos diferenciar entre el análisis de Fourier y el análisis Espectral.

Todas ellas son aplicables en el caso de considerar procesos lineales o linealizables. Para su utilización no se debe suponer ningún tipo de estructura para el modelo y los resultados obtenidos son de tipos gráfico, los cuales pueden ser más o menos fáciles de interpretar.

En [8] y [7] proponen que para llevar a cabo una correcta identificación paramétrica es necesario realizar algunas etapas previas, las cuales se describen a continuación:

- Diseño del experimento de identificación. En esta primera etapa es necesario decidir, entre otros aspectos, el tipo de señales de excitación, el mejor periodo para la adquisición de datos, la cantidad de datos necesarios.
- Observación y mejora de la calidad de los datos capturados. Antes de utilizar los métodos de estimación de parámetros es necesario: observar y reparar los datos erróneos, filtrar altas frecuencias, eliminar offsets y tendencias.
- Determinación de la estructura del modelo. En esta etapa es necesario definir el tipos de modelos a utilizar: continuos o discretos, tipos de ruido, lineales o no lineales, regresiones, redes neuronales. Y es necesario adoptar un procedimiento para determinar el orden del modelo.
- Estimación de los parámetros. Etapa muy relacionada con la anterior, en ella se presenta el problema de decidir el método o métodos de estimación de parámetros que se van a utilizar para calcular el valor de los mismos. En general se puede escoger entre dos técnicas distintas: en el dominio temporal y en el dominio frecuencial.

### 2.6.1. Técnicas en línea y fuera de línea.

A partir de las etapas mencionadas previamente es posible elegir entre dos técnicas para la estimación de los parámetros. Existe la técnica de estimación fuera de línea y estimación en línea que se explicarán brevemente a continuación.

Para la primera técnica es necesario obtener todos los datos y posteriormente realizar el ajuste del modelo sobre todos los datos. Esta técnica da como resultado una buena convergencia (buena aproximación al modelo) y fiable. Sin embargo, si la dinámica del sistema cambia a lo largo de tiempo, es posible obtener resultados pobres o poco confiables. En la siguiente figura (2.9) se muestra un esquema de esta técnica, donde las letras A y B, representan los parámetros estimados.

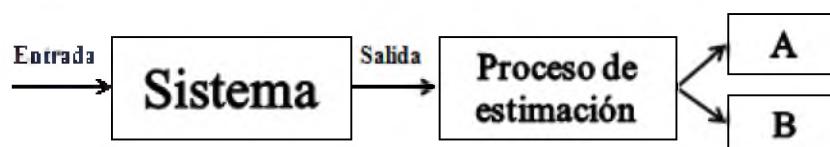


Figura 2.9: Técnica fuera de línea.

En la segunda técnica, la estimación del modelo se realiza en tiempo real, es decir conforme se van adquiriendo los datos se va construyendo el modelo. Por su parte ésta es más complicada de realizar y existe la necesidad de realizar una supervisión. A diferencia de la primera técnica, ésta si es apropiada si la dinámica del proceso cambia con el tiempo y son esenciales en sistemas que rediseñan el controlador periódicamente. En la siguiente figura (2.10) se muestra un esquema de esta técnica.

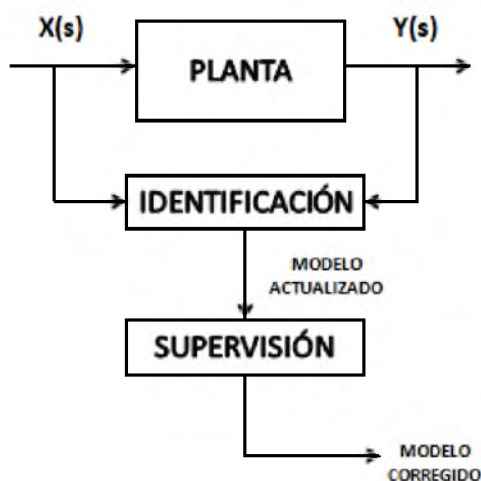


Figura 2.10: Técnica en línea.

En la siguiente sección se muestran algunos de los trabajos e investigaciones más relevantes en los últimos años basados en la identificación de sistemas y estimación de parámetros.

## 2.7. Estado del arte.

La estimación de parámetros se ha desarrollado debido a la complejidad de algunos sistemas. Para algunos de ellos no es posible obtener un modelo matemático por lo que es necesario aproximarlos. Para esto, se implementan métodos que permiten hacer este trabajo de manera más práctica. Es por ello que los algoritmos de estimación de parámetros se vuelve una herramienta importante para el modelado de sistemas.

Algunos trabajos e investigaciones se muestran a continuación.

Angel R, [9] utilizó un método en particular que consiste en obtener la respuesta del sistema de segundo orden y utilizar los sobre picos que éste presente, con el objetivo de encontrar valores aproximados para  $\zeta$  y  $\omega_n$  que representen de la mejor forma posible a los parámetros fundamentales del sistema con la restricción del valor de  $\zeta \leq 0,5$ . Debido a que no siempre las respuestas presentan estos sobre picos, (figura 2.11), en la práctica, es fácil distinguir los sobrepicos primero ( $Y_1$ ) y segundo ( $Y_2$ ) cuando el valor de  $\zeta \leq 0,5$ . Cuando  $\zeta > 0,5$ , pero  $< 1$ , si bien matemáticamente es posible determinar la oscilación de la respuesta, a veces los valores de los sobrepicos  $Y_1$  e  $Y_2$  no resultan lo suficientemente notorios en los métodos de medición, por lo que una estimación de los parámetros utilizando estos valores pueden llevar a errores poco aceptables.

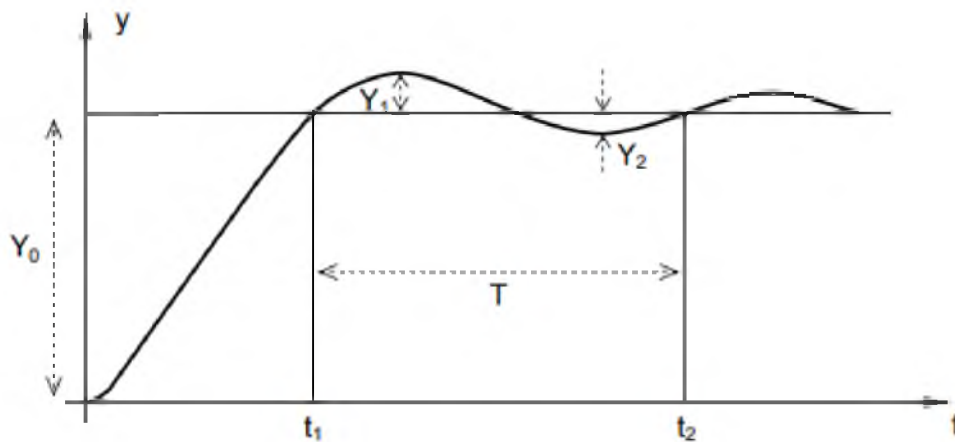


Figura 2.11: Respuesta oscilante del sistema de segundo orden a la excitación de una entrada escalón.

Para ello, se utilizan los valores de  $Y_0$ ,  $Y_1$  y  $Y_2$  (que son las amplitudes del salto escalón de entrada, del primer sobrepico y segundo sobrepico de la respuesta en el tiempo respectivamente) y de  $T$  (que es el período de una oscilación de la respuesta en el tiempo), tal como se observa en la figura (2.11).

Por su parte, Nielmann y Miklos [10] presentan su investigación para obtener los parámetros en sistemas estables de primer orden basados en respuestas ante escalón unitario. Ellos evaluaron la solución en el tiempo y su derivada en  $t = 0$  para calcular el valor en estado estable del sistema  $t_s$ , y el tiempo de levantamiento  $t_r$ . También determinaron la constante de tiempo (2.4) definida como el tiempo que le toma a la respuesta a escalón alcanzar el 63 % de su valor final y tiempo de retardo. Dichos tiempos se muestran en la figura (2.12).

$$\tau = \frac{1}{a} \quad (2.4)$$

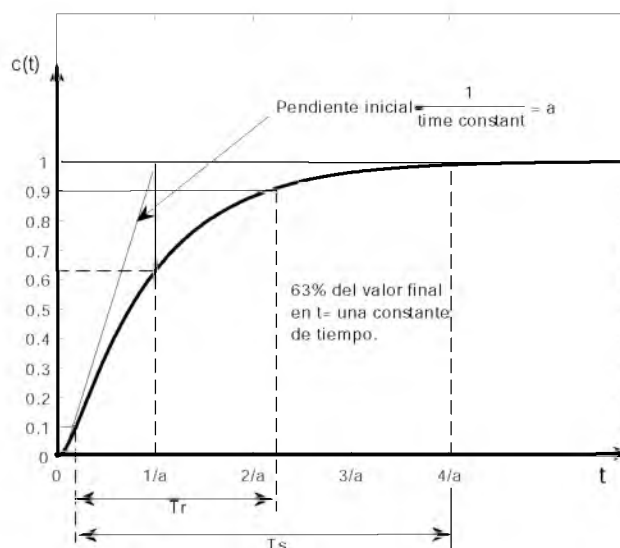


Figura 2.12: Parámetros principales en sistemas de primer orden.

En el “Centro Nacional De Investigación Científica”, en el año 2002, Landau I [11], presentó un método basado en la identificación de polos en lazo cerrado para validar el modelo del sistema, sintonizar y aplicar esquemas de control. El método emplea el modelo en variables de estado para construir el estimador. La salida del estimador se compara con la respuesta del sistema real y se retroalimenta mediante un algoritmo de adaptación de parámetros. Éste reajusta el modelo hasta lograr aproximarlo al sistema real.

En 2006, Rios y Toro [12] realizaron la estimación de parámetros en modelos ARMA (Modelo autoregresivo de media móvil). Éstos consisten en expresar la salida actual  $y(t)$  en función de las salidas pasadas  $y(t - j)$  y entradas pasadas  $u(t - j - d)$ , utilizando un retardo  $d$ . Para ello emplean ecuaciones en diferencias de orden  $k$ . Un ejemplo de ellas es la siguiente.

$$y(n) + a_1 y_{n-1} + \dots + a_k y_{n-k} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_k u_{n-k}$$

Donde las entradas  $u_i$  y  $y_i$  son conocidas. Por lo tanto es posible obtener un conjunto de ecuaciones lineales que se resuelven mediante el método de mínimos cuadrados, teniendo como resultado una función de transferencia en tiempo discreto.

En el 2009, Lara [13] hace uso de la identificación paramétrica al obtener una ecuación matemática para estimar la amplitud de una señal para un Detector RF-RMS a partir de retardos homogéneos. En esta investigación se presentó una propuesta para realizar el detector. Ésta consiste en generar retardos homogéneos a la señal estímulo presente a la entrada del sistema  $y(t)$ .

Tomando la siguiente señal estímulo

$$y(t) = A \sin \omega t$$

Se deriva para poder obtener una expresión matemática con la cual se modelará el estimador RMS. Al obtener las dos primeras derivadas de la señal de entrada y dividiendo ambos resultados, se logra tener una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{\ddot{y}(t)}{y(t)} = \frac{-A\omega^2 \sin \omega t}{A \sin \omega t} = -\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\ddot{y}}{y}}$$

Expresando la ecuación resultante y sustituyendo  $\ddot{y}(t)$  e  $y(t)$  en términos de las derivadas y retardos homogéneos, se obtiene la siguiente ecuación.

$$A = \sqrt{f^2(x) - \frac{f(x)[f(x-h_0) - f(x-2h_0)]^2}{[f(x) - 2f(x-h_0) + f(x-2h_0)]}}. \quad (2.5)$$

En la ecuación (2.5), el termino a despejar es la variable  $A$ , que representa a la amplitud de la señal Senoidal. En la figura (2.13) se representa gráficamente el método utilizado en el cálculo de los retardos homogéneos para lograr la estimación del parámetro deseado.

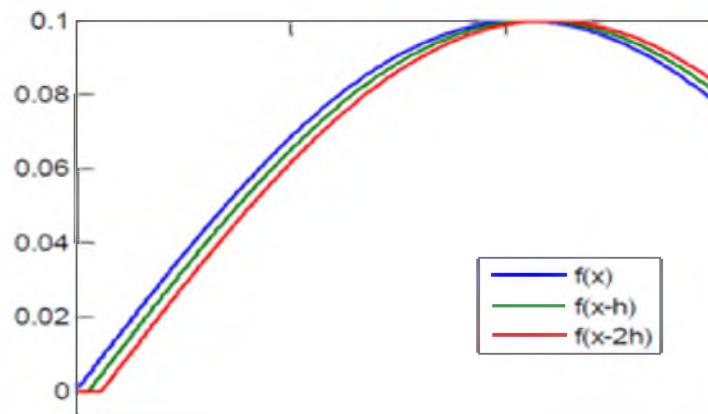


Figura 2.13: Señal con retardos homogéneos

Otra metodología importante es la propuesta por Castillo, London y Bretas [14] en 2011. Ellos implementaron un método de estimación que emplea una matriz de ganancias aumentada  $G_{aum}$  y un vector de estados aumentado  $x_{aum}$  los cuales se relacionan en una ecuación no lineal con un vector de datos aumentado  $Z_{aum}$  y un vector de ruido en las medidas  $w_{aum}$ ,

$$Z_{aum} = h_{aum}(x_{aum}) + w_{aum}$$

donde  $h_{aum}$  es un conjunto de ecuaciones no lineales que relacionan las medidas con las variables de estado. A través de la teoría de Mínimos Cuadrados Ponderados, el vector de estados aumentado es estimado a partir de la solución iterativa del siguiente sistema de ecuaciones:

$$G_{aum} \cdot \Delta x_{aum} = H_{aum}^t \cdot W_{aum} [z_{aum} - h(x_{aum})]$$

En el 2016 Granja [15], estudió el método de Identificación paramétrica aplicada a transformadores monofásicos. Estos transformadores son sometidos a dos pruebas que deben cumplir para su puesta en funcionamiento. La primera se conoce como prueba de corto circuito y la segunda prueba de circuito abierto. El uso de nuevos tipos de iluminación y equipos electrónicos hace que introduzcan armónicos en la red que afectan a los transformadores. Esta investigación tuvo por objetivo estimar los parámetros de resistencia e inductancia con el propósito de obtener un modelo matemático, lo suficientemente aproximado al modelo real, para realizar pruebas de manera sencilla. El método que se utilizó para poder llevar a cabo la estimación de los parámetros mencionados es el de un algoritmo recursivo de Mínimos Cuadrados (RLS). También se emplearon las medidas necesarias del sistema para identificar un modelo matemático que describa el comportamiento de éste ante condiciones de carga y perturbaciones (armónicos).

En 2017 Valencia, [16], realizó la estimación de parámetros de un generador industrial. En este trabajo se utilizó el modelo dinámico del sistema mecánico y el modelo del sistema eléctrico por separado haciendo uso del paquete de *system identification toolbox* de la plataforma Matlab, para posteriormente aplicar esquemas de control para regular la pérdida de carga en el generador.

Estos trabajos e investigaciones son algunos de los nuevos métodos que pueden ser usados para la estimación de parámetros. Existe variedad tanto en libros, publicaciones como de algoritmos numéricos que permiten obtener información necesaria para realizar una estimación paramétrica, dependiendo en particular del sistema de estudio. Esta tesis se mostrará el desarrollo de un método en particular, para estimar los parámetros de un sistema de segundo orden empleando derivadas numéricas y retardos homogéneos al sistema ante una entrada escalón unitario. Con ésto se pretende construir una metodología a fin de obtener el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema.

# Capítulo 3

## Diseño de estimadores.

En este capítulo se presenta el desarrollo de una metodología para la obtención de los estimadores de parámetros de sistemas de segundo orden sub-amortiguados. Partiendo desde la función de transferencia, se obtienen las derivadas de la misma para así poder despejar las ecuaciones correspondientes a los estimadores. Este capítulo concluye con pruebas de simulación numérica, empleando retardos homogéneos, para obtener la información necesaria para construir en los siguientes capítulos los estimadores. Se hace uso de funciones de transferencia con valores preestablecidos con el objetivo de validar la metodología propuesta.

### 3.1. Metodología

Para el diseño de los estimadores se requiere una serie de etapas previas. Algunas de ellas son la obtención de la ecuación de la respuesta en el tiempo a una entrada escalón, el cálculo analítico de las derivadas, corroboración de las derivadas mediante derivación numérica, resolver para  $\zeta$  y  $\omega_n$  a partir de las derivadas y la validación de los estimadores por medio de simulación, entre otras. En cada una de estas etapas se hace un estudio por separado.

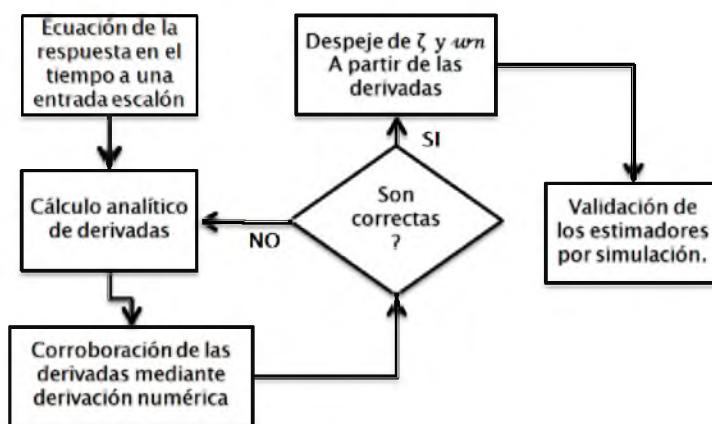


Figura 3.1: Diagrama de flujo para la obtención de los estimadores.

La relación que guarda cada una de estas etapas se muestran en el diagrama (3.1) Para hacer el cálculo de los estimadores se debe contar con la **ecuación en el tiempo** de la respuesta del sistema. Ésta se obtiene aplicando la transformada inversa de Laplace sobre la función de transferencia, bajo la suposición de que el tipo de sistema en cuestión posee polos conjugados complejos. Posteriormente se realiza el **cálculo analítico de derivadas**. Partiendo de la ecuación en el tiempo, se obtienen las derivadas necesarias para poder despejar los parámetros de las ecuaciones. Por otra parte se **corroboran las derivadas** empleando bloques de simulink y las derivadas analíticas programadas en el entorno Matlab. Corroboradas las derivadas, se realizan una serie de sustituciones que permiten resolver  $\zeta$  y  $\omega_n$ . La **validación de los estimadores** obtenidos se realiza mediante pruebas en simulaciones en el entorno Matlab Simulink, se toma una función de transferencia con parámetros conocidos buscando verificar, que las ecuaciones, generadas a partir de este método, entreguen valores aproximados reales.

A continuación se presenta el método de estimación empleado. Este método permitirá la estimación del factor de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada del sistema, utilizando únicamente la salida del sistema. Éste empleará tanto retardos homogéneos como derivadas numéricas.

### 3.1.1. Implementación de los estimadores.

El método de estimación mostrado en el diagrama (3.2), es un caso que se puede emplear en estimadores fuera de línea (como una de las técnicas mencionadas en la sección 2.6.1) y obtener los parámetros del sistema en mili segundos. Este método es ideal para obtener una señal de salida estimada, que permita generar estrategias de control, para contrarrestar los sobre impulsos característicos de este tipo de sistemas.

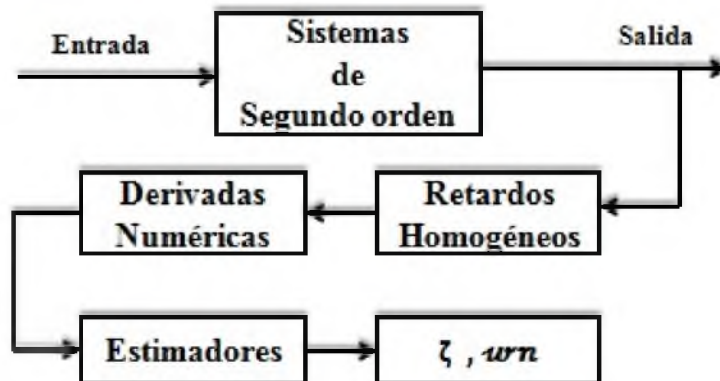


Figura 3.2: Diagrama del funcionamiento de los estimadores.

Al sistema se le aplica una entrada escalón unitario. A partir de la señal de salida, se utiliza el método de **retardos homogéneos**. Este consiste en desfasar la señal en un periodo de tiempo  $h$ , la cantidad de veces que sea necesario (vease figura 3.3). De este desfaseamiento se obtienen los datos suficientes para calcular las derivadas numéricas correspondientes.

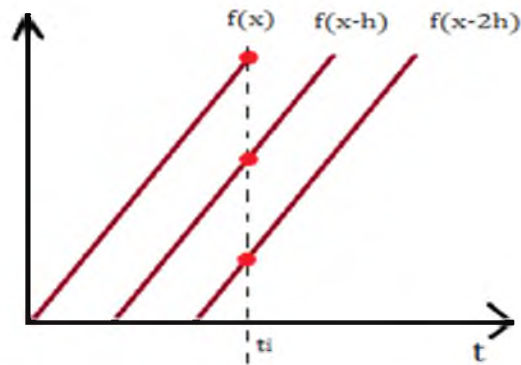


Figura 3.3: Retardos homogéneos.

Las derivadas numéricas obtenidas se emplean en los estimadores para hacer el cálculo de los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$ . De esta manera se puede obtener la señal estimada casi de forma instantánea.

## 3.2. Ecuación en el tiempo de sistemas subamortiguados.

La función de transferencia para los sistemas de segundo orden es la siguiente:

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.1)$$

Para el caso de los sistemas subamortiguados ( $0 < \zeta < 1$ ) la función de transferencia tiene polos complejos, por lo tanto se puede reescribir como:

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

en donde  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . El parámetro  $\omega_d$  se denomina frecuencia natural amortiguada.

La respuesta  $C(s)$  a un escalón unitario de este tipo de sistemas se escribe de la siguiente forma:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s}. \quad (3.2)$$

Para encontrar la respuesta en el tiempo, se aplica la transformada inversa de Laplace. Para ésto es necesario expandir la función (3.2) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}. \end{aligned}$$

La transformada inversa de los factores correspondiente al sistema de segundo orden puede ser encontrado directamente en algunas referencias como sigue.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] &= e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] &= e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t. \end{aligned}$$

Por tanto, la transformada inversa de Laplace de la salida  $C(s)$  se obtiene como:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1} [C(s)] = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad (3.3)$$

A partir de la ecuación (3.3) se observa que la frecuencia de oscilación en la respuesta transitoria es  $\omega_d$  (la frecuencia natural amortiguada) y, por tanto, varía con el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$ . Cuando  $\zeta = 0$  el sistema oscilará a la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ . Si el sistema lineal tiene un amortiguamiento mayor que cero, no se puede observar la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ . La frecuencia que se observa es la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ . Esta frecuencia siempre es menor que la frecuencia natural no amortiguada. Un aumento en  $\zeta$  reduciría la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ . Si  $\zeta$  aumenta más allá de la unidad, la respuesta se vuelve sobreamortiguada y no oscilará. (Ogata K, [5]).

Para fines del desarrollo posterior, renombramos la salida  $c(t)$  (ecuación 3.3), por  $f(t)$ , de la siguiente forma:

$$f(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_n \beta t + \frac{\zeta}{\beta} \sin \omega_n \beta t \right). \quad (3.4)$$

donde  $\beta$  está descrita por:

$$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

esta ecuación se empleará para desarrollar el método de obtención de los estimadores.

La sección a continuación presenta el desarrollo de cada una de las derivadas analíticas de la respuesta en el tiempo. Estas derivadas permitirán escribir las ecuaciones correspondientes a los estimadores de  $\zeta$  y  $\omega_n$ .

### 3.2.1. Cálculo de las derivadas analíticas

Considere la ecuación (3.4). Al derivar con respecto de  $t$ ,  $f(t)$  obtiene:

$$\dot{f}(t) = \frac{\omega_n}{\beta} [e^{-\zeta\omega_n t} \sin \beta\omega_n t]. \quad (3.5)$$

Como se puede observar en (3.5), solo contiene un término trigonométrico.

La variable  $\beta$  también juega un papel importante en esta ecuación debido a que es una variable en función de  $\zeta$ . En este momento no es conveniente sustituir la equivalencia de  $\beta$  puesto que la ecuación resultante sería más compleja, elevando el grado de dificultad en el desarrollo de las derivadas.

Considérese (3.6)

$$f''(t) = \frac{\omega_n}{\beta} [-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \sin \beta\omega_n t + \beta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \cos \beta\omega_n t] \quad (3.6)$$

y desarrollemos el término entre corchetes

$$f''(t) = \frac{-\zeta\omega_n^2}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \beta\omega_n t + \omega_n^2 e^{-\zeta\omega_n t} \cos \beta\omega_n t$$

Como se puede observar, el primer término del lado derecho de la igualdad es similar al de la primera derivada (3.5), por lo tanto se puede sustituir obteniendo así la ecuación:

$$\dot{f}'(t) = -\zeta\omega_n \dot{f}(t) + \omega_n^2 e^{-\zeta\omega_n t} \cos \beta\omega_n t. \quad (3.7)$$

Ahora, sigamos el mismo proceso para la ecuación (3.7), derivando con respecto de  $t$

$$f''(t) = -\zeta\omega_n f''(t) + \omega_n^2 [-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \cos \beta\omega_n t - \beta\omega_n \sin \beta\omega_n t e^{-\zeta\omega_n t}],$$

factorizando los términos  $\beta^2\omega_n^2$  se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} f''(t) &= -\zeta\omega_n f''(t) - \beta^2\omega_n^2 \left( \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \beta\omega_n t \right) - \dots \\ &\dots - \zeta\omega_n^3 e^{-\zeta\omega_n t} \cos \beta\omega_n t, \end{aligned} \quad (3.8)$$

el término entre paréntesis es exactamente la primera derivada (3.5), sustituyendo obtenemos así

$$f''(t) = -\zeta\omega_n f''(t) - \beta^2\omega_n^2 \dot{f}(t) - \zeta\omega_n^3 e^{-\zeta\omega_n t} \cos \beta\omega_n t. \quad (3.9)$$

La ecuación (3.10) muestra la cuarta derivada de la función  $f(t)$

$$\begin{aligned} f''''(t) &= -\zeta\omega_n f''''(t) - \beta^2\omega_n^2 f''(t) - \dots \\ &\dots - \zeta\omega_n^3 (-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \cos \beta\omega_n t - \beta\omega_n \sin \beta\omega_n t e^{-\zeta\omega_n t}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se repite el proceso de simplificar y sustituir el término de  $\dot{f}(t)$  en la (3.10), se obtiene la ecuación

$$\ddot{f}(t) = -\zeta\omega_n\dot{f}(t) - \beta^2\omega_n^2f(t) + \zeta\beta^2\omega_n^3\dot{f}(t) + \zeta^2\omega_n^4e^{-\zeta\omega_nt}\cos\beta\omega_nt \quad (3.11)$$

Con la ecuación (3.11) ya es posible despejar los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$ . Ahora es necesario plantear un método para validar las derivadas. Para tal efecto se programaron las derivadas analíticas en un script de Matlab y la función de transferencia en simulink a fin de verificar si existe algún error que afectaría al cálculo de los estimadores.

### 3.2.2. Validación de las derivadas

La evaluación de una entrada escalón en cada una de las derivadas calculadas, debe ser idénticamente la respuesta de un sistema de segundo orden derivado. Para comparar estos resultados se hace uso de la plataforma Matlab Simulink. Se programan las derivadas algebraicas en un script de Matlab (ver apéndice, A.1 y A.2), y se evalúan en un rango de tiempo de 0 a 4 segundos usando un  $\zeta = 0,3$  y  $\omega_n = 5$ . La siguiente figura muestra la programación.

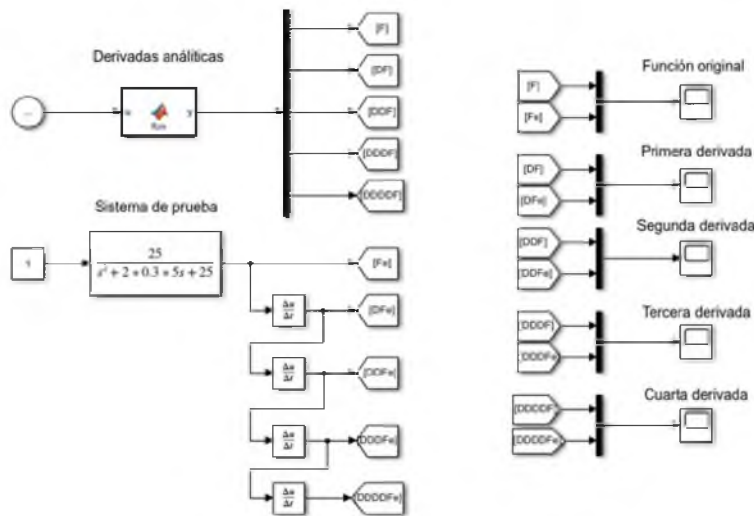


Figura 3.4: Programación correspondiente a la validación de las derivadas.

Posteriormente se compara directamente con las señales obtenidas de la programación en bloques de simulink (ver apéndice A.1) de una función de transferencia empleando los mismos parámetros usando derivadores.

Las gráficas de la figura (3.5) muestran los resultados obtenidos. Como las derivadas algebraicas son construidas a partir de la respuesta analítica en el tiempo, estas señales son las mismas, lo cual garantiza que las derivadas algebraicas obtenidas son correctas. Por lo tanto pueden ser utilizadas para obtener los estimadores. Este desarrollo se muestra en la siguiente sección.

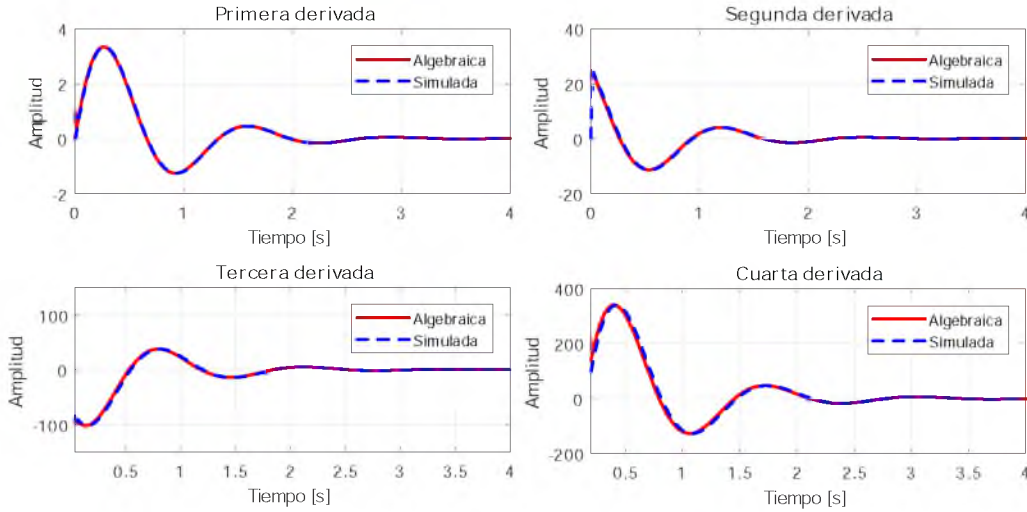


Figura 3.5: Derivadas algebraicas vs derivadas de simulación.

### 3.3. Obtención de los estimadores

Una vez validadas las derivadas se procede a obtener los estimadores. Tanto la ecuación  $f(t)$  como sus derivadas contienen las funciones seno y coseno. Es necesario eliminar estas funciones para simplificar las expresiones y obtener nuevas ecuaciones en función de  $f(t)$ ,  $f''(t)$ ,  $f'''(t)$ .

El método a seguir será despejar los parámetros  $\zeta$ ,  $\omega_n$  de una derivada en particular, con el fin de sustituirlos en las otras derivadas buscando cancelar las funciones trigonométricas.

Despejando  $\omega_n^2$  de la ecuación (3.7) se obtiene

$$\omega_n^2 = \frac{f''(t) + \zeta\omega_n f'(t)}{e^{-\zeta\omega_n t} \cos \beta\omega_n t}. \quad (3.12)$$

El término resultante se sustituye en la tercera derivada de  $f(t)$ , ecuación (3.9),

$$f'''(t) = -\zeta\omega_n f''(t) - \beta^2\omega_n^2 f'(t) - \zeta\omega_n \left( \frac{f''(t) + \zeta\omega_n f'(t)}{e^{-\zeta\omega_n t} \cos \beta\omega_n t} \right) e^{-\zeta\omega_n t} \cos \beta\omega_n t.$$

Cancelando el coseno que multiplica y divide se obtiene la siguiente expresión que no contiene funciones trigonométricas.

$$f'''(t) = -\zeta\omega_n f''(t) - \beta^2\omega_n^2 f'(t) - \zeta\omega_n [f''(t) + \zeta\omega_n f'(t)] \quad (3.13)$$

Empleando la cuarta derivada (3.11), se repite el proceso de sustituir el término de  $\omega_n^2$  (3.12), para eliminar la función trigonométrica. De esta manera se obtiene la siguiente ecuación

$$f^{(4)}(t) = -\zeta\omega_n f^{(3)}(t) - \beta^2\omega_n^2 f^{(2)}(t) + \zeta\beta^2\omega_n^3 f'(t) + \zeta^2\omega_n^2 f^{(2)}(t) + \zeta^3\omega_n^3 f'(t). \quad (3.14)$$

Es conveniente sustituir el valor  $\beta$  en (3.13) y (3.14) para simplificar un poco más ambas ecuaciones. Las ecuaciones siguientes corresponden a la segunda y tercera derivada ya simplificadas.

$$f^{(3)}(t) = -2\zeta\omega_n f^{(2)}(t) - \omega_n^2 f^{(2)}(t) \quad (3.15)$$

$$f^{(4)}(t) = -\zeta\omega_n f^{(3)}(t) + (2\zeta^2 - 1)\omega_n^2 f^{(2)}(t) + \zeta\omega_n^3 f'(t) \quad (3.16)$$

Las ecuaciones (3.15) y (3.16), resultantes del proceso de simplificación serán empleadas para encontrar una solución para los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$ .

De la ecuación simplificada (3.15) es posible despejar  $\zeta$  en términos de  $\omega_n$  y de las derivadas de  $f(t)$ ,

$$\zeta = \frac{-f^{(3)}(t) - \omega_n^2 f^{(2)}(t)}{2\omega_n f^{(2)}(t)}. \quad (3.17)$$

A continuación se sustituye  $\zeta$  en la cuarta derivada de  $f(t)$ . El resultado es una ecuación en términos de únicamente  $\omega_n$ .

$$f^{(4)}(t) = -\left(\frac{-f^{(3)}(t) - \omega_n^2 f^{(2)}(t)}{2\omega_n f^{(2)}(t)}\right)\omega_n f^{(3)}(t) + [2\left(\frac{-f^{(3)}(t) - \omega_n^2 f^{(2)}(t)}{2\omega_n f^{(2)}(t)}\right)^2 - 1]\omega_n^2 f^{(2)}(t) + \left(\frac{-f^{(3)}(t) - \omega_n^2 f^{(2)}(t)}{2\omega_n f^{(2)}(t)}\right)\omega_n^3 f'(t)$$

Desde esta manera ya es posible despejar  $\omega_n$ , obteniendo así el segundo parámetro en términos de las derivadas. La relación de  $\omega_n$  se muestra en la ecuación.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{f^{(4)}(t)f^{(2)}(t) - f^{(3)}(t)^2}{f^{(3)}(t)f'(t) - f^{(2)}(t)^2}} \quad (3.18)$$

Ambos parámetros obtenidos serán programados con el fin de obtener resultados en tiempo real que permitan verificar la eficiencia de los estimadores calculados por este método.

A continuación se presenta teoría acerca de la diferenciación numérica (derivación numérica) y el método que se utilizó en este trabajo.

### 3.4. Derivación numérica.

La metodología planteada requiere la programación, en tiempo real de los estimadores, para realizar pruebas en simulaciones numéricas y posteriormente poder ocuparlos en línea en sistemas de control. Los estimadores calculados requieren datos que corresponden a las derivadas de la respuesta del sistema ante un escalón unitario. Por tal motivo, en esta sección se presenta el concepto de derivación numérica y los diferentes casos que se pueden aplicar (Chapra, S [17])

### 3.4.1. Método de derivación empleando dos puntos.

La siguiente ecuación se le conoce como diferencia finita dividida,

$$f'(x_i) = \frac{f'(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i) \quad (3.19)$$

y puede ser representada por

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h)$$

donde  $O(h)$  es el error de truncamiento,  $\Delta f_i$  se le conoce como la primera diferencia hacia adelante y a  $h$  se le llama el tamaño del paso o incremento; ésto es, la longitud del intervalo sobre el cual se realiza la aproximación. Se le llama diferencia “hacia adelante”, porque usa los datos en  $i$  e  $i + 1$  para estimar la derivada figura (3.6 a).

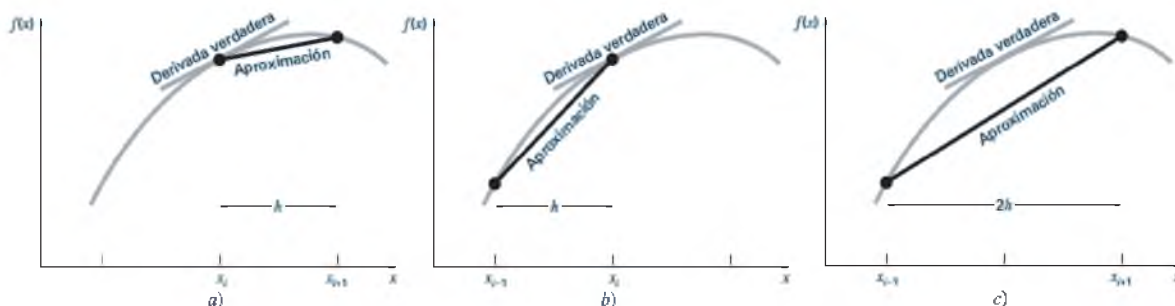


Figura 3.6: Casos para la aproximación de la derivada.

La diferencia dividida hacia adelante es uno de varios métodos que pueden desarrollarse, a partir de la serie de Taylor, para la aproximación de derivadas numéricas. Por ejemplo las aproximaciones de la primera derivada utilizando *diferencias hacia atrás* o *diferencias centradas*. Las primeras usan valores en  $x_{i-1}$  y  $x_i$  (ver 3.6 b); mientras que las segundas utilizan valores igualmente espaciados alrededor del punto donde la derivada está estimada (ver la figura 3.6 c).

**Aproximación a la primera derivada con diferencia hacia atrás.** Ésta calcula un valor anterior sobre la base de valor actual, entonces la ecuación es:

$$f'(x_i) = \frac{f'(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{\Delta f_i}{h}. \quad (3.20)$$

A  $\Delta f_i$  se le conoce como primera diferencia dividida hacia atrás.

**Aproximación a la primera derivada con diferencias centradas.** La ecuación siguiente es una representación de las diferencias centradas de la primera derivada.

$$f'(x_i) = \frac{f'(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2) \quad (3.21)$$

En esta aproximación el error de truncamiento es de orden  $h^2$  lo que hace más precisa la derivación (ver figura 3.6).

Para el cálculo de los estimadores, se emplea la aproximación de dos puntos con diferencia hacia atrás. Cabe mencionar que entre más pequeño sea el paso  $h$ , más eficiente es el cálculo de las derivadas. Para observar la aproximación se toma la ecuación de la respuesta en el tiempo ante una entrada escalón y un paso  $h = 0,01\text{seg}$ . Se calcula la primera derivada numérica y algebraica, con la finalidad de hacer una comparación (ver la figura 3.7). La programación correspondiente a las derivadas numéricas se muestra en el apéndice A.5

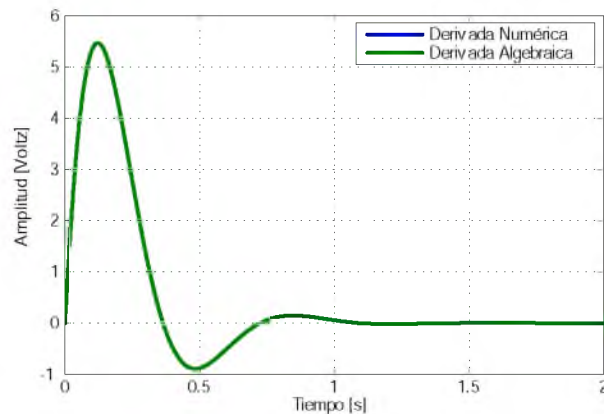


Figura 3.7: Derivada numérica vs Derivada algebraica

A pesar de que las respuesta parecen similares, son distintas. La derivada algebraica es una función continua en el tiempo y por su parte la derivada numérica, al ser construida por partes a partir de pendientes, es continua a pedazos, por lo que existe una diferencia entre ambas. Esta comparación se puede observar si hace una ampliación de la gráfica, ver (3.8).

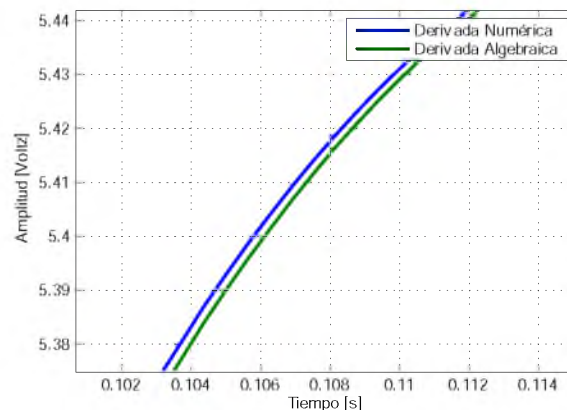


Figura 3.8: Diferencia mínima entre ambas derivadas

Esta diferencia no resulta ser significativa por lo que se considera conveniente emplear este método de cálculo de la derivada y existe únicamente al principio de la señal. En la siguiente gráfica, se muestra el error (derivada algebraica menos derivada numérica) que existe entre ambas.

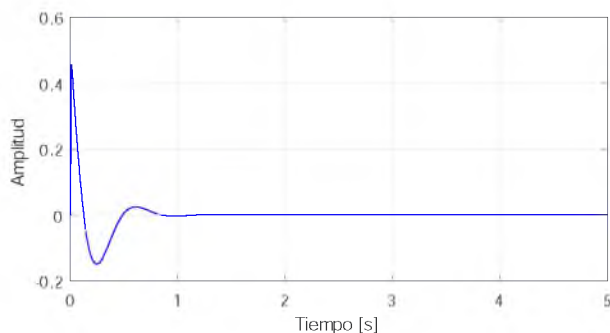


Figura 3.9: Diferencia que existe entre ambas señales.

Como se puede observar, en la gráfica (3.9) esta diferencia solo se presenta en los primeros pasos del cálculo de la derivada numérica, conforme el tiempo crece, este error se reduce.

Se debe considerar también que las ecuaciones de los estimadores requieren hasta una cuarta derivada, por lo tanto es necesario contar con cuatro datos de la señal de salida del sistema, como mínimo para poder realizar el cálculo de todas las derivadas.

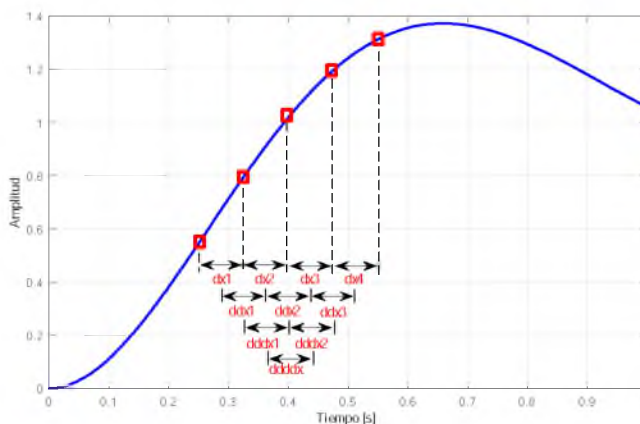


Figura 3.10: Gráfica para la obtención de derivadas.

En la figura (3.10), se muestra de manera gráfica el uso de los datos para la obtención de las derivadas.



# Capítulo 4

## Resultados.

En este capítulo se presenta la implementación de los estimadores. Primeramente haciendo uso de la plataforma Matlab Simulink, se realizan simulaciones bajo condiciones ideales, empleando funciones de transferencia con parámetros conocidos con el propósito de validar los estimadores. Posteriormente se verifican los resultados en forma experimental, implementando de los estimadores sobre una planta analógica, usando la tarjeta de adquisición de datos Arduino Mega.

### 4.1. Resultados de simulación numérica.

Las ecuaciones obtenidas, para la estimación de los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$ , son válidas en cualquier punto de la respuesta transitoria del sistema. Para demostrarlo se utiliza una función de transferencia (3.1) con valores conocidos de  $\zeta$  y  $\omega_n$ . En la figura (4.1) se muestra la programación de una función de transferencia y los bloques de simulink para la estimación de los parámetros. La programación de los bloques de funciones en Matlab se muestra en el apéndice A.4.

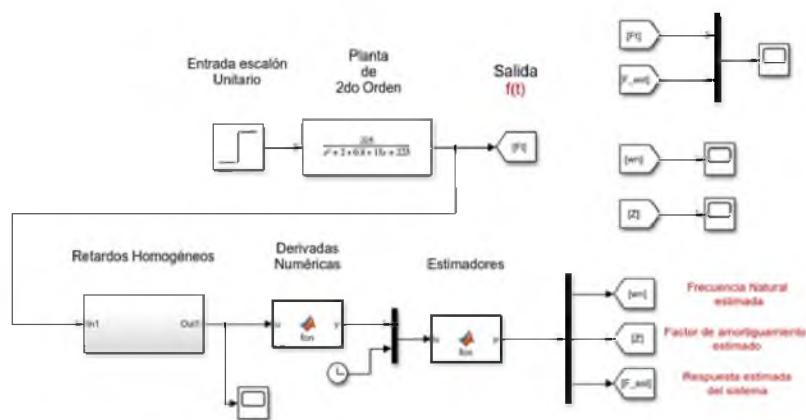


Figura 4.1: Programación en simulink para corroborar las derivadas.

Empleando valores de  $\zeta = 0,3$  y  $\omega_n = 5$ , se obtiene la respuesta estimada y se compara con la respuesta del sistema simulado (ver figura 4.2 a).

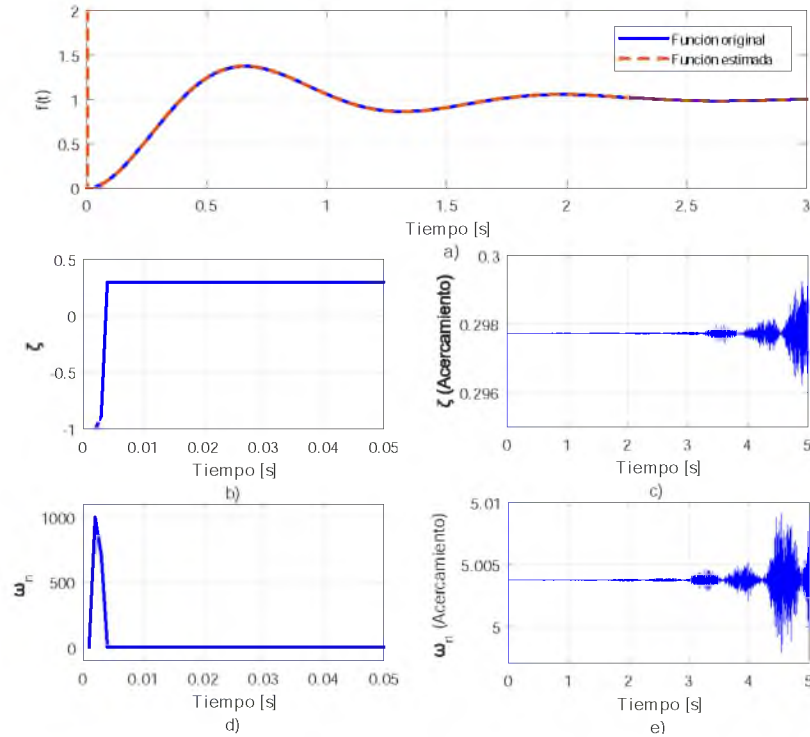


Figura 4.2: Resultados empleando los estimadores desde  $t = 0$

En esta prueba los estimadores se aplican desde un tiempo  $t = 0$  de modo que, en un principio no existen los datos suficientes para calcular derivadas numéricas válidas. Ésto genera que al inicio de la simulación se presenten sobre impulsos positivos y posteriormente se aproximen asintóticamente al comportamiento de la función original. La figura (4.2 b) y figura (4.2 d) muestran este problema para el cálculo del valor estimado de  $\zeta$  y  $\omega_n$ .

Otro problema, resultado de esta primera simulación, es que al aproximarse a una pendiente de cero en el estado estable, la derivadas numéricas en el denominador de los coeficientes en la fórmula (3.20) hacen variar la salida de los estimadores en forma oscilatoria (ruido).

La figura (4.2 c) muestra un acercamiento de la señal. Se observa que el valor de  $\zeta$  empieza a crecer conforme pasa el tiempo. Sin embargo, cabe resaltar que ésto ocurre después de la etapa transitoria, es decir, en estado estable, por lo tanto no afecta el cálculo de los estimadores. Del mismo modo la figura (4.2 e) muestra un acercamiento a la señal de  $\omega_n$  y como empieza a crecer cuando alcanza el estado estable.

A fin de resolver el primer problema, debido a la inexistencia de condiciones iniciales, se inicia el cálculo de los estimadores un instante después de iniciada la simulación del sistema. En una segunda prueba, empleando los mismos valores de  $\zeta$  y  $\omega_n$ , pero aplicando los estimadores a partir de  $t = 0,004$ , se obtiene la respuesta del sistema ilustrado en la figura (4.3 a). Se puede observar que ambas funciones (original y estimada) presentan el mismo sobre impulso y misma etapa transitoria. Ésto muestra que en simulación los estimadores funcionan correctamente.

Entre ambas señales existe un desfaseamiento pequeño como se puede mostrar en la figura (4.3 b). Ésto se debe a que las derivadas no son exactas debido a que se emplea diferenciación numérica para obtener una aproximación de éstas.

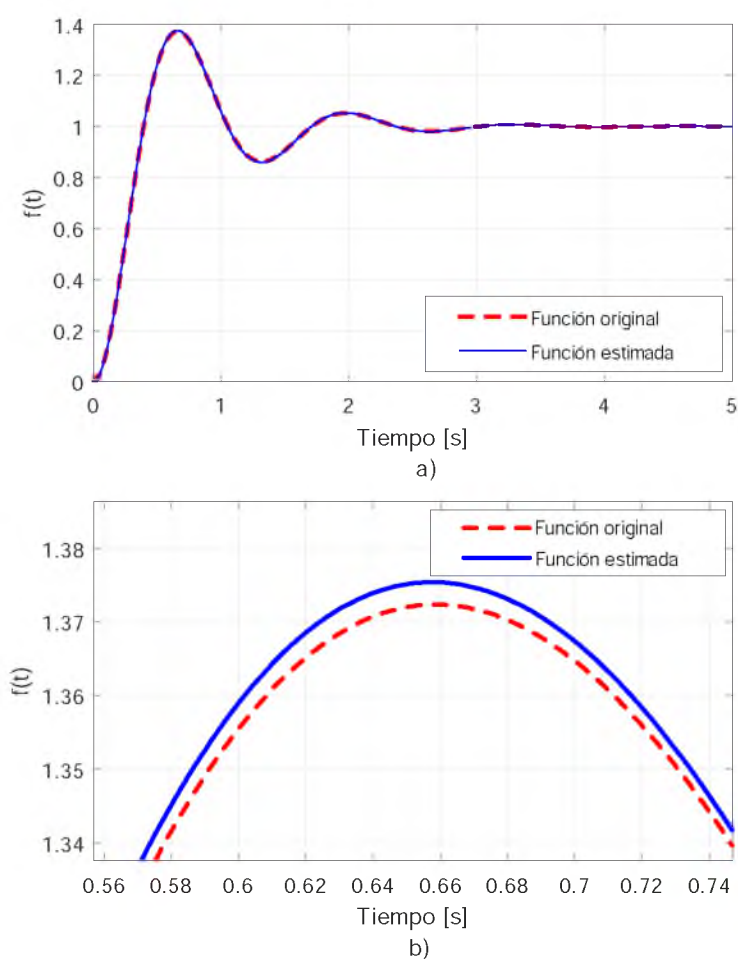


Figura 4.3: a) Función original vs. Estimada. b) Acercamiento de ambas señales.

La figura (4.4 a) muestra los resultados del factor de amortiguamiento y frecuencia natural no amortiguada. Se observa que ésta no presenta sobre impulsos como los mostrados en las gráficas anteriores. Sucede de la misma forma con  $\omega_n$  (figura 4.4 b).

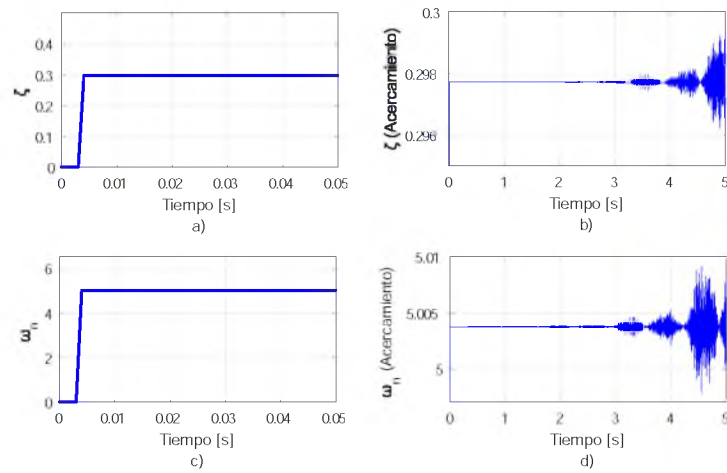


Figura 4.4: Resultados empleando los estimadores desde  $t=0.04$

Empleando valores de  $\zeta = 0,5$ ,  $\omega_n = 12$  y  $\zeta = 0,8$ ,  $\omega_n = 15$  se obtienen los resultados de la figura (4.5) y la figura (4.6) respectivamente. Al igual que en la primera prueba de simulación, se observa que al alcanzar el estado estable, los estimadores dejan de funcionar arrojando valores erróneos. El objetivo de la estimación propuesta es generar una señal estimada empleando una mínima parte de la respuesta transitoria. Por tanto, los valores arrojados por los estimadores en estado estable no son de importancia.

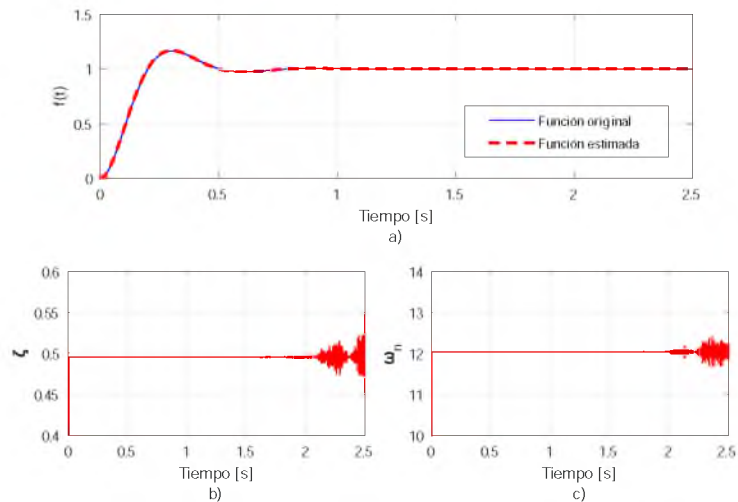


Figura 4.5: Resultados de simulación con  $\zeta = 0,5$  y  $\omega_n = 12$

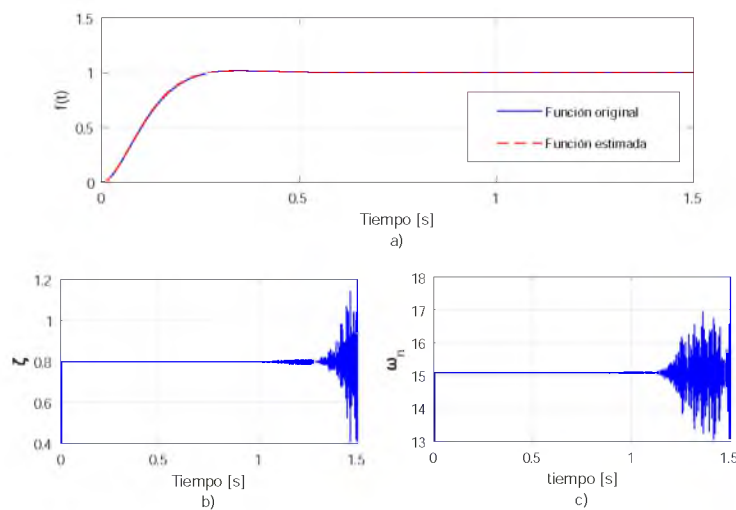


Figura 4.6: Resultados de simulación con  $\zeta = 0,8$  y  $\omega_n = 15$

Con el conjunto de parámetros estimados es posible calcular el porcentaje de error en cada estimación.

La tabla (4.1) muestra los valores estimados y el cálculo del error de estimación.

Cálculo del error de estimación en simulación.							
$\zeta$	$\zeta_{est}$	$\varepsilon_{\zeta}$	$ \varepsilon_{\zeta} $	$\omega_n$	$\omega_{n\_est}$	$\varepsilon_{\omega_n}$	$ \varepsilon_{\omega_n} $
0.3	0.2977	0.0023	0.76 %	5	5.0037	0.0037	0.0074 %
0.5	0.4955	0.0045	0.9 %	12	12.036	0.036	0.3 %
0.8	0.7973	0.0027	0.34 %	15	15.09	0.09	0.6 %

Tabla 4.1: Error en simulación

El error de estimación varía según el experimento. Sin embargo en cada caso el porcentaje de error es menor al 1%, por lo que se puede concluir que al menos en esta etapa de simulación, el cálculo de los estimadores es funcional. Debido a los resultados obtenidos en la tabla (4.1), se procede a construir un sistema de segundo orden físico para realizar pruebas experimentales. En la sección siguiente se muestran resultados obtenidos experimentales.

## 4.2. Resultados experimentales.

Una vez aprobado el funcionamiento de los estimadores en simulación, es necesario comprobar su funcionamiento en forma experimental. Para tal efecto se construyó una planta de segundo orden, utilizando un filtro activo pasabajas Sallen Key [18]. El diagrama de la figura (4.7), corresponde al circuito eléctrico del filtro y dependiendo del valor de los capacitores y resistencias, este puede ser un sistema de segundo orden tipo subamortiguado.

Con el propósito de corroborar el funcionamiento de los estimadores, se variarán las resistencias y capacitores de forma tal que los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$  generen distintos sistemas subamortiguados, y con ello distintas señales en las que se prueben los estimadores.

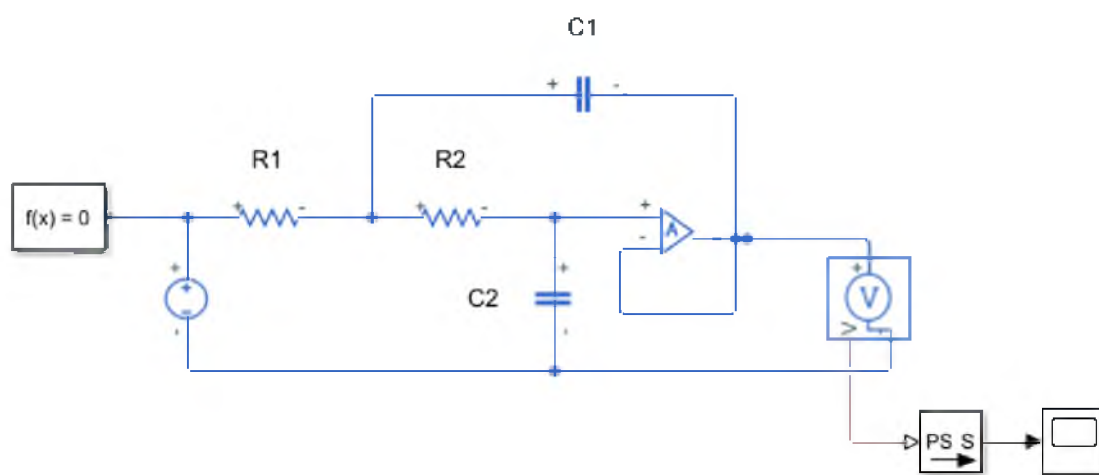


Figura 4.7: Circuito equivalente a un sistema de segundo orden

El sistema se implementó físicamente utilizando un Amplificador Operacional LM741, una tarjeta de adquisición de datos Arduino Mega 2560. En la tabla (4.2) se muestran los valores de resistencias y capacitores, así como del correspondiente parámetro obtenido. El filtro se construyó con el fin de obtener datos experimentales .

Valores de resistencias y capacitores.						
	$\zeta$	$\omega_n$	$R_1$	$R_2$	$C_1$	$C_2$
Datos de respuesta A	0,3	4,5	22k $\Omega$	4,7k $\Omega$	100 $\mu F$	4,7 $\mu F$
Datos de respuesta B	0,5	8	22k $\Omega$	3,3k $\Omega$	47 $\mu F$	4,7 $\mu F$
Datos de respuesta C	0,5	17	22k $\Omega$	4,7k $\Omega$	15 $\mu F$	2,2 $\mu F$

Tabla 4.2: Resistencias y capacitores

Es necesario obtener la función de transferencia correspondiente al circuito eléctrico de la figura (4.7) para obtener la relación directa entre los elementos que la conforman y los parámetros principales por los cuales varía su comportamiento.

La función de transferencia en términos de resistencias y capacitores es la siguiente:

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{\frac{1}{(R_1 R_2 C_1 C_2)}}{s^2 + \frac{(R_2 C_2 + R_1 C_1)}{(R_1 R_2 C_1 C_2)} s + \frac{1}{(R_1 R_2 C_1 C_2)}}. \quad (4.1)$$

Utilizando los datos de la respuesta A de la tabla (4.2) y sustituyendo en la ecuación (4.1) se obtiene la función de transferencia que se muestra a continuación

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{(4,5)^2}{s^2 + 2(0,3)(4,5)s + (4,5)^2}. \quad (4.2)$$

Con la función de transferencia (4.2) se obtuvo la respuesta en el tiempo de la figura (4.8a). Al someterla a la derivación numérica se obtienen las derivadas de las figura (4.8b, c, d y e).

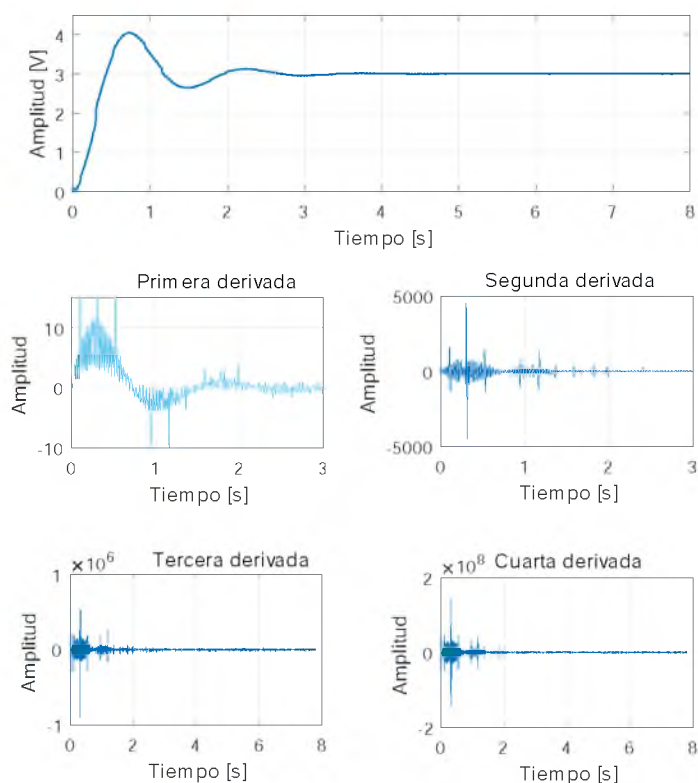


Figura 4.8: Resultados de las derivadas de la respuesta adquirida.

Se puede observar ruido en las señales, tanto en la respuesta como en las derivadas. Además este ruido se incrementa significativamente en cada derivada al punto de deformar las señales por completo. Esto provoca que la estimación arroje números complejos e incluso

se indeterminen las ecuaciones. Dicha señal no puede ser empleada en el cálculo de los estimadores. Por lo tanto es necesario buscar una metodología que reduzca el ruido de forma tal que no afecte el cálculo de las derivadas.

La primer metodología utilizada con este fin consiste en reconstruir la respuesta de la señal del sistema, aproximando un polinomio de orden  $n$ , lo que se denomina interpolación. Cabe mencionar que únicamente se aproxima la porción de subida de la respuesta.

### 4.3. Resultados con Interpolación de datos

El método propuesto para atenuar el ruido en las señales es la interpolación de datos. La interpolación polinomial de datos provee, en primera instancia una función continua  $n$  veces derivable la cual puede aproximar a la respuesta real del sistema hasta el máximo sobreimpulso. En las matemáticas el análisis numérico, se denomina interpolación a la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos. Por su parte, en ingeniería y algunas ciencias es frecuente disponer de un cierto número de datos obtenidos por muestreo o a partir de un experimento y pretender construir una función que los ajuste.

Otro problema estrechamente ligado con el de la interpolación es la aproximación de una función complicada por una más simple. Si tenemos una función cuyo cálculo resulta complicado se puede, a partir de un cierto número de sus valores, interpolar dichos datos construyendo una nueva función. Se debe tener en cuenta que no obtendremos los mismos valores evaluando la función obtenida que al evaluar la función original.

En la plataforma Matlab existen herramientas tales como `polyfit` (ajuste de una curva polinómica). Su sintaxis y sus variantes se muestra a continuación

$$\begin{aligned} p &= \text{polyfit}(x, y, n) \\ [p, S] &= \text{polyfit}(x, y, n) \\ [p, S, mu] &= \text{polyfit}(x, y, n) \end{aligned}$$

A continuación se describe cada una de las formas en las que se puede usar el comando `polyfit`.

$p = \text{polyfit}(x, y, n)$  devuelve los coeficientes para un polinomio  $p(x)$  de grado  $n$  que es la mejor solución (en el sentido de los mínimos cuadrados) para los datos de  $y$ . Los coeficientes de  $p$  están en potencias descendentes y la longitud de  $p$  es  $n+1$ .

$$p(x) = p_1x^n + p_2x^{n-1} + \dots + p_nx + p_{n+1}.$$

$[p, S] = \text{polyfit}(x, y, n)$  también devuelve una estructura  $S$  que se puede utilizar como entrada para `polyval` para obtener estimaciones de error.

$[p, S, m_u] = \text{polyfit}(x, y, n)$  adicionalmente devuelve  $m_u$ , que es un vector de dos elementos con valores de centrado y escalado.  $m_u(1)$  es media ( $\text{mean}(x)$ ) y  $m_u(2)$  es la desviación estándar ( $\text{std}(x)$ ). Utilizando estos valores, `polyfit` centra  $x$  en cero y lo escala para tener la desviación estándar de unidad

$$\hat{x} = \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$$

Esta transformación de centrado y escalado mejora las propiedades numéricas tanto del polinomio como del algoritmo de ajuste.

También existe el comando `polyval` que es una evaluación polinomial.

$y = polyval(p, x)$  evalúa el polinomio  $p$  en cada punto en  $x$ . El argumento  $p$  es un vector de longitud  $n + 1$  cuyos elementos son los coeficientes (en potencias descendentes) de un polinomio de grado  $n$ :

$$p(x) = p_1x^n + p_2x^{n-1} + \dots + p_nx + p_{n+1}.$$

Con esta información se programó un algoritmo a fin de construir un polinomio de interpolación de la respuesta en el tiempo. Los dos comandos básicos que se ocuparon en esta programación se presenta a continuación,

$$\begin{aligned} x &= poyfit(tiempo, datos, 3) \\ y &= polyval(x, tiempo). \end{aligned}$$

La programación completa de la interpolación de datos se muestra en el apéndice A.6.

Con la curva aproximada por el polinomio de interpolación, es posible calcular las derivadas libres de ruido. Con la finalidad de no ocupar un polinomio de un orden elevado, debido a la forma del sobre impulso, la interpolación de datos únicamente aproxima la subida de la señal y no en su totalidad.

En la siguiente figura (4.9) se muestra la curva interpolada con el primer conjunto de datos.

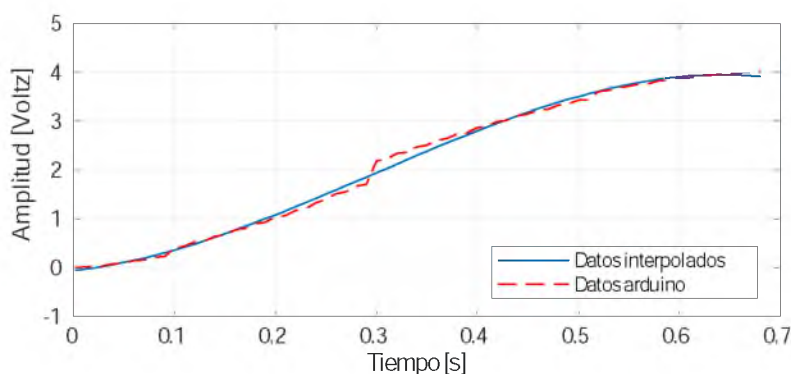


Figura 4.9: Curva interpolada

Una vez obtenida la respuesta de la función libre de ruido, se calculan las derivadas numéricas y se realizan algunas pruebas de los estimadores. Los resultados obtenidos se muestran en la figura (4.10).

Al ser la interpolación una función polinomial, el cálculo de los estimadores no entrega un valor constante como se muestra en la figura (4.10). El error en la estimación se debe a que al derivar la señal polinomial se reduce el orden del polinomio que caracteriza cada

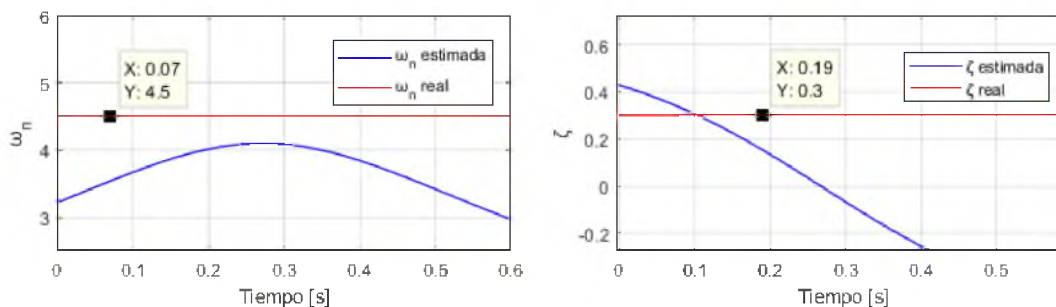


Figura 4.10: Resultados con interpolación de datos

derivada de tal forma que al llegar a la cuarta derivada ésta resulta ser una constante, siendo que en un sistema dinámico ésta posee una forma senoidal.

Las derivadas brindan información útil de una función, en el caso de los sistemas dinámicos, ni una sola derivada es una constante debido a que la respuesta se compone por una función senoidal y exponencial.

Buscando otras alternativas para este problema, se utilizó un método que consiste en filtrar la respuesta de la señal del sistema para así poder obtener derivadas sin ruido.

#### 4.4. Resultados usando filtro media móvil.

Es posible diseñar circuitos correspondientes a filtros electrónicos que son comúnmente utilizados para atenuar o suavizar el ruido en las señales. Debido a que el ruido se presenta en frecuencias altas, un filtro permite eliminarlas. Para solucionar ésto se plantea el uso de un filtro de media móvil.

La **media móvil** es el filtro más común empleado en el Procesamiento de señales digitales (DSP), principalmente porque el filtro es fácil de usar. El filtro de media móvil tiene buen desempeño para reducir el ruido aleatorio mientras mantiene la respuesta en escalón. Ésto lo convierte en el filtro principal para señales codificadas en el dominio del tiempo (Smith, [20]).

La plataforma MATLAB cuenta con una función que corresponde a un filtro de media móvil que es una técnica de suavizado de datos común. La función *filter* es una manera de implementarlo. Este filtra los datos de entrada utilizando la siguiente función de transferencia en el dominio de  $Z$ :

$$Y(z) = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n_b + 1)z^{-n_b}}{1 + a(2)z^{-1} + \dots + a(n_a + 1)z^{-n_a}} X(z),$$

donde  $n_a$  es el orden de filtrado de retroalimentación y  $n_b$  es el orden del filtrado de prealimentación.

La siguiente programación muestra de forma básica como se utilizó el comando *filter*.

$$y = \text{filter}(b, a, F1);$$

$$L = \text{length}(y);$$

Donde  $a$  representa al denominador de la función de transferencia y  $b$  al numerador.

La programación completa usando filtro de media móvil se muestra en el apéndice ver A.7.

Empleando el filtro de Matlab, se elimina el ruido de la señal de entrada y se realizan las derivadas numéricas correspondientes y se obtienen los resultados a continuación

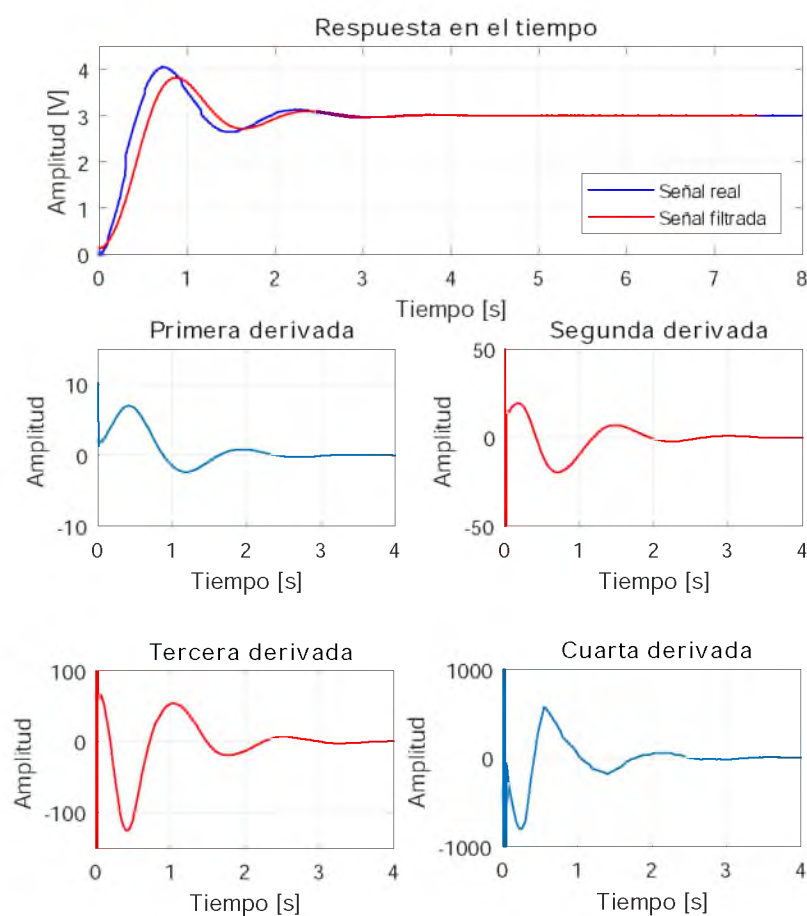


Figura 4.11: Respuesta filtrada

El filtro mejora significativamente las señales, y el ruido se elimina incluso en la cuarta derivada (ver figura 4.11). A consecuencia del filtrado, las señales son desfasadas en tiempo, sin embargo, ésto no representa un problema para la estimación de los parámetros, debido a que no es modificado el comportamiento y las características de la respuesta.

A diferencia de los experimentos anteriores, los resultados obtenidos con el filtro permiten el cálculo de los estimadores, por lo tanto este se empleará a cada una de las señales de prueba.

Aplicando los estimadores sobre la señal filtrada se obtienen los resultados de la figura (4.12). La señal adquirida es la utilizada en el conjunto de datos A, con los que se construyó el sistema experimental ( $\omega_n = 4,5$  y  $\zeta = 0,3$ ). Ver tabla (4.2)

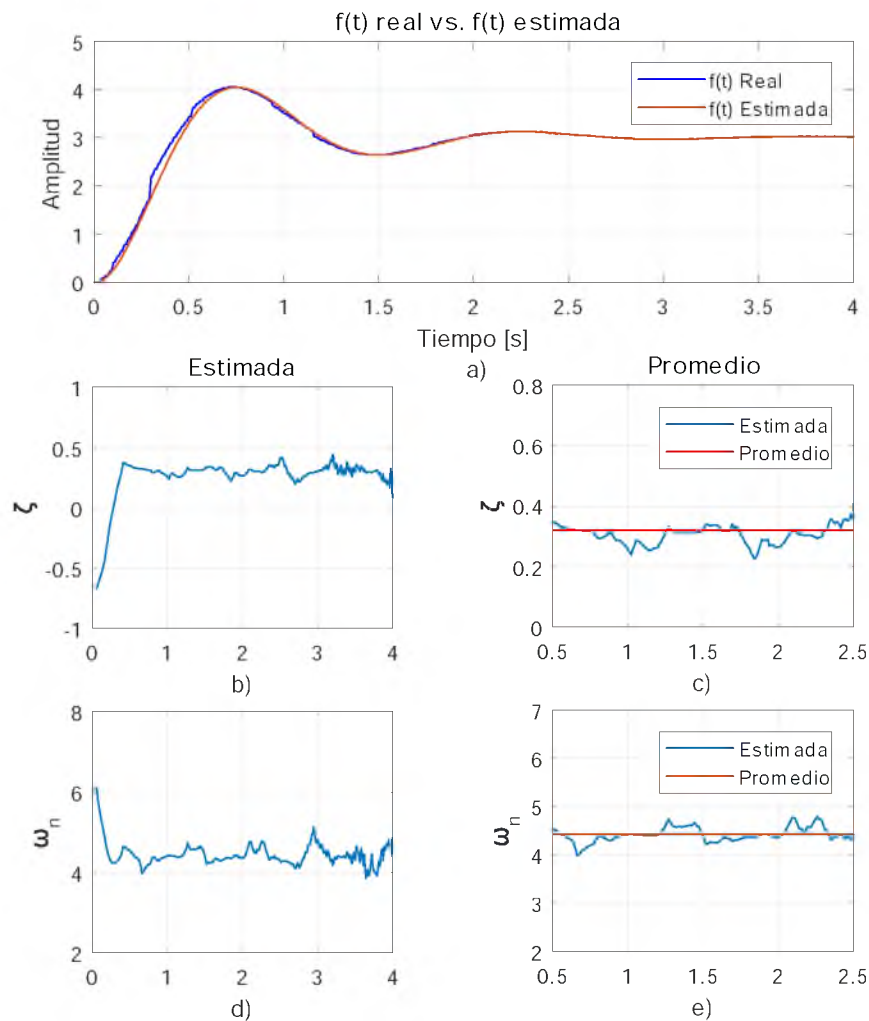


Figura 4.12: Resultados de la estimación de la respuesta A

Los resultados de la estimación de la figura (4.12), muestran que en el primer conjunto de datos, los parámetros estimados rondan alrededor de los valores propuestos  $\omega_n = 4,421$  y  $\zeta = 0,319$ . Así como un promedio de los valores estimados (ver figura 4.12c, e). Por lo tanto se procede a realizar otras pruebas con los datos utilizados en el diseño de la planta. Ver tabla (4.2).

Empleando la respuesta adquirida con el conjunto de valores B de la tabla (4.2), se muestran los resultados obtenidos en la figura (4.13) al igual que un promedio de las señales estimadas. Los resultados muestran que la estimación es funcional debido a que se obtienen valores muy aproximados a los propuestos  $\omega_n = 7,5$ ,  $\zeta = 0,45$ .

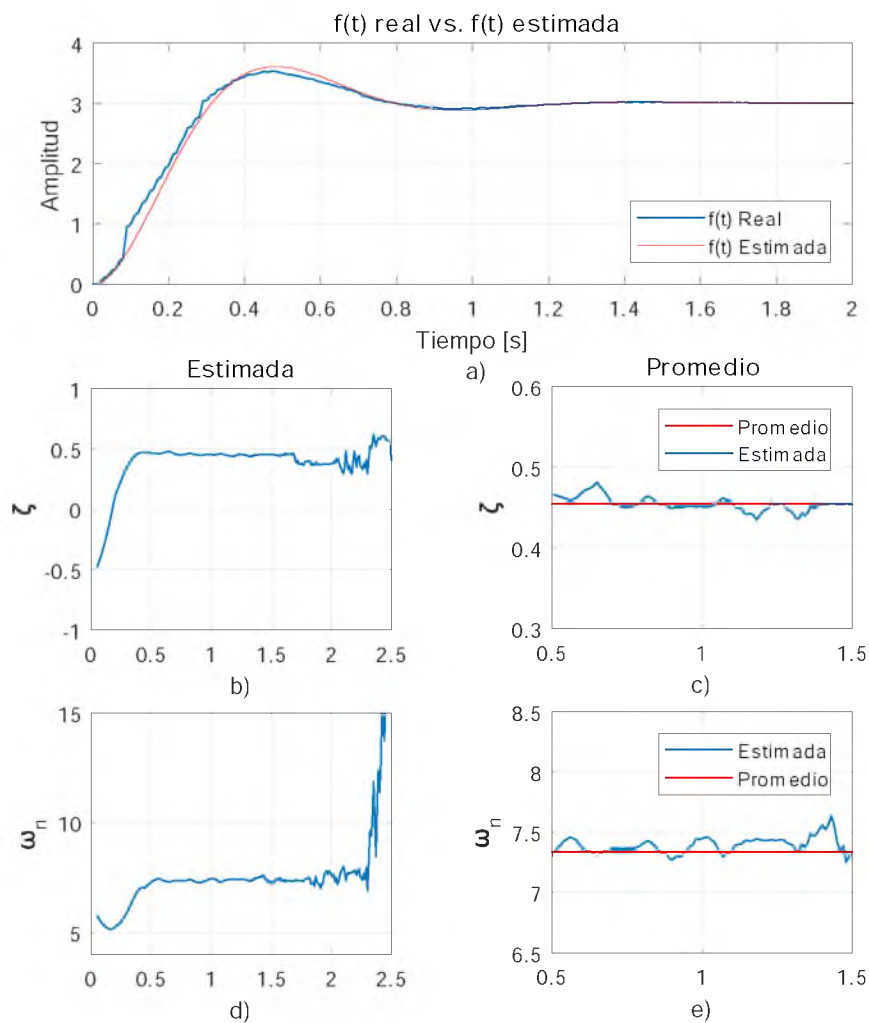


Figura 4.13: Resultados de la estimación de la respuesta B

La figura (4.14) muestra otro ejemplo de la estimación a partir de los valores C de la tabla (4.2). Se observa que los valores estimados aproximan a los valores reales ( $\omega_n = 17$ ,  $\zeta = 0,5$ ).

Es importante observar que los estimadores se aproximan a los valores reales propuestos en ambos ejemplos ( $\omega_n = 7,334$ ,  $\zeta = 0,455$  y  $\omega_n = 17,33$ ,  $\zeta = 0,478$  respectivamente).

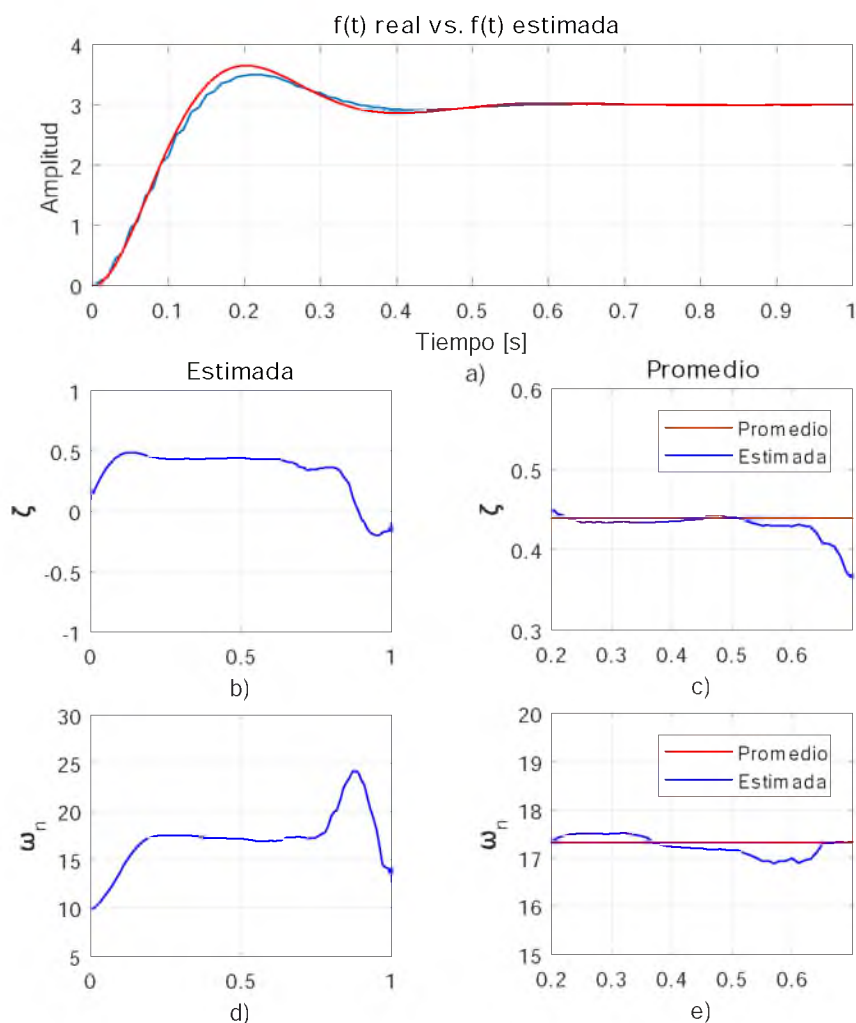


Figura 4.14: Resultados de la estimación de la respuesta C

Cabe mencionar que los estimadores se aplican a sistemas en los cuales se tiene poca información o información nula acerca de los parámetros y componentes por lo cual la estimación puede considerarse buena. La estimación de parámetros permite realizar parte de la identificación del sistema sin tener que realizar desmontes delicados que podrían dañar físicamente al sistema.

La tabla muestra los valores de  $\zeta$  y  $\omega_n$  reales y los valores estimados. Nótese que los valores son muy aproximados lo cual podría garantizar la funcionalidad de los estimadores sobre un periodo definido de la señal de entrada.

Cálculo de error de estimación							
$\zeta$	$\zeta_{est}$	$\varepsilon_\zeta$	$ \varepsilon_\zeta $	$\omega_n$	$\omega_{n\_est}$	$\varepsilon_{\omega_n}$	$ \varepsilon_{\omega_n} $
0.3	0.319	0.019	6.3 %	4.5	4.421	0.079	1.75 %
0.5	0.455	0.045	9 %	7.5	7.334	0.166	2.21 %
0.5	0.478	0.022	4.4 %	17	17.33	0.33	1.94 %

Tabla 4.3: Cálculo del error en la estimación con datos reales

En el caso más crítico de la tabla (4.3) se obtuvo un error del 10 % en el factor de amortiguamiento, sin embargo es bastante aceptable para un sistema del cual no se tiene conocimiento. Los estimadores aplicados sobre las señales reales con ruido aleatorio ( debido a la adquisición de los datos), son funcionales a partir del tiempo pico  $t_p$  debido a que al principio de la señal, ésta presenta un sobre impulso grande, hasta el tiempo de asentamiento  $t_s$ , obteniendo así una estimación muy aproximada a los valores reales de la planta de segundo orden propuesta para el análisis de los datos. El promedio de los datos obtenidos en ese periodo de tiempo es el resultado final de la estimación de los parámetros.



# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió la importancia de la identificación paramétrica. Para ello se analizaron temas como la identificación de sistemas, modelados matemáticos y la dinámica de sistemas de segundo orden. La importancia de este tipo de sistemas es que el tipo de respuesta rige su comportamiento por sólo dos parámetros, el factor de amortiguamiento y frecuencia natural no amortiguada.

Se propuso un método para encontrar las ecuaciones de los estimadores de sistemas de segundo orden tipo sub amortiguado, debido a que la mayoría de los sistemas físicos se pueden aproximar a éstos.

La metodología que se propuso permitió encontrar un conjunto de ecuaciones, las cuales fueron validadas empleándose simulaciones en la plataforma Matlab Simulink. Con estas simulaciones se obtuvieron datos los cuales revelaron que los estimadores son funcionales únicamente en el estado transitorio de la respuesta. Para las pruebas físicas, al intentar usar los datos de la misma forma que en la simulación surgieron problemas debido al ruido que se adquiere en el proceso. Con la finalidad de eliminar el ruido se implementaron dos métodos. El primero por interpolación polinomial, sin embargo no dio resultados satisfactorios debido a que el orden del polinomio necesario era muy alto.

A fin de obtener mejores resultados, se optó por utilizar un filtro, conocido como de media móvil en Matlab. Los nuevos datos adquiridos resultaron en una respuesta del sistema libre de ruido. Utilizando el método propuesto, se calcularon los estimadores a la señal, dando como resultado una aproximación satisfactoria a los parámetros del sistema. Estadísticamente se obtuvo un error de estimación del 10%, pero cabe resaltar que se trabaja con sistemas cerrados denominados caja negra, de los cuales no se tiene información, únicamente conociendo que su entrada corresponde a un escalón unitario y que su comportamiento es igual al de un sistema de segundo orden tipo sub-amortiguado. Los estimadores son funcionales en la etapa transitoria de la respuesta, antes de que ésta llegue al estado estable, después de este la estimación empieza a variar alrededor del parámetro estimado.

Existen otros métodos de estimación de parámetros que requieren retroalimentación del sistema o incluso modificar la respuesta del mismo. Sin embargo esta propuesta utiliza la misma respuesta del sistema, es decir, analizar los datos reales de cada sistema al que se le desee aplicar una estimación paramétrica. También se podrá utilizar para sistemas en los

cuales no se tenga toda la información y se requiera aplicar un esquema de control.

El poder aproximar con suficiente exactitud los parámetros, por los cuales un sistema se comporta, proporciona una herramienta que permite acelerar una correcta identificación de sistemas, además de ser de gran ayuda para fines de control y dinámica de sistemas. Con los estimadores propuestos se pretende poder analizar de forma más rápida y eficaz el comportamiento de los sistemas de segundo orden así como la programación de nuevos esquemas de control.

# Bibliografía

- [1] Beira A. 2010 *Metodología para la Identificación del Sistema de Excitación de un Generador Eléctrico de Potencia para propósitos de control*
- [2] Ljung, L. 1987. *System Identification. Theory for the user*. Prentice Hall
- [3] Behar A. 2003. M.I. *Identificación y control Adaptivo*. Prentice Hall.
- [4] Nise N. 2004 *Sistemas de control para ingeniería 3ra Edición*.
- [5] Ogata K. 1998 *Ingeniería de control moderna*. 3ra Edición Prentice Hall. ISBN 970-17-0048-1
- [6] Sedano J. 2005. *Introducción a la identificación de sistemas*.
- [7] *Temas de identificación paramétrica*. Pagina de internet  
<ftp://ftp.unicauca.edu.co/Facultades/FIET/DEIC/Materias/Identificacion/Parte%20III/clase20%20ident/docs/temas.pdf> Universidad del Cauca.
- [8] Vallejo, E. 1997. *Identificación paramétrica de sistemas dinámicos*. Universidad del norte.
- [9] Angel R. S.F *Identificación de sistemas de segundo orden*.
- [10] Henrik N, Robert M. 2001 *A Simple Method for Estimation of Parameters in First order Systems*.
- [11] Landau. I.D. 2002. *Identification In Closed Loop. Laboratoire d 'Automatique de Grenoble*, (INPG/CNRS), France.
- [12] Rios, L., Toro, N. 2006. *Estimación de parámetros en modelos ARMA por el criterio de mínimos cuadrados*. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701.
- [13] Lara, F. 2009. *Sistemas de Detección de valor RMS para Señales en Sistemas Inalámbricos*
- [14] Castillo, M., London, J., Bretas, M. 2011. *Estimación de estado y parámetros de líneas de transmisión*. Universidad de San Paulo. Lima, Perú.

- [15] Granja J.D. 2016. *Identificación paramétrica del modelo matemático de un transformador monofásico mediante el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo.*
- [16] Valencia, T. 2017. *Estimación de parámetros de estabilidad y metodología de control de generadores en una planta industrial con exportación de excedentes de generación ante pérdida súbita de carga.* Universidad Nacional de Colombia.
- [17] Chapra, S., Canale R. 2007 *Métodos numéricos para ingenieros 5ta edición Editorial McGraw-Hill ISBN-13: 978-970-10-6114-5.*
- [18] Pazos, Sebastian & Aguirre, Fernando & Romero, Eduardo & Peretti, Gabriela & Mazur, Tomás & Verrastro, Sebastian. (2015). *Evaluación de la calidad de TRAM en la detección de fallas de fabricación en circuitos integrados analógicos fabricados en tecnología CMOS de 500nm.* Proyecciones. 13. 89.
- [19] Montes de Oca, J. S.F. *Métodos de Derivación.* Universidad Autónoma del Estado de México. Página de internet: [http://seduca.uaemex.mx/material/LIA/MN/Sec20\\_R.php](http://seduca.uaemex.mx/material/LIA/MN/Sec20_R.php). Fecha de consulta: 22 de agosto de 2018.
- [20] Smith, S.W. 1999. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing.* 2a. Edición. San Diego, California. ISBN 0-9660176-6-8.

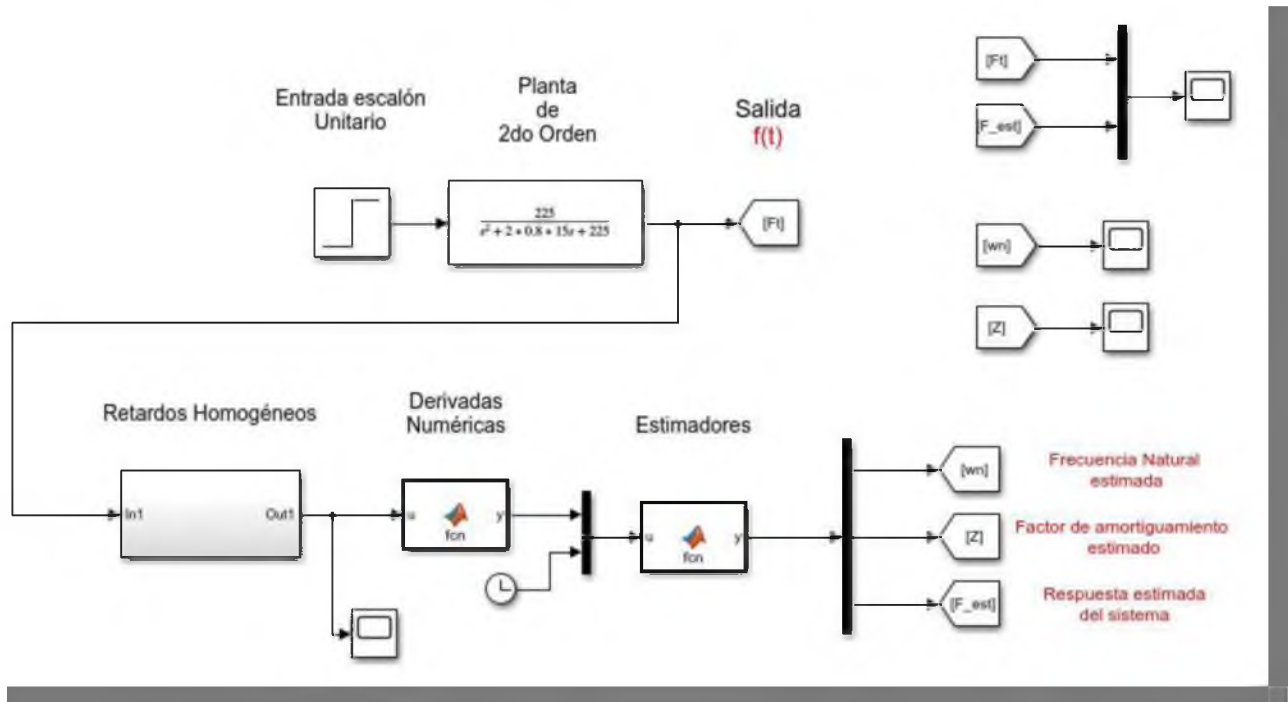
# Apéndice.



# **A. Programas y bloques de Simulación en Matlab.**



### A.3. Simulación correspondiente a los estimadores en bloques de Matlab Simulink.



### A.4. Programación de las derivadas numéricas y los estimadores en Matlab para bloques de Simulink.

```
function y = fcn(u)
    h=0.001;
    D1=(u(4)-u(5))/h;
    D2=(u(3)-u(4))/h;
    D3=(u(2)-u(3))/h;
    D4=(u(1)-u(2))/h;

    DD1=(D2-D1)/h;
    DD2=(D3-D2)/h;
    DD3=(D4-D3)/h;

    DDD1=(DD2-DD1)/h;
    DDD2=(DD3-DD2)/h;

    DDDD=(DDD2-DDD1)/h;
    y = [D4 DD3 DDD2 DDDD];
```

```
function y = fcn(u)
    df=u(1);
    ddf=u(2);
    dddf=u(3);
    dddd=u(4);
    t=u(5);

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Estimadores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    if(t>=0.004)
        Wn=sqrt(abs((dddd*ddf-(ddf^2))/(ddf*df-(ddf^2))));
        Z=(-ddd-(Wn^2)*df)/(2*Wn*ddf);
        B=sqrt(abs(1-Z^2));
        f=1-exp(-Z*Wn*t)*(cos(B*Wn*t)+(Z/B)*sin(B*Wn*t));
    else
        Wn=0; Z=0; f=0;
    end
    y = [Wn Z f];
end
```

## A.5. Programación de las derivadas en Matlab.

```
%%$$$$%% Estimadores Propuestos en Matlab %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fe=0;
df=0;
ddf=0;
dddf=0;
ddddf=0;

f_ant=0;
df_ant=0;
ddf_ant=0;
dddf_ant=0;

i=0;

for t=0:0.01:0.5
    i=i+1;
    fe = y(i);
    df = (fe - f_ant)/0.01;
    ddf = (df - df_ant)/0.01;
    dddf = (ddf - ddf_ant)/0.01;
    dddf = (dddf - dddf_ant)/0.01;
    f_ant=fe;
    df_ant=df;
    ddf_ant=ddf;
    dddf_ant=dddf;
end
```

## A.6 Programación correspondiente a la interpolación de datos.

```
##### Interpolacion #####  
#####  
  
fe=0;  
df=0;  
  
f_ant=0;  
df_ant=0;  
  
e=1;  
i=0;  
A=1;  
B=0;  
for t=0:0.01:5  
  
    i=i+1;  
    ##### Derivadas numéricas #####  
    fe = Fl(i);  
    df = (fe - f_ant)/0.01;      %%  
    ##### Selección de datos #####  
    if(t>0.06 && df<=0)  
        A=0;  
    end  
    if (A==1)  
        datos(e)=Fl(i);  
        tiempo(e)=t;  
        e=e+1;  
    end  
  
    f_ant=fe;  
    df_ant=df;  
end  
  
x=polyfit(tiempo,datos,3);  
y=polyval(x,tiempo);  
plot(tiempo,y,tiempo,datos)
```

## A.7 Programación correspondiente a los estimadores usando filtros de media móvil.

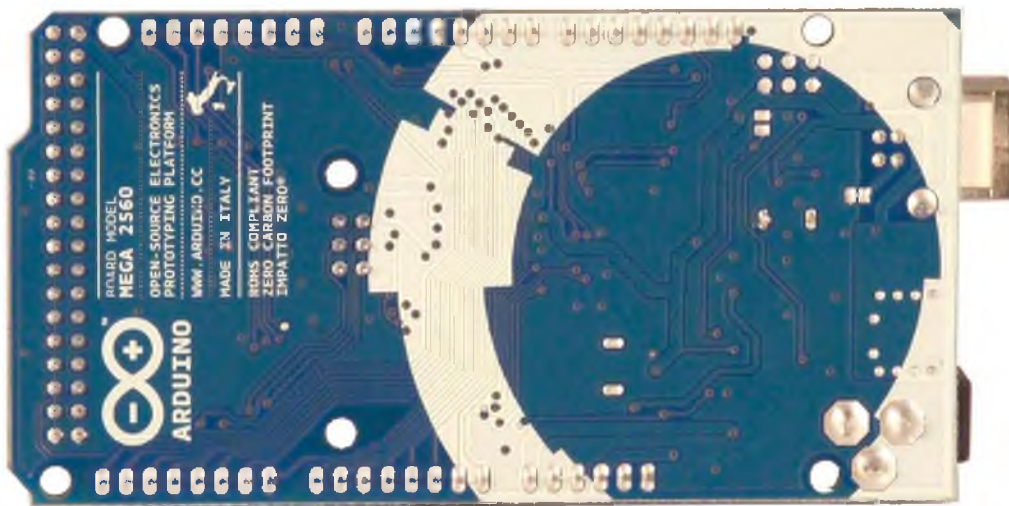
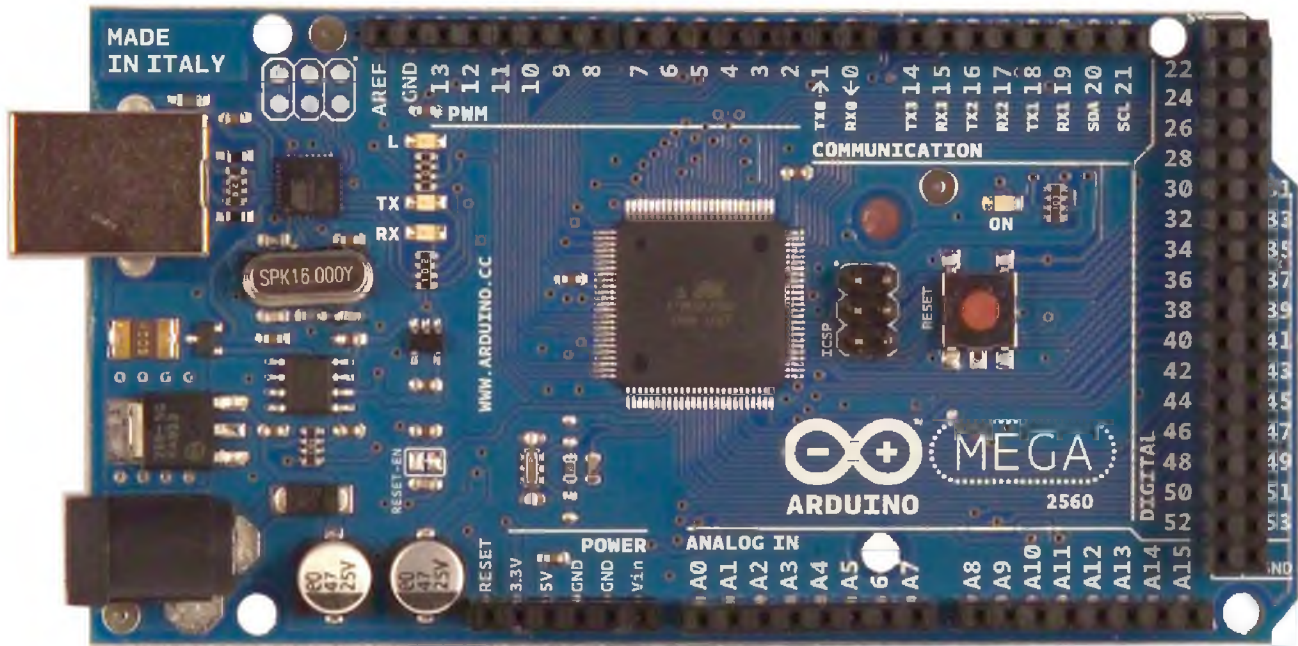
```

##### Estimadores Propuestos en Matlab #####
##### Datos del filtro #####
windowSize = 25;
Destase= 50;
b = (1/windowSize)*ones(1,windowSize);
a = 1;
##### Filtro de la respuesta #####
y = filter(b,'a',F1);
L = length(b,'a',y);
y = filter(b,'a',y);
L = length(y);
Y = Y(Destase:L,L);
L = length(Y);
##### Calculo de derivadas numericas #####
Fe=0; df=0; ddf=0; ddd=0; dddd=0;
F_ant=0; df_ant=0; ddf_ant=0; ddd_ant=0;
i=0;
for t=0:0.01:(L-1)*0.01
    i=i+1;
    Fe = Y(i);
    df = (Fe - F_ant)/0.01;
    ddf = (df - df_ant)/0.01;
    ddd = (ddf - ddf_ant)/0.01;
    dddd = (ddd - ddd_ant)/0.01;
    D1(i)=df;
    D2(i)=ddf;
    D3(i)=ddf;
    D4(i)=ddd;
    time(i)=t;
    F_ant=Fe;
    df_ant=df;
    ddf_ant=ddf;
    ddd_ant=ddd;
end
##### Estimacion #####
i=0;
r=1;
t_est=2.5;
for t=0:0.01:t_est
    dF=D1(i);
    dD=D2(i);
    ddd=D3(i);
    dddd=D4(i);
    i=i+1;
    Wn(t-1)=egrc((ddd*ddf-(ddd*dD-(ddd*Wn(t-1)^2)*df)/(2*Wn(t-1)*ddf));
    Z(t-1)=(-dddF-Wn(t-1)^2)*df/(2*Wn(t-1)*ddf);
    CO(t-1)=c;
end

```

# **B. Hojas de datos de dispositivos.**

# Arduino Mega 2560



The Arduino Mega 2560 is a microcontroller board based on the ATmega2560 ([datasheet](#)). It has 54 digital input/output pins (of which 14 can be used as PWM outputs), 16 analog inputs, 4 UARTs (hardware serial ports), a 16 MHz crystal oscillator, a USB connection, a power jack, an ICSP header, and a reset button. It contains everything needed to support the microcontroller; simply connect it to a computer with a USB cable or power it with a AC-to-DC adapter or battery to get started. The Mega is compatible with most shields designed for the Arduino Duemilanove or Diecimila.

## Schematic & Reference Design

EAGLE files: [arduino-mega2560-reference-design.zip](#)

Schematic: [arduino-mega2560-schematic.pdf](#)

## Summary

Microcontroller	ATmega2560
Operating Voltage	5V
Input Voltage (recommended)	7-12V
Input Voltage (limits)	6-20V
Digital I/O Pins	54 (of which 14 provide PWM output)
Analog Input Pins	16
DC Current per I/O Pin	40 mA
DC Current for 3.3V Pin	50 mA
Flash Memory	256 KB of which 8 KB used by bootloader
SRAM	8 KB
EEPROM	4 KB
Clock Speed	16 MHz

## Power

The Arduino Mega can be powered via the USB connection or with an external power supply. The power source is selected automatically.

External (non-USB) power can come either from an AC-to-DC adapter (wall-wart) or battery. The adapter can be connected by plugging a 2.1mm center-positive plug into the board's power jack. Leads from a battery can be inserted in the Gnd and Vin pin headers of the POWER connector.

The board can operate on an external supply of 6 to 20 volts. If supplied with less than 7V, however, the 5V pin may supply less than five volts and the board may be unstable. If using more than 12V, the voltage regulator may overheat and damage the board. The recommended range is 7 to 12 volts.

The Mega2560 differs from all preceding boards in that it does not use the FTDI USB-to-serial driver chip. Instead, it features the Atmega8U2 programmed as a USB-to-serial converter.

The power pins are as follows:

- + **VIN**. The input voltage to the Arduino board when it's using an external power source (as opposed to 5 volts from the USB connection or other regulated power source). You can supply voltage through this pin, or, if supplying voltage via the power jack, access it through this pin.
- + **5V**. The regulated power supply used to power the microcontroller and other components on the board. This can come either from VIN via an on-board regulator, or be supplied by USB or another regulated 5V supply.
- + **3V3**. A 3.3 volt supply generated by the on-board regulator. Maximum current draw is 50 mA.
- + **GND**. Ground pins.

## Memory

The ATmega2560 has 256 KB of flash memory for storing code (of which 8 KB is used for the bootloader), 8 KB of SRAM and 4 KB of EEPROM (which can be read and written with the [EEPROM library](#)).

## Input and Output

Each of the 54 digital pins on the Mega can be used as an input or output, using [pinMode\(\)](#), [digitalWrite\(\)](#), and [digitalRead\(\)](#) functions. They operate at 5 volts. Each pin can provide or receive a maximum of 40 mA and has an internal pull-up resistor (disconnected by default) of 20-50 kOhms. In addition, some pins have specialized functions:

- + **Serial: 0 (RX) and 1 (TX); Serial 1: 19 (RX) and 18 (TX); Serial 2: 17 (RX) and 16 (TX); Serial 3: 15 (RX) and 14 (TX)**. Used to receive (RX) and transmit (TX) TTL serial data. Pins 0 and 1 are also connected to the corresponding pins of the ATmega8U2 USB-to-TTL Serial chip.
- + **External Interrupts: 2 (interrupt 0), 3 (interrupt 1), 18 (interrupt 5), 19 (interrupt 4), 20 (interrupt 3), and 21 (interrupt 2)**. These pins can be configured to trigger an interrupt on a low value, a rising or falling edge, or a change in value. See the [attachInterrupt\(\)](#) function for details.
- + **PWM: 0 to 13**. Provide 8-bit PWM output with the [analogWrite\(\)](#) function.
- + **SPI: 50 (MISO), 51 (MOSI), 52 (SCK), 53 (SS)**. These pins support SPI communication using the [SPI library](#). The SPI pins are also broken out on the ICSP header, which is physically compatible with the Uno, Duemilanove and Diecimila.
- + **LED: 13**. There is a built-in LED connected to digital pin 13. When the pin is HIGH value, the LED is on, when the pin is LOW, it's off.
- + **I<sup>2</sup>C: 20 (SDA) and 21 (SCL)**. Support I<sup>2</sup>C (TWI) communication using the [Wire library](#) (documentation on the Wiring website). Note that these pins are not in the same location as the I<sup>2</sup>C pins on the Duemilanove or Diecimila.

The Mega2560 has 16 analog inputs, each of which provide 10 bits of resolution (i.e. 1024 different values). By default they measure from ground to 5 volts, though it is possible to change the upper end of their range using the AREF pin and [analogReference\(\)](#) function.

# LM741

## Operational Amplifier

### General Description

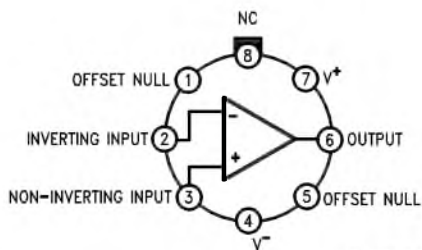
The LM741 series are general purpose operational amplifiers which feature improved performance over industry standards like the LM709. They are direct, plug-in replacements for the 709C, LM201, MC1439 and 748 in most applications.

The amplifiers offer many features which make their application nearly foolproof: overload protection on the input and output, no latch-up when the common mode range is exceeded, as well as freedom from oscillations.

The LM741C is identical to the LM741/LM741A except that the LM741C has their performance guaranteed over a 0°C to +70°C temperature range, instead of -55°C to +125°C.

### Connection Diagrams

Metal Can Package

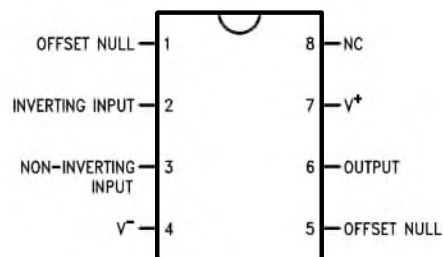


DS009341-2

Note 1: LM741H is available per JM38510/10101

**Order Number LM741H, LM741H/883 (Note 1),  
LM741AH/883 or LM741CH**  
See NS Package Number H08C

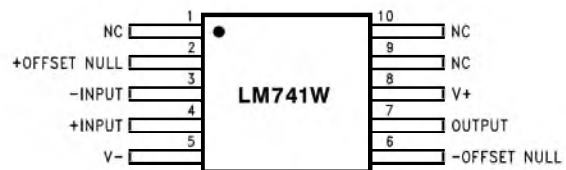
Dual-In-Line or S.O. Package



DS009341-3

**Order Number LM741J, LM741J/883, LM741CN**  
See NS Package Number J08A, M08A or N08E

Ceramic Flatpak

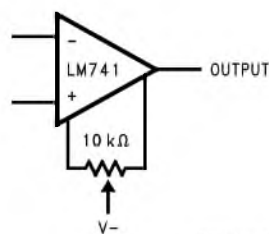


US009341-6

**Order Number LM741W/883**  
See NS Package Number W10A

### Typical Application

Offset Nulling Circuit



DS009341-7

## Absolute Maximum Ratings (Note 2)

If Military/Aerospace specified devices are required, please contact the National Semiconductor Sales Office/Distributors for availability and specifications.

(Note 7)

	LM741A	LM741	LM741C
Supply Voltage	±22V	±22V	±18V
Power Dissipation (Note 3)	500 mW	500 mW	500 mW
Differential Input Voltage	±30V	±30V	±30V
Input Voltage (Note 4)	±15V	±15V	±15V
Output Short Circuit Duration	Continuous	Continuous	Continuous
Operating Temperature Range	-55°C to +125°C	-55°C to +125°C	0°C to +70°C
Storage Temperature Range	-65°C to +150°C	-65°C to +150°C	-65°C to +150°C
Junction Temperature	150°C	150°C	100°C
Soldering Information			
N-Package (10 seconds)	260°C	260°C	260°C
J- or H-Package (10 seconds)	300°C	300°C	300°C
M-Package			
Vapor Phase (60 seconds)	215°C	215°C	215°C
Infrared (15 seconds)	215°C	215°C	215°C
See AN-450 "Surface Mounting Methods and Their Effect on Product Reliability" for other methods of soldering surface mount devices.			
ESD Tolerance (Note 8)	400V	400V	400V

## Electrical Characteristics (Note 5)

Parameter	Conditions	LM741A			LM741			LM741C			Units
		Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	
Input Offset Voltage	$T_A = 25^\circ\text{C}$ $R_S \leq 10\text{ k}\Omega$ $R_S \leq 50\Omega$		0.8	3.0		1.0	5.0		2.0	6.0	mV
	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$ $R_S \leq 50\Omega$ $R_S \leq 10\text{ k}\Omega$			4.0			6.0			7.5	mV
											mV
Average Input Offset Voltage Drift				15							$\mu\text{V}/^\circ\text{C}$
Input Offset Voltage Adjustment Range	$T_A = 25^\circ\text{C}$ , $V_S = \pm 20\text{V}$	±10				±15			±15		mV
Input Offset Current	$T_A = 25^\circ\text{C}$		3.0	30		20	200		20	200	nA
	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$			70		85	500			300	nA
Average Input Offset Current Drift				0.5							$\text{nA}/^\circ\text{C}$
Input Bias Current	$T_A = 25^\circ\text{C}$		30	80		80	500		80	500	nA
	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$			0.210			1.5			0.8	$\mu\text{A}$
Input Resistance	$T_A = 25^\circ\text{C}$ , $V_S = \pm 20\text{V}$	1.0	6.0		0.3	2.0		0.3	2.0		$\text{M}\Omega$
	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$ , $V_S = \pm 20\text{V}$	0.5									$\text{M}\Omega$
Input Voltage Range	$T_A = 25^\circ\text{C}$							±12	±13		V
	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$				±12	±13					V