

## Resumen

Las primeras estimaciones del radio de la Tierra se deben a Piteas (alrededor de año 350 a. C.) y Eratóstenes (alrededor del año 220 a. C.). Ambos notaron que en el mismo día del año y con el Sol del mediodía, el ángulo formado por la sombra del mismo objeto no es el mismo en todas partes. Sus estimaciones, basadas en nada más que cálculos geométricos, son bastante aproximadas al valor aceptado del radio de la Tierra que ha sido el resultado de diversos y sofisticados modelos matemáticos donde se asume que la Tierra es una esfera, aunque realmente no lo sea.

## 1. Introducción: La redondez de la Tierra

La Tierra como un objeto plano, fue uno de los paradigmas astronómicos que los primeros humanos construyeron a raíz del interés que tenían por entender la forma de la superficie que estaban pisando. Este modelo, que surgió a base de la mera observación y el sentido común, perduró por varios siglos. Y no es que el conocimiento empírico bastante sólido en geometría y astronomía, que los egipcios (4000 A.C.), por ejemplo, habían desarrollado, no les hubiese permitido considerar la Tierra como redonda; sino más bien, todo a punta que el modelo de una Tierra plana les funcionaba.

No fueron ni Fernando de Magallanes (1481 – 1521) ni Galileo Galilei (1564 – 1642) quienes descubrieron que la Tierra es redonda. Ellos –al igual que otros filósofos, navegantes y científicos de la antigüedad– tuvieron la idea de una Tierra redonda. De hecho, a Galileo lo condenó la Inquisición Española por defender el *heliocentrismo*, una teoría propuesta por Nicolás Copérnico (1473 – 1543), que ponía al Sol –y no la Tierra– en el centro del Universo, y que por tanto iba en contra de las ideas de la Iglesia Católica de aquella época.

Parece que fue Tales de Mileto (625 a. C – 547 a. C.) el primero en cuestionar realmente la forma de la Tierra. Su idea se basaba en colocar un terreno plano en forma de disco en una vasta extensión de agua [1]. Además, Tales fue el primero en reemplazar la explicación mítica (o divina) de los fenómenos naturales por una explicación física (o racional), por lo que se volvió uno de los precursores de la ciencia griega [2].

Sin embargo, fue Pitágoras (569 a. C. – 475 a. C.) quien le da una forma esférica a la Tierra [3]. Pitágoras observó metódicamente los eclipses de Luna y se percató que cada vez un disco oscuro la ocultaba gradualmente y la enmascaraba por completo durante unas pocas horas. Esto lo llevó a concluir que la Tierra no podía ser un cilindro como lo afirmaba Anaximandro (610 a. C. – 545 a. C.), uno de sus contemporáneos. Hecho que no parece haber impactado realmente a su mundo.

Más tarde, en tiempos y lugares diferentes, Piteas y

Eratóstenes, dos celebridades griegas, asumiendo la Tierra como un objeto redondo y utilizando principios básicos de geometría que conocían, pudieron realizar estimaciones del radio de la Tierra.

## 2. Medición de Piteas

Piteas fue un explorador griego de Massalia, la antigua Marsella. Además de ser un gran astrónomo, fue considerado uno de los exploradores científicos más antiguos en dejar un rastro en la historia, hizo varios viajes a los mares del norte de Europa, el primero de ellos alrededor del 325 a. C. Esos viajes le permitieron confirmar la redondez de la Tierra.

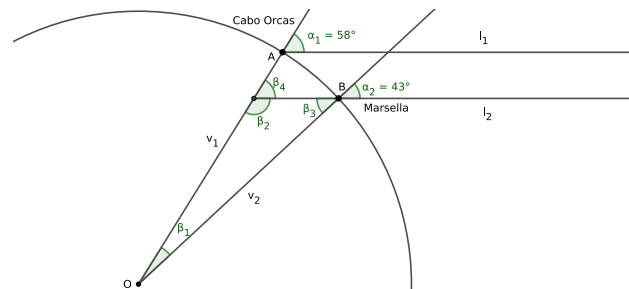


Figura 1: Geometría de la configuración de Piteas.

Durante algunos equinoccios, al mediodía bajo el Sol, Piteas midió que los rayos solares formaban un ángulo de  $43^\circ$  respecto a la vertical en Marsella, mientras que en cabo Orcas (al norte de Escocia) este ángulo era de  $58^\circ$ . Con la información anterior y sabiendo que estos lugares distan entre ellos 10500 estadios, unos 1720 km, Piteas pudo realizar una estimación del radio de la Tierra.

Sean  $l_1$  y  $l_2$  dos rectas que representan los rayos solares que llegan a Cabos Orcas (A) y Marsella (B), respectivamente, y sea  $\ell$  la longitud del arco AB, es decir la distancia entre Cabos Orcas y Marsella. Sean  $v_1$  y  $v_2$  dos rectas verticales cuyo origen es el centro (O) de la circunferencia (de la Tierra) tal que forman los ángulos  $\alpha_1 = 58^\circ$  y  $\alpha_2 = 43^\circ$  con las rectas  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente, que representan dos rayos solares paralelos.

Sean  $R_{\oplus}$  el radio de la Tierra y  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  y  $\beta_4$ , los ángulos como se muestran en la Figura 1.

Para los griegos la geometría era una disciplina en la que eran doctos, por lo que Piteas sabía que la razón entre la longitud ( $2\pi R_{\oplus}$ ) de la circunferencia de la Tierra y su equivalencia en grados ( $360^\circ$ ) es igual a la razón entre la longitud ( $\ell$ ) del arco  $AB$  y la medida del ángulo ( $\sphericalangle AOB$ ) que lo subtiende, es decir,

$$\frac{2\pi R_{\oplus}}{360^\circ} = \frac{\ell}{\sphericalangle AOB}. \quad (1)$$

Como las rectas  $l_1$  y  $l_2$  son paralelas, entonces  $\beta_4 = \alpha_1$ . Además, dado que  $\beta_2$  y  $\beta_4$  son ángulos suplementarios se tiene que  $\beta_2 + \beta_4 = 180^\circ$ . Luego,

$$\beta_2 = 180^\circ - \alpha_1. \quad (2)$$

Por otra parte, los ángulos  $\alpha_2$  y  $\beta_3$  son opuestos por el vértice, por lo que

$$\beta_3 = \alpha_2. \quad (3)$$

Obsérvese en la Figura 1 que los ángulos  $\beta_1, \beta_2$  y  $\beta_3$  son los ángulos internos del triángulo  $OBC$ , entonces

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180^\circ. \quad (4)$$

Así, de las Ecuaciones (2), (3) y (4) se sigue que

$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2. \quad (5)$$

Ya que  $\sphericalangle AOB$  es el mismo que el ángulo  $\beta_1$ , la Ecuación (1) se reescribe en término de los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  como

$$R_{\oplus} = \frac{360^\circ \ell}{2\pi(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (6)$$

Por lo tanto, la longitud del radio de la Tierra según las observaciones de Piteas es

$$R_{\oplus} = \frac{(360^\circ)(1720 \text{ km})}{(2\pi)(58^\circ - 43^\circ)} = 6569.91 \text{ km}$$

### 3. Medición de Eratóstenes

Eratóstenes nació en el año 276 A.C. en Cirene, hoy Libia. Fue matemático y geógrafo, estudió unos años en Atenas y luego se convirtió en alumno del poeta griego Calímaco, quien dirigía la gran biblioteca de Alejandría Fundada en el siglo III A.C. por Ptolomeo I. Cuando este último murió en 240 A.C., Eratóstenes fue nombrado bibliotecario de Alejandría y fue el preceptor del futuro faraón Ptolomeo IV.

Durante un solsticio de verano, mientras Eratóstenes se encontraba en Syene (actualmente Aswan) observó que el Sol no proyectaba sombra en el fondo de un pozo y, por lo tanto, los rayos solares eran perfectamente verticales. El mismo día y a la misma hora en Alejandría, mandó a medir la sombra proyectada por un obelisco que en ese instante formaba un ángulo de  $7.2^\circ$  con la vertical. Sólo estos datos y sabiendo que la distancia entre las dos ciudades era de 5000 estadios, algo así

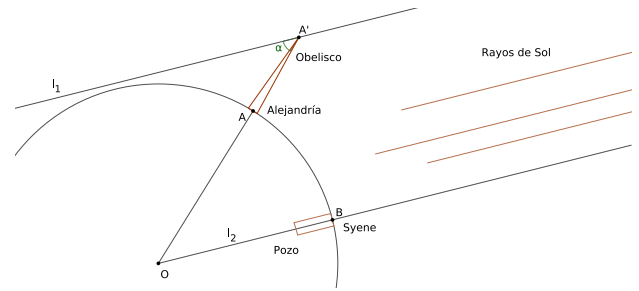


Figura 2: Geometría de la configuración de Eratóstenes.

como 820 km, le fueron suficientes a Eratóstenes para calcular el radio de la Tierra.

Sean  $l_1$  y  $l_2$  dos rectas que representan los rayos solares que pasan por el pozo y por la cúspide del obelisco, respectivamente. Sea  $\alpha$  el ángulo de la sombra generado por el rayo solar  $l_2$ . Sea  $\sphericalangle AOB$  el ángulo subtendido por el arco  $AB$  de longitud  $\ell$ . Sea  $R_{\oplus}$  el radio de la Tierra. Véase la Figura 2.

Al igual que Piteas, Eratóstenes también utilizó el hecho de la igualdad de la razón entre la longitud ( $2\pi R_{\oplus}$ ) de la circunferencia de la Tierra y su equivalencia en grados ( $360^\circ$ ) y la razón entre la longitud ( $\ell$ ) del arco  $AB$  y la medida del ángulo ( $\sphericalangle AOB$ ) que lo subtiende, es decir,

$$\frac{2\pi R_{\oplus}}{360^\circ} = \frac{\ell}{\sphericalangle AOB}.$$

Como las rectas  $l_1$  y  $l_2$  son paralelas (dado que los rayos solares llegan todos de forma paralela a la Tierra), se tiene que  $\sphericalangle AOB = \alpha$ .

Por lo tanto, de la ecuación anterior se sigue que

$$R_{\oplus} = \frac{360^\circ \ell}{2\pi\alpha}. \quad (7)$$

Así, el radio de la Tierra según las mediciones hechas por Eratóstenes es

$$R_{\oplus} = \frac{(360^\circ)(820 \text{ km})}{(2\pi)(7.2^\circ)} = 6525.35 \text{ km}.$$

### 4. Medición mediante el movimiento aparente del Sol

Desde Copérnico, es bien sabido que la Tierra se mueve alrededor del Sol, pero para una persona que se encuentra sobre la superficie de la Tierra, es el Sol quien parece moverse alrededor de ella –de la Tierra– de Este a Oeste. Este movimiento se conoce como *movimiento aparente del Sol*, y varía de estación a estación así como de la latitud terrestre. Por ejemplo, un observador situado en la CDMX que se localiza a una latitud de  $19^\circ$  podrá ver al Sol en el punto más alto del cielo, llamado *cenit*, dos veces cada año, el 15 de mayo y el 25 de julio. Sin embargo, un segundo observador, situado en la ciudad de Nueva York que se encuentra a una latitud de  $41^\circ$  nunca podrá ver al Sol en el cenit.

Supóngase que, una persona yace acostada sobre una playa localizada sobre del ecuador terrestre (latitud igual a  $0^\circ$ ), mientras toma una deliciosa bebida y contempla la puesta de Sol sobre un océano tranquilo. Justo cuando el Sol desaparece sobre el horizonte la persona inicializa un cronómetro. Luego, esta afortunada persona se pone de pie, quedando sus ojos a una altura  $H = 1.70$  m, y detiene el reloj cuando el Sol vuelve a desaparecer sobre el horizonte. La persona observa que el tiempo transcurrido entre las dos puestas de Sol es  $t = 11.1$  s, y se da cuenta que con la información que posee puede estimar la longitud del radio de la Tierra.

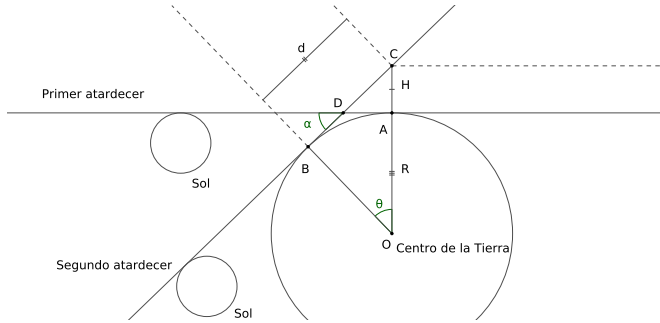


Figura 3: Geometría de la configuración de las puestas de Sol

Sea  $l_1$  la línea tangente a la Tierra en el punto  $A$  que se forma cuando la persona yace acostada en la playa observando el primer atardecer. Sea  $l_2$  la línea tangente a la Tierra en el punto  $B$  cuando la persona se levanta quedando sus ojos a una altura  $H$ , y observando así el segundo atardecer. Sea  $\alpha$  el ángulo a través del cual “el Sol se veve alrededor de la Tierra” durante el tiempo medido  $t = 11.1$  s, y sea  $\theta$  el ángulo entre los radios tangentes a los puntos  $A$  y  $B$ . Véase la Figura 3.

Nótese que el triángulo  $BOC$  es un triángulo rectángulo, donde uno de sus lados (el segmento  $BO$ ) es el radio de la Tierra  $R_\oplus$ . Luego, si se denota por  $d$  la longitud del segmento  $BC$ , por el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$d^2 + R_\oplus^2 = (R_\oplus + H)^2 = R_\oplus^2 + 2HR_\oplus + H^2,$$

de donde

$$d^2 = 2HR_\oplus + H^2. \quad (8)$$

Por otro lado, del triángulo  $BOC$  se deduce que

$$\tan(\theta) = \frac{d}{R_\oplus}. \quad (9)$$

Despejando  $d$  en la Ecuación (9) y sustituyendo su valor en la Ecuación (8), se obtiene la siguiente ecuación cuadrática

$$\tan^2(\theta)R_\oplus - 2HR_\oplus - H^2 = 0. \quad (10)$$

cuyas soluciones son

$$R_\oplus^{(1,2)} = \frac{1 \pm \sec(\theta)}{\tan^2(\theta)} H. \quad (11)$$

Ahora, dado que durante el día solar medio cuya duración aproximada es de 24 h, el Sol se mueve a través de un ángulo

de  $360^\circ$  alrededor de la Tierra, es posible escribir

$$\frac{24 \text{ h}}{360^\circ} = \frac{t}{\alpha}. \quad (12)$$

Entonces, para  $t = 11.1$  s se tiene

$$\alpha = \frac{(360^\circ)(11.1 \text{ s})}{(24 \text{ h})(60 \text{ min/h})(60 \text{ s/min})} = 0.04625^\circ.$$

Nótese que, el triángulo  $ADC$  es semejante al triángulo  $BOC$ , por lo tanto  $\theta = \alpha$ ; además, como  $\alpha$  es mucho menor que 1, entonces  $\sec(\alpha) \approx 1$ ; luego, en la Ecuación (11) se toma el signo positivo y con  $H = 1.7 \times 10^{-3}$  km se obtiene la siguiente aproximación del radio de la Tierra

$$R_\oplus = \frac{1 + \sec(0.04625^\circ)}{\tan^2(0.04625^\circ)} (1.7 \times 10^{-3} \text{ km}) = 5217.95 \text{ km}.$$

## 5. Conclusiones

La Tierra no es perfectamente esférica, por lo tanto no existe algún valor único con el que se pueda representar su radio natural. Sin embargo, utilizando modelos teóricos donde se asume que la Tierra es redonda (una esfera), se han podido realizar, a lo largo de la historia de la humanidad, algunas estimaciones de su radio: Piteas encontró que el radio de la Tierra es  $R_\oplus = 6569.91$  km mientras que Eratóstenes calculó  $R_\oplus = 6525.35$  km, valores que no discrepan tanto del valor más aceptado del radio medio de la Tierra  $R_\oplus = 6371$  km[4, 5].

Mediante la observación de dos puestas de Sol consecutivas sobre algún punto en el ecuador terrestre, gracias al movimiento aparente del Sol (alrededor de la Tierra), es posible estimar que el radio de la Tierra es  $R_\oplus = 5217.95$  km. Sin embargo, este resultado, a diferencia de aquellos obtenidos por Piteas y Eratóstenes, discrepa aproximadamente en un 18 % del valor estándar del radio de la Tierra, dado que la duración del día solar medio difiere de la duración del día solar verdadero, ya que esta última varía a lo largo del año debido a que la órbita terrestre es una elipse, con lo cual la Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol se mueve más veloz cuando se acerca a él y más despacio cuando se aleja.

## Referencias

- [1] Kirk, Geoffrey Stephen, Raven, John Earle y Schofield, Malcolm: *Les philosophes présocratiques : Une histoire critique avec un choix de textes*, volumen 16. coll. Vestigia, 1995.
- [2] Voilquin, Jean: *Les Penseurs grecs avant Socrate. De Thalès de Milet à Prodicos*. Garnier/Flammarion, 1ª edición, 1964.
- [3] Pédech, Paul: *La géographie des Grecs*. Presses Universitaires de France, 1976.

[4] Mamajek, E. E., Prsa, A., Torres, G., Harmanec, P., Asplund, M., Bennett, P. D., Capitaine, N., Christensen-Dalsgaard, J., Depagne, E., Folkner, W. M., Haberreiter, M., Hekker, S., Hilton, J. L., Kostov, V., Kurtz, D. W., Laskar, J., Mason, B. D., Milone, E. F., Montgomery, M. M., Richards, M. T., Schou, J. y Stewart, S. G.: *IAU 2015 Resolution B3 on Recommended Nominal Conversion Constants for Selected Solar and Planetary Properties*. arXiv e-prints, Octubre 2015.

[5] Moritz, H.: *Geodetic Reference System 1980*. Journal of Geodesy, 74:128–162, Marzo 2000.



**Dr. Francisco Rendón**

Egresado de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Veracruzana, y de la maestría y doctorado en astrofísica de la Universidad de Guanajuato. Actualmente es profesor–investigador en la Universidad del Papaloapan.

[rendon.frn@gmail.com](mailto:rendon.frn@gmail.com)



**Dra. Eréndira Munguía**

Egresada de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco y del doctorado en ciencias matemáticas de la UNAM. Actualmente es profesora–investigadora en la Universidad del Papaloapan. Ha impartido numerosas charlas y talleres de divulgación de las matemáticas y su relación con las ciencias naturales, la música y los estudios de género.

[erendira.munguia@gmail.com](mailto:erendira.munguia@gmail.com)

**Universidad del Papaloapan**

Av. Ferrocarril s/n, Col. Cd. Universitaria,  
Loma Bonita, Oax., México C.P. 68400

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**  
**Instituto de Física**  
**“Ing. Luis Rivera Terrazas”**




---

**CONVOCATORIA 2019**

Cursos propedéuticos y de actualización para el ingreso a las Maestrías y Doctorados en:

**Física** (PNPC – Nivel Internacional)  
**Ciencia de Materiales** (PNPC – Consolidado)

**Áreas generales de investigación:**

- \*Física Computacional
- \*Física Teórica
- \*Física de Materia Condensada
- \*Materiales Avanzados: Aplicaciones y Modelado
- \*Propiedades de Materiales

Se cuenta con Becas SEP-CONACyT

Correo electrónico:  
Física: [posgrado\\_fisica@ifuap.buap.mx](mailto:posgrado_fisica@ifuap.buap.mx)  
Ciencia de Materiales: [posgrado\\_mat@ifuap.buap.mx](mailto:posgrado_mat@ifuap.buap.mx)

Más información en <http://www.ifuap.buap.mx>



*¿Sabías que...*



La BUAP fue la mejor universidad en física en México, según el ranking Best Global Universities 2018