

**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN**

**CAMPUS LOMA BONITA**

**INGENIERÍA EN MECATRÓNICA**

**DISEÑO DE LA ESTRUCTURA DE UN SISTEMA  
DE BARRAS PULVERIZADORAS Y CONTROL DE  
LA ALTURA DE IRRIGACIÓN PARA DISMINUIR  
LA DERIVA EN SUPERFICIES DE TERRENOS  
IRREGULARES**

Tesis profesional para obtener el título de

**INGENIERO EN MECATRÓNICA**

Presenta:

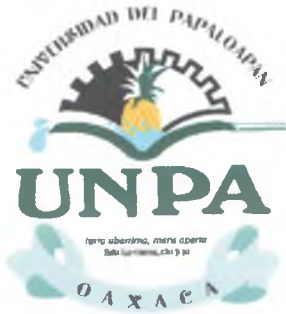
**C. ERWIN DE JESÚS BARBABOSA MONGIOTTI**

Director de tesis:

Dr. Álvaro Cabrera Amado

**LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO, 2021**





**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN**  
Campus Loma Bonita

**INGENIERÍA EN MECATRÓNICA**

LA PRESENTE TESIS TITULADA “DISEÑO DE LA ESTRUCTURA DE UN SISTEMA DE BARRAS PULVERIZADORAS Y CONTROL DE LA ALTURA DE IRRIGACIÓN PARA DISMINUIR LA DERIVA EN SUPERFICIES DE TERRENOS IRREGULARES”, PRESENTADO POR EL SUSTENTANTE DE LICENCIATURA C. ERWIN DE JESÚS BARBABOSA MONGIOTTI BAJO LA DIRECCIÓN DEL DR. ÁLVARO CABRERA AMADO, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITÉ EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO EN MECATRÓNICA.

**M. en C. José Luis Nájera Sánchez**  
Jefe de la Carrera de Ingeniería en Mecatrónica

**Dr. Álvaro Cabrera Amado**  
Director de Tesis

**M. en C. Esteban Chávez Conde**  
Presidente

**Dr. Jesús Santiaguillo Salinas**  
Secretario

**Dr. Álvaro Cabrera Amado**  
Vocal







# UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN CAMPUS LOMA BONITA

## INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

Diseño de la estructura de un sistema de barras pulverizadoras y control de la altura de irrigación para disminuir la deriva en superficies de terrenos irregulares.

Tesis que presenta el

**C. Erwin de Jesús Barbabosa Mongiotti**

Para obtener el título de Licenciatura  
en la especialidad de

**Ingeniería en Mecatrónica**

Director de Tesis:

**Dr. Álvaro Cabrera Amado**



# Dedicatoria

Mi tesis la dedico con amor y cariño a mis padres, Guiana Mongiotti Fernández y Rafael Barbabosa Calvo, por su esfuerzo y sacrificio que mantuvieron por creer en mí y darme la oportunidad de tener una carrera universitaria. Por motivarme día con día para salir adelante y no darme por vencido para poder cumplir con cada una de mis metas. Gracias por haberme dado su amor y su confianza.

A mí amada Karla Polet Medel Benítez, por ser mi fiel compañera, mi mejor amiga, mi fuente de inspiración para poder superarme. Gracias por estar a mi lado a lo largo de mi formación académica y laboral, pero sobre todo por apoyarme y demostrarme tu amor en los momentos que más lo he necesitado.

A mis hermanos Rafael y Julio Cesar, quienes me han brindado su apoyo incondicional ante las adversidades y las pruebas difíciles que la vida me ha presentado. Han sido un ejemplo para poder salir adelante y de manera personal y profesional.



# Agradecimientos

A la Universidad del Papaloapan campus Loma Bonita, por haberme permitido cursar mis estudios de educación superior en la carrera de Ingeniería en Mecatrónica.

A los profesores que con su dedicación y profesionalismo participaron en el desarrollo de mi formación académica, gracias por su apoyo a lo largo de la carrera.

Al Dr. Álvaro Cabrera Amado por haber aceptado ser director de mi Tesis y haber compartido su conocimiento y experiencia para el desarrollo de este proyecto. Gracias por su dedicación, apoyo y la confianza.

A los profesores M. en C. Esteban Chávez Conde, Dr. Francisco Gutiérrez Zainos y Dr. Jesús Santiaguillo Salinas, por haber aceptado ser parte del jurado y por las sugerencias realizadas en el presente trabajo de tesis.



# Resumen

La introducción de la Mecatrónica aplicada en la agricultura ha sido una forma innovadora de mecanización y diseño de sistemas inteligentes que dan como resultado una solución a múltiples problemas que se presentan en las prácticas relacionadas con la agricultura de precisión. Esta área es una labor que se ha llevado a cabo en las últimas décadas, con el propósito de automatizar diversas actividades y acelerar procesos en respuesta al aumento en la demanda mundial de productos agrícolas.

Una de las actividades agrícolas primordiales es la implementación de los sistemas de riego, ya que el agua es el sustento principal para el crecimiento de las plantas.

En esta tesis se propone una estrategia para disminuir la pérdida de fluido presurizado que se aplica sobre los cultivos agrícolas (efecto de la deriva). Este consiste en corregir la altura de irrigación de un sistema de barras pulverizadoras expuestas a perfiles de terrenos irregulares.

Para ello se propone el diseño conceptual de la estructura de un sistema de barras pulverizadoras en el software de SolidWorks. El trabajo también incluye la selección de los sensores, actuadores, módulos de potencia y un sistema de adquisición de datos. La integración sinérgica del diseño mecánico, los elementos eléctricos/electrónicos y con un sistema de control adecuado se consigue un prototipo virtual.

El modelo matemático dinámico del sistema se obtiene mediante las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange y para el estudio numérico del modelo y esquemas de control se plantean diferentes condiciones de operación por medio del software de Matlab-Simulink. La respuesta del sistema se complementa con las ecuaciones cinemáticas del modelo, que establecen la relación entre las variables dinámicas y las características físicas de la estructura que tiene el sistema. La altura de irrigación es una variable medida por los sensores ultrasónicos y la estructura de los mecanismos de cadena cinemática cerrada se usan para transformar el movimiento lineal de los actuadores eléctricos a movimiento angular.

La altura de irrigación de las barras pulverizadoras se corrige mediante la retroalimentación de las señales eléctricas de los sensores, y con la aplicación de un esquema de control activo se calcula la energía que debe aplicarse en los actuadores lineales para posicionar las barras en la altura de irrigación deseada.

Los esquemas de control activo que se aplicaron son: el PID basado en el modelo (control particionado), control por planitud diferencial y el controlador proporcional integral generalizado (GPI). Los controladores con menor información del sistema presentan errores pequeños en el comportamiento del estado transitorio.

Por último, en los resultados numéricos del sistema en lazo cerrado los tres esquemas de control corrigen de forma favorable la altura de irrigación, cuando se proponen perfiles de terrenos irregulares.

# Abstract

The introduction of applied Mechatronics in agriculture has been an innovative form of mechanization and design of intelligent systems that result in a solution to multiple problems that arise in practices related to the precision agriculture. This area is a work that has been carried out in recent decades, with the purpose of automating various activities and accelerating processes in response to the increase in global demand for agricultural products.

One of the primary agricultural activities is the implementation of irrigation systems, since water is the main sustenance for plant growth.

This thesis proposes a strategy to reduce the loss of pressurized fluid that is applied on agricultural crops (effect of drift). This involves correcting the irrigation height of a stream bars system exposed to irregular ground profiles.

For this purpose, the conceptual design of the structure of a stream bars system is proposed in the Solid-Works software. The work also includes the selection of sensors, actuators, power modules and a data acquisition system. The synergistic integration of mechanical design, electrical/electronic elements and with an appropriate control system a virtual prototype is achieved.

The dynamic mathematical model of the system is obtained by means of the Euler-Lagrange motion equations and for the numerical study of the model and control schemes different operating conditions are proposed by the Matlab-Simulink software.

The system's response is complemented by the kinematic equations of the model, which establish the relationship between the dynamic variables and the physical characteristics of the system structure. The irrigation height is a variable measured by the ultrasonic sensors and the structure of closed kinematic chain mechanisms are used to transform the linear motion of the electrical actuators to angular motion.

The irrigation height of the stream bars is corrected by feedback of the electrical signals from the sensors, and with the application of an active control scheme is calculated the energy to be applied in the linear actuators to position the bars at the desired irrigation height.

The active control schemes applied are: the model-based PID (partitioned control), flatness-based control and the generalized proportional integral (GPI) control. The controllers with less information of the system have small errors in the transient state behavior.

Finally, in the numerical results of the closed loop system, the three control schemes correct the irrigation height in a favorable form, when profiles of irregular ground are proposed.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Marco teórico . . . . .	1
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	4
1.3. Justificación . . . . .	4
1.4. Estado del Arte . . . . .	5
1.5. Hipótesis y predicciones . . . . .	7
1.6. Objetivos . . . . .	8
1.6.1. Objetivo general . . . . .	8
1.6.2. Objetivos específicos . . . . .	8
<b>2. Diseño conceptual del sistema de riego</b>	<b>9</b>
2.1. Subsistemas que conforman el sistema de barras pulverizadoras . . . . .	9
2.1.1. Subsistema mecánico . . . . .	10
2.1.2. Subsistema electrónico . . . . .	10
2.1.3. Puntos críticos en el desarrollo del diseño del prototipo . . . . .	10
2.2. Especificaciones del sistema . . . . .	11
2.3. Diseño conceptual . . . . .	12
2.3.1. Estructura de las barras y soportes articulares . . . . .	12
2.3.2. Mecanismos de 3 y 4 eslabones . . . . .	15
2.3.3. Mecanismo de plegado lateral de las barras . . . . .	18
2.3.4. Tornillos y dimensionamiento de bujes y separadores . . . . .	22
2.3.5. Actuadores y sensores . . . . .	22
2.3.6. Tarjetas de potencia y adquisición de datos . . . . .	28
2.3.7. Prototipo virtual terminado . . . . .	30
<b>3. Modelo matemático del sistema</b>	<b>35</b>
3.1. Modelo dinámico del sistema de riego . . . . .	35
3.1.1. Técnica de modelado por Euler-Lagrange . . . . .	35
3.1.2. Modelado matemático del sistema de riego . . . . .	38
3.1.3. Determinación de las energías cinéticas . . . . .	39
3.1.4. Determinación de las energías potenciales. . . . .	42
3.1.5. Determinación de las energías disipativas. . . . .	44
3.1.6. Función de $\mathcal{L}$ agrange . . . . .	44

3.1.7.	Ecuación de Euler . . . . .	44
3.1.8.	Modelo dinámico de la primer barra . . . . .	45
3.1.9.	Modelo dinámico de la segundo barra GDL . . . . .	46
3.1.10.	Modelo dinámico de la tercer barra GDL . . . . .	46
3.1.11.	Representación del modelo dinámico en forma matricial. . . . .	47
3.2.	Análisis del punto de equilibrio . . . . .	49
3.3.	Linealización del modelo matemático del sistema de riego . . . . .	51
3.3.1.	Linealización del modelo matemático de la primer barra. . . . .	51
3.3.2.	Linealización del modelo matemático de la segunda barra. . . . .	54
3.3.3.	Linealización del modelo matemático de la tercer barra. . . . .	55
3.3.4.	Respuesta del modelo lineal en lazo abierto . . . . .	57
3.3.5.	Modelo lineal con dinámica desacoplada . . . . .	58
3.4.	Modelado cinemático . . . . .	59
3.4.1.	Relación cinemática altura-ángulo de las barras . . . . .	59
3.4.2.	Relación diferencial altura-ángulo . . . . .	62
3.4.3.	Análisis de mecanismos para la transmisión de movimiento . . . . .	64
3.4.4.	Análisis de posición del mecanismo de 3 eslabones . . . . .	65
3.4.5.	Análisis de posición del mecanismo de 4 eslabones . . . . .	67
3.4.6.	Conversión de Fuerza $u_i$ a Par $\tau_i$ (mecanismo de 3 eslabones) . . . . .	72
3.4.7.	Conversión de Fuerza $u_i$ a Par $\tau_i$ (mecanismo de 4 eslabones) . . . . .	73
<b>4.</b>	<b>Esquemas de control activo</b>	<b>77</b>
4.1.	Controlador tipo PID basado en el modelo . . . . .	77
4.1.1.	Controlador particionado para regular la altura de irrigación . . . . .	80
4.2.	Control por Planitud diferencial . . . . .	83
4.2.1.	Determinación de la salida plana . . . . .	85
4.2.2.	Determinación de la salida plana del sistema de riego . . . . .	86
4.2.3.	Control por planitud para regular la altura de irrigación . . . . .	88
4.3.	Controlador Proporcional Integral Generalizado (GPI) . . . . .	90
4.3.1.	Control GPI para regular la altura de irrigación . . . . .	94
<b>5.</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>99</b>
5.1.	Resultados a lazo abierto . . . . .	99
5.1.1.	Respuesta del modelo dinámico no-lineal . . . . .	99
5.2.	Resultados a lazo cerrado . . . . .	101
5.2.1.	Regulación de la altura de irrigación aplicando el control particionado	102
5.2.2.	Regulación de la altura de irrigación por Planitud diferencial . . . . .	108
5.2.3.	Regulación de la altura de irrigación aplicando el control GPI . . . . .	110
5.2.4.	Resultados generales . . . . .	113
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>117</b>
6.1.	Conclusiones generales . . . . .	117
6.2.	Trabajo futuro . . . . .	118

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
<b>A. Hojas de datos</b>	<b>123</b>
<b>B. Planos del sistema de riego</b>	<b>133</b>
B.1. Dibujos técnicos de las barras . . . . .	133



# Índice de figuras

1.1. Clasificación de sistemas de barras pulverizadoras de acuerdo a sus dimensiones y forma de transporte. . . . .	2
1.2. Irrigación por medio de las barras pulverizadoras en una superficie sin irregularidades. . . . .	3
1.3. <i>Deriva</i> producida por el cambio de altura de irrigación provocada por la irregularidad de la superficie del terreno. . . . .	4
1.4. Pulverizadora autopropulsada VALTRA BS3020H con suspensión activa para mantener la estabilidad del vehículo, ver en [26]. . . . .	5
1.5. Pulverizadora autopropulsada modelo AR 3.4 S2 de la compañía PRABA con el sistema de botalón central basculante, ver en [19]. . . . .	6
1.6. Sistema de control de altura por medio de sensores de barras KS instalado en un pulverizadora autopropulsada de la compañía PLA ver en [21]. . . . .	6
1.7. Pulverizadora autopropulsada PLA con barras hidráulicas articuladas y controlados con el sistema de control de altura de NORAC [13]. . . . .	7
1.8. Compensación en la altura de las barras para efectuar una irrigación uniforme sobre la superficie del terreno. . . . .	8
2.1. Sistema de riego basado en barras pulverizadoras y sus elementos principales que lo conforman. . . . .	12
2.2. Diseño de las tres barras estructurales pulverizadoras mediante perfiles PTR. . . . .	14
2.3. Diferentes soportes empleados en el sistema de barras pulverizadoras: (a) articulaciones principales, (b) articulaciones de los eslabones del mecanismo de 4 barras, (c) soporte del primer actuador, (d) apoyo para el eslabón derecho desacoplado de los mecanismos de 4 barras, (e) soporte de los actuadores y (f) soporte de unión entre el vástago del primer eslabón y la primer barra pulverizadora. . . . .	14
2.4. Mecanismo de tres eslabones formado por un eslabón móvil (3), fijo (2) y el actuador (1). . . . .	15
2.5. Eslabones que conforman el mecanismo de 4 eslabones, de los cuales los superiores pueden ser ajustables y los inferiores son fijos. . . . .	16
2.6. Mecanismo de plegado y rotación de las barras 2 y 3. . . . .	20
2.7. Descripción gráfica del procedimiento de plegado y elementos del mecanismo que lo conforman. . . . .	21

2.8. Actuadores lineales eléctricos del fabricante GlideForce. . . . .	23
2.9. Sensor ultrasónico HC-SR04. . . . .	24
2.10. Soporte para los sensores ultrasónicos. . . . .	26
2.11. Vista explosionada que muestra los componentes que conforman el soporte de los sensores ultrasónicos. . . . .	27
2.12. Tarjeta de potencia para motores CD L298N. . . . .	29
2.13. Tarjeta arduino Mega 2560. . . . .	30
2.14. Prototipo virtual del sistema de riego basado en barras pulverizadoras. . . .	30
2.15. Desplazamiento angular máximo de las barras en sentido anti-horario al contraer el vástago del actuador. . . . .	31
2.16. Desplazamiento angular máximo de las barras en sentido horario al extender el vástago del actuador. . . . .	32
2.17. Diferentes posiciones angulares de las barras variando la longitud del vástago de los actuadores. . . . .	33
2.18. Plegado lateral de las barras pulverizadoras. . . . .	33
3.1. Sistema de riego basado en barras pulverizadoras. . . . .	38
3.2. Diagrama del modelo y localización de los centros de masa de cada barra. . .	40
3.3. Determinación numérica del punto de equilibrio de las barras 1 y 2. . . . .	50
3.4. Punto de equilibrio de cada barra pulverizadora, cuando el sistema no se encuentra sometido a torques $\tau_i$ externos. . . . .	52
3.5. Comportamiento del sistema lineal y no-lineal considerando diferentes condiciones iniciales $\theta_i(0)$ sin entrada $\tau_i = 0$ . . . . .	58
3.6. Relación entre la altura de las barras y su orientación. . . . .	60
3.7. Respuesta en lazo abierto considerando condiciones iniciales $\theta_i(0) = \pi/2$ rad. a) Desplazamiento angular $\theta_i(t)$ y b) Desplazamiento en el extremo de la barra $y_i(t)$ . . . . .	62
3.8. Respuesta en lazo abierto considerando $\theta_i(0) = \pi/2$ rad y torque aplicado. a) Desplazamiento angular $\theta_i(t)$ y b) Desplazamiento en el extremo de la barra $y_i(t)$ . . . . .	63
3.9. Mecanismos y actuadores lineales encargados de generar el movimiento de las barras pulverizadoras. . . . .	65
3.10. Primer mecanismo formado por 3 eslabones. . . . .	65
3.11. Mecanismo de 4 eslabones y su respectivo diagrama vectorial. . . . .	68
3.12. Los actuadores lineales ejercen una fuerza $u_i$ en cada mecanismo de la estructura para la generación de movimiento. . . . .	72
3.13. Diagrama de cuerpo libre para determinar el par que se aplica en la articulación en $O_1$ . . . . .	73
3.14. Determinación de la fuerza que genera el par sobre la articulación en $O_2$ . . .	74
4.1. Diagrama a bloques del sistema de control PID basado en el modelo (Control Particionado). . . . .	79
4.2. Esquema de control PID basado en el modelo del sistema. . . . .	84

4.3. Diagrama a bloques del esquema de control por planitud diferencial aplicado al sistema de riego. . . . .	90
4.4. Diagrama a bloques representativo del esquema de control GPI aplicado al sistema de riego. . . . .	97
5.1. Respuesta del sistema a lazo abierto considerando diferentes condiciones iniciales y entrada cero. . . . .	100
5.2. Respuesta del sistema con diferentes condiciones iniciales $\theta_0 = [\theta_{10}, \theta_{20}, \theta_{30}]$ y torques de entrada $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]$ . . . . .	100
5.3. Integración del hardware y software para la aplicación de los esquemas de control en el sistema de riego. . . . .	101
5.4. Terreno planificado para las pruebas a lazo cerrado y la posición que debe adaptar cada barra para mantener constante la altura de irrigación. . . . .	103
5.5. a) Recorrido del extremo de cada barra $y_i(t)$ , b) Error producido $\Delta q_i$ en el seguimiento del perfil debido a la irregularidad del perfil de terreno. . . . .	106
5.6. a) retracción del vástago del actuador, b) elongación del vástago del actuador.	106
5.7. a) Desplazamiento del vástago de los actuadores lineales de cada barra, b) fuerza aplicada $u_i$ en los primeros 2 s y c) fuerza aplicada $u_i$ a partir de los 2 s a 100 s. . . . .	107
5.8. a) Desplazamiento angular $\theta_i$ , b) torques $\tau_i$ aplicados durante los primeros 2 s y c) torques $\tau_i$ aplicados posterior a los 2 s. . . . .	108
5.9. a) Recorrido del extremo de cada barra $y_i(t)$ aplicando el control por planitud y b) error $\Delta L_i(t)$ producido por la acción del control. . . . .	109
5.10. a) Desplazamiento del vástago de los actuadores lineales de cada barra, b) fuerza aplicada $u_i$ en los primeros 2 s y c) fuerza aplicada $u_i$ a partir de los 2 s a 100 s. . . . .	110
5.11. a) Desplazamiento angular $\theta_i$ , b) torques $\tau_i$ aplicados durante los primeros 2 s y c) torques $\tau_i$ aplicados posterior a los 2 s. . . . .	111
5.12. a) Desplazamiento en la altura de irrigación aplicando el control GPI y b) error producido en la salida. . . . .	112
5.13. a) Desplazamiento del vástago de los actuadores lineales de cada barra, b) fuerza aplicada $u_i$ en los primeros 2 s y c) fuerza aplicada $u_i$ a partir de los 2 s a 100 s. . . . .	112
5.14. a) Desplazamiento angular $\theta_i$ , b) torques $\tau_i$ aplicados durante los primeros 2 s y c) torques $\tau_i$ aplicados posterior a los 2 s. . . . .	113
5.15. Comparación de la respuesta del sistema a lazo cerrado aplicando los diferentes esquemas de control. . . . .	114
5.16. Comparación de la fuerza de control aplicada por los diferentes esquemas de control activo. . . . .	114



# Índice de tablas

2.1. Longitud e inclinación de los eslabones de los mecanismos de 3 y 4 eslabones.	19
2.2. Especificaciones eléctricas y mecánicas de los actuadores lineales. . . . .	23
2.3. Propiedades físicas del aluminio. . . . .	28
2.4. Parámetros mecánicos del sistema empleando el software Solidworks. . . . .	34
3.1. Parámetros cinemáticos del mecanismo de 3 eslabones. . . . .	66
3.2. Parámetros cinemáticos del mecanismo de 4 eslabones. . . . .	68



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Marco teórico

En la antigüedad los seres humanos dependían de las condiciones climatológicas y de las fuentes de agua como ríos y lagos en las cercanías del campo para suministrar el agua necesaria a sus cosechas. La agricultura ha sido uno de los pilares principales de la economía de los países en vías de desarrollo y México no es la excepción (ver Vázquez, [27]).

En la actualidad, el riego es un componente esencial del desarrollo agrario sustentado. El agua es el componente mayoritario de las plantas, esta llega a representar de un 60 hasta 90 % de su peso. La escasez de agua constituye una importante limitación para el desarrollo agrícola en las regiones áridas y semiáridas (ver Santos et al., [20]), por ende, el avance tecnológico en el sector agropecuario ha crecido rápidamente en los últimos años. Las actividades que solían realizar varios jornaleros con sus herramientas convencionales, ahora lo realizan maquinas en menor tiempo y con mayor eficiencia. Es por ello que las empresas productoras de maquinaria agrícola han hecho un arduo trabajo durante los últimos años para diseñar y construir máquinas de gran desempeño, entre los cuales se encuentran los sistemas de riego.

Un sistema de riego es aquel mecanismo que se emplea en los campos de cultivo para transportar, suministrar y esparcir agua (irrigación) y/o fluidos fitosanitarios a las plantas para garantizar su desarrollo y crecimiento (ver Lugo et al., [11]). El riego de precisión, en su definición, incluye la exactitud en volumen y tiempo de aplicación de agua, impactando en el incremento de la rentabilidad de la cosecha y disminuyendo el riesgo ambiental (ver Ortega, [17]).

En el mercado se pueden encontrar una gran variedad de sistemas de riego, tales como: riego por aspersión, micro compuertas, goteo, sistemas laterales automáticos, entre otros. La selección de uno de estos implica el conocimiento del suelo sobre el cual se ha de sembrar la planta (ver Santos, et al., [20]).

Los sistemas de riego laterales automáticos también son denominados como sistemas de barras pulverizadoras. La zona de trabajo de los pulverizadores es sobre cultivos de vegetación baja, y se puede conseguir gran uniformidad en el reparto del producto cuando el terreno es regular, tal como se muestra en la Figura 1.2. La clasificación de los sistemas de riego basados

en barras pulverizadoras va de acuerdo a su tamaño y la forma en la que este se traslada a través del terreno. Los de menor tamaño son conocidos como pulverizadores suspendidos ya que su diseño consta únicamente de las barras elaboradas de perfil estructural y se monta sobre un tractor para ser transportado por el campo, tal como puede observarse en la Figura 1.1.



Figura 1.1: Clasificación de sistemas de barras pulverizadoras de acuerdo a sus dimensiones y forma de transporte.

Los de gama media son los de arrastre, estos además de tener un tamaño superior a los suspendidos, tienen una estructura más robusta que permite la incorporación del tanque donde se almacena el fluido a esparcir, por lo que únicamente se necesita acoplar a un camión o tractor para hacerse paso por el camino. Por último, se encuentran las autopropulsadas, las cuales están constituidas por un vehículo de gran tamaño que posee todas las herramientas integradas para almacenamiento y suministro del fluido a esparcir, además, cuenta con tecnología especializada para facilitar el trabajo del operador, como sistemas de navegación, sistemas para la detección de maleza, sistemas para la compensación de la altura de las barras mediante elementos pasivos, entre otros.

La técnica de irrigación por medio de barras pulverizadoras es una práctica que se ha realizado desde hace varios años, sin embargo, son sistemas susceptibles a las condiciones presentes en el terreno, por lo que una superficie con irregularidades produce déficit en la



Figura 1.2: Irrigación por medio de las barras pulverizadoras en una superficie sin irregularidades.

cantidad de fluido que llega a las plantas y también puede ocasionar daños a la misma estructura de las barras (ver Figura 1.3). Es por ello que, los fabricantes han desarrollado técnicas para que la irrigación sea eficiente a pesar de la deformidad del terreno. Sin embargo, mantener un riego uniforme sobre la superficie de cualquier terreno es un desafío y la adquisición e implementación de sistemas automáticos que compensen las irregularidades del terreno para disminuir *el efecto de la deriva* son de alto costo, y están diseñados para vastas extensiones de terreno, donde la producción se realiza en masa, por lo que no es viable la implementación en campos de baja y media producción.

En el presente trabajo de tesis se realiza el diseño de la estructura del sistema de barras pulverizadoras y se aborda la idea de regular su altura mediante la incorporación de sensores y de actuadores. Este tipo de sistema es de gran utilidad, debido a que haciendo uso del reconocimiento del perfil de terreno se pueden obtener las variables articulares de la estructura, lo que permite la incorporación de esquemas de control activo para corregir la altura de las barras mediante la implementación de actuadores lineales y mecanismos en cada articulación. En este caso, se aborda el uso del controlador PID basado en el modelo, el cual permite realizar seguimientos de trayectorias de forma más eficientes que el PID convencional, ya que esta estructura cancela las dinámicas del sistema en lazo cerrado. También se proponen el diseño de controladores basados en la Planitud diferencial introducida por Fliess et al. en, [6] y el PI Generalizado Fliess et al. en, [7].

La Planitud diferencial es una propiedad de algunos sistemas dinámicos controlados que permiten trivializar las tareas de planificación de la trayectoria, sin resolver ecuaciones diferenciales y simplifica gradualmente el diseño del controlador (ver Sira-Ramírez y Agrawal, [22]).

El controlador GPI (Proporcional Integral Generalizado) es una técnica para el diseño de controladores lineales que pueden rechazar diferentes tipos de perturbaciones de tipo polinomial, tales como escalones, rampa, parábolas, etc. (ver Sira-Ramírez et al., [23]).

Esta técnica de control permite ver el problema de control como una cadena de integradores de los estados no medibles, en donde el orden del polinomio y de la cadena de integradores determina el número de parámetros de la ganancia integral de una manera simple

(ver Luviano-Juárez, Cortes-Romero y Sira-Ramírez, [12]).

## 1.2. Planteamiento del problema

En la actualidad, la demanda de productos agrícolas va en constante aumento en respuesta a la creciente demanda de la población (Bongiovanni et al., [3]), lo que propicia la modernización de las prácticas agrícolas aumentando el número de maquinaria para facilitar el arduo trabajo de los jornaleros. Sin embargo, las condiciones geográficas de los terrenos de cultivo presentan irregularidades en ciertas zonas de su extensión, tal como se muestra en la Figura 1.3, dificultando el trabajo de los operadores de las máquinas agrícolas. En este caso, se aumenta el *efecto de la deriva* (aquella parte de la aspersión que no alcanza el blanco objetivo del tratamiento) a causa de la variación en la altura de irrigación en los sistemas de riego basados en barras pulverizadoras. El aumento en la deriva producida por el riego no uniforme produce que un cierto número de plantas sean excluidas de agua y nutrientes necesarios para cumplir con la calidad requerida para su venta y distribución. Por lo tanto, ocasionaría grandes pérdidas económicas a las empresas por producto dañado y no vendido.

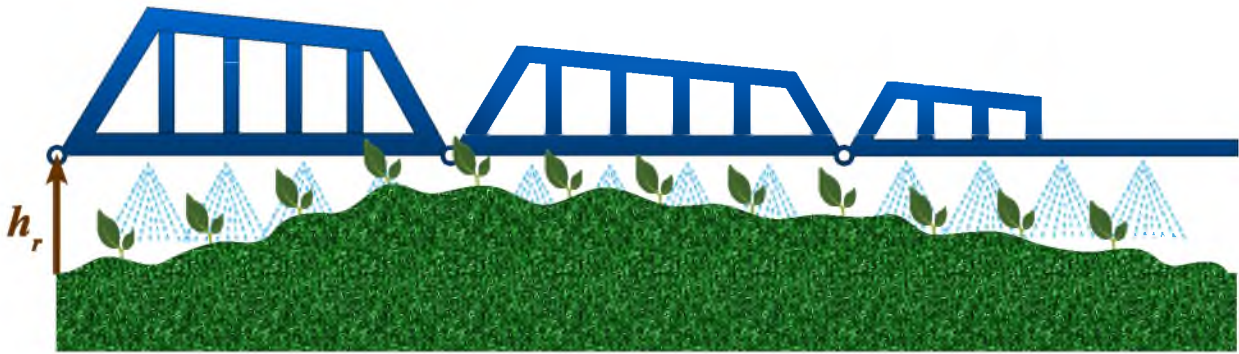


Figura 1.3: *Deriva* producida por el cambio de altura de irrigación provocada por la irregularidad de la superficie del terreno.

## 1.3. Justificación

La producción agrícola a nivel mundial debe abastecer de alimentos a la población humana y promover su desarrollo económico-social. Un eficiente sistema de riego deberá dar soluciones a esta demanda creciente del sector agrícola (ver Santos et al., [20]). Disponer de un sistema de riego adaptable al perfil de terreno disminuye el factor de la deriva causada por el cambio en la altura de irrigación, esto hace posible que la distribución de agua y nutrientes sea más homogénea a la mayor parte del cultivo, para que las plantas crezcan de manera simultánea y cumplan con los requerimientos específicos para su venta en el mercado y no existan mayores pérdidas económicas. Adquirir un sistema comercial de esta magnitud es altamente costoso y en su mayoría son maquinaria de gran tonelaje, diseñados para trabajar en grandes

extensiones de terreno y no son aptos para campos pequeños o en caminos de reducido espacio. Entonces se propone el diseño conceptual de una estructura de barras pulverizadoras, así como la selección de sensores y actuadores. El propósito es proponer el diseño de un prototipo de bajo costo y resistente, y mediante la aplicación de esquemas de control activo se regulará el movimiento de cada barra para que su geometría se adapte al perfil de terreno, por irregular que este sea.

## 1.4. Estado del Arte

La técnica de irrigación por medio de barras pulverizadoras es una práctica que se ha realizado desde hace varios años, sin embargo, son sistemas susceptibles a las condiciones que el terreno presenta, por lo que una superficie con irregularidades aumenta el efecto de la deriva en las plantas objetivo, además que también puede ocasionar daños a la misma estructura de las barras por colisiones indeseadas con el terreno, es por ello que los fabricantes han desarrollado técnicas para que la irrigación sea eficiente a pesar de la deformidad del terreno.

El fabricante de maquinaria agrícola *VALTRA*<sup>®</sup> presenta una pulverizadora autopropulsada modelo *BS3020H* que posee suspensión neumática activa para mantener la estabilidad del vehículo y de ese modo las barras permanecen horizontales, tal como se muestra en la Figura 1.4.



Figura 1.4: Pulverizadora autopropulsada VALTRA BS3020H con suspensión activa para mantener la estabilidad del vehículo, ver en [26].

La compañía *PRABA*<sup>®</sup> desarrolló un nuevo dispositivo basculante central con amortiguación controlada (ver Figura 1.5) que le permite lograr una mayor estabilidad en barras de gran tamaño. Opera con un sistema de bielas y resortes que, combinados con articulaciones en cada uno de los extremos de las alas, reducen notablemente los esfuerzos producidos por las irregularidades del terreno, amortiguando los golpes y estabilizando rápidamente la barra. La innovación le permite ofrecer una mayor estabilidad, lo que aumenta la durabilidad de todos sus componentes y reduce los costos de mantenimiento.



Figura 1.5: Pulverizadora autopropulsada modelo AR 3.4 S2 de la compañía PRABA con el sistema de botalón central basculante, ver en [19].

*KS pulverizadores*<sup>®</sup> presenta el *sensor de barras KS*, este es un dispositivo basado en una suspensión pasiva con amortiguador hidráulico instalado en la parte inferior de las barras del pulverizador, esto sin alterar las características originales de la máquina. En la parte inferior del dispositivo tipo suspensión se encuentra una rueda, que da la limitación de altura, anula el peso de las barras y acompañan la altura de acuerdo con el terreno y según el modelo de pulverizadores se calibran los sensores hidráulicos. Además de brindar un soporte para las barras para atenuar torsiones y flexiones en gran magnitud, disminuye la deriva al mantener las barras a una altura regulada por el sensor de barras KS. El sistema al ser del tipo mecánico reacciona rápido a los cambios del perfil de terreno, evitando así el daño en un impacto entre las barras de la pulverizadora y el terreno cuando ocurra un cambio brusco en el perfil. En la Figura 1.6, se muestra el sensor de barras KS instalado en una pulverizadora de la compañía PLA.



Figura 1.6: Sistema de control de altura por medio de sensores de barras KS instalado en un pulverizadora autopropulsada de la compañía PLA ver en [21].

La compañía *NORAC*<sup>®</sup> lanza al mercado el *sistema de control de altura UC4+<sup>TM</sup>*. Este sistema emplea sensores ultrasónicos instalados a la izquierda, derecha y al centro de la barra pulverizadora para mantener en forma automática la altura pre programada sobre el terreno

o sobre los cultivos. Estos sensores no dependen de las condiciones de luminosidad para medir la altura de las barras, por lo tanto se puede operar el equipo de día o de noche. La tecnología del sensor inteligente le permite al sistema NORAC controlar y administrar el balanceo de la barra pulverizadora al mismo tiempo que controla la altura de la pulverización para mantener un riego homogéneo sobre la mayor cantidad de superficie. El sistema UC4+™ de NORAC permite un control efectivo de la barra sin tener que alterar el diseño original de la barra misma, es por ello que el sistema puede ser instalado en cualquier barra con actuadores hidráulicos en el mercado. En la Figura 1.7 se muestra el sistema instalado en una pulverizadora de la compañía PLA.

El sistema de control de altura NORAC es actualmente el método más eficiente para enfrentar el problema de la deriva producida en el momento de irrigación, aunque también es de los más sofisticados.



Figura 1.7: Pulverizadora autopropulsada PLA con barras hidráulicas articuladas y controlados con el sistema de control de altura de NORAC [13].

## 1.5. Hipótesis y predicciones

El avance tecnológico en el sector agrícola está enfocado al desarrollo de máquinas que sean capaces de adaptarse a las condiciones de diversas variables que existen en el entorno. En este caso, como el sistema de riego basado en barras pulverizadoras, se encontrara expuesto a terrenos en donde la superficie es irregular, entonces, se pretende diseñar una estructura compuesta por tres barras unidas en serie por medio de articulaciones rotacionales, tal que, su geometría se adapte a la forma del terreno manteniendo una altura constante entre las barras y el suelo, tal como se muestra en la Figura 1.8. Para poder ejercer una acción correctora a la irregularidad del terreno se emplearán sensores ultrasónicos en el extremo de cada una de las barras para obtener la medición de la posición vertical que existe entre cada una de ellas con respecto del suelo Fusario, et al., [8]. Además, implementando una estrategia de control (ver Ogata, [15]) se puede regular la fuerza ejercida por los actuadores lineales eléctricos que realizarán el desplazamiento rotacional de cada una de las tres barras. Tal conversión de

desplazamiento será realizado por medio de un mecanismo de cuatro barras que convertirán el movimiento lineal en rotacional (ver Norton, [14]).



Figura 1.8: Compensación en la altura de las barras para efectuar una irrigación uniforme sobre la superficie del terreno.

## 1.6. Objetivos

### 1.6.1. Objetivo general

Diseñar un sistema de barras pulverizadoras y reducir el efecto de la deriva mediante el control activo de la altura de irrigación.

### 1.6.2. Objetivos específicos

- Desarrollar el diseño conceptual de un sistema de barras pulverizadoras empleando el programa SolidWorks<sup>®</sup> y obtener los parámetros mecánicos y geométricos necesarios para las pruebas numéricas.
- Obtener las ecuaciones cinemáticas entre la altura de las barras y su rotación, así como la cinemática de los mecanismos de conversión de movimiento.
- Obtener el modelo matemático que describa la dinámica del sistema de barras pulverizadoras aplicando las Ecuaciones de Euler-Lagrange y obtener un modelo lineal para aplicar esquemas de control activo.
- Regular la altura de las barras pulverizadoras mediante el uso de tres actuadores electromecánicos y aplicar esquemas de control activo PID, Planitud diferencial y GPI.
- Obtener resultados numéricos y comparar las respuestas de los esquemas de control con referencia en las pruebas de lazo abierto.

# Capítulo 2

## Diseño conceptual del sistema de riego

Los sistemas de riego basados en barras pulverizadoras se componen principalmente de barras articuladas en los extremos, en la mayoría de los casos son del tipo estructural y están elaboradas de acero, aunque en la actualidad se pueden encontrar fabricantes que optan por diseños basados en barras aluminio o de fibra de carbono, de tal forma que buscan el balance entre la reducción del peso de las barras y su resistencia a los esfuerzos a los que se encuentra sometido durante su operación.

Los mecanismos y elementos mecánicos que poseen cada tipo de barra pulverizadora depende principalmente de su funcionalidad y nivel de automatización. Los sistemas más sencillos utilizan un número pequeño de partes, y su apertura para extender las barras se realiza de forma manual, además que, las barras una vez extendidas permanecen completamente horizontales, alcanzando longitudes de 3 a 5 m de largo. Por el hecho de que dichas barras se mantienen sólo en posición horizontal aumenta la deriva en el momento de irrigación cuando la superficie del terreno es irregular. Los sistemas más sofisticados poseen barras cuya longitud total llegan hasta los 25 a 30 m de largo y para posicionar las barras en su sitio de trabajo hacen uso de actuadores hidráulicos, sin embargo, la mayoría de los casos, dichos actuadores son accionados de forma automática, tal que, sólo posicionan las barras de manera horizontal y una vez ahí, un elemento mecánico es el encargado de restringir su movimiento, de ese modo permanecen en posición estática.

El campo de estudio con respecto al diseño de barras pulverizadoras es amplio, no obstante, son pocos los fabricantes que prestan atención la uniformidad del riego debido a la irregularidad del terreno. La mayoría de los estudios se enfocan más a mantener la estabilidad de las barras y a las mejoras continuas en el método de aspersion adecuado para reducir la deriva en el momento de irrigación.

### 2.1. Subsistemas que conforman el sistema de barras pulverizadoras

El sistema de riego basado en barras pulverizadoras posee todos los elementos que forman parte de un sistema mecatrónico, los cuales son: el subsistema mecánico, subistema

electrónico y el subsistema de control. El diseño de cada uno de ellos es fundamental, ya que el conjunto de todos ellos conformará un prototipo funcional. En la propuesta de diseño, solo se considerará los subsistemas mecánico y electrónico, ya que el subsistema de control será desarrollado con detalle en el Capítulo 4.

### 2.1.1. Subsistema mecánico

El subsistema mecánico conforma el diseño y dimensionamiento de las barras, mecanismos y elementos mecánicos empleados para el soporte y movilidad del sistema de riego, tales como: diseño de la geometría de las barras, soportes para los actuadores, bujes para reducir la fricción en las uniones, tornillos, entre otros más.

### 2.1.2. Subsistema electrónico

En el subsistema electrónico se considera la selección de tarjetas tales como: adquisición de datos y de potencia, sensores de posición que midan la altura de las barras con respecto al suelo y actuadores lineales eléctricos que serán los encargados de generar el movimiento de las barras.

### 2.1.3. Puntos críticos en el desarrollo del diseño del prototipo

#### Subsistema mecánico

El subsistema mecánico esta compuesto por multiples elementos, por esta razón es importante cosiderar los siguientes aspectos:

#### Diseño de las barras

- El sistema estará compuesto por tres barras de la misma longitud cada uno y serán construidas a partir de perfiles PTR.
- Los soportes para las articulaciones principales de las barras y mecanismos serán construidos a partir de soleras de acero, así como también los eslabones de los mecanismos.
- Se dimensionarán los bujes y separadores de forma que no exista *juego mecánico* y se reduzca la fricción en las articulaciones principales y de los mecanismos.

#### Diseño de los mecanismos actuados

- El sistema estará conformado por 2 mecanismos de 4 eslabones y uno de 3 eslabones.
- Sobre soleras de acero se maquina el perfil de los eslabones.
- Se emplearán pernos pasantes en cada articulación del mecanismo.

### Diseño de los mecanismos no actuados

- Los elementos que formen parte del mecanismo de rotación para el plegado lateral de las barras serán maquinados a partir de barras de acero.
- Se proponen diseños que aumenten la resistencia de las articulaciones de rotación.
- Se diseñará un soporte móvil que impida la rotación de los mecanismos actuados, para el plegado lateral de las barras.

### Soporte para los sensores

- Los soportes de los sensores serán manufacturados a partir de placas de aluminio.
- El soporte esta conformado por dos elementos: uno fijo y uno móvil.
- Se emplean rodamientos en la unión entre el elemento fijo y móvil de tal forma que el elemento móvil rotará y el sensor se encontrara orientado en dirección hacia abajo, por los que siempre registrará la distancia vertical entre la barra y la superficie.

### Subsistema electrónico

El subsistema electrónico será el hardware entre la comunicación del subsistema de control y el subsistema mecánico. Esto implica considerar los siguientes factores.

- Fuente de alimentación CD.
- Uso de actuadores lineales.
- Etapas de potencia para los actuadores.
- Uso de sistemas de adquisición de datos y control.
- Instrumentación y sensores.

## 2.2. Especificaciones del sistema

Se considera que el sistema debe estar conformado por tres barras articuladas en los extremos por uniones de tipo revoluta. Para que la estructura sea de bajo costo se consideraran elementos y partes comerciales. La base en el diseño de cada barra será a partir de perfiles del tipo PTR cuadradas de 1 pulgada de calibre 14 considerando el acero estructural *ASTM A36*, ya que es de los más comunes y empleados en la mayoría de las estructuras. Para que el sistema sea funcional, es decir, que se pueda regular la rotación de las barras se implementan mecanismos de 4 eslabones entre las barras dos y tres del pulverizador y mediante la acción de fuerzas producidas por actuadores lineales eléctricos se induce el movimiento a los mecanismos, convirtiendo la fuerza lineal en un par sobre las articulaciones

principales de las barras. Mediante barras circulares se diseñan apoyos que son de utilidad para efectuar la rotación que permite el plegado lateral de las barras pulverizadoras hacia uno de los costados de la estructura fija (estructura que va sujeta al chasis de un vehículo). La obtención de la medición de las variables se hace mediante el uso de sensores ultrasónicos, ya que estos permiten medir grandes distancias con un margen de error bajo y son sencillos de implementar. Mediante el diseño de un soporte articulado se asegura que el sensor registre en todo momento la distancia vertical, con ello se podrá obtener el ángulo de rotación de cada barra y se retroalimentara mediante lazo cerrado al sistema de control. En la Figura 2.1 se puede observar el sistema en general y las partes principales que lo conforman.

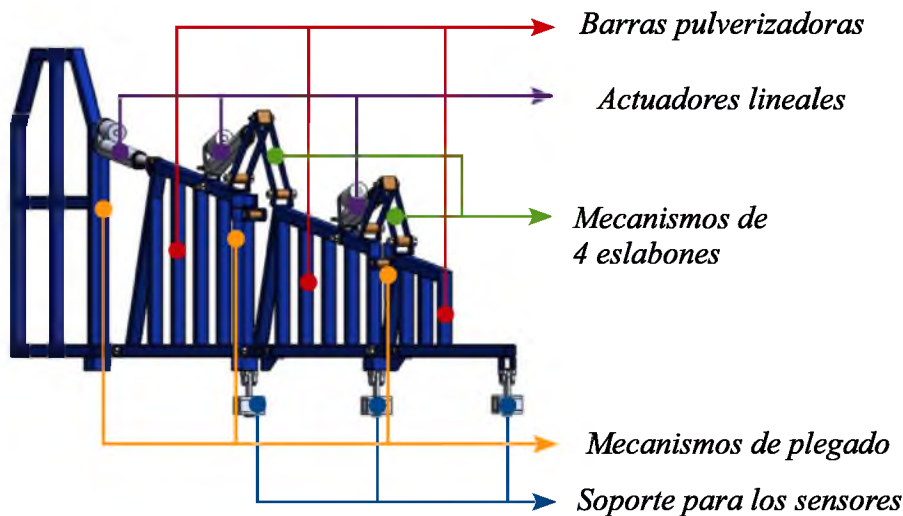


Figura 2.1: Sistema de riego basado en barras pulverizadoras y sus elementos principales que lo conforman.

## 2.3. Diseño conceptual

Etapa que tiene como finalidad trasladar el modelo funcional en una solución de diseño conceptual en términos ingenieriles, donde se emplean las técnicas de modelado para la simulación y el diseño de la estrategia de control para determinar las fuerzas que deben ejercer los actuadores para regular la altura de las barras a los niveles requeridos.

### 2.3.1. Estructura de las barras y soportes articulares

El diseño es propuesto para el estudio de la dinámica de las barras pulverizadoras y la implementación de esquemas de control activo para la regulación de su altura y disminuir el

efecto de la deriva, por esta razón se propone el diseño de un prototipo a escala con relación a los de tamaño real, es decir, se diseña tres barras de 1 m de longitud cada una, dando un ancho de labor de 3 m en total.

Dado que el sistema no se encuentra sometido a cargas externas, sino a su propio peso, entonces se realiza su diseño a partir de perfiles estructurales *PTR* cuadrados de 1 pulgada de calibre delgado (calibre 14, el cual posee un grosor de 0,075 pulgadas) para reducir peso. Los perfiles *PTR* seleccionados serán de acero *ASTM A36* debido a que es una aleación de acero al carbono de propósito general comúnmente usado a nivel mundial. Este acero suave es el tipo más común de acero utilizado en la construcción, la manufactura y muchas otras industrias. De los aceros al carbono, el acero *ASTM A 36* es una de las variedades más comunes, principalmente por su bajo costo. Además, ofrece una excelente resistencia y fuerza para un acero bajo en carbono y aleación.

Propiedades del acero *ASTM A 36*.

- Tiene una densidad de  $7860 \text{ kg/m}^3$  ( $0.28 \text{ lb/in}^3$ ).
- El acero *ASTM A 36* en barras, planchas y perfiles estructurales con espesores menores de 8 pulgadas (203.2 mm) tiene un límite de fluencia mínimo de 250 MPa (36 ksi), y un límite de rotura mínimo de 400 MPa (58 ksi).
- Las planchas con espesores mayores de 8 pulgadas (203.2 mm) tienen un límite de fluencia  $s_y$  mínimo de 220 MPa (32 ksi), y el mismo límite de rotura.

En la Figura 2.2 se muestra el diseño de las tres barras pulverizadoras. La primera esta compuesta de perfiles *PTR* y tiene una longitud menor a un metro. Esto se debe a que la longitud efectiva de 1 m se mide desde cada punto de rotación, y la articulación que va en el extremo es un soporte que se une al extremo de la barra mediante una unión soldada. Se considera de este modo ya que esa articulación se combina con la articulación no actuada encargada del plegado lateral de las barras.

La segunda barra pulverizadora tiene el mismo diseño que la primer barra, la diferencia es la altura que posee, ya que se ha considerado una pendiente, de tal forma que la parte superior de la geometría de cada barra decrezca a una relación de  $m = 0.3/3$ . Por lo que la segunda barra tendrá menor altura sobre la parte superior. Sin embargo, la forma geométrica es la misma. Por otra parte, como la tercer barra pulverizadora no carga ningún actuador, entonces se cambia la geometría de la estructura, despreciando la parte superior de la barra a partir de la mitad para disminuir su peso, tal como se muestra en la Figura 2.2.

El sistema completo tiene una dinámica compleja, ya que se compone de manera general de 6 grados de libertad, de los cuales sólo tres son actuados y los otros tres representan la rotación del plegado lateral de las barras, el cual se realiza de forma manual. Esta complejidad dinámica requiere el uso de varios soportes que son empleados como apoyos para las articulaciones de rotación de las barras, mecanismos y actuadores. Por lo que tendrán distintas formas geométricas de acuerdo a su funcionalidad. En la Figura 2.3 se muestran los diferentes soportes construidos a partir de soleras de acero *ASTM A36* de 1 y 2 pulgadas y del calibre 14, que fueron empleados como articulaciones en diferentes posiciones de la estructura.

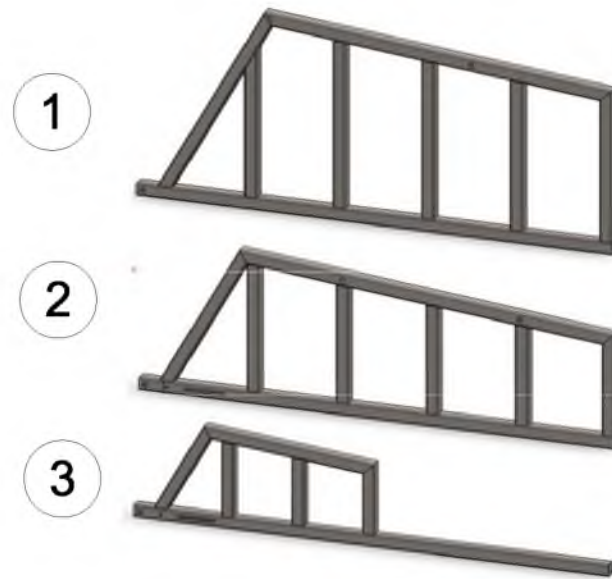


Figura 2.2: Diseño de las tres barras estructurales pulverizadoras mediante perfiles PTR.

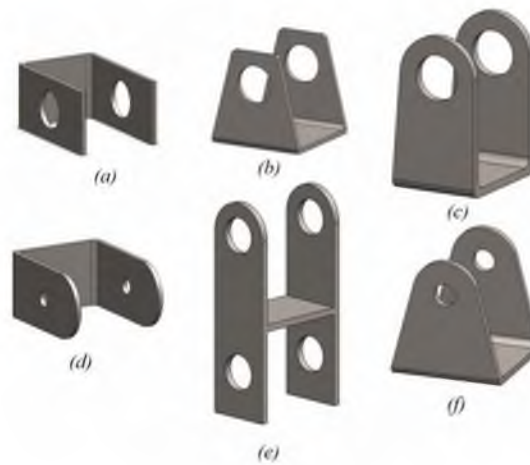


Figura 2.3: Diferentes soportes empleados en el sistema de barras pulverizadoras: (a) articulaciones principales, (b) articulaciones de los eslabones del mecanismo de 4 barras, (c) soporte del primer actuador, (d) apoyo para el eslabón derecho desacoplado de los mecanismos de 4 barras, (e) soporte de los actuadores y (f) soporte de unión entre el vástago del primer eslabón y la primera barra pulverizadora.

### 2.3.2. Mecanismos de 3 y 4 eslabones

Dado el tipo de sistema y movilidad que suelen presentar, se considera el uso de actuadores lineales en combinación con mecanismos que transformen el movimiento lineal en rotacional. Para la primer barra se considera un mecanismo de 3 eslabones, el cual esta constituido por dos eslabones y el actuador lineal, tal como se muestra en la Figura 2.4. En este caso, se considera que el actuador representa un eslabón de longitud variable.

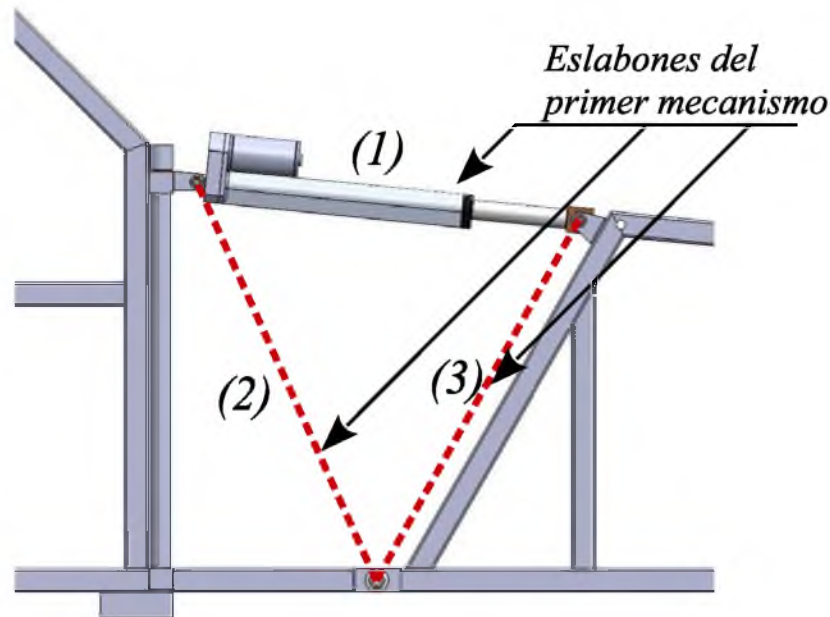


Figura 2.4: Mecanismo de tres eslabones formado por un eslabón móvil (3), fijo (2) y el actuador (1).

Con respecto a las otras dos barras pulverizadoras, el mecanismo empleado es una combinación de un mecanismo de 3 y 4 eslabones. El mecanismo de 3 eslabones se constituye por el actuador (4), el eslabón fijo (5) y el eslabón móvil (6). Por otra parte, el mecanismo de 4 eslabones se conforma por los eslabones (6), (7), (8) y (9).

El mecanismo de 4 eslabones también consiste en una cadena cinemática cerrada compuesto por los cuatro eslabones unidos mediante articulaciones del tipo revoluta. Este mecanismo es de un grado de libertad y de acuerdo a las dimensiones de sus eslabones se pueden generar diferentes tipos de movimiento, es decir, al fijar cualquiera de los eslabones se produce rotación en las demás en presencia de una fuerza externa aplicada a cualquiera de los eslabones móviles.

Por otra parte, el movimiento que puede tener el mecanismo puede estar restringido debido a la geometría de los eslabones, así como también del eslabón que se encuentre fijo, esto se conoce como la *Condición de Grashof* (ver Grashof, [9]). Esta condición permite predecir el comportamiento de rotación o rotabilidad de las inversiones de un eslabonamiento

de cuatro eslabones basándose sólo en las longitudes de los eslabones.

### Condición de Grashof

Si,  $S + L \leq P + Q$  el eslabonamiento es de Grashof y por lo menos un eslabón será capaz de realizar una revolución completa con respecto al elemento fijo. A esto se le conoce como una cadena cinemática de *clase I* Grashof, [9].

Donde  $S$  es el eslabón más corto,  $L$  el eslabón más largo,  $P$  uno de los eslabones restantes y  $Q$  el otro eslabón restante.

Si la desigualdad no es cierta, entonces el eslabonamiento no es Grashof y ningún eslabón será capaz de realizar una revolución completa con respecto a cualquier otro eslabón. Los movimientos posibles de un eslabonamiento de cuatro eslabones dependerá tanto de la condición de Grashof como la inversión elegida Norton, [14].

### Geometría de los mecanismos

Seleccionar de forma correcta las longitudes de los eslabones es parte importante para la generación de movimiento de las barras pulverizadoras. El mecanismo de 4 eslabones se encuentra formado por dos eslabones de longitud fija (eslabones (7) y (9)) y otros dos que pueden ser ajustables (eslabones (6) y (8)), tal como se muestra en la Figura 2.5. Se define que dos tienen longitud definida porque forman parte de la estructura de las barras pulverizadoras, mientras que los otros dos se incorporan a la estructura mediante apoyos colocados en la parte superior de las barras pulverizadoras.

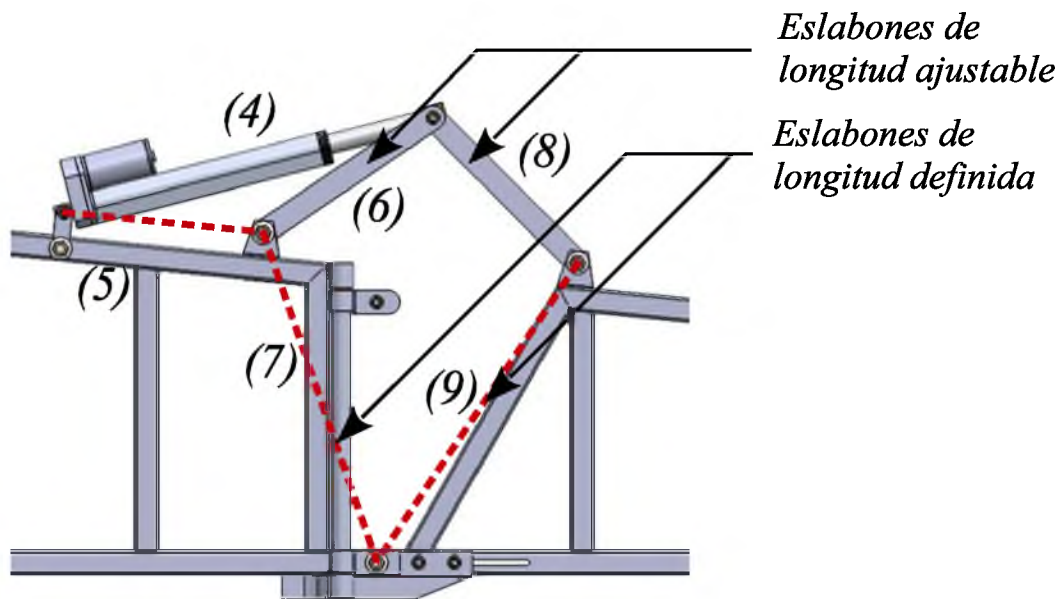


Figura 2.5: Eslabones que conforman el mecanismo de 4 eslabones, de los cuales los superiores pueden ser ajustables y los inferiores son fijos.

**Primer mecanismo de 4 eslabones.**

Las configuraciones de los dos mecanismos (mecanismos para la segunda y tercer barra pulverizadora) son similares, sin embargo, las dimensiones de todos los eslabones del primer mecanismo se encuentran definidas de acuerdo a la posición en la que se encuentran los apoyos. Dado que el sistema está diseñado de tal forma que las barras se plieguen de forma lateral después de realizar su labor en el campo, entonces, el diseño del mecanismo de plegado limita la longitud del eslabón (8), por lo tanto, el único eslabón con longitud ajustable es el (6). No obstante, también se ha considerado que el apoyo del actuador acoplado al mecanismo es *móvil* y tiene dos posiciones; la primera se emplea de tal forma que el actuador trabaje con el mecanismo de 4 eslabones y la segunda posición se utiliza para que el actuador quede fijo para el plegado lateral de las barras. Esta consideración representa una restricción en la ajustabilidad de la longitud del eslabón (6), ya que la longitud máxima del eslabón sería la misma que la longitud del eslabón (8), ya que si este fuera de mayor longitud, el soporte móvil del actuador no se podría fijar a la barra en posición de reposo. Por lo tanto, los dos eslabones superiores del mecanismo de cuatro eslabones tendrían la misma longitud, entonces, aplicando la condición de Grashof se podrá predecir el tipo de movimiento del mecanismo. La longitud de cada eslabón ha sido denotado por  $r_k$  (para  $k = 1, 2, 3, \dots, 15$ ) y se muestran en la Tabla 2.1, los cuales fueron obtenidos a partir de mediciones empleando el software Solidworks.

Aplicando la condición de Grashof.

$$S + L \leq P + Q$$

donde  $S = r_6$ ,  $L = r_9$ ,  $P = r_8$  y  $Q = r_7$ .

La desigualdad no se cumple

$$217.59 + 382.19 > 217.59 + 369.35$$

$$599.78 > 586.94$$

**Nota:** Las unidades de los eslabones están dadas en mm.

Esto indica que el mecanismo pertenece a la *Clase II* de la condición de Grashof, lo cual indica lo siguiente:

**Clase II**  $S + L > P + Q$

En este caso todas las inversiones serán balancines triples en donde ningún eslabón puede girar por completo. Entonces, el desplazamiento angular de los eslabones estará restringido a cierta cantidad angular. Sin embargo, esto no resulta perjudicial, debido a que los tipos de sistemas de riego compensadores de altura suelen tener poca movilidad, con el propósito de reducir los esfuerzos en la estructura debido a sacudidas y deflexiones.

**Segundo mecanismo de 4 eslabones.**

El mismo criterio para el dimensionamiento son aplicados para ajustar las dimensiones de los eslabones superiores (eslabones 12 y 14) del mecanismo empleado para la tercer

barra pulverizadora. Sin embargo, como el actuador que se emplea en este mecanismo es de menor longitud, entonces se puede hacer variar la longitud del eslabón (12) de tal forma que se garantice el mayor movimiento posible de las eslabones, no obstante, la cantidad a variar es mínima, debido a que el apoyo del actuador se encuentra a una posición cercana y no se puede desplazar de lugar ya que en dicha posición se asegura que el eslabón (14) se encuentre posicionado a una inclinación de  $45^\circ$  medidos a partir de la horizontal. Para evitar este problema, se selecciona la longitud del eslabón (12) igual a la del eslabón (14), el cual ya tiene longitud definida de acuerdo a la posición de su apoyo y del apoyo que se emplea para el desacoplamiento y plegado de la barra pulverizadora. Para predecir el tipo de movimiento que va a experimentar se aplica de nuevo la condición de Grashof.

$$S + L \leq P + Q$$

donde  $S = r_{12}$ ,  $L = r_{15}$ ,  $P = r_{14}$  y  $Q = r_{13}$ .

Ladesigualdad no se cumple

$$164.46 + 287.88 > 164.46 + 272.01$$

$$452.34 > 436.47$$

El mecanismo entonces vuelve a pertenecer a la Clase II, por lo tanto ningun eslabón del mecanismo será capaz de realizar revoluciones completas.

Como la longitud de los eslabones quedarón completamente definidas y no se realizó ningun ajuste, entonces los parámetros definitivos de los eslabones son los que se muestran en la Tabla 2.1. También se muestra la inclinación  $\phi_k$  la cual representa la orientación de los eslabones del mecanismo con respecto a la horizontal.

Las longitudes mostradas fueron obtenidas mediante el uso del software Solidworks<sup>®</sup>, considerando que las eslabones pulverizadoras se encuentran en posición horizontal, por lo tanto, los ángulos y eslabones de longitud variables que se muestran, corresponden a sus posiciones iniciales.

### 2.3.3. Mecanismo de plegado lateral de las barras

El funcionamiento principal del sistema de riego adaptable al perfil de terreno consiste en regular la altura de las barras para mantener una irrigación uniforme sobre el cultivo, para ello el conjunto de actuadores y mecanismos se encargaran de inducir el desplazamiento angular de cada barra y de este modo reducir el efecto de la deriva. Sin embargo, cuando el sistema no se encuentre en operación las barras deberán permanecer en una posición tal que, sea práctico su transporte, almacenaje y que ocupe la menor cantidad de espacio disponible. Para ello, se diseña un mecanismo que, además de hacer rotar a las barras pulverizadoras con respecto al eje  $Z$ , también lo haga rotar sobre el eje  $Y$ , de tal forma que las tres barras se encuentren plegadas una sobre otra, reduciendo espacio y hacer sencilla la labor de transporte cuando el vehículo circula por calles o avenidas de una ciudad.

Barra Pulverizadora	$k$	Longitud $r_k$ [mm]	Inclinación $\phi_k$ [°]
1	1	404.5	354.28
	2	458.57	294.38
	3	433.46	60.54
2	4	404.5	14.39
	5	212.49	354.28
	6	217.59	34.01
	7	369.35	289.06
	8	217.59	315
	9	382.19	56.02
3	10	329.5	12.48
	11	184.73	354.28
	12	164.46	33.01
	13	265.77	291.14
	14	164.46	315
	15	272.01	54.41

Tabla 2.1: Longitud e inclinación de los eslabones de los mecanismos de 3 y 4 eslabones.

El mecanismo se basa principalmente en el uso de barras cilíndricas de acero ASTM A32, convertidas en bisagras y eje de rotación (este proceso se puede realizar mediante operaciones de torneado), para reducir la fricción entre el roze de metales se ha añadido bujes de bronce entre el conjunto que forman las bisagras (hembra-macho), tal como se muestra en la Figura 2.6. El sistema de plegado consiste en un procedimiento de 4 pasos.

1. Desplazar el soporte móvil que se encuentra en la parte inferior de la barra pulverizadora y colocarlo hasta que se encuentre en contacto con el soporte que sujeta la bisagra hembra. De esta manera se consigue el bloque del movimiento rotacional de la barra sobre el eje  $Z$ .
2. Desacoplar los eslabones superiores del mecanismo de 4 eslabones retirando el perno que se encuentra en la unión y acoplar el eslabón derecho al soporte unido al eje de rotación de plegado.
3. Retirar el perno que fija el apoyo del actuador y desplazarlo hasta la perforación en el otro extremo de la barra, con esto el actuador y el eslabón izquierdo del mecanismo quedarán fijos y no se moverán cuando la barra se encuentre plegada.
4. Rotar la barra completa con respecto al eje  $Y$  hasta quedar paralela con la parte lateral de la estructura fija.

Llevar a cabo el procedimiento anterior en el orden indicado garantiza el plegado lateral de las barras de forma segura y sin accidentes. El desplazamiento de los soportes móviles está pensado para que tengan dos posiciones y para ello se han realizado perforaciones para la ubicación de pernos roscados.

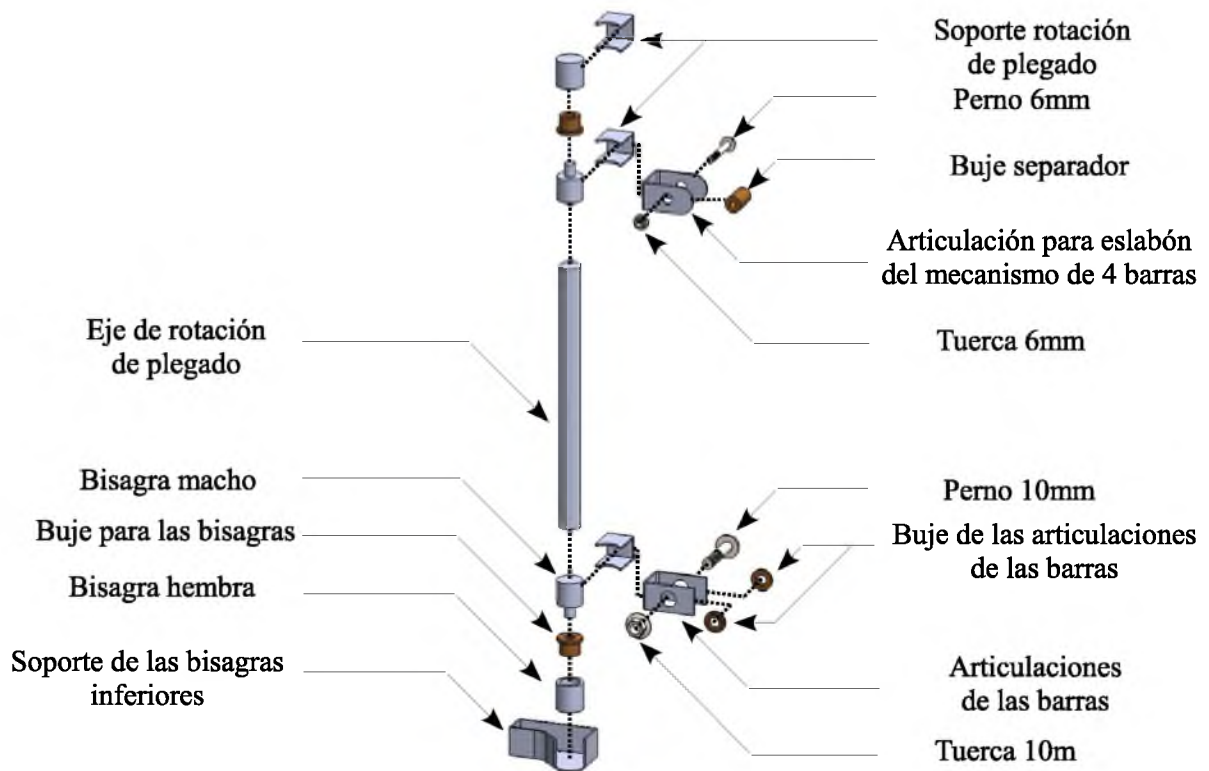


Figura 2.6: Mecanismo de plegado y rotación de las barras 2 y 3.

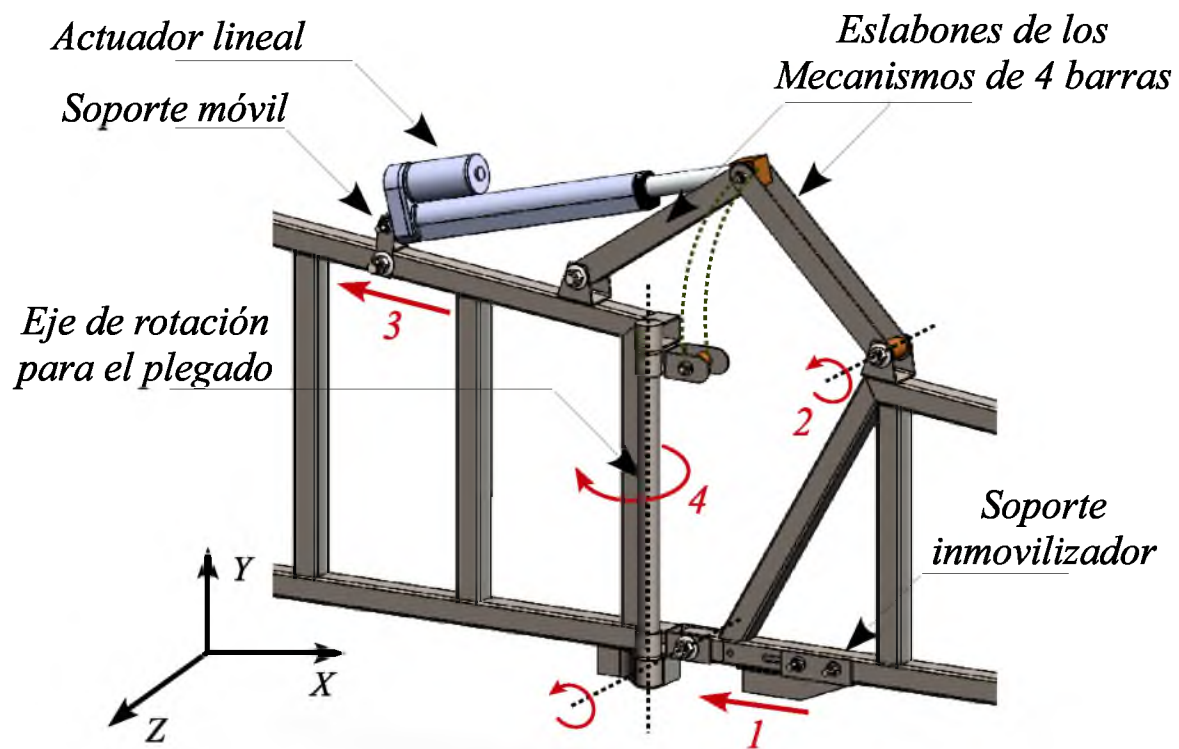


Figura 2.7: Descripción gráfica del procedimiento de plegado y elementos del mecanismo que lo conforman.

El sistema de desacoplamiento articular del mecanismo para el plegado lateral de las barras se aplica sólo en la segunda y tercer barra. En la primera no se aplica el mismo funcionamiento, debido a que hay otra configuración de movimiento, por lo que la rotación de la primer barra para su plegado es directo, sin desacoplar ningún elemento.

### 2.3.4. Tornillos y dimensionamiento de bujes y separadores

#### Tornillos

Los tipos de tornillos que se emplean en el sistema de barras pulverizadoras son del tipo hexagonal con collar biselado *DIN 6921* de acero inoxidable. Se han considerado dos diámetros de medida comercial, *M10* para ser usado en las articulaciones principales y en soportes donde la carga es mayor, mientras que tornillos *M6* son empleados en los mecanismos de cuatro eslabones y en los apoyos de los actuadores, ya que la carga en esos puntos es menor y además, el actuador está diseñado para el uso de tornillos y pasadores de ese diámetro. Las tuercas son también del tipo hexagonal con collar biselado *DIN 6923* en este caso.

#### Bujes y separadores

Los bujes son elementos mecánicos empleados en la mayoría de máquinas, mecanismos y dispositivos con elementos móviles con el propósito de reducir la fricción entre piezas en contacto. Otros elementos mecánicos que suelen emplearse para el mismo propósito son los rodamientos radiales y lineales. Sin embargo, como la rotación de las barras es mínima y a bajas velocidades, sólo se requiere hacer uso de elementos no tan sofisticados, que puedan adaptarse a geometrías no estandarizadas y que además sirvan para separadores de partes.

Los bujes generalmente son elaborados a partir de barras de bronce, el cual consiste en la aleación metálica de cobre como elemento principal y estaño como componente secundario.

Algunas de sus propiedades son:

- Densidad:  $8.90 \text{ g/cm}^3$
- Elongación:  $< 65 \%$
- Dureza Brinell: de 70 a 200
- Módulo de elasticidad: de 80 a 115 GPa
- Resistencia a la cizalla: de 230 a 490 MPa
- Resistencia a la tracción: de 300 a 900 MPa

### 2.3.5. Actuadores y sensores

#### Actuador lineal eléctrico

Los actuadores son los elementos que introducen energía al sistema por medio de la acción de fuerzas o torques. Los actuadores pueden ser alimentados mediante fuentes neumáticas,

hidráulicas y eléctricas. Los actuadores que se emplean en los sistema de barras pulverizadoras son cilindros hidráulicos, ya que estos pueden generar gran cantidad de fuerza y al mismo tiempo sirven como elementos de amortiguación, por lo que disipan cierta energía cuando la estructura es sometida a sacudidas.

En este caso, se propone el uso de actuadores lineales eléctricos, ya que se pretende que la estructura sea de bajo costo, con componentes accesibles en el mercado, además, siendo un sistema electromecánico se facilita la implementación y la aplicación de esquemas de control activo. El actuador eléctrico está compuesto por un motor eléctrico de CD y mediante un sistema de transmisión por tren de engranaje hace girar un tornillo de potencia, el cual esta acoplado al vástago del actuador.

Se han considerado dos tipos de actuadores, dos que poseen una carrera de 200 mm y el otro de 150 mm, tal como se muestra en la Figura 2.8. Las especificaciones para ambos actuadores se muestra en la Tabla 2.2.



Figura 2.8: Actuadores lineales eléctricos del fabricante GlideForce.

Especificaciones		
Parámetros	Actuador 200 [mm]	Actuador 150 [mm]
Voltaje de alimentación [V]	12	12
Capacidad [N]	1000	1000
Velocidad sin carga [mm/s]	12	12
Corriente sin carga [mA]	560	540

Tabla 2.2: Especificaciones eléctricas y mecánicas de los actuadores lineales.

### Sensor

Los sensores son dispositivos encargados de convertir el valor de una variable física en una señal eléctrica de voltaje o corriente codificada, ya sea en forma analógica o digital (Balcells y Romeral, [2]).

Los tipos de sensores que se tienen que emplear en el sistema de riego son los que miden distancia, ya que se requiere obtener la medición de la posición vertical entre las barras y el suelo. Estos sensores pueden ser:

- Sensores fotoeléctricos.
- Sensores de proximidad inductivos.
- Sensores de proximidad capacitivos.
- Sensores ultrasónicos.

Los sensores que mejor cumplen con el proposito del prototipo son los *sensores ultrasónicos*, los cuales operan a través del aire y detectan cualquier tipo de objeto que sea capaz de reflejar el ultrasonido. Como la aplicación principal de los sistemas de riego por medio de barras pulverizadoras es efectuar irrigación a cultivos de baja vegetación, no habría problema con el eco que podría producirse por el mismos cultivo.

Estos sensores se emplean para detectar objetos sin necesidad de contacto físico en diferentes campos de la automatización. Pueden detectar objetos sólidos, líquidos, granulados, etc., de cualquier formato y color. Para que el objeto pueda detectarse, debe estar en el cono de iluminación del detector. La distancia máxima varía según la marca del sensor, pero en general en promedio no supera los 10 m.

Operan como los radares, en este caso emiten pulsos ultrasónicos, en lugar de pulsos electromagnéticos como los radares, que al reflejarse en los objetos y al retornar al sensor genera una señal cuadrada (Fusario et al., [8]).

El ancho de pulso de la señal cuadrada generada depende de la distancia que existe entre el sensor y el objeto, Por otro lado, estos sensores miden el tiempo que tarda la señal de eco en retornar al sensor, por lo que determinan la diferencia de tiempo entre el pulso emitido y el eco recibido. Como la velocidad de propagación es constante se puede determinar la distancia a la que se encuentra el objeto.

#### Sensor ultrasónico HC-SR04.

El sensor que se propone es el sensor ultrasónico HC-SR04, debido a que es muy empleado en proyectos de electrónica y apesar de su bajo precio puede medir la distancia de un objeto que se encuentra hasta 4 m con una resolución de 0,3 cm.

El sensor cuenta con cuatro terminales de conexión (gnd, vcc, trigger y echo), tal como se muestra en la Figura 2.9, de los cuales dos son alimentación y los otros dos se emplean para habilitar los pulsos ultrasónicos y el voltaje de salida del sensor.



Figura 2.9: Sensor ultrasónico HC-SR04.

Para hacer funcionar el sensor se requiere de una interfaz con un microcontrolador, para programar el algoritmo encargado de habilitar el sensor y adquirir el valor de la salida. La habilitación del funcionamiento del sensor consiste en enviar un pulso de  $10\ \mu\text{s}$  por el pin Trigger, lo que produce la emisión de pulsos ultrasónicos a una frecuencia de 40 MHz, mientras tanto, por el pin Echo se produce una señal cuadrada, cuyo ciclo empleiza en el momento que se emite los pulsos y termina cuando los pulsos regresan y son detectados por el canal receptor del sensor, entonces, la señal cuadrada generada a la salida del sensor se vuelve de ancho de pulso variable, el cual es proporcional a la longitud detectada por el sensor. A continuación se muestran las especificaciones del sensor.

- Alimentación de 5 V
- Interfaz: 4 terminales Vcc, Trigger, Echo, GND
- Rango de medición: 2 – 400 cm
- Corriente de alimentación: 15 mA
- Frecuencia del pulso: 40 kHz
- Apertura del pulso ultrasónico:  $15^\circ$
- Señal de disparo:  $10\ \mu\text{s}$
- Dimensiones del módulo:  $45 \times 20 \times 15\ \text{mm}$ .

### Soporte para los sensores

Se propone que los sensores se situen en el extremo de las barras pulverizadoras, además que, el sensor debe estar orientado hacia abajo en todo momento, sin importar que las barras se inclinen, es por ello que se diseña un soporte que tenga su propia articulación rotacional, tal que pueda rotar cuando la barra también lo haga y de ese modo permanecer orientado hacia abajo por los efectos de la gravedad.

El material considerado para el diseño del soporte es una placa de *aluminio 6061* de 1/4 de pulgada de espesor, esta es una aleación de aluminio endurecido que contiene como principales elementos aluminio, magnesio y silicio. Es una de las aleaciones de aluminio más comunes para uso general, ya que es de baja densidad, ductil, sencillo de maquinar y ofrece resistencia a la corrosión. En la Tabla 2.3 se muestran las propiedades físicas del aluminio.

En la Figura 2.10 se muestra el diseño del soporte de los sensores ultrasónicos elaborado principalmente por placas de aluminio de 1/4 de pulgada, mientras que en la Figura 2.11 se encuentra el ensamblado mediante tornillos de acero inoxidable  $M3 \times 0.5$ . El rodamiento empleado para la articulación del soporte es el *SKF W627 6X* de acero inoxidable de 6 mm de diámetro interior.

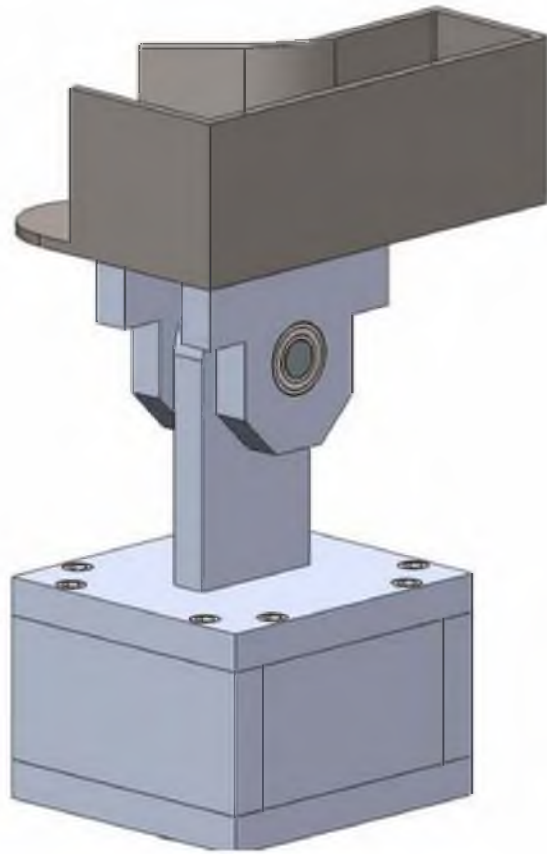


Figura 2.10: Soporte para los sensores ultrasónicos.

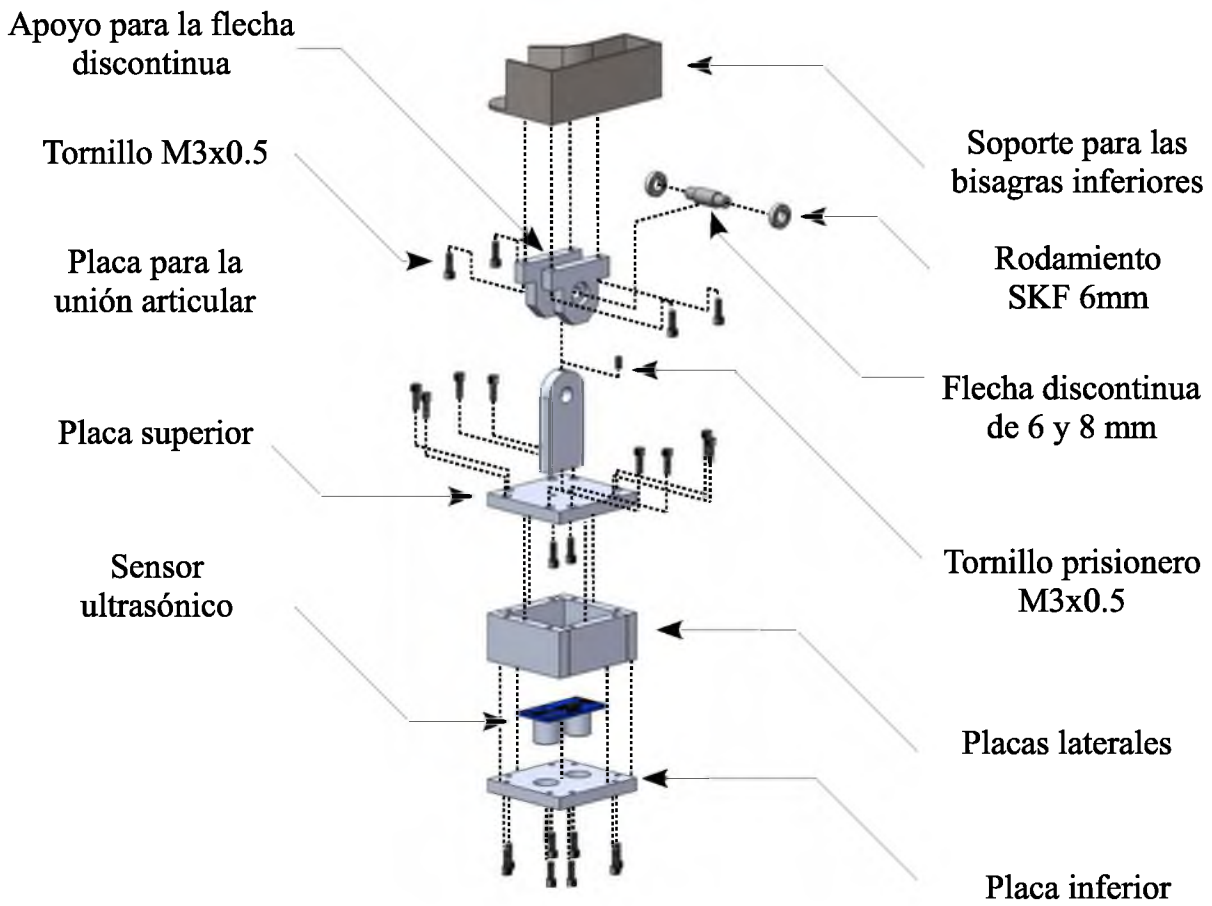


Figura 2.11: Vista explosionada que muestra los componentes que conforman el soporte de los sensores ultrasónicos.

Propiedades			
Densidad [g/cm <sup>3</sup> ]	2.7	Coef. de dilatación (0 a 100 °C) [°C – 1 × 10 <sup>6</sup> ]	23.6
Rango de fusión [°C]	575 – 650	Conductividad térmica(0 a 100 °C) [W/m °C]	Temple T6 : 167
Módulo de elasticidad [MPa]	69500	Resistividad a 20 °C [μΩ cm]	Temple T6 : 4.0
Coefficiente de Poisson	0.33	Calor específico (0 a 100 °C)	940

Tabla 2.3: Propiedades físicas del aluminio.

### 2.3.6. Tarjetas de potencia y adquisición de datos

La interfaz entre el subsistema mecánico y el subsistema de control se realiza mediante la comunicación de las tarjetas de potencia y de adquisición de datos.

#### Módulo de potencia

Se utiliza una tarjeta de potencia *L298N* conocido como *Módulo Puente H* (ver Figura 2.12). El circuito integrado que posee esta tarjeta puede controlar hasta dos motores CD de forma simultánea, mediante la conmutación de señales digitales y PWM. Las características principales de esta tarjeta se muestran a continuación:

- Voltaje de operación 4 – 35 V
- Controlador de motor L298N, impulsa 2 motores de CD o 1 motor paso a paso
- Corriente máxima 2 A por canal o 4 A máx.
- Chip: ST L298N
- Fuente de alimentación lógica: 5 V
- Potencia máxima: 25 W
- Peso: 35 g
- Tamaño: 55 × 60 × 30 mm
- Temperatura de almacenamiento: –25 a 135 °C



Figura 2.12: Tarjeta de potencia para motores CD L298N.

### Tarjeta Arduino<sup>®</sup>

El sensor ultrasónico requiere de un microcontrolador para poder programar el algoritmo que habilita el funcionamiento del sensor, se considera el uso de la tarjeta *Arduino<sup>®</sup> mega 2560*, ya que, además de habilitar el funcionamiento del sensor, también se puede realizar la etapa de adquisición de datos, y a su vez, esta tarjeta puede comunicarse vía comunicación serial con la plataforma de Matlab/Simulink y visualizar la lectura del sensor en tiempo real.

Las características principales de la tarjeta son:

- Microcontrolador: AT mega 2560
- Voltaje de operación: 5 V
- Voltaje de Entrada: 7 – 12 V
- Voltaje de Entrada (límites): 6 – 20 V
- Pines digitales de Entrada/Salida: 54 (15 son para PWM)
- Pines análogos de entrada: 16
- Corriente DC por cada Pin Entrada/Salida: 40 mA
- Corriente DC entregada en el Pin 3.3 V: 50 mA
- Memoria Flash: 256 kB (8kB usados por el bootloader)
- SRAM: 8kB
- EEPROM: 4kB
- Clock Speed: 16 MHz



Figura 2.13: Tarjeta arduino Mega 2560.

### 2.3.7. Prototipo virtual terminado

El prototipo virtual terminado compuesto por las barras, mecanismos, actuadores, sensores y soportes se muestra en la Figura 2.14. Este prototipo virtual cumple con las especificaciones propuestas, ya que la longitud entre la articulación de cada barra es de 1 m y mediante el diseño de mecanismos se obtiene el movimiento rotacional en dos ejes, de tal forma que se puede conseguir el movimiento para la corrección de la orientación de las barras para incrementar la eficiencia en la irrigación y también se obtiene el plegado lateral de las barras cuando no se requiera la extensión de las mismas para realizar su labor en el campo.

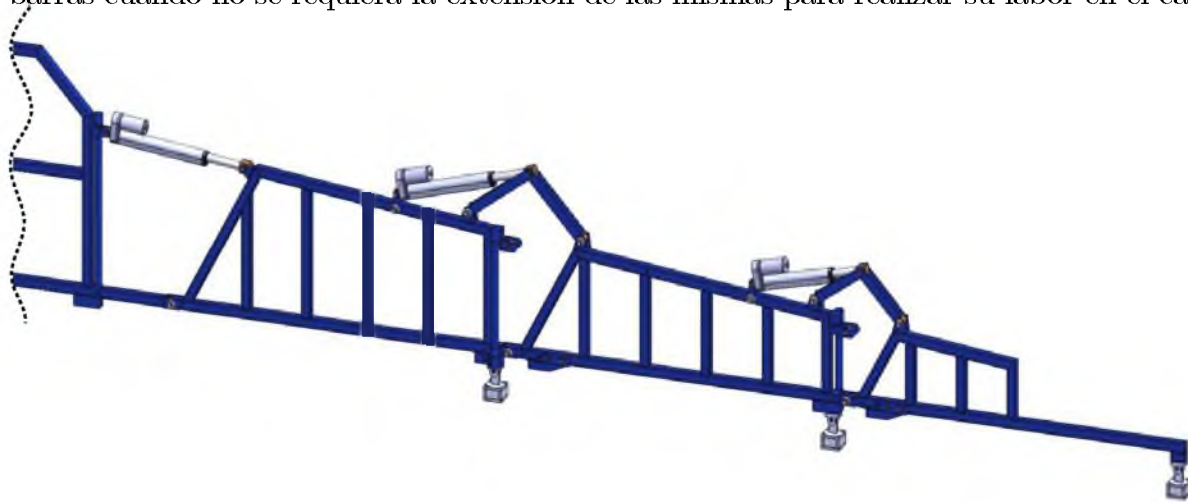


Figura 2.14: Prototipo virtual del sistema de riego basado en barras pulverizadoras.

En las Figuras 2.15 y 2.16, se muestran las posiciones máximas de las barras de acuerdo al desplazamiento del vástago de los actuadores lineales eléctricos. Se puede observar una inclinación simétrica de la primera barra de acuerdo a la longitud mínima y máxima del vástago del primer actuador, sin embargo, esta simetría no la comparten las otras barras,

debido a que la relación de movimiento que proporciona los mecanismo de 4 eslabones no es lineal.

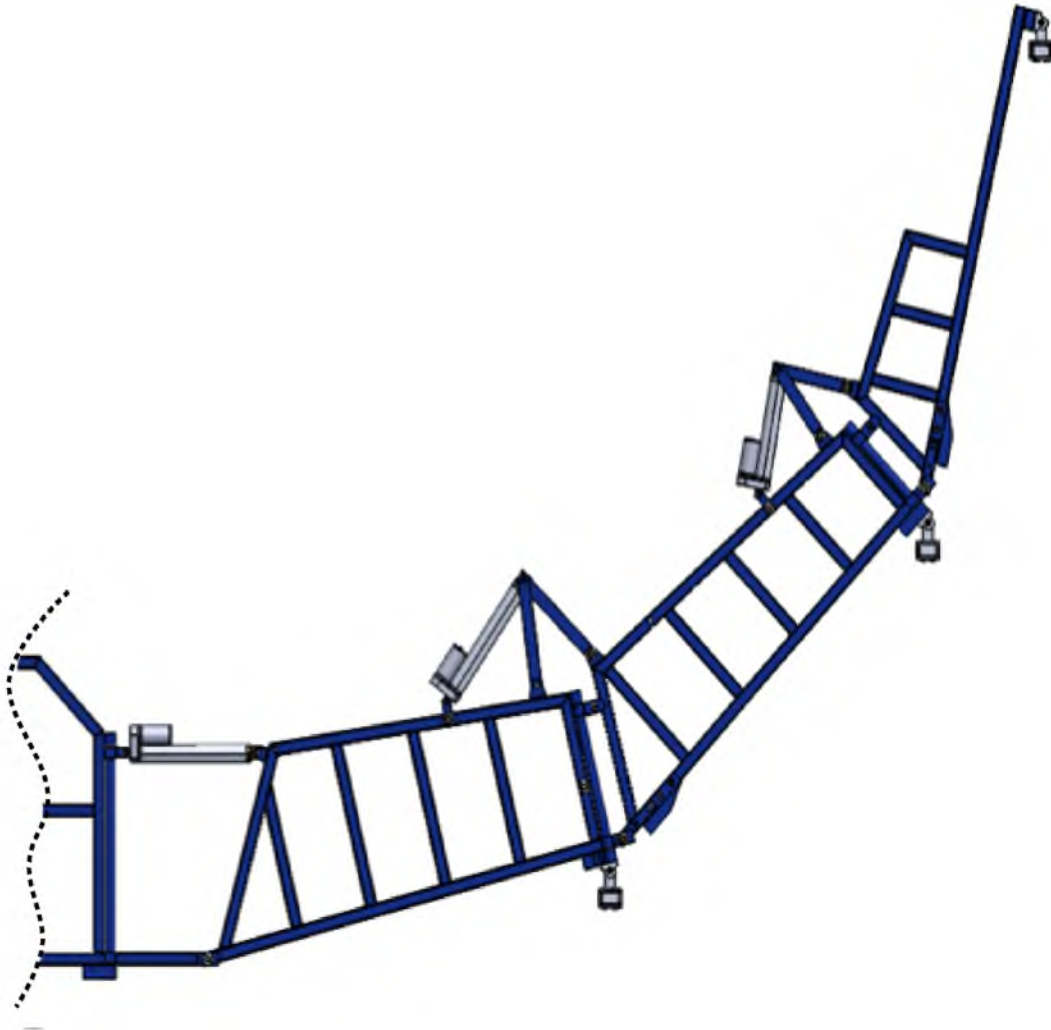


Figura 2.15: Desplazamiento angular máximo de las barras en sentido anti-horario al contraer el vástago del actuador.

En la Figura 2.17 se muestran diferentes formas que adopta la estructura de las barras cuando se alterna la extensión y contracción del vástago de los actuadores.

En la Figura 2.18 se muestra el plegado lateral de las barras pulverizadoras, se desplazan angularmente de tal forma que se posicionan de forma paralela a la anterior y su posición final es perpendicular a la posición en la que efectúa la irrigación.

Los parámetros mecánicos y físicos del sistema se han obtenido mediante el uso del software Solidworks, el cual aproxima el valor de los parámetros como la masa, centro de masa e inercias de acuerdo a la geometría de los componentes y tipo de material seleccionado. En la Tabla 2.4 se muestran los parámetros del sistema.

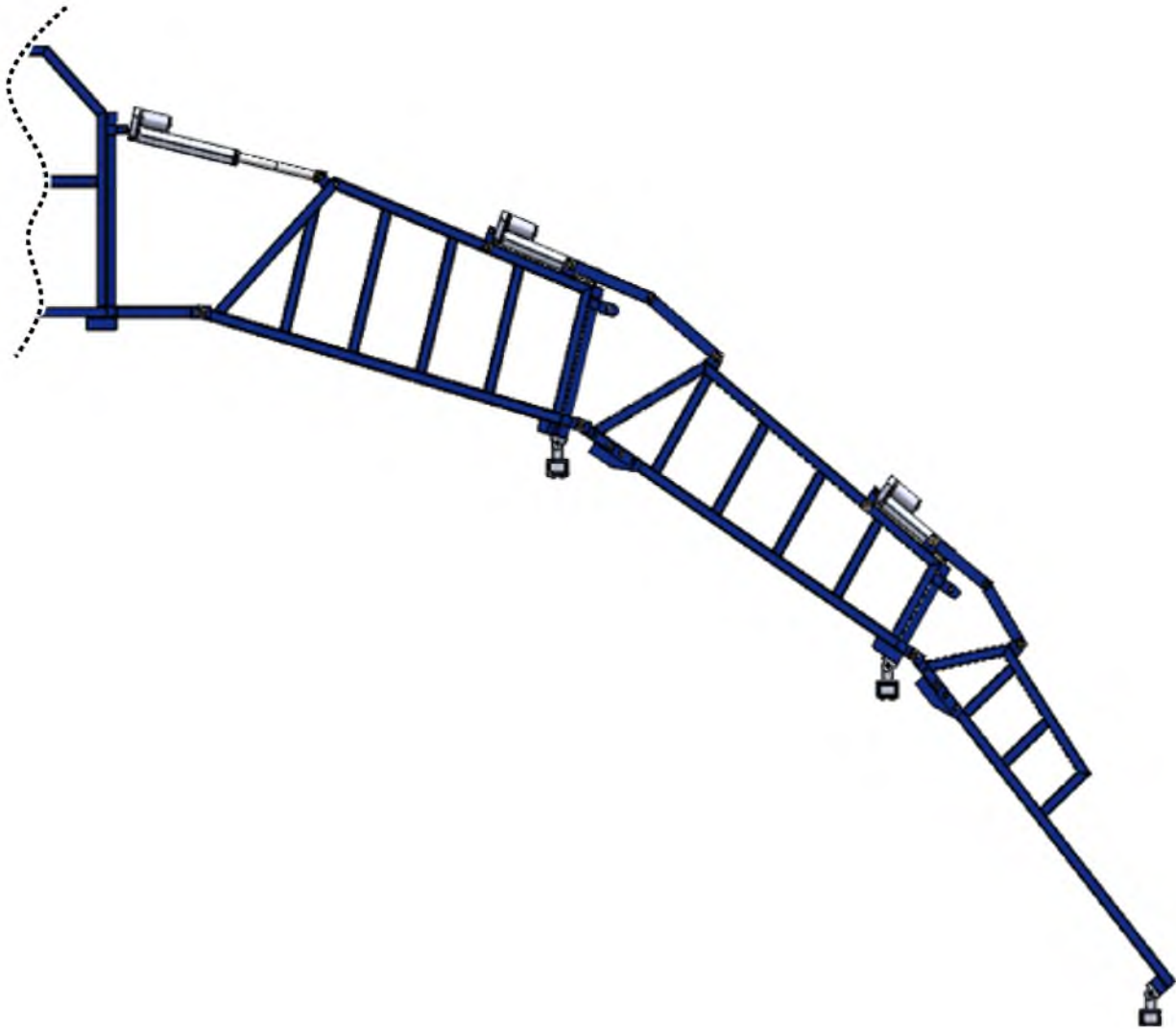


Figura 2.16: Desplazamiento angular máximo de las barras en sentido horario al extender el vástago del actuador.

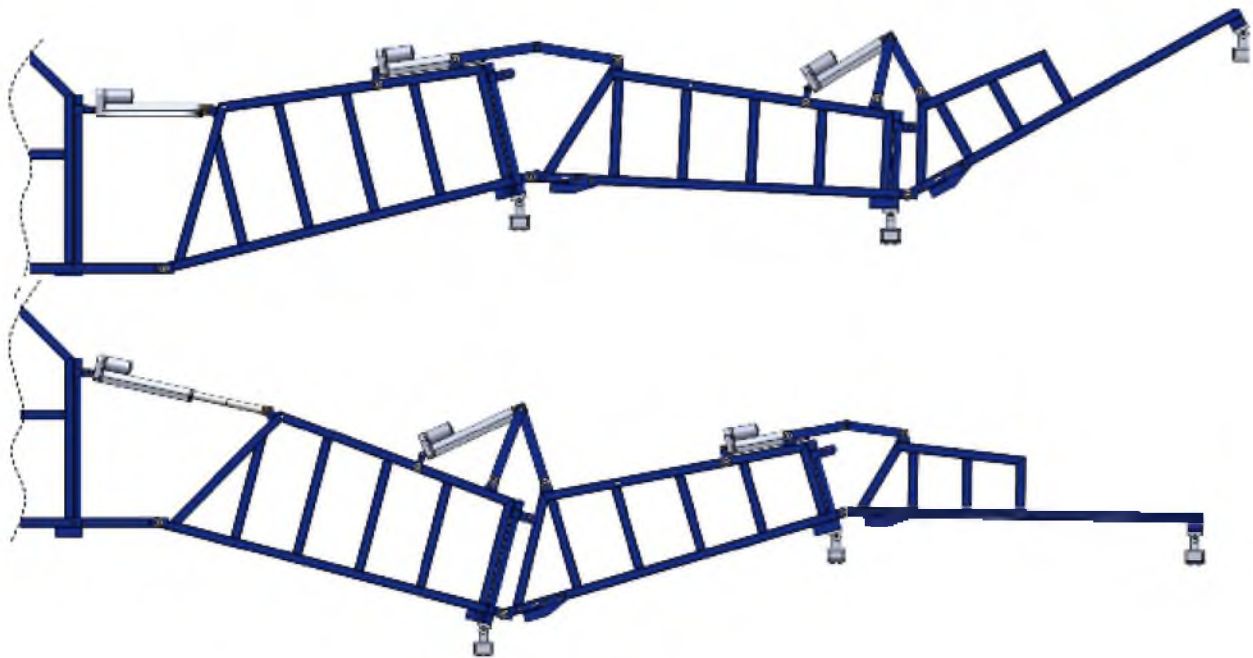


Figura 2.17: Diferentes posiciones angulares de las barras variando la longitud del vástago de los actuadores.



Figura 2.18: Plegado lateral de las barras pulverizadoras.

Propiedades geométricas e Inercia de la estructura.			
Parámetros	Barra 1	Barra 2	Barra 3
Masa $m_i$ [kg]	6.74	6.24	3.39
Longitud $l_i$ [m]	1	1	1
Longitud del centro de masa $l_{ci}$ [m]	0.64	0.60	0.42
Orientación del centro de masa $\varphi_i$ [°]	13.20	10.15	6.85
Inercia de masa $J_i$ [kg m <sup>2</sup> ]	3.49	2.96	0.92

Tabla 2.4: Parámetros mecánicos del sistema empleando el software Solidworks.

# Capítulo 3

## Modelo matemático del sistema

### 3.1. Modelo dinámico del sistema de riego

El modelado matemático dinámico es una herramienta que permite representar el comportamiento dinámico de un sistema en ecuaciones diferenciales ordinarias o en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, o en su caso no-lineales. Mediante la aplicación de las leyes de *Kirchhoff* para sistemas eléctricos o las leyes de *Newton* para sistemas mecánicos se pueden determinar las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema. Sin embargo, cuando se trata de un sistema de múltiples grados de libertad (GDL) el análisis se vuelve complejo. La obtención de modelos matemáticos de sistemas físicos (eléctricos, mecánicos, etc.) de múltiples GDL se hace de forma más sencilla aplicando la técnica de *Euler-Lagrange* (ver Wells, [28]).

#### 3.1.1. Técnica de modelado por Euler-Lagrange

Este método hace uso de la energía que experimenta el sistema, tal como la energía cinética, potencial y disipativa respectivamente (ver Wells, [28]).

##### **Energía cinética**

La energía cinética representa la capacidad de un cuerpo rígido para realizar trabajo asociado con su velocidad, en términos escalares la energía cinética se obtiene a partir de la aplicación de la segunda ley de Newton,

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} \tag{3.1}$$

donde  $F$  es la fuerza producida por el movimiento del cuerpo,  $m$  es la masa del cuerpo,  $a$  es la aceleración y  $v$  es la velocidad. Considerando los desplazamientos diferenciales  $ds$  se obtiene el trabajo producido por cada  $ds$ ,

$$\begin{aligned}
 F &= m \frac{dv}{dt} \frac{ds}{ds} = m \frac{ds}{dt} \frac{dv}{ds} \\
 v &= \frac{ds}{dt} \\
 F ds &= m v dv
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

El trabajo total se obtiene integrando la ec. (3.2) a lo largo de la trayectoria dada por los puntos  $s_f$ ,  $s_i$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{s_i}^{s_f} F ds &= m \int_{v_i}^{v_f} v dv \\
 K &= \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde  $s_i$  es el desplazamiento inicial,  $s_f$  es el desplazamiento final,  $v_i$  es la velocidad inicial y  $v_f$  es la velocidad final.

Para el caso del modelado por el método de Euler-Lagrange se considera que el sistema parte del reposo, por lo tanto, la relación  $v_f^2 - v_i^2$  se simplifica a la velocidad final, es decir,  $v = v_f$ .

Cuando se trata de un sistema cuyo movimiento se realiza en dos ejes ( $x$  y  $y$ ), la velocidad  $\mathbf{v}$  se expresa en función de las velocidades por cada coordena,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\dot{x}, \dot{y})$$

Lo que produce que la ec. (3.3) se reescriba en forma vectorial de la siguiente manera:

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T m \mathbf{v} \tag{3.4}$$

Cuando un cuerpo rígido gira a una velocidad angular  $\omega$  alrededor de un eje fijo localizado excentricamente al centro de masa del cuerpo se asocia a la ec. (3.4) la energía cinética debido a la rotación, tal como se muestra:

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T m \mathbf{v} + \frac{1}{2} J \omega^2 \tag{3.5}$$

donde  $J$  representa la inercia de masa del cuerpo alrededor del centro de masa.

Considerando un sistema de múltiples GDL con  $n$  coordenadas generalizadas<sup>1</sup>

$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_n]^T$ , implica determinar el conjunto de velocidades  $\mathbf{v}_i(q, \dot{q})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) y  $\omega_i(q)$ , para obtener la energía cinética de cada GDL del sistema.

$$K_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}_i^T m_i \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} J_i \omega_i^2 \tag{3.6}$$

---

<sup>1</sup>Las coordenadas generalizadas de un sistema, son el conjunto de coordenadas independientes que se necesita para describir completamente el movimiento del sistema.

### Energía potencial

La energía que un cuerpo posee en razón de su posición se denomina energía potencial. El cambio de la energía potencial almacenada en un sistema es igual al trabajo requerido para cambiar la configuración del sistema y se mide con respecto a un sistema de referencia.

En un cuerpo de masa  $m$  que se encuentra expuesto en un campo gravitacional, la energía potencial  $U$  medida desde un punto de referencia es proporcional a la gravedad y la posición vertical.

$$\begin{aligned} U &= \int_{h_i}^{h_f} mg dx = mg(h_f - h_i) \\ &= mgh \end{aligned}$$

donde  $g$  es la constante gravitacional,  $h_i$ ,  $h_f$  es la altura inicial y final de la masa con respecto a un sistema de referencia.

Si se considera un sistema de multiples GDL, la altura dependerá de las coordenadas generalizadas  $h_i(q)$ , por lo que la energía potencial para cada GDL se obtiene a partir de,

$$U_i(q) = m_i g_i h_i \quad (3.7)$$

### Energía disipativa

En los sistemas no conservativos la energía se disipa. *Rayleigh* desarrollo una función de disipación  $D(\dot{q})$  de la que puede derivarse la fuerza de amortiguación o fricción. Para un sistema con  $n$  coordenadas generalizadas  $q$ , la función de disipación de Rayleigh se define tal como:

$$D(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i \dot{q}_i^2 \quad (3.8)$$

donde  $c_i$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\dot{q}_i$  es la velocidad relativa de las coordenadas generalizadas.

### Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para obtener las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se define la función de Lagrange o Lagrangiano  $\mathcal{L}$  de un sistema, considerando un sistema de  $n$  coordenadas generalizadas,

$$\mathcal{L} = \sum_{i_1=1}^n K_{i_1}(q, \dot{q}) - \sum_{i_2=1}^m U_{i_2}(q) \quad (3.9)$$

donde  $K_{i_1}$  es la energía cinética y  $U_{i_2}$  es la energía potencial del sistema.

La ecuación de Euler para los sistemas no conservativos es:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = Q_{ext} \quad (3.10)$$

donde  $Q_{ext}$  es la entrada del sistema.

### 3.1.2. Modelado matemático del sistema de riego

El sistema de riego basado en barras pulverizadoras consta de tres barras del tipo estructura unidas en serie mediante articulaciones rotacionales. El conjunto de coordenadas independientes que describe completamente el movimiento del sistema esta dado por las variables  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) por lo que el vector de coordenadas generalizadas es:  $q = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ , entonces, se trata de un sistema de tres GDL. Las variables del sistema  $\theta_i$  representan la inclinación de cada una de las barras con respecto al eje vertical de acuerdo al marco de referencia fijo  $XY$ , tal como se muestra en el esquema de la Figura 3.1.

Cada una de las barras del sistema de riego tiene una longitud  $l_i$  y masa  $m_i$ . El centro de masa de cada barra se localiza a una distancia  $l_{ci}$  y se mide a partir de la articulación de cada barra hasta el centro de masa y tiene una inclinación  $\varphi_i$  medido a partir de la base de las barras. Dado que el movimiento de las barras es rotacional, estas presentan inercia y es denotado mediante  $J_i$ . Como se trata de un sistema no conservativo, entonces, se considera que la energía se disipa por medio del calor producido mediante fricción viscosa en las articulaciones de las barras denotadas mediante  $c_i$ . El movimiento de las barras se produce por una entrada de par  $\tau_i$  en cada articulación.

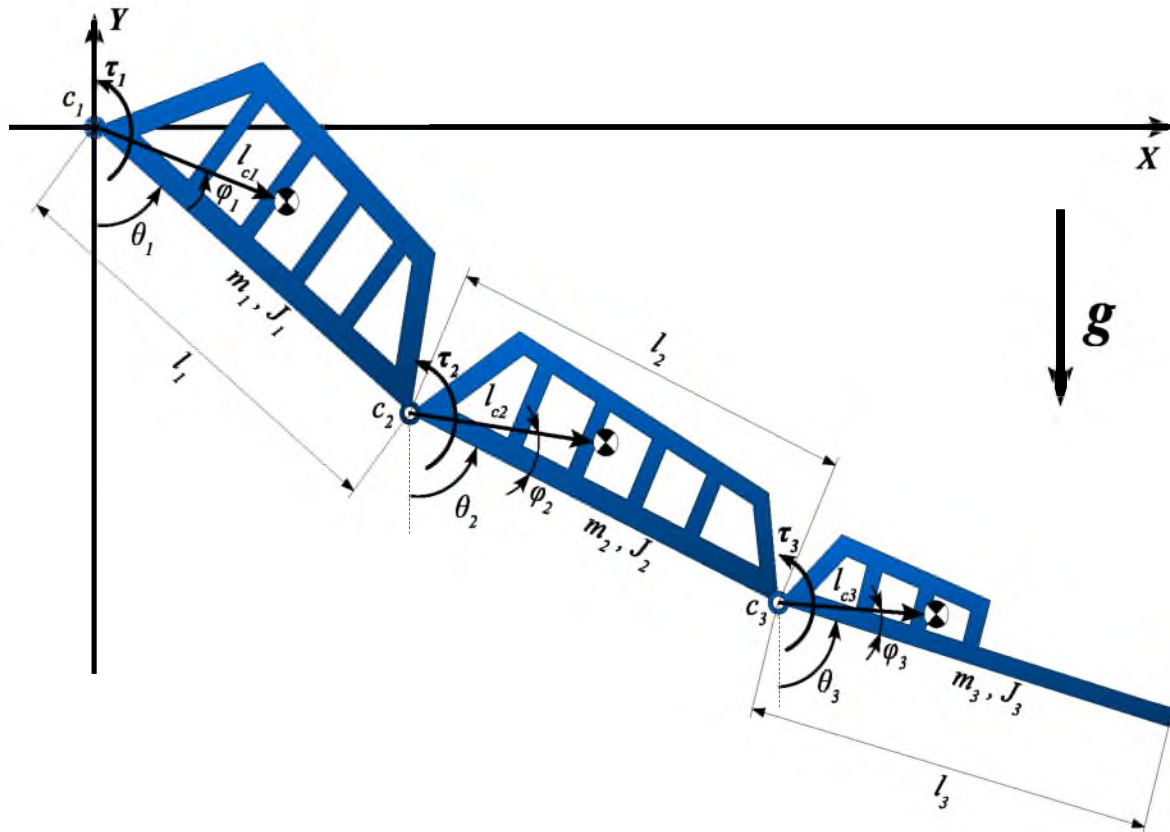


Figura 3.1: Sistema de riego basado en barras pulverizadoras.

La técnica de modelado mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange 3.10 requiere la de-

terminación de las energías que se presentan durante el movimiento. Para realizar el cálculo de las energías cinética y potencial es necesario determinar la posición del centro de masa de cada barra en función de las coordenadas generalizadas  $\theta_i$ , las cuales se presentan en el esquema de la Figura 3.2.

### 3.1.3. Determinación de las energías cinéticas

La energía cinética de las barras que se produce en el movimiento indicado en la Figura 3.1, como se trata de un sistema con tres coordenadas generalizadas y a su vez el centro de masa de cada barra se encuentra exécticamente al eje de giro, entonces se hace uso de la ec. (3.6) para el cálculo de las energías cinéticas por cada GDL.

- Determinación de la energía cinética de la primer barra.

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 \quad (3.11)$$

$$V_1^2 = \dot{x}_{m1}^2 + \dot{y}_{m1}^2 \quad (3.12)$$

Localización de las coordenadas del centro de masa de la barra 1 ( $x_{m1}, y_{m1}$ ) considerando el esquema de la Figura 3.2.

$$\begin{aligned} x_{m1} &= l_{c1} \sin(\theta_1 + \varphi_1) \\ \dot{x}_{m1}^2 &= l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1 + \varphi_1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} y_{m1} &= -l_{c1} \cos(\theta_1 + \varphi_1) \\ \dot{y}_{m1}^2 &= l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1 + \varphi_1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sustituyendo el cuadrado de las velocidades de las coordenadas del centro de masa de la primer barra ecs (3.13) y (3.14) en la ec (3.12).

$$\begin{aligned} V_1^2 &= l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1 + \varphi_1) + l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1 + \varphi_1) \\ &= l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sustituyendo el cuadrado de la velocidad  $V_1^2$  ec (3.15) en la (3.11) para obtener la energía cinética de la primer barra.

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_1l_{c1}^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 \quad (3.16)$$

- Determinación de la energía cinética de la segunda barra.

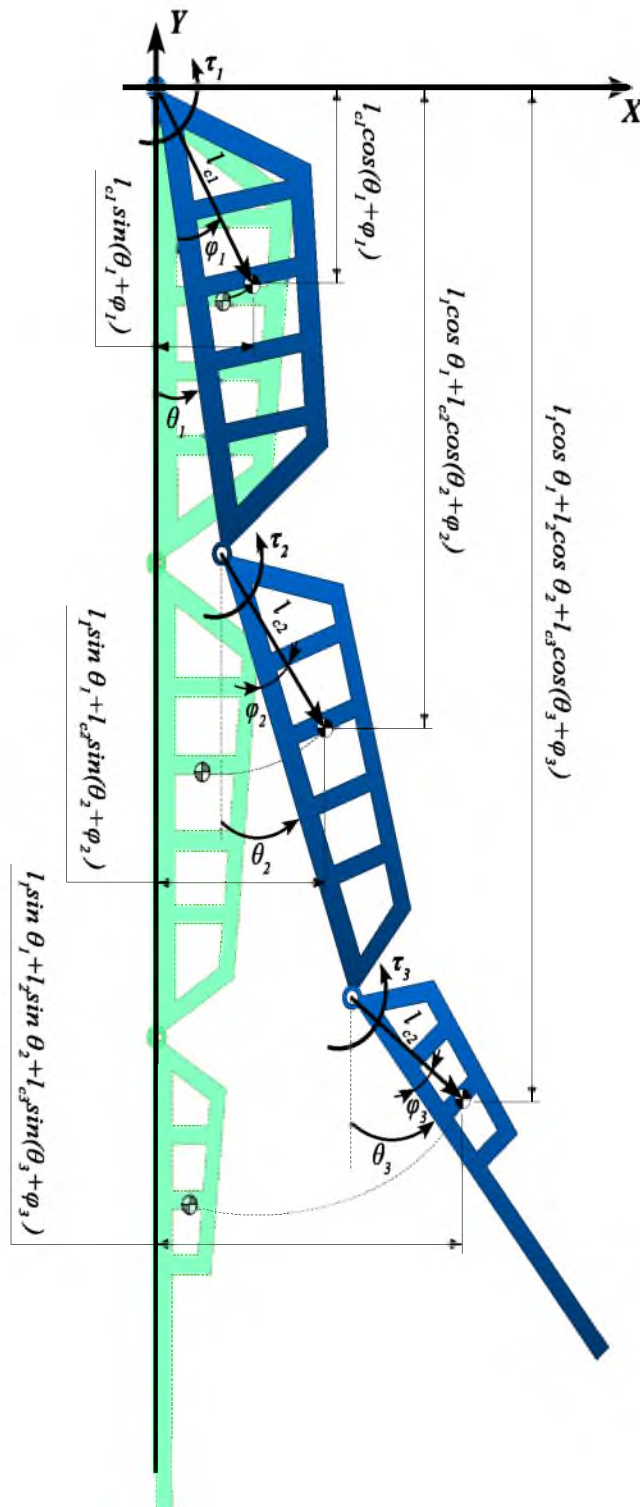


Figura 3.2: Diagrama del modelo y localización de los centros de masa de cada barra.

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_2V_2^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 \quad (3.17)$$

$$V_2^2 = \dot{x}_{m2}^2 + \dot{y}_{m2}^2 \quad (3.18)$$

Localización de las coordenadas del centro de masa de la barra 2 ( $x_{m2}, y_{m2}$ ) considerando el esquema de la Figura 3.2.

$$\begin{aligned} x_{m2} &= l_1 \sin(\theta_1) + l_{c2} \sin(\theta_2 + \varphi_2) \\ \dot{x}_{m2}^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) + l_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_2 + \varphi_2) + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2 + \varphi_2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} y_{m2} &= -l_1 \cos(\theta_1) - l_{c2} \cos(\theta_2 + \varphi_2) \\ \dot{y}_{m2}^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) + l_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2(\theta_2 + \varphi_2) + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2 + \varphi_2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sustituyendo el cuadrado de las velocidades de las coordenadas del centro de masa de la segunda barra ecs (3.19) y (3.20) en la ec (3.18).

$$\begin{aligned} V_2^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) + l_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_2 + \varphi_2) + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2 + \varphi_2) \\ &\quad \dots + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) + l_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2(\theta_2 + \varphi_2) + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2 + \varphi_2) \\ &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

**Nota**  $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$

Sustituyendo el cuadrado de la velocidad  $V_2^2$  ec (3.21) en la ec. (3.17) para obtener la energía cinética de la segunda barra.

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) + \frac{1}{2}J_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (3.22)$$

- Determinación de la energía cinética de la tercer barra.

$$K_3(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_3V_3^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 \quad (3.23)$$

$$V_3^2 = \dot{x}_{m3}^2 + \dot{y}_{m3}^2 \quad (3.24)$$

Localización de las coordenadas del centro de masa de la barra 3 ( $x_{m3}$ ,  $y_{m3}$ ) considerando el esquema de la Figura 3.2.

$$x_{m3} = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) + l_{c3} \sin(\theta_3 + \varphi_3)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m3}^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_2) \\ \dots &+ 2l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_3 + \varphi_3) + 2l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2) \cos(\theta_3 + \varphi_3) \\ \dots &+ l_{c3}^2 \dot{\theta}_3^2 \cos^2(\theta_3 + \varphi_3) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$y_{m3} = -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2) - l_{c3} \cos(\theta_3 + \varphi_3)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{m3}^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2(\theta_2) \\ \dots &+ 2l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1) \sin(\theta_3 + \varphi_3) + 2l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2) \sin(\theta_3 + \varphi_3) \\ \dots &+ l_{c3}^2 \dot{\theta}_3^2 \sin^2(\theta_3 + \varphi_3) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sustituyendo las ecs (3.25) y (3.26) en la ec (3.24) y simplificando términos.

$$\begin{aligned} V_3^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_{c3}^2 \dot{\theta}_3^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \dots &+ 2l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) + 2l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sustituyendo el cuadrado de la velocidad  $V_3^2$  ec (3.27) en la ec. (3.23) para obtener la energía cinética de la tercer barra.

$$\begin{aligned} K_3(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_3 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 \dot{\theta}_3^2 + m_3 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \\ \dots &+ m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) + m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ \dots &+ \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

### 3.1.4. Determinación de las energías potenciales.

El sistema de barras pulverizadoras además de presentar energía cinética en su movimiento, se encuentra expuesto a los efectos gravitatorios, por lo que su cambio de posición vertical del centro de masa  $h_i$  representa la variación de la energía potencial, y esta se determina a partir de la ec. (3.7) por cada GDL.

- Determinación de la energía potencial de la primera barra debido al cambio en su posición vertical.

$$U_1(q) = m_1gh_1 \quad (3.29)$$

La ordenada  $h_1$  representa el cambio en la altura y está dada en función de la diferencia entre la posición final  $h_{1f}$  y la posición inicial  $h_{1i}$  en la vertical, las cuales se determinan a partir de la Figura 3.2,

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{1f} - h_{1i} \\ &= l_{c1} - l_{c1} \cos(\theta_1 + \varphi_1) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sustituyendo la diferencia de alturas  $h_1$  ec (3.30) en la ec (3.29) para determinar la energía potencial de la barra 1.

$$U_1(q) = m_1l_{c1}g - m_1l_{c1}g \cos(\theta_1 + \varphi_1) \quad (3.31)$$

- Determinación de la energía potencial de la segunda barra debido al cambio en su posición vertical.

$$U_2(q) = m_2gh_2 \quad (3.32)$$

Determinación del cambio de altura  $h_2$  a partir del esquema de la Figura 3.2,

$$h_2 = l_1 + l_{c2} - l_1 \cos(\theta_1) - l_{c2} \cos(\theta_2 + \varphi_2) \quad (3.33)$$

Sustituyendo la diferencia de alturas  $h_2$  ec (3.33) en la ec (3.32) para obtener la energía potencial de la barra 2.

$$U_2(q) = m_2g(l_1 + l_{c2}) - m_2l_1g \cos(\theta_1) - m_2l_{c2}g \cos(\theta_2 + \varphi_2) \quad (3.34)$$

- Determinación de la energía potencial de la tercera barra.

$$U_3(q) = m_3gh_3 \quad (3.35)$$

A partir de la Figura 3.2 se determina la diferencia de altura  $h_3$ .

$$h_3 = l_1 + l_2 + l_{c3} - l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2) - l_{c3} \cos(\theta_3 + \varphi_3) \quad (3.36)$$

Sustituyendo la relación de  $h_2$  ec (3.36) en la ec (3.35) se obtiene la energía potencial de la barra 3.

$$\begin{aligned} U_3(q) &= m_3g(l_1 + l_2 + l_{c3}) - m_3l_1g \cos(\theta_1) - m_3l_2g \cos(\theta_2) \\ &\quad \cdots - m_3l_{c3}g \cos(\theta_3 + \varphi_3) \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.1.5. Determinación de las energías disipativas.

La energía disipativa que existe en cada articulación de la estructura se determina de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_1(\dot{q}) &= \frac{1}{2}c_1\dot{\theta}_1^2 \\ D_2(\dot{q}) &= \frac{1}{2}c_2\dot{\theta}_2^2 \\ D_3(\dot{q}) &= \frac{1}{2}c_3\dot{\theta}_3^2 \end{aligned}$$

La función de disipación de Rayleigh para este sistema se define como:

$$D(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 c_i \dot{\theta}_i^2 \quad (3.38)$$

### 3.1.6. Función de Lagrange

La función de Lagrange o *Lagrangiano* ec. (3.9) para el sistema de riego se define por la diferencia de energías,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sum_{i_1=1}^3 K_{i_1}(q, \dot{q}) - \sum_{i_2=1}^3 U_{i_2}(q)$$

Al sustituir las energías cinéticas, potenciales y reduciendo términos, se determina la función de Lagrange del sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2} (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + J_1) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + J_2) \dot{\theta}_2^2 \\ & \dots + \frac{1}{2} (m_3 l_{c3}^2 + J_3) \dot{\theta}_3^2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \\ & \dots + m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) + m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ & \dots + m_1 l_{c1} g \cos(\theta_1 + \varphi_1) + (m_2 l_1 + m_3 l_1) g \cos(\theta_1) + m_2 l_{c2} g \cos(\theta_2 + \varphi_2) \\ & \dots + m_3 l_2 g \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3} g \cos(\theta_3 + \varphi_3) - m_1 l_{c1} g - m_2 g (l_1 + l_{c2}) \\ & \dots - m_3 g (l_1 + l_2 + l_{c3}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.1.7. Ecuación de Euler

Para determinar las ecuaciones dinámicas se resuelve la ecuación de Euler ec. (3.10) considerando las coordenadas generalizadas y entradas descritas tal como,

$$\begin{aligned} q &= [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \\ Q_{ext} &= [\tau_1(t) \quad \tau_1(t) \quad \tau_1(t)]^T, \quad q, Q_{ext} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \end{aligned}$$

### 3.1.8. Modelo dinámico de la primer barra

Para obtener el modelo dinámico de la primer barra pulverizadora se hace uso de la ecuación de Euler ec. (3.10) y de la función de Lagrange descrita en la ec. (3.39). Considerando la primer coordenada generalizada  $\theta_1$  y la entrada  $\tau_1$ , se calcula el modelo de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \theta_1} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{\theta}_1} = \tau_1 \quad (3.40)$$

Resolviendo el primer término de la ec. (3.40).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = & (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + J_1) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \\ & \dots + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \\ & \dots - (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \\ & \dots + m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) + m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ & \dots - m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Resolviendo el segundo término de la ec. (3.40).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \theta_1} = & - (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) - m_1 l_{c1} g \sin(\theta_1 + \varphi_1) \\ & \dots - m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) - (m_2 l_1 + m_3 l_1) g \sin(\theta_1) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Resolviendo el tercer término de la ec. (3.40), al aplicar la derivada parcial de la energía disipativa ec. (3.38).

$$\frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{\theta}_1} = c_1 \dot{\theta}_1 \quad (3.43)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.41), (3.42) y (3.43) en la ec (3.40). Agrupando y simplificando los términos se obtiene el modelo matemático de la primer barra pulverizadora ec. (3.44)

$$\begin{aligned} & (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + J_1) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \dots \\ & + m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) + c_1 \dot{\theta}_1 \dots \\ & + m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) + m_1 l_{c1} g \sin(\theta_1 + \varphi_1) + (m_2 l_1 + m_3 l_1) g \sin(\theta_1) = \tau_1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

### 3.1.9. Modelo dinámico de la segunda barra GDL

Para obtener el modelo dinámico de la primer barra pulverizadora se hace uso de la ecuación de Euler ec. (3.10) y de la función de Lagrange descrita en la ec. (3.39). Considerando la segunda coordenada generalizada  $\theta_2$  y  $\tau_2$ , se calcula el modelo de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{\theta}_2} = \tau_2 \quad (3.45)$$

Resolviendo el primer término de la ec. (3.45).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = & (m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \\ & \dots - (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \\ & \dots + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \\ & \dots + m_3 l_2 l_{c3} \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) + m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ & \dots - m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Resolviendo el segundo término de la ec. (3.45).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \theta_2} = & (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \\ & \dots - m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) - m_2 l_{c2} g \sin(\theta_2 + \varphi_2) - m_3 l_2 g \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Resolviendo el tercer término de la ec. (3.45), al aplicar la derivada parcial de la energía disipativa ec. (3.38).

$$\frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{\theta}_2} = c_2 \dot{\theta}_2 \quad (3.48)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.48) en la ec (3.45). Agrupando y reduciendo términos se obtiene el modelo matemático de la segunda barra pulverizadora ec. (3.49).

$$\begin{aligned} & (m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \dots \\ & + m_3 l_2 l_{c3} \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) - (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) + c_2 \dot{\theta}_2 \dots \\ & + m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) + m_2 l_{c2} g \sin(\theta_2 + \varphi_2) + m_3 l_2 g \sin(\theta_2) = \tau_2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

### 3.1.10. Modelo dinámico de la tercer barra GDL

Para obtener el modelo dinámico de la primer barra pulverizadora se hace uso de la ecuación de Euler ec. (3.10) y de la función de Lagrange descrita en la ec. (3.39). Considerando la tercer coordenada generalizada  $\theta_3$  y  $\tau_3$ , se calcula el modelo de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{\theta}_3} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \theta_3} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{\theta}_3} = \tau_3 \quad (3.50)$$

Resolviendo el primer término de la ec. (3.50).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{\theta}_3} \right] = & (m_3 l_{c3}^2 + J_3) \ddot{\theta}_3 + m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & \cdots - m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) + m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ & \cdots + m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) + m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ & \cdots + m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Resolviendo el segundo término de la ec. (3.50).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \theta_3} = & m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) + m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ & \cdots - m_3 l_{c3} g \sin(\theta_3 + \varphi_3) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Resolviendo el tercer término de la ec. (3.50), aplicando la derivada parcial de la energía disipativa ec. (3.38).

$$\frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{\theta}_2} = c_3 \dot{\theta}_3 \quad (3.53)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.51), (3.52) y (3.53) en la ec (3.50). Agrupando y reduciendo términos se obtiene el modelo matemático de la tercer barra pulverizadora ec. (3.54).

$$\begin{aligned} & (m_3 l_{c3}^2 + J_3) \ddot{\theta}_3 + m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \cdots \\ & + m_3 l_2 l_{c3} \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) - m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) \cdots \\ & + m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) + c_3 \dot{\theta}_3 + m_3 l_{c3} g \sin(\theta_3 + \varphi_3) = \tau_3 \end{aligned} \quad (3.54)$$

La ec (3.54) representa el modelo matemático de la tercer barra.

### 3.1.11. Representación del modelo dinámico en forma matricial.

El modelo matemático compuesto por las tres ecuaciones dinámicas (3.44), (3.49) y (3.54) pueden expresarse mediante una notación matricial de la forma:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (3.55)$$

donde  $M(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de inercias,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $G(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el vector de pares gravitatorios y  $\tau \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el vector de pares exógenos al sistema (ver Spong, W. y Vidyasagar, M., [25]).

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

Los elementos de las matrices son:

$$M_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + J_1$$

$$M_{12} = (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2))$$

$$M_{13} = m_3 l_1 l_{c3} \cos(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3))$$

$$M_{21} = (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2))$$

$$M_{22} = m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + J_2$$

$$M_{23} = m_3 l_2 l_{c3} \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3))$$

$$M_{31} = m_3 l_1 l_{c3} \cos(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3))$$

$$M_{32} = m_3 l_2 l_{c3} \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3))$$

$$M_{33} = m_3 l_{c3}^2 + J_3$$

$$C_{11} = c_1$$

$$C_{12} = (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2))$$

$$C_{13} = m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3))$$

$$C_{21} = -(m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2))$$

$$C_{22} = c_2$$

$$C_{23} = m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3))$$

$$C_{31} = -m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3))$$

$$C_{32} = m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3))$$

$$C_{33} = c_3$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= m_1 l_{c1} g \sin(\theta_1 + \varphi_1) + (m_2 l_1 + m_3 l_1) g \sin(\theta_1) \\
G_2 &= m_2 l_{c2} g \sin(\theta_2 + \varphi_2) + m_3 l_2 g \sin(\theta_2) \\
G_3 &= m_3 l_{c3} g \sin(\theta_3 + \varphi_3)
\end{aligned}$$

### 3.2. Análisis del punto de equilibrio

El análisis del punto de equilibrio permite conocer la posición final de las coordenadas generalizadas  $q$  cuando el sistema tiende a estabilizarse en estado estacionario, sin considerar torques aplicados a las articulaciones. Para determinar los puntos de equilibrio  $q^*$  se expresa el modelo matemático ec. (3.55) considerando a  $\tau = \mathbf{0}$ ,

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \mathbf{0}$$

y posteriormente se realiza su representación en el espacio de estados.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q) (-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \end{bmatrix}$$

El punto de equilibrio es la posición en donde el sistema se encuentra en reposo  $q = q^*$ ,  $\dot{q} = 0$ .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q) [-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{bmatrix}$$

Entonces, el par de ecuaciones se igualan a cero.

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= 0 \\
M^{-1}(q) (-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) &= 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

De la expresión anterior ec. (3.56) se deduce que los estados de equilibrio  $q^*$  se determinan a partir del vector de gravedad.

$$G(q) = 0$$

Determinando los estados de equilibrio  $q^*$  a partir del vector de gravedad.

$$q^* = [\theta_1^* \quad \theta_2^* \quad \theta_3^*]^T$$

$$m_1 l_{c1} g \sin(\theta_1^* + \varphi_1) + (m_2 l_1 + m_3 l_1) g \sin \theta_1^* = 0 \quad (3.57)$$

$$m_2 l_{c2} g \sin(\theta_2^* + \varphi_2) + m_3 l_2 g \sin \theta_2^* = 0 \quad (3.58)$$

$$m_3 l_{c3} g \sin(\theta_3^* + \varphi_3) = 0 \quad (3.59)$$

El punto de equilibrio de las primeras dos barras se determina de forma numérica, resolviendo las ecs. (3.57) y (3.58) haciendo variar el valor de los ángulos, tal como se muestra en la Figura 3.3. Los puntos de equilibrio para la barra estructural 1 y 2 son:

$$\theta_1^* = -4.056^\circ$$

$$\theta_2^* = -5.337^\circ$$

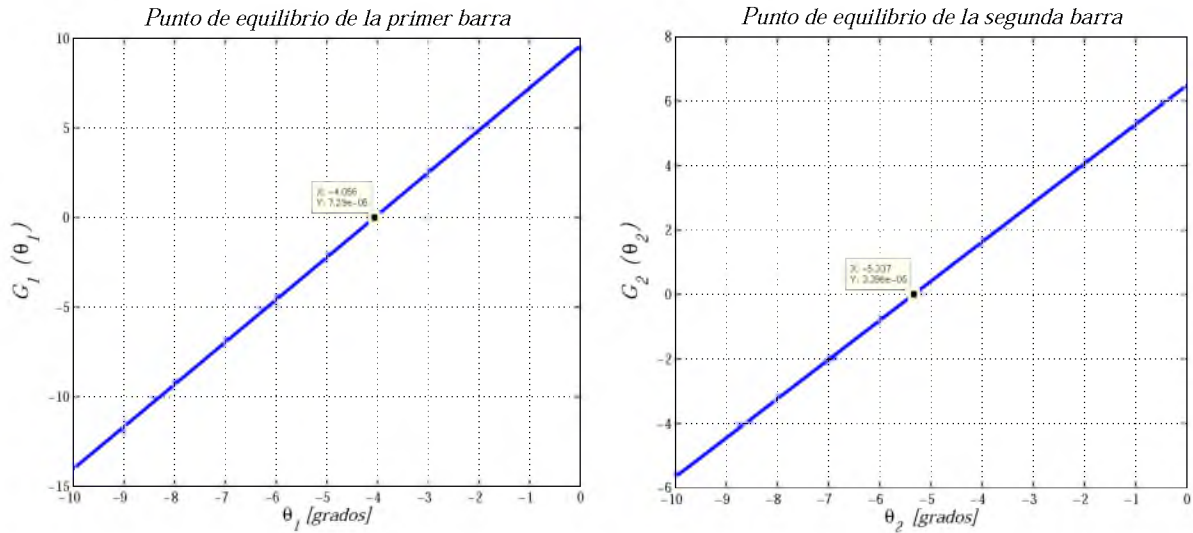


Figura 3.3: Determinación numérica del punto de equilibrio de las barras 1 y 2.

Mientras que el estado de equilibrio  $\theta_3^*$  se determina resolviendo la ec. (3.59).

$$m_3 l_{c3} g \sin(\theta_3 + \varphi_3) = 0$$

$$\sin(\theta_3 + \varphi_3) = 0$$

$$\theta_3 + \varphi_3 = 0$$

$$\therefore \theta_3^* = -\varphi_3$$

Los resultados muestran que para ningún caso el punto de equilibrio es cero, y esto se debe a que la geometría de las barras no es simétrica alrededor de los centros de masa. Esto

produce las variaciones en cuanto a los puntos de equilibrio, sin embargo, para el caso de la tercer barra,  $\theta_3^*$  es el inverso al ángulo constante  $\varphi_3$  y esto se debe a que la tercer barra se encuentra libre en el extremo. Por tanto, el centro de masa se alinea en la vertical de manera colineal a su articulación, tal como se muestra en la Figura 3.4.

### 3.3. Linealización del modelo matemático del sistema de riego

En el Capítulo 4 se realiza el diseño de los esquemas de control activo, de los cuales dos requieren de una dinámica lineal. Una de la técnicas para realizar la linealización de modelos no lineales se basa en la expansión de la función no lineal en una *serie de Taylor* alrededor del punto de operación, donde queda únicamente el término lineal y se desprecian los términos de orden superior de la expansión en serie de Taylor. Cuando la dinámica del sistema corresponde a desplazamientos angulares se puede considerar otra alternativa más simple de linealización, la cual consiste en acotar los desplazamientos angulares, de tal forma que se consideren de pequeña magnitud. Esto reduce el análisis de linealización, ya que no se requiere realizar múltiples derivadas que conlleva el método de expansión en serie de Taylor.

La simplificación en las funciones trigonométricas a partir de pequeñas variaciones angulares es la siguiente (ver Ogata, [15]):

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &\approx \alpha \\
 \cos \alpha &\approx 1 \\
 \alpha\beta &\approx 0 \\
 \dot{\alpha}^2\alpha &\approx 0 \\
 \ddot{\alpha}\alpha &\approx 0 \\
 \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\
 &\approx \alpha(1) \pm 1(\beta) = \alpha \pm \beta \\
 \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\
 &\approx 1(1) \mp \alpha(\beta) = 1
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Considerando las aproximaciones de la funciones trigonométricas ec. (3.60), se aplican a los términos no lineales del modelo matemático del sistema de riego, en este caso de los elementos de las matrices del modelo ec. (3.55).

#### 3.3.1. Linealización del modelo matemático de la primer barra.

A continuación se aplican las aproximaciones lineales ec. (3.60) a los términos no-lineales que contiene el modelo matemático de la primer barra ec. (3.44).

- Reducción de los elementos que forman parte de la matriz de inercias.

El primer elemento no-lineal de la matriz de inercias que forma parte de la primer barra es:

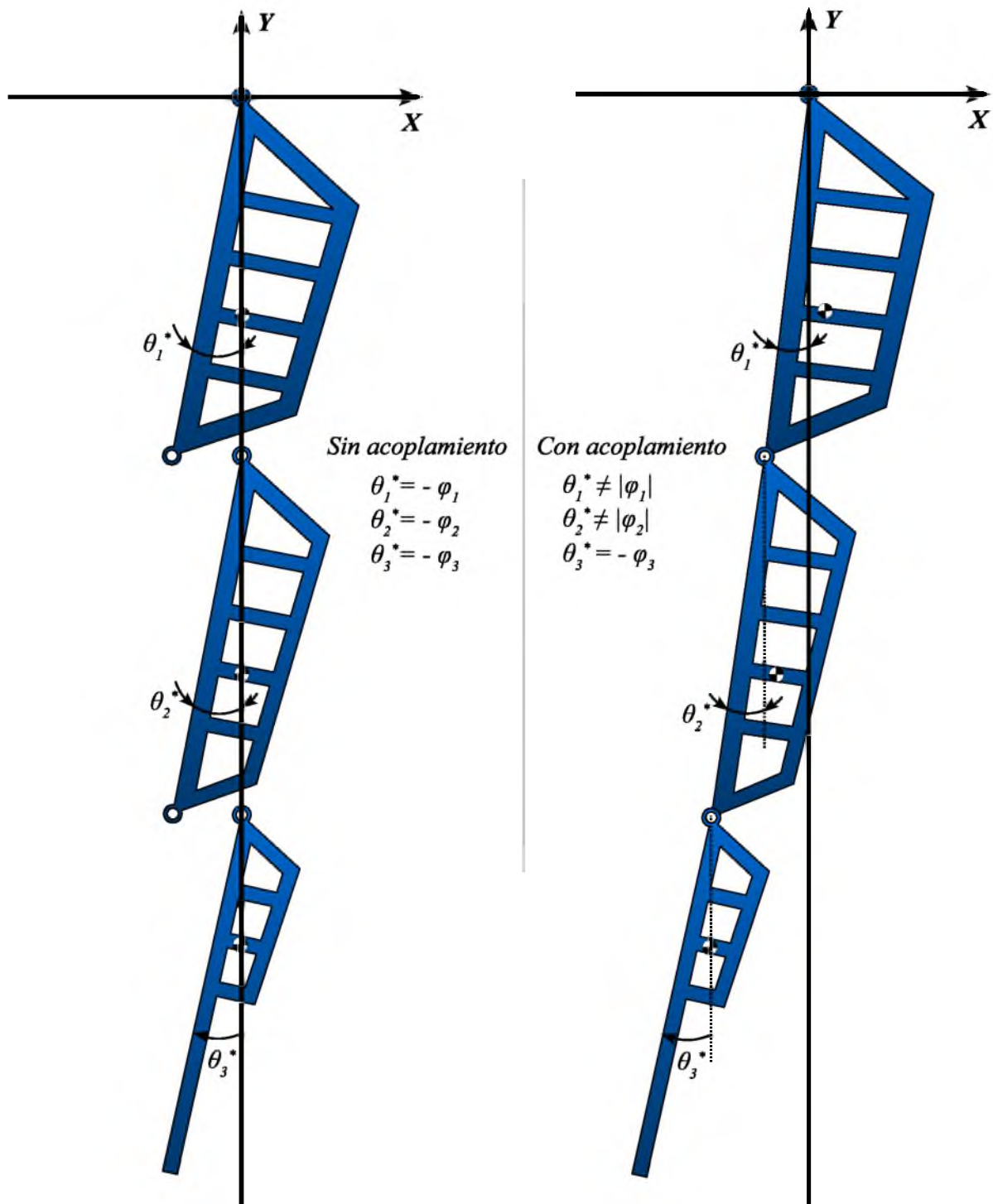


Figura 3.4: Punto de equilibrio de cada barra pulverizadora, cuando el sistema no se encuentra sometido a torques  $\tau_i$  externos.

$$\begin{aligned} M_{12} &= (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \ddot{\theta}_2 [\cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2))] \\ &= (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \ddot{\theta}_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2) \cos(-\varphi_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(-\varphi_2)] \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior y renombrando  $M_{12}$  por  $N_{12}$ , se obtiene:

$$N_{12} = (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \ddot{\theta}_2 \cos(-\varphi_2) \quad (3.61)$$

El segundo elemento no-lineal de la matriz de inercias que forma parte de la primer barra es:

$$\begin{aligned} M_{13} &= m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ &= m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_3 [\cos(\theta_1 - \theta_3) \cos(-\varphi_3) - \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(-\varphi_3)] \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior y renombrando  $M_{13}$  por  $N_{13}$ , se obtiene:

$$N_{13} = m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_3 \cos(-\varphi_3) \quad (3.62)$$

- Reducción de los elementos que forman parte de la matriz de coriolis.

$$C_{12} = (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2))$$

$$C_{13} = m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3))$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior  $C_{12}$  y  $C_{13}$  se vuelven nulas y se renombran como  $B_{12}$  y  $B_{13}$ ,

$$B_{12} = 0 \quad (3.63)$$

$$B_{13} = 0 \quad (3.64)$$

- Reducción de los elementos que forman parte del vector de gravedad.

$$\begin{aligned} G_1 &= m_1 l_{c1} g \sin(\theta_1 + \varphi_1) + (m_2 l_1 + m_3 l_1) g \sin(\theta_1) \\ &= m_1 l_{c1} g (\sin \theta_1 \cos \varphi_1 + \cos \theta_1 \sin \varphi_1) + (m_2 l_1 + m_3 l_1) g \sin(\theta_1) \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior y renombrando  $G_1$  por  $H_1 - \xi_1$ , se obtiene lo siguiente:

$$H_1 - \xi_1 = \underbrace{(m_1 l_{c1} \cos \varphi_1 + m_2 l_1 + m_3 l_1) g \theta_1}_{H_1} + \underbrace{m_1 l_{c1} g \sin \varphi_1}_{-\xi_1} \quad (3.65)$$

La expresión anterior se divide en dos partes, debido a que el segundo término  $\xi_1$  describe un par de valor constante producido por la orientación del centro de masa de la barra.

Los elementos lineales de las matrices de Inercias y de Coriolis que forman parte del modelo de la primer barra, también se renombran como:  $M_{11} = N_{11}$ , y  $C_{11} = B_{11}$ . De tal modo que, el modelo matemático lineal aproximado de la primer barra tiene la siguiente estructura:

$$N_{11}\ddot{\theta}_1 + N_{12}\ddot{\theta}_2 + N_{13}\ddot{\theta}_3 + B_{11}\dot{\theta}_1 + H_{11}\theta_1 = \tau_1 + \xi_1 \quad (3.66)$$

El modelo linealizado de la primer barra se obtiene al sustituir el valor de los coeficientes ecs. (3.61), (3.62), (3.63), (3.64) y (3.65) en la ec. (3.66),

$$\begin{aligned} & (m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2 + m_3l_1^2 + J_1)\ddot{\theta}_1 + (m_2l_{c2} + m_3l_2)l_1\ddot{\theta}_2 \cos(-\varphi_2) \quad \cdots \\ & + m_3l_1l_{c3}\ddot{\theta}_3 \cos(-\varphi_3) + c_1\dot{\theta}_1 + (m_1l_{c1} \cos \varphi_1 + m_2l_1 + m_3l_1)g\theta_1 \quad \cdots \\ & \cdots = \tau_1 - m_1l_{c1}g \sin \varphi_1 \end{aligned} \quad (3.67)$$

### 3.3.2. Linealización del modelo matemático de la segunda barra.

A continuación se aplican las aproximaciones lineales ec. (3.60) a los términos no-lineales que contiene el modelo matemático de la segunda barra ec. (3.49).

- Reducción de los terminos que forman parte de la matriz de inercias.

El primer elemento no-lineal de la matriz de inercias que forma parte de la segunda barra es:

$$\begin{aligned} M_{21} &= (m_2l_{c2} + m_3l_2)l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \varphi_2)) \\ &= (m_2l_{c2} + m_3l_2)l_1\ddot{\theta}_1 [\cos(\theta_1 - \theta_2) \cos(-\varphi_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(-\varphi_2)] \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior y renombrando  $M_{21}$  por  $N_{21}$ , se obtiene:

$$N_{21} = (m_2l_{c2} + m_3l_2)l_1\ddot{\theta}_1 \cos(-\varphi_2) \quad (3.68)$$

El segundo elemento no-lineal de la matriz de inercias que forma parte de la segunda barra es:

$$\begin{aligned} M_{23} &= m_3l_2l_{c3}\ddot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ &= m_3l_2l_{c3}\ddot{\theta}_3 [\cos(\theta_2 - \theta_3) \cos(-\varphi_3) - \sin(\theta_2 - \theta_3) \sin(-\varphi_3)] \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior y renombrando  $M_{23}$  por  $N_{23}$ , se obtiene:

$$N_{23} = m_3l_2l_{c3}\ddot{\theta}_3 \cos(-\varphi_3) \quad (3.69)$$

- Reducción de los términos que forman parte de la matriz de coriolis.

$$C_{21} = (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin((\theta_1 + \varphi_1) - (\theta_2 + \varphi_2))$$

$$C_{23} = m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_3^2 \sin((\theta_2 + \varphi_2) - (\theta_3 + \varphi_3))$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior  $C_{21}$  y  $C_{23}$  se vuelven nulas y se renombran como  $B_{21}$  y  $B_{23}$ ,

$$B_{21} = 0 \quad (3.70)$$

$$B_{23} = 0 \quad (3.71)$$

- Reducción de los términos que forman parte de la matriz de gravedad.

$$\begin{aligned} G_2 &= m_2 l_{c2} g \sin(\theta_2 + \varphi_2) + m_3 l_2 g \sin(\theta_2) \\ &= m_2 l_{c2} g (\sin \theta_2 \cos \varphi_2 + \cos \theta_2 \sin \varphi_2) + m_3 l_2 g \sin(\theta_2) \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior y renombrando  $G_2$  por  $H_2 - \xi_2$ , se obtiene lo siguiente:

$$H_2 - \xi_2 = \underbrace{(m_2 l_{c2} \cos \varphi_2 + m_3 l_2) g \theta_2}_{H_2} + \underbrace{m_2 l_{c2} g \sin \varphi_2}_{-\xi_2} \quad (3.72)$$

Los elementos lineales de las matrices de Inercias y de Coriolis que forman parte del modelo de la segunda barra, también se renombran como:  $M_{22} = N_{22}$ , y  $C_{22} = B_{22}$ . De tal modo que, el modelo matemático lineal aproximado de la segunda barra tiene la siguiente estructura:

$$N_{21} \ddot{\theta}_1 + N_{22} \ddot{\theta}_2 + N_{23} \ddot{\theta}_3 + B_{22} \dot{\theta}_2 + H_{22} \theta_2 = \tau_2 + \xi_2 \quad (3.73)$$

El modelo linealizado de la segunda barra se obtiene al sustituir el valor de los coeficientes ecs. (3.68), (3.69), (3.70), (3.71) y (3.72) en la ec. (3.73),

$$\begin{aligned} (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(-\varphi_2) + (m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 \quad \dots \\ + m_3 l_2 l_{c3} \ddot{\theta}_3 \cos(-\varphi_3) + c_2 \dot{\theta}_2 + (m_2 l_{c2} \cos \varphi_2 + m_3 l_2) g \theta_2 = \tau_2 - m_2 l_{c2} g \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (3.74)$$

### 3.3.3. Linealización del modelo matemático de la tercer barra.

A continuación se aplican las aproximaciones lineales ec. (3.60) a los términos no-lineales que contiene el modelo matemático de la segunda barra ec. (3.54).

- Reducción de los términos que forman parte de la matriz de inercias.

El primer elemento no-lineal de la matriz de inercias que forma parte de la segunda barra es:

$$\begin{aligned} M_{31} &= m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ &= m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_1 [\cos(\theta_1 - \theta_3) \cos(-\varphi_3) - \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(-\varphi_3)] \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior y renombrando  $M_{31}$  por  $N_{31}$ , se obtiene:

$$N_{31} = m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_1 \cos(-\varphi_3) \quad (3.75)$$

El segundo elemento no-lineal de la matriz de inercias que forma parte de la segunda barra es:

$$\begin{aligned} M_{32} &= m_3 l_2 l_{c3} \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - (\theta_3 + \varphi_3)) \\ &= m_3 l_2 l_{c3} \ddot{\theta}_2 [\cos(\theta_2 - \theta_3) \cos(-\varphi_3) - \sin(\theta_2 - \theta_3) \sin(-\varphi_3)] \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior y renombrando  $M_{32}$  por  $N_{32}$ , se obtiene:

$$N_{32} = m_3 l_2 l_{c3} \ddot{\theta}_2 \cos(-\varphi_3) \quad (3.76)$$

- Reducción de los términos que forman parte de la matriz de coriolis.

$$C_{31} = m_3 l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1^2 \sin((\theta_1 + \varphi_1) - (\theta_3 + \varphi_3))$$

$$C_{32} = m_3 l_2 l_{c3} \dot{\theta}_2^2 \sin((\theta_2 + \varphi_2) - (\theta_3 + \varphi_3))$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior  $C_{31}$  y  $C_{32}$  se vuelven nulas y se renombran como  $B_{31}$  y  $B_{32}$ ,

$$B_{31} = 0 \quad (3.77)$$

$$B_{32} = 0 \quad (3.78)$$

- Reducción de los términos que forman parte de la matriz de gravedad.

$$\begin{aligned} G_3 &= m_3 l_{c3} g \sin(\theta_3 + \varphi_3) \\ &= m_3 l_{c3} g (\sin \theta_3 \cos \varphi_3 + \cos \theta_3 \sin \varphi_3) \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones lineales ec. (3.60) en la expresión anterior y renombrando  $G_3$  por  $H_3 - \xi_3$ , se obtiene lo siguiente:

$$H_3 - \xi_3 = \underbrace{m_3 l_{c3} g \theta_3 \cos \varphi_3}_{H_3} + \underbrace{m_3 l_{c3} g \sin \varphi_3}_{-\xi_3} \quad (3.79)$$

Los elementos lineales de las matrices de Inercias y de Coriolis que forman parte del modelo de la segunda barra, también se renombran como:  $M_{33} = N_{33}$ , y  $C_{33} = B_{33}$ . De tal modo que, el modelo matemático lineal aproximado de la tercer barra tiene la siguiente estructura:

$$N_{31}\ddot{\theta}_1 + N_{32}\ddot{\theta}_2 + N_{33}\ddot{\theta}_3 + B_{33}\dot{\theta}_3 + H_{33}\theta_3 = \tau_3 + \xi_3 \quad (3.80)$$

El modelo linealizado de la segunda barra se obtiene al sustituir el valor de los coeficientes ecs. (3.75), (3.76), (3.77), (3.78) y (3.79) en la ec. (3.80),

$$\begin{aligned} & m_3 l_1 l_{c3} \ddot{\theta}_1 \cos(-\varphi_2) + m_3 l_2 l_{c3} \ddot{\theta}_2 \cos(-\varphi_3) \quad \dots \\ & + (m_3 l_{c3}^2 + J_3) \ddot{\theta}_3 + c_2 \dot{\theta}_2 + m_3 l_{c3} g \theta_3 \cos \varphi_3 = \tau_3 - m_3 l_{c3} g \sin \varphi_3 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Expresando el modelo lineal ecs. (3.67), (3.74) y (3.81) en forma matricial,

$$N\ddot{q} + B\dot{q} + Hq = \tau + \xi \quad (3.82)$$

donde  $N \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de inercia lineal,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de amortiguamiento,  $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz que contiene los términos de pares gravitatorios y  $\xi \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el vector de pares endógenos producidos por la inclinación del centro de masa con respecto de la base de las barras.

El modelo matricial ec. (3.82) se compone de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} N &= \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + J_1 & (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(-\varphi_2) & m_3 l_1 l_{c3} \cos(-\varphi_3) \\ (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(-\varphi_2) & m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + J_2 & m_3 l_2 l_{c3} \cos(-\varphi_3) \\ m_3 l_1 l_{c3} \cos(-\varphi_3) & m_3 l_2 l_{c3} \cos(-\varphi_3) & m_3 l_{c3}^2 + J_3 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}, \\ H &= \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} \cos \varphi_1 + m_2 l_1 + m_3 l_1) g & 0 & 0 \\ 0 & (m_2 l_{c2} \cos \varphi_2 + m_3 l_2) g & 0 \\ 0 & 0 & m_3 l_{c3} g \cos \varphi_3 \end{bmatrix}, \\ \xi &= \begin{bmatrix} -m_1 l_{c1} g \sin \varphi_1 \\ -m_2 l_{c2} g \sin \varphi_2 \\ -m_3 l_{c3} g \sin \varphi_3 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 3.3.4. Respuesta del modelo lineal en lazo abierto

El modelo dinámico obtenido ec. (3.82) es una aproximación lineal del modelo dinámico que se muestra en la ec. (3.55). De acuerdo a las consideraciones realizadas en la linealización,

el modelo lineal puede aproximar eficientemente la respuesta del sistema para variaciones angulares de  $\theta_i$  de pequeñas magnitudes. En la Figura 3.5 se muestra la comparación entre el comportamiento del sistema lineal con el no-lineal sin considerar torques aplicados y únicamente se modifican las condiciones iniciales del desplazamiento angular de las barras. Para valores de  $\theta_i < 30^\circ$  el comportamiento de ambos modelos es prácticamente igual. Sin embargo, para desplazamientos angulares  $\theta_i > 30^\circ$  las señales difieren en amplitud y ángulo de fase. No obstante, los sistemas de riego basados en barras pulverizadoras no están diseñados para grandes desplazamientos angulares, más bien están enfocados a la corrección de su geometría con respecto del perfil de terreno. Debido a las dimensiones que esta clase de sistemas posee, un pequeño desplazamiento angular en su articulación genera desplazamientos grandes en el extremo de la barra.

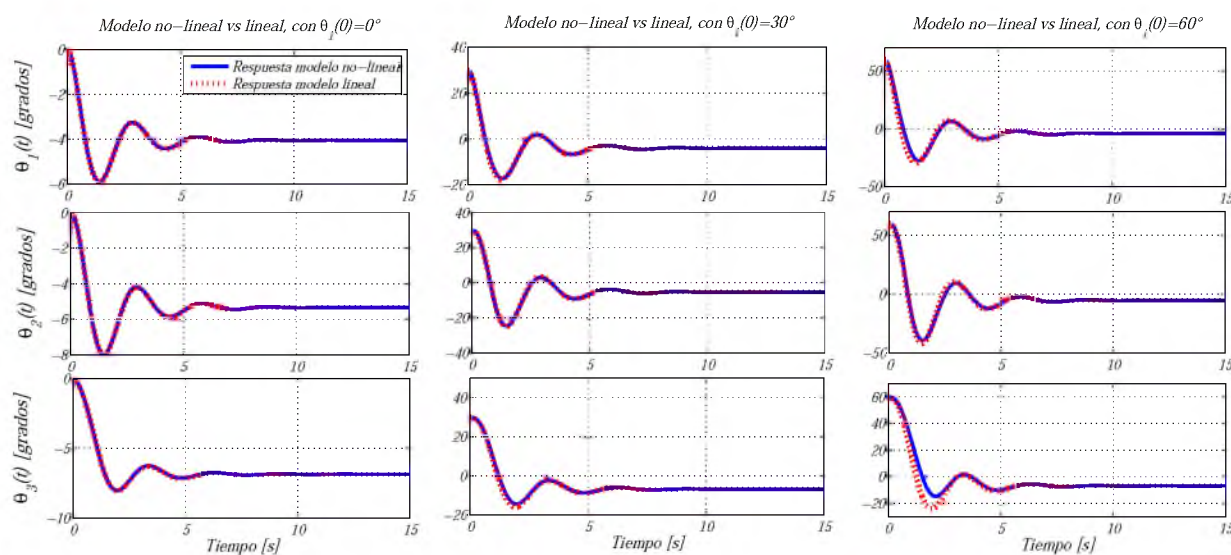


Figura 3.5: Comportamiento del sistema lineal y no-lineal considerando diferentes condiciones iniciales  $\theta_i(0)$  sin entrada  $\tau_i = 0$ .

Dado que el modelo lineal aproxima la respuesta del sistema para variaciones angulares de media y baja magnitud, entonces se aplica el modelo lineal para el análisis y diseño de esquemas de control.

### 3.3.5. Modelo lineal con dinámica desacoplada

Los esquemas de control lineales que se abordan en el presente trabajo de tesis, son aplicados principalmente en sistemas de una entrada y una salida (sistemas SISO). Por lo que se realiza el desacoplamiento dinámico del modelo lineal ec. (3.82), para que cada ecuación diferencial del modelo se exprese en función de una sola coordenada generalizada asociada a su GDL. Para esto se expande el modelo lineal en términos de los elementos que conforman sus matrices,

$$N_{11}\ddot{\theta}_1 + N_{12}\ddot{\theta}_2 + N_{13}\ddot{\theta}_3 + B_{11}\dot{\theta}_1 + H_{11}\theta_1 = \tau_1 + \xi_1$$

$$N_{21}\ddot{\theta}_1 + N_{22}\ddot{\theta}_2 + N_{23}\ddot{\theta}_3 + B_{22}\dot{\theta}_2 + H_{22}\theta_2 = \tau_2 + \xi_2$$

$$N_{31}\ddot{\theta}_1 + N_{32}\ddot{\theta}_2 + N_{33}\ddot{\theta}_3 + B_{33}\dot{\theta}_3 + H_{33}\theta_3 = \tau_3 + \xi_3$$

Cada ecuación diferencial corresponde al comportamiento dinámico de la variable  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). En el modelo los coeficientes y variables que no correspondan al GDL, se consideran como perturbación, por lo tanto, las expresiones anteriores se reescriben de la siguiente manera:

$$N_{11}\ddot{\theta}_1 + B_{11}\dot{\theta}_1 + H_{11}\theta_1 = \tau_1 + \varepsilon_1$$

$$N_{22}\ddot{\theta}_2 + B_{22}\dot{\theta}_2 + H_{22}\theta_2 = \tau_2 + \varepsilon_2$$

$$N_{33}\ddot{\theta}_3 + B_{33}\dot{\theta}_3 + H_{33}\theta_3 = \tau_3 + \varepsilon_3$$

donde las dinámicas no deseadas de cada grado de libertad se renombran por  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\varepsilon_1 = \xi_1 + \left( -N_{12}\ddot{\theta}_2 - N_{13}\ddot{\theta}_3 \right)$$

$$\varepsilon_2 = \xi_2 + \left( -N_{21}\ddot{\theta}_1 - N_{23}\ddot{\theta}_3 \right)$$

$$\varepsilon_3 = \xi_3 + \left( -N_{31}\ddot{\theta}_1 - N_{32}\ddot{\theta}_2 \right)$$

Las tres expresiones tienen la misma estructura, por lo que se puede definir un solo modelo con *dinámica desacoplada*, mediante el cual se realizará el análisis y diseño de los controladores lineales. El modelo con dinámica desacoplada para cada GDL es:

$$N_j\ddot{\theta}_i + B_j\dot{\theta}_i + H_j\theta_i = \tau_i + \varepsilon_i, \quad j = ii \quad (3.83)$$

## 3.4. Modelado cinemático

### 3.4.1. Relación cinemática altura-ángulo de las barras

El sistema de riego basado en barras pulverizadoras tiene una dinámica similar a la de un robot planar de tres eslabones. Sin embargo, a diferencia de estos, los sensores que se emplean no cuantifican el desplazamiento angular de cada una de las barras, en cambio,

estos miden la altura que existe entre la parte inferior de las barra con respecto al suelo. No obstante, hay una relación directa entre la altura de las barras y su orientación, por lo que puede ser determinada a partir de un modelo cinemático aplicando análisis geométrico.

Se considera que los sensores se encuentran ubicados en el extremo de cada barra, entonces la medición que se obtendrá será la altura  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), de la cual  $h_r$  representa la altura efectiva de irrigación para determinado cultivo y es un valor constante, tal como se muestra en la Figura 3.6.

Cuando la superficie del terreno no presenta irregularidades, la orientación de las barras del sistema de riego es de forma horizontal, por lo que el ángulo  $\theta_i$  de cada barra es de  $90^\circ$ . Considerando que las barras se encuentran en posición horizontal se definen los ángulos  $\Delta\theta_i$ , los cuales representan la inclinación de las barras con respecto de la horizontal. La relación entre los ángulos  $\Delta\theta_i$  y  $\theta_i$  en este caso es la siguiente:

$$\theta_i = \Delta\theta_i + \frac{\pi}{2} \quad (3.84)$$

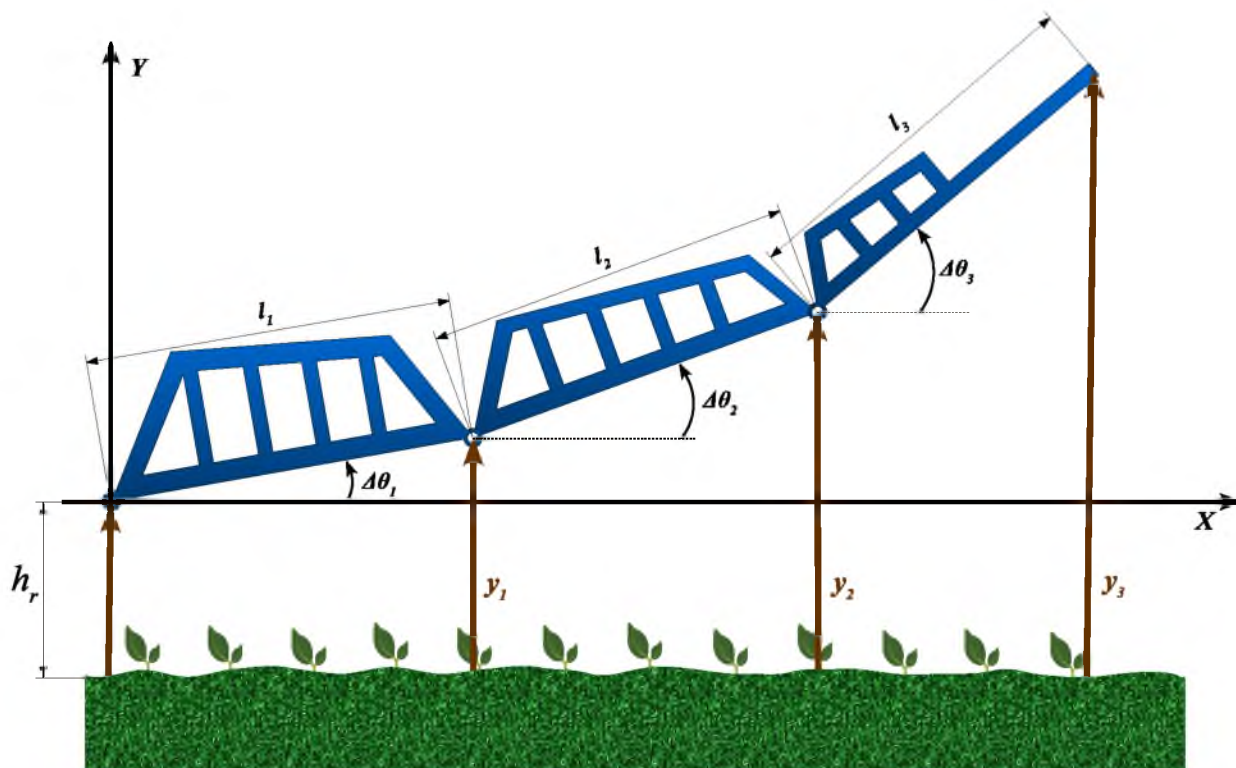


Figura 3.6: Relación entre la altura de las barras y su orientación.

La relación entre la altura del extremo de las barras  $y_i$  y la orientación de las barras  $\Delta\theta_i$  se obtiene mediante análisis geométrico, tal como se describe a continuación.

$$\begin{aligned}\sin(\Delta\theta_1) &= \frac{y_1 - h_r}{l_1} \\ \Delta\theta_1 &= \sin^{-1}\left(\frac{y_1 - h_r}{l_1}\right)\end{aligned}\quad (3.85)$$

$$\begin{aligned}\sin(\Delta\theta_2) &= \frac{y_2 - y_1}{l_2} \\ \Delta\theta_2 &= \sin^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{l_2}\right)\end{aligned}\quad (3.86)$$

$$\begin{aligned}\sin(\Delta\theta_3) &= \frac{y_3 - y_2}{l_3} \\ \Delta\theta_3 &= \sin^{-1}\left(\frac{y_3 - y_2}{l_3}\right)\end{aligned}\quad (3.87)$$

Las expresiones anteriores ecs. (3.85), (3.86) y (3.87) son de utilidad para calcular la orientación de las barras de forma experimental. Sin embargo, al obtener resultados en lazo abierto de forma numérica ya se cuenta con el desplazamiento angular  $\theta_i$  de las barras, esto debido al uso del modelo matemático obtenido, por lo que es necesario aplicar la relación entre alturas y ángulos de forma inversa, con el propósito de observar el desplazamiento de las barras con respecto al marco de referencia fijo  $XY$ . Esta relación se establece mediante las siguientes expresiones:

$$y_1 = l_1 \sin(\Delta\theta_1) + h_r \quad (3.88)$$

$$y_2 = l_1 \sin(\Delta\theta_1) + l_2 \sin(\Delta\theta_2) + h_r \quad (3.89)$$

$$y_3 = l_1 \sin(\Delta\theta_1) + l_2 \sin(\Delta\theta_2) + l_3 \sin(\Delta\theta_3) + h_r \quad (3.90)$$

Para el estudio numérico del sistema de barras pulverizadoras la altura de las barras  $y_i$  se calcula mediante las ecs. (3.88) (3.89) y (3.90), y en la práctica experimental no se utilizan, ya que las alturas  $y_i$  se miden de forma directa mediante los sensores de distancia.

La Figura 3.7 muestra el desplazamiento vertical de las barras cuando se encuentran en rotación, considerando como condición inicial  $\Delta\theta_i(0) = \pi/2$  ( $i = 1, 2, 3$ ). La respuesta obtenida muestra que las barras se desplazan angularmente hasta converger a su punto de equilibrio. Esta posición indica que las barras se encuentran en posición vertical, por debajo del sistema de referencia. En relación con la altura de las barras se considera que no hay altura de irrigación, es decir,  $h_r = 0$ . En la respuesta obtenida se observa que no se estabilizan a una distancia de 1 m entre cada una y esto es debido a la localización del centro de masa, lo que produce que el extremo de cada barra no se encuentre sobre el eje vertical, tal como se muestra en el análisis del punto de equilibrio (ver Figura 3.4.)

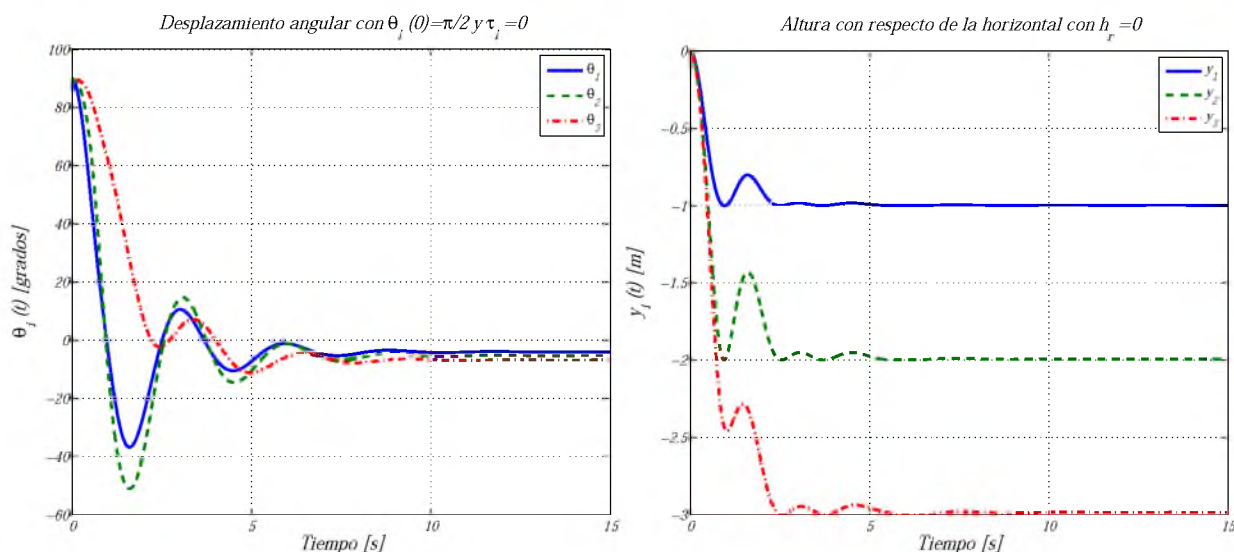


Figura 3.7: Respuesta en lazo abierto considerando condiciones iniciales  $\theta_i(0) = \pi/2$  rad. a) Desplazamiento angular  $\theta_i(t)$  y b) Desplazamiento en el extremo de la barra  $y_i(t)$ .

Al aplicar torques externos al sistema, cada barra tiende a estabilizarse en una posición distinta a la de su punto de equilibrio. En la Figura 3.8 se muestra el desplazamiento angular  $\theta_i$  y vertical  $y_i$  de las barras cuando se aplica un torque  $\tau = [45 \ 35 \ 10]^T$  N m. Se observa que las barras se estabilizan en ángulos superiores a los de su punto de equilibrio, debido a la acción de los torques que actúan en sentido anti-horario. Esto produce que la posición vertical del extremo de cada barra tienda a incrementar. Debido a la gran magnitud de rotación generada en la tercer barra, esto produce un mayor desplazamiento vertical relativo respecto de la otras barras, ya que se estabiliza en  $y_3 = -2.6$  m en un tiempo de 10 s. Mientras que la segunda barra se estabiliza en un menor tiempo en  $y_2 = -1.85$  m y la primer barra se estabiliza en un tiempo aún más corto en una posición muy cercana al punto de equilibrio  $y_1 = -0.99$  m.

El desplazamiento máximo entre la horizontal y el extremo de cada barra se produce cuando el desplazamiento angular  $\theta_i = 0^\circ$ .

### 3.4.2. Relación diferencial altura-ángulo

Las relaciones cinemáticas que se han obtenido permiten determinar el desplazamiento angular  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de las barras de acuerdo a la altura  $y_i$  del extremo de las barras con respecto al suelo. Esto es de utilidad ya que la dinámica del sistema se rige por desplazamientos angulares, sin embargo, se requieren las relaciones entre las velocidades y aceleraciones de la altura y desplazamientos angulares, ya que serán empleadas cuando se aplican las estrategias de control activo.

Se considera además que, la medición de los sensores proporcionará la altura  $y_i$  y sus derivadas ( $\dot{y}_i, \ddot{y}_i$ ) se obtendrán por medio de software, aplicando derivadas numéricas.

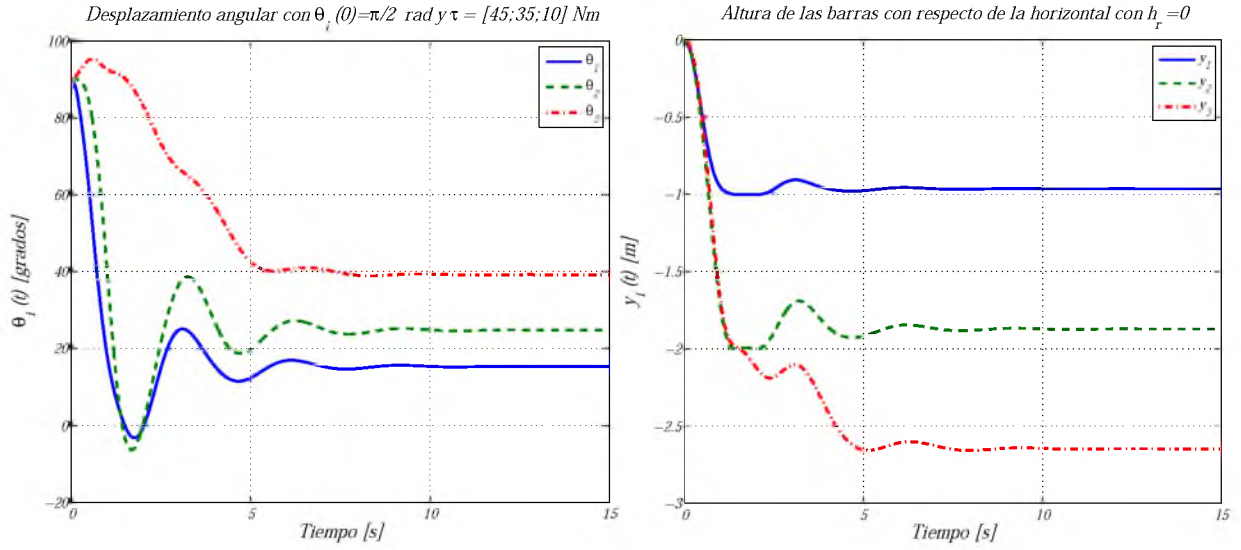


Figura 3.8: Respuesta en lazo abierto considerando  $\theta_i(0) = \pi/2$  rad y torque aplicado. a) Desplazamiento angular  $\theta_i(t)$  y b) Desplazamiento en el extremo de la barra  $y_i(t)$ .

### Determinación de las velocidades angulares de las barras

Velocidad rotacional de la primer barra se obtiene al aplicar la derivada a la siguiente relación,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\sin(\Delta\theta_1)] &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{y_1 - h_r}{l_1} \right] \\ \dot{\Delta\theta}_1 \cos(\Delta\theta_1) &= \frac{\dot{y}_1}{l_1} \end{aligned}$$

La función  $\Delta\theta_1$  esta desfasado de  $\theta_1$  una cantidad constante, por lo que sus velocidades son las mismas  $\dot{\Delta\theta}_1 = \dot{\theta}_1$ , entonces, la expresión anterior se escribe de la siguiente manera:

$$\dot{\theta}_1 \cos(\Delta\theta_1) = \frac{\dot{y}_1}{l_1}$$

La función  $\cos(\Delta\theta_1)$  se puede expresar en función de la altura vertical de la barra y su longitud, de la siguiente manera:

$$\cos(\Delta\theta_1) = \frac{\sqrt{l_1^2 - (y_1 - h_r)^2}}{l_1}$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional de la primer barra  $\dot{\theta}_1$  es:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{y}_1}{\sqrt{l_1^2 - (y_1 - h_r)^2}} \quad (3.91)$$

Aplicando la misma metodología se obtienen las velocidades rotacionales  $\dot{\theta}_2$  y  $\dot{\theta}_3$ .

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{\sqrt{l_2^2 - (y_2 - y_1)^2}} \quad (3.92)$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\dot{y}_3 - \dot{y}_2}{\sqrt{l_3^2 - (y_3 - y_2)^2}} \quad (3.93)$$

### Determinación de las aceleraciones angulares de las barras

La aceleración angular correspondiente a la primer barra se puede obtener derivando directamente la velocidad  $\dot{\theta}_1$  ec. (3.91)

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\sqrt{l_1^2 - (y_1 - h_r)^2} \ddot{y}_1 - \dot{y}_1 \left\{ \frac{1}{2} (l_1^2 - (y_1 - h_r)^2)^{-\frac{1}{2}} [-2 (y_1 - h_r) (\dot{y}_1)] \right\}}{l_1^2 - (y_1 - h_r)^2}$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene la aceleración  $\ddot{\theta}_1$  correspondiente a la rotación de la primer barra.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\ddot{y}_1}{\sqrt{l_1^2 - (y_1 - h_r)^2}} + \frac{\dot{y}_1^2 (y_1 - h_r)}{\sqrt{[l_1^2 - (y_1 - h_r)^2]^3}} \quad (3.94)$$

De la misma manera se determinan las aceleraciones correspondientes  $\ddot{\theta}_2$  y  $\ddot{\theta}_3$ .

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\ddot{y}_2}{\sqrt{l_2^2 - (y_2 - y_1)^2}} + \frac{\dot{y}_2^2 (y_2 - y_1)}{\sqrt{[l_2^2 - (y_2 - y_1)^2]^3}} \quad (3.95)$$

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{\ddot{y}_3}{\sqrt{l_3^2 - (y_3 - y_2)^2}} + \frac{\dot{y}_3^2 (y_3 - y_2)}{\sqrt{[l_3^2 - (y_3 - y_2)^2]^3}} \quad (3.96)$$

### 3.4.3. Análisis de mecanismos para la transmisión de movimiento

El comportamiento del sistema responde a una dinámica no-lineal, cuya salida es el desplazamiento angular de las barras  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y la entrada es un torque  $\tau_i$  que se aplica sobre la articulación de cada barra. Debido a las dimensiones de los sistemas de riego autopropulsados estos emplean actuadores lineales del tipo hidráulicos, ya que pueden ejercer fuerzas de gran magnitud. Para convertir la fuerza lineal que ejercen estos actuadores se requiere la implementación de un mecanismo que realice la conversión de *Fuerza a Par*. En este caso se consideran mecanismos articulares compuestos por eslabones unidos mediante una cadena cinemática cerrada.

El número de eslabones del mecanismo dependen de los requerimientos de movimiento, en este caso se emplea un mecanismo de 3 eslabones para la transmisión de movimiento de

la primer barra pulverizadora y uno de 4 eslabones para las otras dos, tal como se muestra en la Figura 3.9.

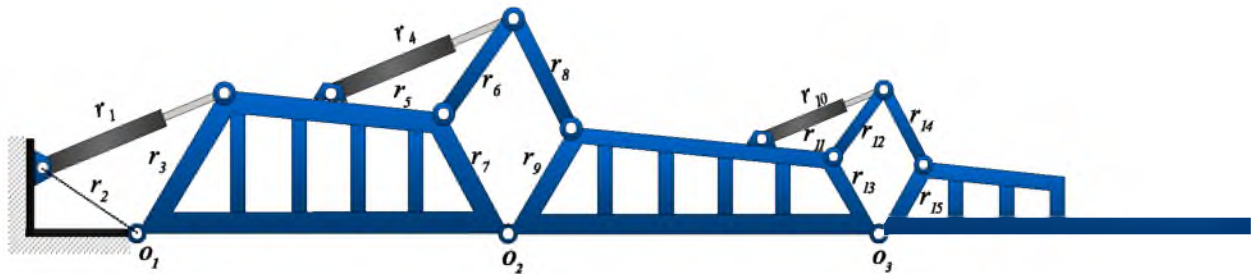


Figura 3.9: Mecanismos y actuadores lineales encargados de generar el movimiento de las barras pulverizadoras.

### 3.4.4. Análisis de posición del mecanismo de 3 eslabones

El análisis del mecanismo de 3 eslabones consiste en determinar el desplazamiento angular y lineal de todos los eslabones en función de parámetros geométricos constantes conocidos del mecanismo. Para el primer mecanismo se consideran dos eslabones de longitud constante ( $r_2$ ,  $r_3$ ) y un tercero de longitud variable  $r_1$ , el cual representa el desplazamiento del vástago del actuador lineal. La longitud de cada eslabón que conforma los tres mecanismos usados en el sistema de barras pulverizadoras son denotados por  $r_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, 15$ ), mientras que su desplazamiento angular se denota por  $\phi_k$ . El esquema representativo para el mecanismo de 3 eslabones es el que se muestra en la Figura 3.10.



Figura 3.10: Primer mecanismo formado por 3 eslabones.

El movimiento de todo el mecanismo es inducido por la acción de la fuerza de los actuadores lineales. Sin embargo, en las ecuaciones cinemáticas no se consideran las fuerzas

que originan el movimiento, de modo que, sólo se considera como entrada generadora de movimiento. La acción de los actuadores inducen el desplazamiento angular  $\Delta\theta_i$  directamente sobre los eslabones  $r_1$ ,  $r_4$  y  $r_{10}$ . Estos desplazamientos angulares inducen el movimiento directamente sobre los eslabones  $r_3$ ,  $r_9$  y  $r_{15}$ , por lo que existe una relación directa entre los desplazamientos angulares de los eslabones ( $\phi_3$ ,  $\phi_9$  y  $\phi_{15}$ ) y el desplazamiento angular de las barras  $\Delta\theta_i$ , tal como se muestra:

$$\begin{aligned}\phi_3 &\propto \Delta\theta_1 \\ \phi_9 &\propto \Delta\theta_2 \\ \phi_{15} &\propto \Delta\theta_3\end{aligned}$$

Para determinar las incógnitas del mecanismo se hace uso del análisis vectorial y algebra compleja,

$$\mathbf{r}_k = r_k e^{j\phi_k}$$

donde  $\mathbf{r}_k$  es el vector de posición,  $r_k$  es la longitud de los eslabones y  $\phi_k$  es la inclinación del vector.

Por lo que el mecanismo se representa en forma vectorial, tal como se muestra en la Figura 3.10. Se especifican los parámetros que conforman el mecanismo y se plantea la ecuación de cerradura para encontrar la solución de las incógnitas.

Los parámetros cinemáticos del mecanismo generador de movimiento se encuentran en función de longitudes y ángulos, los cuales pueden ser constantes o variables según sea el caso. Para el primer mecanismo, los parámetros son los que se muestra en la Tabla 3.1.

Variables	Constantes
$r_1, \phi_1, \phi_3$	$r_2, r_3, \phi_2$
Entrada	Incógnitas
$\phi_3$	$r_1, \phi_1$

Tabla 3.1: Parámetros cinemáticos del mecanismo de 3 eslabones.

La ecuación de cerradura de vectores para el mecanismo es:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$$

$$r_1 e^{j\phi_1} = r_2 e^{j\phi_2} + r_3 e^{j\phi_3}$$

**Nota** Identidad de Euler  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

Aplicando la Identidad de Euler para obtener las componentes rectangulares de los vectores.

$$r_1 \cos \phi_1 + jr_1 \sin \phi_1 = r_2 \cos \phi_2 + r_3 \cos \phi_3 + j(r_2 \sin \phi_2 + r_3 \sin \phi_3)$$

Separando los términos reales ec. (3.97) y los imaginarios ec. (3.98) de la expresión,

$$r_1 \cos \phi_1 = r_2 \cos \phi_2 + r_3 \cos \phi_3 \quad (3.97)$$

$$r_1 \sin \phi_1 = r_2 \sin \phi_2 + r_3 \sin \phi_3 \quad (3.98)$$

En este caso, se requiere determinar la longitud del eslabón  $r_1$  y de su ángulo  $\phi_1$  en función de los demás parámetros del mecanismo. Para determinar  $\phi_1$ , se divide la ec. (3.98) entre la ec. (3.97).

$$\frac{r_1 \sin \phi_1}{r_1 \cos \phi_1} = \tan \phi_1 = \frac{r_2 \sin \phi_2 + r_3 \sin \phi_3}{r_2 \cos \phi_2 + r_3 \cos \phi_3}$$

Despejando  $\phi_1$  de la expresión anterior.

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{r_2 \sin \phi_2 + r_3 \sin \phi_3}{r_2 \cos \phi_2 + r_3 \cos \phi_3} \right] \quad (3.99)$$

La determinación de  $r_1$  se realiza elevando al cuadrado las ecs. (3.97) y (3.98) y resolviendo para la longitud del primer eslabón  $r_1$ ,

$$r_1^2 \cos^2 \phi_1 = r_2^2 \cos^2 \phi_2 + 2r_2 r_3 \cos \phi_2 \cos \phi_3 + r_3^2 \cos^2 \phi_3$$

$$r_1^2 \sin^2 \phi_1 = r_2^2 \sin^2 \phi_2 + 2r_2 r_3 \sin \phi_2 \sin \phi_3 + r_3^2 \sin^2 \phi_3$$

y posteriormente se suman entre sí.

$$\begin{aligned} r_1^2 \cos^2 \phi_1 + r_1^2 \sin^2 \phi_1 &= r_2^2 \cos^2 \phi_2 + 2r_2 r_3 \cos \phi_2 \cos \phi_3 + r_3^2 \cos^2 \phi_3 + r_2^2 \sin^2 \phi_2 \\ &\quad \dots + 2r_2 r_3 \sin \phi_2 \sin \phi_3 + r_3^2 \sin^2 \phi_3 \end{aligned}$$

De modo que, la longitud del eslabón  $r_1$  es:

$$r_1 = \sqrt{r_2^2 + r_3^2 + 2r_2 r_3 \cos(\phi_2 - \phi_3)} \quad (3.100)$$

### 3.4.5. Análisis de posición del mecanismo de 4 eslabones

La configuración del mecanismo que se emplea para la conversión de fuerza lineal a fuerza torcional en las articulaciones  $O_2$  y  $O_3$  es un arreglo de 4 eslabones. Este arreglo es usado para transmitir el movimiento de la primer barra a la segunda barra estructural y otro arreglo es utilizado en el movimiento relativo de la segunda a la tercer barra estructural. El primer

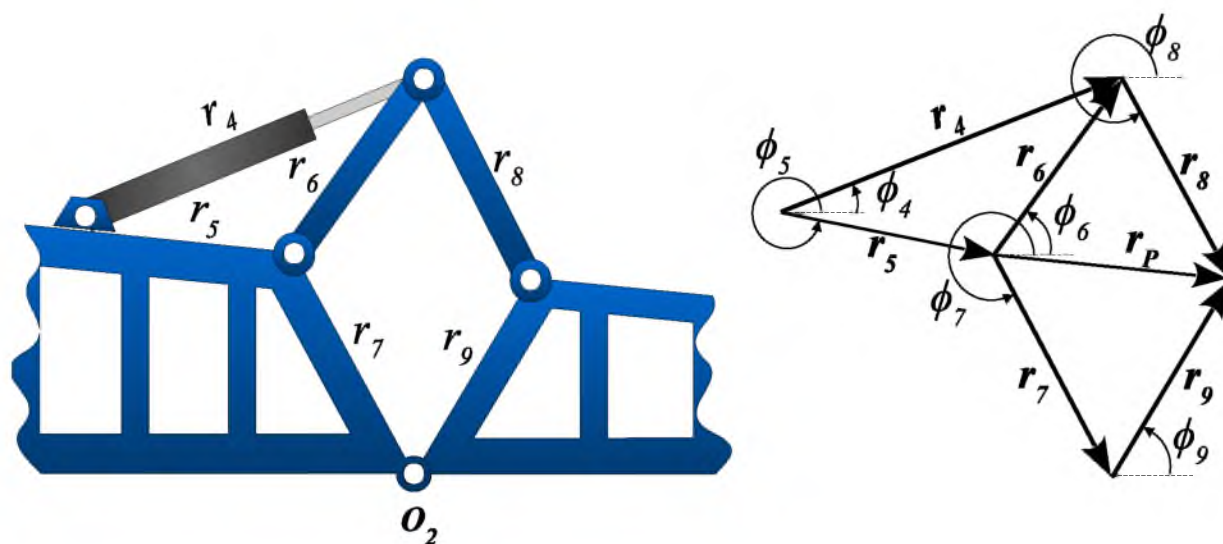


Figura 3.11: Mecanismo de 4 eslabones y su respectivo diagrama vectorial.

mecanismo de 4 eslabones es denotado por los vectores  $r_k$  ( $k = 6, 7, 8, 9$ ) y sus respectivos ángulos denotados por  $\phi_k$ . Este mecanismo está acoplado a otro arreglo de 3 eslabones  $r_k$  ( $k = 4, 5, 6$ ) que contiene al actuador lineal en  $r_4$ , tal como se muestra en la Figura 3.11.

Para el análisis matemático primero se determinan las incógnitas que se presentan en el mecanismo de 4 eslabones y posteriormente se determinan las del mecanismo de 3 eslabones. La técnica que se emplea es un análisis vectorial utilizando el álgebra compleja.

Los parámetros del mecanismo de cuatro eslabones son los que se muestra en la Tabla 3.2.

Variables	Constantes
$r_4, \phi_4, \phi_6, \phi_8, \phi_9$	$r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, \phi_5, \phi_7$
<b>Entrada</b>	<b>Incógnitas</b>
$\phi_9$	$r_4, \phi_4, \phi_6, \phi_8$

Tabla 3.2: Parámetros cinemáticos del mecanismo de 4 eslabones.

Basado en la Figura 3.11, se establece la ecuación de cerradura de vectores de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_6 + \mathbf{r}_8 &= \mathbf{r}_7 + \mathbf{r}_9 = \mathbf{r}_P \\
r_6 e^{j\phi_6} + r_8 e^{j\phi_8} &= r_7 e^{j\phi_7} + r_9 e^{j\phi_9} \\
r_6 (\cos \phi_6 + j \sin \phi_6) + r_8 (\cos \phi_8 + j \sin \phi_8) &= r_7 (\cos \phi_7 + j \sin \phi_7) + r_9 (\cos \phi_9 + j \sin \phi_9) \\
r_6 \cos \phi_6 + r_8 \cos \phi_8 + j (r_6 \sin \phi_6 + r_8 \sin \phi_8) &= r_7 \cos \phi_7 + r_9 \cos \phi_9 + j (r_7 \sin \phi_7 + r_9 \sin \phi_9)
\end{aligned}$$

Separando los términos reales ec. (3.101) y los imaginarios ec. (3.102) se obtienen las siguientes expresiones:

$$r_6 \cos \phi_6 + r_8 \cos \phi_8 = r_7 \cos \phi_7 + r_9 \cos \phi_9 \quad (3.101)$$

$$r_6 \sin \phi_6 + r_8 \sin \phi_8 = r_7 \sin \phi_7 + r_9 \sin \phi_9 \quad (3.102)$$

Ahora resolvemos el desplazamiento angular de los eslabones determinados por  $\phi_6$  y  $\phi_8$ . El cálculo de  $\phi_6$  se realiza al despejar la componente horizontal y vertical de  $\mathbf{r}_6$  de las ecs. (3.101) y (3.102),

$$r_6 \cos \phi_6 = r_7 \cos \phi_7 + r_9 \cos \phi_9 - r_8 \cos \phi_8 \quad (3.103)$$

$$r_6 \sin \phi_6 = r_7 \sin \phi_7 + r_9 \sin \phi_9 - r_8 \sin \phi_8 \quad (3.104)$$

y dividiendo la ec. (3.104) entre la ec. (3.103).

$$\frac{r_6 \sin \phi_6}{r_6 \cos \phi_6} = \tan \phi_6 = \frac{r_7 \sin \phi_7 + r_9 \sin \phi_9 - r_8 \sin \phi_8}{r_7 \cos \phi_7 + r_9 \cos \phi_9 - r_8 \cos \phi_8}$$

Despejando  $\phi_6$  de la expresión anterior.

$$\phi_6 = \tan^{-1} \left[ \frac{r_7 \sin \phi_7 + r_9 \sin \phi_9 - r_8 \sin \phi_8}{r_7 \cos \phi_7 + r_9 \cos \phi_9 - r_8 \cos \phi_8} \right] \quad (3.105)$$

La rotación del eslabón  $\phi_6$  ec. (3.105) esta en función de  $\phi_8$ , por lo que es necesario determinar  $\phi_8$ . Esta última quedará en función de los parámetros conocidos del mecanismos y se resuelve de la siguiente manera.

Elevando al cuadrado las ecs. (3.103) y (3.104) y sumandolas entre sí,

$$\begin{aligned}
r_6^2 \cos^2 \phi_6 + r_6^2 \sin^2 \phi_6 &= r_7^2 \cos^2 \phi_7 + r_9^2 \cos^2 \phi_9 + r_8^2 \cos^2 \phi_8 + 2r_7r_9 \cos \phi_7 \cos \phi_9 \\
&\dots - 2r_7r_8 \cos \phi_7 \cos \phi_8 - 2r_9r_8 \cos \phi_9 \cos \phi_8 + r_7^2 \sin^2 \phi_7 \\
&\dots + r_9^2 \sin^2 \phi_9 + r_8^2 \sin^2 \phi_8 + 2r_7r_9 \sin \phi_7 \sin \phi_9 \\
&\dots - 2r_7r_8 \sin \phi_7 \sin \phi_8 - 2r_9r_8 \sin \phi_9 \sin \phi_8
\end{aligned}$$

y simplificando la expresión anterior.

$$\begin{aligned} r_6^2 = & r_7^2 + r_9^2 + r_8^2 + 2r_7r_9 \cos(\phi_7 - \phi_9) - 2r_8(r_7 \cos \phi_7 + r_9 \cos \phi_9) \cos \phi_8 \\ & \dots - 2r_8(r_7 \sin \phi_7 + r_9 \sin \phi_9) \sin \phi_8 \end{aligned} \quad (3.106)$$

La expresión anterior ec. (3.106) puede escribirse de la siguiente forma (ver Norton, [14]):

$$A_1 \cos \phi_8 + B_1 \sin \phi_8 + C_1 = 0 \quad (3.107)$$

Ordenando los términos se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} 2r_8(r_7 \cos \phi_7 + r_9 \cos \phi_9) \cos \phi_8 + 2r_8(r_7 \sin \phi_7 + r_9 \sin \phi_9) \sin \phi_8 \\ \dots + r_6^2 - r_7^2 - r_9^2 - r_8^2 - 2r_7r_9 \cos(\phi_7 - \phi_9) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 2r_8(r_7 \cos \phi_7 + r_9 \cos \phi_9) \\ B_1 &= 2r_8(r_7 \sin \phi_7 + r_9 \sin \phi_9) \\ C_1 &= r_6^2 - r_7^2 - r_9^2 - r_8^2 - 2r_7r_9 \cos(\phi_7 - \phi_9) \end{aligned}$$

Para encontrar la solución se hace uso de las siguientes *identidades semiangulares*.

$$\cos \phi_8 = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\phi_8}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\phi_8}{2}\right)} \quad (3.108)$$

$$\sin \phi_8 = \frac{2 \tan\left(\frac{\phi_8}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\phi_8}{2}\right)} \quad (3.109)$$

Sustituyendo las identidades semiangulares ecs. (3.108) y (3.109) en la ec. (3.107).

$$A_1 \left[ \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\phi_8}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\phi_8}{2}\right)} \right] + B_1 \left[ \frac{2 \tan\left(\frac{\phi_8}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\phi_8}{2}\right)} \right] + C_1 = 0$$

Simplificando y agrupando términos de la expresión anterior.

$$(C_1 - A_1) \tan^2\left(\frac{\phi_8}{2}\right) + 2B_1 \tan\left(\frac{\phi_8}{2}\right) + (A_1 + C_1) = 0 \quad (3.110)$$

La ec. (3.110) obtenida tiene la característica de una ecuación cuadrática, cuya ecuación se resuelve para  $\phi_8$ .

$$\phi_8 = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-2B_1 \pm \sqrt{4B_1^2 - 4(C_1^2 - A_1^2)}}{2(C_1 - A_1)} \right] \quad (3.111)$$

Ahora, con respecto al mecanismo de 3 eslabones acoplado por el eslabón  $r_6$ . La magnitud del eslabón  $r_4$  y su desplazamiento angular  $\phi_4$ , se determina utilizando el mismo análisis de posición de un mecanismo de 3 eslabones, descrito en la sección 3.4.4, tal como sigue:

$$\phi_4 = \tan^{-1} \left[ \frac{r_5 \sin \phi_5 + r_6 \sin \phi_6}{r_5 \cos \phi_5 + r_6 \cos \phi_6} \right] \quad (3.112)$$

$$r_4 = \sqrt{r_5^2 + r_6^2 + 2r_5r_6 \cos(\phi_5 - \phi_6)} \quad (3.113)$$

Dado que el mecanismo empleado en la tercer barra pulverizadora es el mismo que el de la segunda, el análisis anterior es el mismo, por lo que las incógnitas que se presentan en este último mecanismo se determinan a partir de las siguientes expresiones:

El ángulo correspondiente al eslabón  $r_{12}$  se representa de la siguiente manera,

$$\phi_{12} = \tan^{-1} \left[ \frac{r_{13} \sin \phi_{13} + r_{15} \sin \phi_{15} - r_{14} \sin \phi_{14}}{r_{13} \cos \phi_{13} + r_{15} \cos \phi_{15} - r_{14} \cos \phi_{14}} \right] \quad (3.114)$$

Para la determinación de  $\phi_{14}$  se expresa la siguiente función, la cual es una combinación de funciones armonicas,

$$A_2 \cos \phi_{14} + B_2 \sin \phi_{14} + C_2 = 0 \quad (3.115)$$

donde

$$\begin{aligned} A_2 &= 2r_{14} (r_{13} \cos \phi_{13} + r_{15} \cos \phi_{15}) \\ B_2 &= 2r_{14} (r_{13} \sin \phi_{13} + r_{15} \sin \phi_{15}) \\ C_2 &= r_{12}^2 - r_{13} - r_{15} - r_{14} - 2r_{13}r_{15} \cos(\phi_{13} - \phi_{15}) \end{aligned}$$

Empleando las identidades trigonométricas ecs. (3.108) y (3.109) en función del ángulo  $\phi_{14}$  y sustituyendo en la ec. (3.115) se obtiene la expresión cuadrática en función de  $\phi_{14}$ , cuya solución es la siguiente.

$$\phi_{14} = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-2B_2 \pm \sqrt{4B_2^2 - 4(C_2^2 - A_2^2)}}{2(C_2 - A_2)} \right] \quad (3.116)$$

El ángulo y longitud del eslabón  $r_{10}$  son los que se muestran a continuación:

$$\phi_{10} = \tan^{-1} \left[ \frac{r_{11} \sin \phi_{11} + r_{12} \sin \phi_{12}}{r_{11} \cos \phi_{11} + r_{12} \cos \phi_{12}} \right] \quad (3.117)$$

$$r_{10} = \sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2 + 2r_{11}r_{12} \cos(\phi_{11} - \phi_{12})} \quad (3.118)$$

### 3.4.6. Conversión de Fuerza $u_i$ a Par $\tau_i$ (mecanismo de 3 eslabones)

El movimiento de las barras pulverizadoras se genera por la fuerza  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que ejercen los actuadores lineales sobre los mecanismos, tal como se observa en la Figura 3.12.

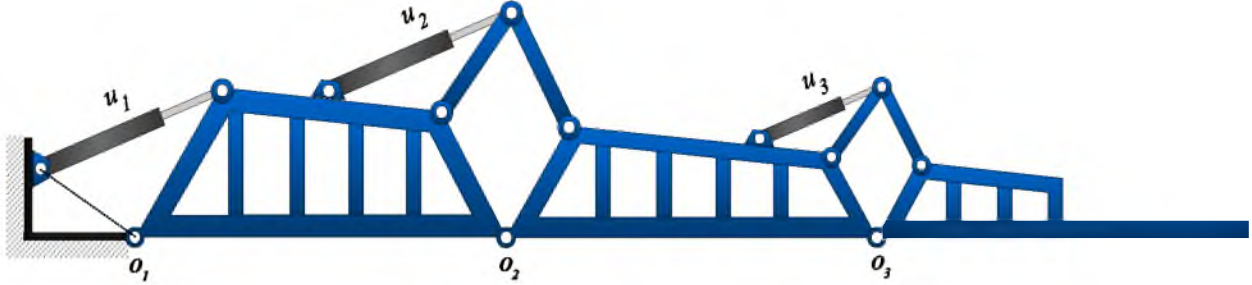


Figura 3.12: Los actuadores lineales ejercen una fuerza  $u_i$  en cada mecanismo de la estructura para la generación de movimiento.

La fuerza que ejerce el actuador sobre el eslabón  $r_3$  es el encargado de generar el movimiento de la primer barra pulverizadora, en este caso, la fuerza  $u_1$  que se aplica sobre la barra no es constante, debido a que el actuador tiende a inclinarse mientras su longitud aumenta o disminuye. La inclinación del primer actuador es denotado por el ángulo  $\phi_1$  y este se determinada a partir de la rotación  $\theta_1$  de la primer barra pulverizadora. El análisis para determinar el Par que se genera en la articulación de la primer barra pulverizadora es el que se muestra a continuación:

A partir del esquema mostrado en la Figura 3.13, se determinan las componentes de la fuerza del actuador  $u_1$ , de tal forma que al aplicar las *ecuaciones de equilibrio de la estática* se calcula el par sobre el punto  $O_1$ .

Aplicando suma de momentos con respecto al punto en  $O_1$ , se determina el par  $\tau_1$  producido por la fuerza aplica  $u_1$ .

$$\begin{aligned} \tau_1 &= u_1 \sin \phi_1 (r_3 \cos \phi_3) - u_1 \cos \phi_1 (r_3 \sin \phi_3) \\ &= u_1 r_3 \sin(\phi_1 - \phi_3) \end{aligned} \quad (3.119)$$

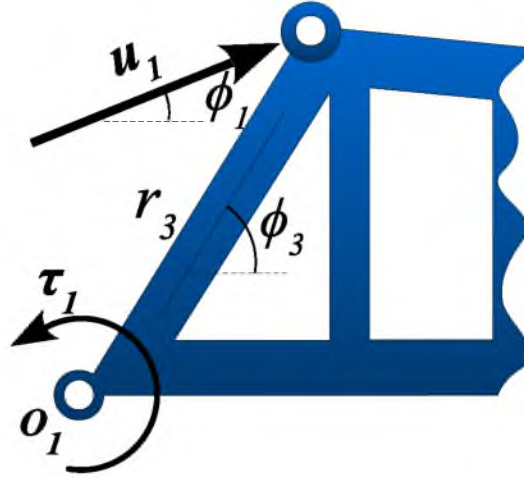


Figura 3.13: Diagrama de cuerpo libre para determinar el par que se aplica en la articulación en  $O_1$ .

### 3.4.7. Conversión de Fuerza $u_i$ a Par $\tau_i$ (mecanismo de 4 eslabones)

Debido a la configuración del mecanismo, solo una cantidad de la fuerza que ejercen los actuadores de la segunda y tercer barra pulverizadora  $u_2$  y  $u_3$  se aplica para generar el par sobre las articulaciones que mueven las barras. Esto se debe a que la fuerza aplicada se distribuye en los eslabones  $r_6$  y  $r_8$  ( $r_{12}$  y  $r_{14}$  considerando el mecanismo para la tercer barra pulverizadora). La fuerza que produce el par sobre la articulación en  $O_2$  es la fuerza  $F_8$  correspondiente al eslabón  $r_8$ , la cual se determina a partir de las ecuaciones de equilibrio de la estática aplicado al *método de secciones* para estructuras (ver Hibbeler, [10]).

Para determinar la fuerza  $F_8$  se realiza un corte marcado por la línea  $\overline{ab}$  sobre el mecanismo, tal como se muestra en la Figura 3.14.

A partir del corte, se aplica suma de momentos con respecto del punto  $p$  y con ello se despeja la fuerza  $F_8$ .

$$\sum M_p = 0$$

$$\begin{aligned} & -u_2 \cos \phi_4 [r_5 \sin (2\pi - \phi_5)] - F_8 \cos (2\pi - \phi_8) [r_7 \sin (2\pi - \phi_7) - r_9 \sin \phi_9] \\ & \dots - u_2 \sin \phi_4 [r_5 \cos (2\pi - \phi_5)] + F_8 \sin (2\pi - \phi_8) [r_7 \cos (2\pi - \phi_7) + r_9 \cos \phi_9] = 0 \end{aligned}$$

Reduciendo y despejando la fuerza  $F_8$  de la expresión anterior.

$$F_8 = \frac{u_2 r_5 (\sin \phi_4 \cos \phi_5 - \cos \phi_4 \sin \phi_5)}{\cos \phi_8 [r_7 \sin \phi_7 + r_9 \sin \phi_9] - \sin \phi_8 [r_7 \cos \phi_7 + r_9 \cos \phi_9]} \quad (3.120)$$

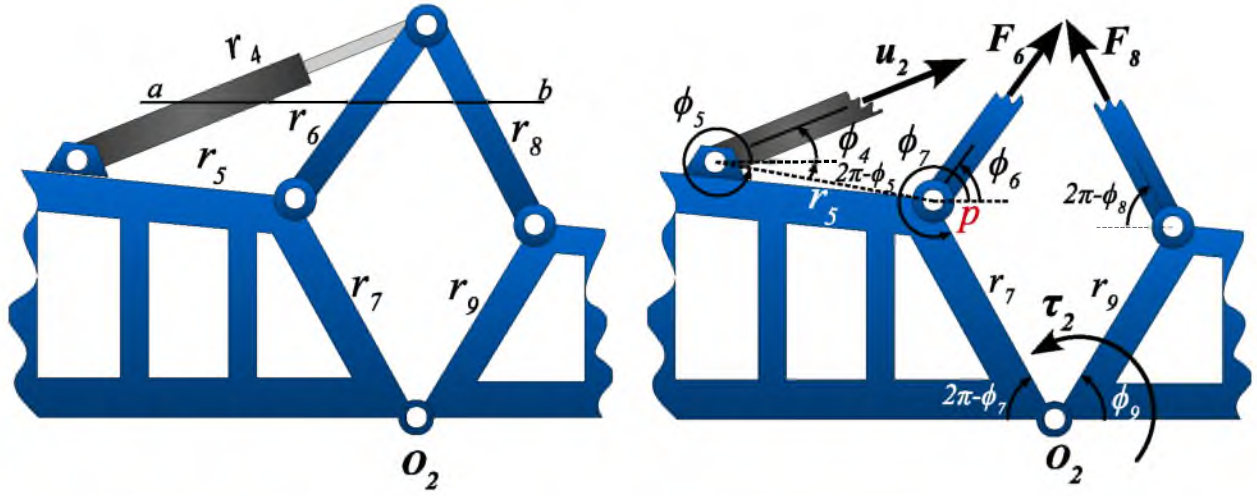


Figura 3.14: Determinación de la fuerza que genera el par sobre la articulación en  $O_2$ .

Reduciendo la ec. (3.120) haciendo uso de identidades trigonométricas.

$$F_8 = \frac{u_2 r_5 \sin(\phi_4 - \phi_5)}{r_7 \sin(\phi_7 - \phi_8) + r_9 \sin(\phi_9 - \phi_8)} \quad (3.121)$$

La tensión del eslabón  $F_8$  esta en función de la inclinación del actuador ( $\phi_4$ ) y del ángulo de todos los eslabones excepto el del eslabón  $r_6$ . El par  $\tau_2$  que se produce en la articulación en  $O_2$  se determina de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= F_8 \sin(2\pi - \phi_8) (r_9 \cos \phi_9) + F_8 \cos(2\pi - \phi_8) (r_9 \sin \phi_9) \\ &= -F_8 r_9 \sin \phi_8 \cos \phi_9 + F_8 r_9 \cos \phi_8 \sin \phi_9 \\ &= F_8 r_9 (\cos \phi_8 \sin \phi_9 - \sin \phi_8 \cos \phi_9) \end{aligned}$$

$$\tau_2 = F_8 r_9 \sin(\phi_9 - \phi_8) \quad (3.122)$$

El mismo análisis se repite para la determinación del par  $\tau_3$  que se aplica en la articulación en  $O_3$ , por lo que el par torsional se calcula de la siguiente manera:

$$F_{14} = \frac{u_3 r_{11} \sin(\phi_{10} - \phi_{11})}{r_{13} \sin(\phi_{13} - \phi_{14}) + r_{15} \sin(\phi_{15} - \phi_{14})} \quad (3.123)$$

$$\tau_3 = F_{14} r_{15} \sin(\phi_{15} - \phi_{14}) \quad (3.124)$$

Las ecs. (3.119), (3.122) y (3.124) expresan la relación de la fuerza de los actuadores y los pares torsionales generados en cada articulación principal del sistema de barras pulverizadoras.

Se determinan los torques que se aplican en las articulaciones de las barras pulverizadas, las cuales se encuentran en función de la fuerza aplicada por cada actuador y por los parámetros de los mecanismos.

La relación fuerza-par descrito en forma matricial es:

$$\tau = \mu U \quad (3.125)$$

donde  $\mu$  es una matriz diagonal  $diag \{ \mu_{11} \quad \mu_{22} \quad \mu_{33} \} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  que contiene los elementos que realizan la conversión de fuerza a par y  $U \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el vector de fuerzas exógenas que ejercen los actuadores lineales.

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal de la matriz  $\mu$  son:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= r_3 \sin(\phi_1 - \phi_3) \\ \mu_{22} &= \frac{r_5 r_9 \sin(\phi_4 - \phi_5) \sin(\phi_9 - \phi_8)}{r_7 \sin(\phi_7 - \phi_8) + r_9 \sin(\phi_9 - \phi_8)} \\ \mu_{33} &= \frac{r_{11} r_{15} \sin(\phi_{10} - \phi_{11}) \sin(\phi_{15} - \phi_{14})}{r_{13} \sin(\phi_{13} - \phi_{14}) + r_{15} \sin(\phi_{15} - \phi_{14})} \end{aligned}$$



# Capítulo 4

## Esquemas de control activo

### 4.1. Controlador tipo PID basado en el modelo

El controlador PID es el algoritmo de control que más se emplea a nivel industrial para el control de variables físicas en los procesos ya que es muy versátil y es eficiente cuando la planta es de baja complejidad dinámica. Se implementa de muchas formas diferentes, como un controlador unico analógico o digital, o como un sistema de control de procesos distribuido jerárquico(ver Astrom, [1]). El controlador PID se compone por una ecuación integrodiferencial de tres términos. El término proporcional ejerce una acción de control proporcional al error (el error es la diferencia entre la referencia y la salida del sistema). El término integral adiciona una acción de control proporcional a la integral del error, por lo que el sistema se vuelve robusto ante perturbaciones y reduce el error en estado estacionario. El término derivativo es proporcional a la derivada del error, lo que permite ofrece un nivel de predicción del error futuro y ejercer una acción de control que lo compense. En la ec. se muestra el modelo del controlador PID en su forma general,

$$\begin{aligned} u &= -k_p e(t) - k_i \int_0^t e(\tau) d\tau - k_d \dot{e}(t) \\ e(t) &= y(t) - y_d(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $k_p$  es la ganancia del control proporcional,  $k_i$  es la ganancia del control integral,  $k_d$  es la ganancia del control derivativo y  $e(t)$  es función de el error basada en la diferencia entre la salida  $y(t)$  y la referencia  $y_d(t)$  del sistema.

La sintonización de las ganancias del controlador PID puede realizarse mediante algunas pruebas experimentales, pero también se puede realizar de forma analítica con diferentes métodos.

En términos generales los controladores PID se han diseñado utilizando dos enfoques diferentes, los controles en sintonía directa y los que se basan en el modelo. Este último permite cancelar las dinámicas del sistema en lazo cerrado y se acondiciona la salida mediante la incorporación de un polinomio característico deseado.

En el presente trabajo se realiza el diseño del controlador PID basado en el modelo (también conocido como *Control Particionado*) (ver Craig, [4]). El sistema de barras pulverizadas debe adaptarse a la superficie del terreno para disminuir *el efecto de la deriva*, causada por los cambios en la altura de irrigación, por lo que se considera un tipo de seguimiento de trayectorias.

Se considera el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo, representado de la siguiente manera:

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + a_2 \overset{(n-2)}{y} + \dots + a_{n-3} \ddot{y} + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = f(t) \quad (4.2)$$

donde  $y$  es la  $i$ -ésima derivada de la salida. Se considera que todos los estados del sistema son medibles y pueden ser retroalimentados, además de que todos los coeficientes  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) son conocidos e invariantes en el tiempo. Entonces se plantea la siguiente ley de control considerando la entrada  $f = u$ ,

$$u = \alpha u' + \beta \quad (4.3)$$

donde  $u'$  es una función que define la cantidad de energía que debe introducirse al sistema,  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones que dependen de los coeficientes  $a_i$  del sistema. Estas son seleccionadas de tal forma que  $\alpha$  siempre sea el coeficiente  $a_0$  y  $\beta$  dependa única y exclusivamente del resto de los coeficientes y estados del sistema, es decir,

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 \\ \beta &= \beta \left( a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n; y, \dot{y}, \dots, \overset{(n-2)}{y}, \overset{(n-1)}{y} \right) \end{aligned}$$

Si  $\beta$  posee la estructura del modelo, la ley de control ec. (4.3) queda expresada como:

$$u = a_0 u' + a_1 \overset{(n-1)}{y} + a_2 \overset{(n-2)}{y} + \dots + a_{n-3} \ddot{y} + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \quad (4.4)$$

Se puede observar que si se sustituye la ley de control ec. (4.3) en el modelo ec. (4.2) se va a producir la cancelación de la dinámica completa y la  $n$ -ésima derivada del sistema será igual a la función  $u'$ .

$$\begin{aligned} a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \dots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y &= a_0 u' + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \dots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\ \overset{(n)}{y} &= u' \end{aligned} \quad (4.5)$$

Esta expresión representa un nuevo modelo dinámico, cuya salida depende de la estructura descrita por la función  $u'$ . Si se considera el modelo simplificado como un sistema entrada-salida, entonces la función  $u'$  se puede escribir como una extensión del modelo del controlador PID general para un sistema de  $n$ -ésimo orden. Considerando como retroalimentación todos los estados medibles y la trayectoria de referencia  $y_d$  y sus  $n$  derivadas, el control se muestra como:

$$\begin{aligned}
 u' = & \quad {}^{(n)}y_d - \kappa_n \left( {}^{(n-1)}y - {}^{(n-1)}y_d \right) - \kappa_{n-1} \left( {}^{(n-2)}y - {}^{(n-2)}y_d \right) - \kappa_{n-2} \left( {}^{(n-3)}y - {}^{(n-3)}y_d \right) - \dots \\
 & \dots - \kappa_3 (\ddot{y} - \ddot{y}_d) - \kappa_2 (\dot{\bar{y}} - \dot{y}_d) - \kappa_1 (y - y_d) - \kappa_0 \int_0^t (y - y_d) d\tau
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde  $\kappa_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) son constantes reales y que representan las ganancias del controlador PID extendido. En caso de que el sistema fuese de segundo orden, las ganancias  $\kappa_2$ ,  $\kappa_1$  y  $\kappa_0$  serían las respectivas ganancias  $k_d$ ,  $k_p$  y  $k_i$  del controlador PID convencional ec. (4.1). En la Figura 4.1 se muestra el diagrama a bloques del sistema retroalimentado.

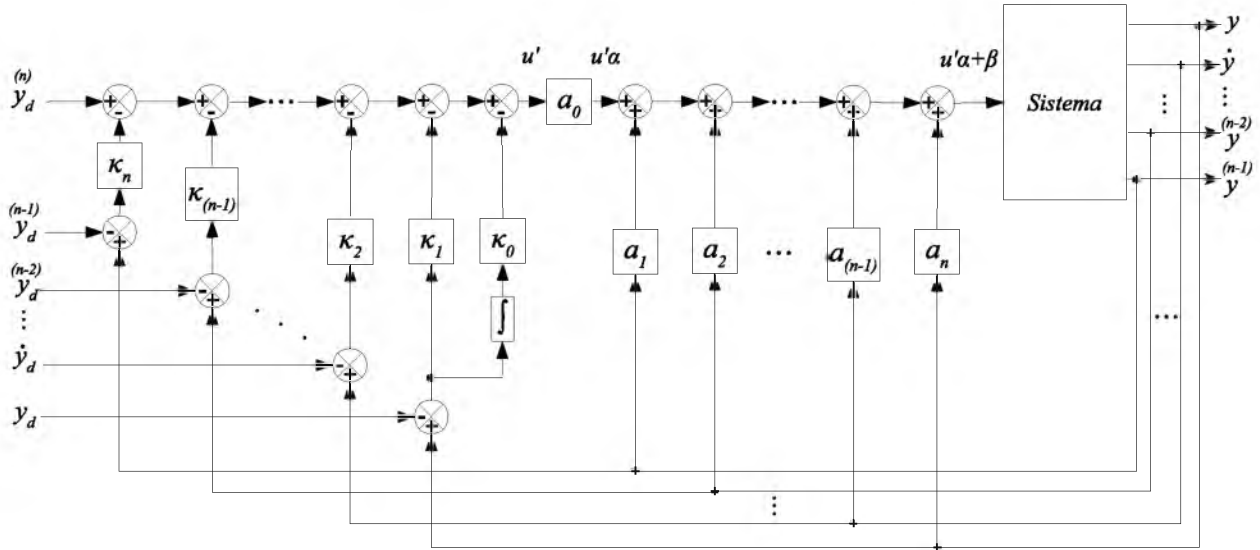


Figura 4.1: Diagrama a bloques del sistema de control PID basado en el modelo (Control Particionado).

Dada la estructura de  $u'$ , es conocida también como *control auxiliar*, debido a que el control principal es el que se muestra en la ec. (4.4).

Si se coloca  $u'$  al miembro izquierdo del modelo simplificado ec. (4.5) se obtiene la representación de un sistema autónomo,

$${}^{(n)}y - u' = 0$$

Sustituyendo la  $u'$  ec. (4.6) en la expresión anterior,

$$\begin{aligned}
 {}^{(n)}y - y_d + \kappa_n \left( {}^{(n-1)}y - {}^{(n-1)}y_d \right) + \kappa_{n-1} \left( {}^{(n-2)}y - {}^{(n-2)}y_d \right) + \kappa_{n-2} \left( {}^{(n-3)}y - {}^{(n-3)}y_d \right) + \dots \\
 \dots + \kappa_3 (\ddot{y} - \ddot{y}_d) + \kappa_2 (\dot{\bar{y}} - \dot{y}_d) + \kappa_1 (y - y_d) + \kappa_0 \int_0^t (y - y_d) d\tau = 0
 \end{aligned}$$

Esto produce una secuencia de términos del error,

$${}^{(n)}e + \kappa_n {}^{(n-1)}e + \kappa_{n-1} {}^{(n-2)}e + \kappa_{n-2} {}^{(n-3)}e + \dots + \kappa_3 \ddot{e} + \kappa_2 \dot{e} + \kappa_1 e + \kappa_0 \int_0^t e d\tau = 0 \quad (4.7)$$

donde  ${}^{(n)}e = y - y_d$ ,  ${}^{(n-1)}e = \dot{y} - \dot{y}_d$ ,  $\dots$ ,  $\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_d$ ,  $e = y - y_d$  son los términos del error y sus derivadas en función del tiempo.

El modelo obtenido en términos del error o *dinámica del error en lazo cerrado* ec. (4.7) posee un término integral, el cual se simplifica aplicando la derivada,

$${}^{(n+1)}e + \kappa_n {}^{(n)}e + \kappa_{n-1} {}^{(n-1)}e + \kappa_{n-2} {}^{(n-2)}e + \dots + \kappa_3 \ddot{e} + \kappa_2 \dot{e} + \kappa_1 e + \kappa_0 e = 0$$

Las propiedades de estabilidad de esta dinámica del error quedan especificadas en términos de la estabilidad del polinomio característico.

$$s^{n+1} + \kappa_n s^n + \kappa_{n-1} s^{n-1} + \kappa_{n-2} s^{n-2} + \dots + \kappa_3 s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0 = 0$$

Para garantizar la estabilidad asintótica de la dinámica del error, se seleccionan las ganancias  $\kappa_i$  de tal forma que sean *Hurwitz* y que el error tienda a cero.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

De este modo se garantiza que el sistema converja sobre la referencia.

#### 4.1.1. Controlador particionado para regular la altura de irrigación

Este controlador hace uso del modelo matemático y los parámetros físicos del sistema, con el propósito de cancelar las dinámicas en lazo cerrado y de ese modo regular la salida del sistema a los parámetros de diseño propuestos.

El modelo matemático del sistema es su forma matricial es:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Dado que la entrada del sistema son fuerzas lineales y mediante una relación cinemática se realiza la conversión de fuerza a par, entonces, el torque de entrada se expresa según la relación de la ec. (3.125),

$$\tau = \mu U$$

En este caso,  $\mu$  es una matriz diagonal que contiene los factores que convierten la fuerza  $U$  ejercida por los actuadores lineales en torque. Por lo que el modelo queda modificado de la siguiente manera:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \mu U \quad (4.8)$$

La salida del sistema de control se convierte de forma inmediata en la entrada del sistema. En este caso, el controlador basado en el modelo del sistema es:

$$\mu^{-1} [M(q)Q + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)] = U \quad (4.9)$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el vector de control auxiliar y contiene las ganancias del controlador, así como también los términos del error, tal como se muestra a continuación:

$$Q = \ddot{q}_d - \kappa_D(\dot{q} - \dot{q}_d) - \kappa_P(q - q_d) - \kappa_I \int_0^t (q - q_d) d\tau \quad (4.10)$$

donde  $\kappa_D, \kappa_P, \kappa_I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices diagonales que contienen las ganancias derivativa, proporcional e integral del sistema de control.

#### Dinámica del sistema en lazo cerrado

La dinámica del sistema en lazo cerrado es obtenida al sustituir la ec. (4.9) en el modelo matemático del sistema ec. (4.8).

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= \mu * \mu^{-1} [M(q)Q + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)] \\ M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= M(q)Q + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \\ M(q)\ddot{q} &= M(q)Q \\ \ddot{q} &= Q \end{aligned}$$

La expresión anterior muestra como las dinámicas del sistema se cancelan y el sistema en lazo cerrado responderá de acuerdo a lo descrito por el control auxiliar  $Q$  ec. (4.10).

#### Dinámica del error en lazo cerrado

De acuerdo a la expresión reducida obtenida en la dinámica en lazo cerrado, se sustituye  $\ddot{q}$  en el control auxiliar ec. (4.10), formando de esta manera la dinámica del error.

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \ddot{q}_d - \kappa_D(\dot{q} - \dot{q}_d) - \kappa_P(q - q_d) - \kappa_I \int_0^t (q - q_d) d\tau \\ \ddot{q} - \ddot{q}_d + \kappa_D(\dot{q} - \dot{q}_d) + \kappa_P(q - q_d) + \kappa_I \int_0^t (q - q_d) d\tau &= 0 \\ \ddot{\Delta q} + \kappa_D \dot{\Delta q} + \kappa_P \Delta q + \kappa_I \int_0^t \Delta q d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde  $\Delta q = q - q_d$ ,  $\dot{\Delta q} = \dot{q} - \dot{q}_d$  y  $\ddot{\Delta q} = \ddot{q} - \ddot{q}_d$ .

Aplicando la transformada de Laplace a la dinámica del error en lazo cerrado ec. (4.11) para obtener el polinomio característico.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \ddot{\Delta q} + \kappa_D \dot{\Delta q} + \kappa_P \Delta q + \kappa_I \int_0^t \Delta q d\tau \right] &= 0 \\ s^2 \Delta Q(s) + \kappa_D s \Delta Q(s) + \kappa_P \Delta Q(s) + \kappa_I \frac{1}{s} \Delta Q(s) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por  $s$  la expresión anterior, para eliminar el término integral.

$$[s^3 I + \kappa_D s^2 + \kappa_P s + \kappa_I] \Delta Q(s) = 0$$

$$P(s) = s^3 I + \kappa_D s^2 + \kappa_P s + \kappa_I \quad (4.12)$$

Para regular la salida del sistema se plantea un polinomio característico deseado  $P_d(s)$ , para este polinomio se plantean factores de segundo y factores de primer orden  $\zeta$ ,  $\omega_n$  y  $p$ , tal que el polinomio propuesto sea del mismo orden que el del polinomio característico  $P(s)$  de la dinámica del error en lazo cerrado ec. (4.12). Sin embargo, dicho polinomio está escrito en forma matricial, por lo que en realidad son tres polinomios característicos los que se deben proponer. Los valores de  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y  $\omega_{ni}$  dependerán de los requerimientos que se propongan para la respuesta del sistema y deberán proponerse de tal forma que el polinomio característico deseado sea *Hurwitz* (ver en Ogata, [15]).

Los tres polinomios característicos de acuerdo con la ec. (4.12) son los siguientes.

$$P(s) = s^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} \kappa_{D11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{D22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{D33} \end{bmatrix} \\ \dots + s \begin{bmatrix} \kappa_{P11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{P22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{P33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_{I11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{I22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{I33} \end{bmatrix}$$

Resolviendo la suma matricial se obtienen los siguientes polinomios característicos, correspondientes a cada grado de libertad.

$$P_1(s) = s^3 + \kappa_{D11} s^2 + \kappa_{P11} s + \kappa_{I11} \quad (4.13)$$

$$P_2(s) = s^3 + \kappa_{D22} s^2 + \kappa_{P22} s + \kappa_{I22} \quad (4.14)$$

$$P_3(s) = s^3 + \kappa_{D33} s^2 + \kappa_{P33} s + \kappa_{I33} \quad (4.15)$$

El polinomio característico deseado para las expresiones anteriores son:

$$P_{1d}(s) = (s^2 + 2\zeta_1 \omega_{n1} s + \omega_{n1}^2) (s + p_1) \\ = s^3 + (2\zeta_1 \omega_{n1} + p_1) s^2 + (2\zeta_1 \omega_{n1} p_1 + \omega_{n1}^2) s + p_1 \omega_{n1}^2 \quad (4.16)$$

$$P_{2d}(s) = s^3 + (2\zeta_2 \omega_{n2} + p_2) s^2 + (2\zeta_2 \omega_{n2} p_2 + \omega_{n2}^2) s + p_2 \omega_{n2}^2 \quad (4.17)$$

$$P_{3d}(s) = s^3 + (2\zeta_3 \omega_{n3} + p_3) s^2 + (2\zeta_3 \omega_{n3} p_3 + \omega_{n3}^2) s + p_3 \omega_{n3}^2 \quad (4.18)$$

El factor de primer orden añadido  $(s + p_i)$ , complementa el orden del polinomio característico deseado.

Igualando las ecs. (4.16), (4.17) y (4.18) con las ecs. (4.13), (4.14) y (4.15) se obtiene el valor de las ganancias del controlador en términos de  $\zeta_i$ ,  $\omega_{ni}$  y  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

$$\begin{aligned} P_1(s) &= P_{1d}(s) \\ s^3 + \kappa_{D11}s^2 + \kappa_{P11}s + \kappa_{I11} &= s^3 + (2\zeta_1\omega_{n1} + p_1)s^2 + (2\zeta_1\omega_{n1}p_1 + \omega_{n1}^2)s + p_1\omega_{n1}^2 \end{aligned}$$

Las ganancias del controlador correspondientes al primer grado de libertad son:

$$\begin{aligned} \kappa_{D11} &= 2\zeta_1\omega_{n1} + p_1 \\ \kappa_{P11} &= 2\zeta_1\omega_{n1}p_1 + \omega_{n1}^2 \\ \kappa_{I11} &= p_1\omega_{n1}^2 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen el resto de las ganancias, tal como se muestra a continuación:

Ganancias correspondientes al segundo grado de libertad.

$$\begin{aligned} \kappa_{D22} &= 2\zeta_2\omega_{n2} + p_2 \\ \kappa_{P22} &= 2\zeta_2\omega_{n2}p_2 + \omega_{n2}^2 \\ \kappa_{I22} &= p_2\omega_{n2}^2 \end{aligned}$$

Ganancias correspondientes al tercer grado de libertad.

$$\begin{aligned} \kappa_{D33} &= 2\zeta_3\omega_{n3} + p_3 \\ \kappa_{P33} &= 2\zeta_3\omega_{n3}p_3 + \omega_{n3}^2 \\ \kappa_{I33} &= p_3\omega_{n3}^2 \end{aligned}$$

En la Figura 4.2 se muestra el diagrama a bloques representativo del sistema retroalimentado, empleando el esquema de control activo PID basado en el modelo y la incorporación de las ecuaciones cinemáticas.

## 4.2. Control por Planitud diferencial

Planitud diferencial es una propiedad de algunos sistemas dinámicos controlados que permite trivializar la tarea de planificación de trayectoria, sin resolver ecuaciones diferenciales (ver Sira-Ramírez y Agrawal, [22]). Mientras que, opcionalmente simplifica el problema de retroalimentación en los sistemas de control para un conjunto de sistemas lineales desacoplados e invariantes en el tiempo.

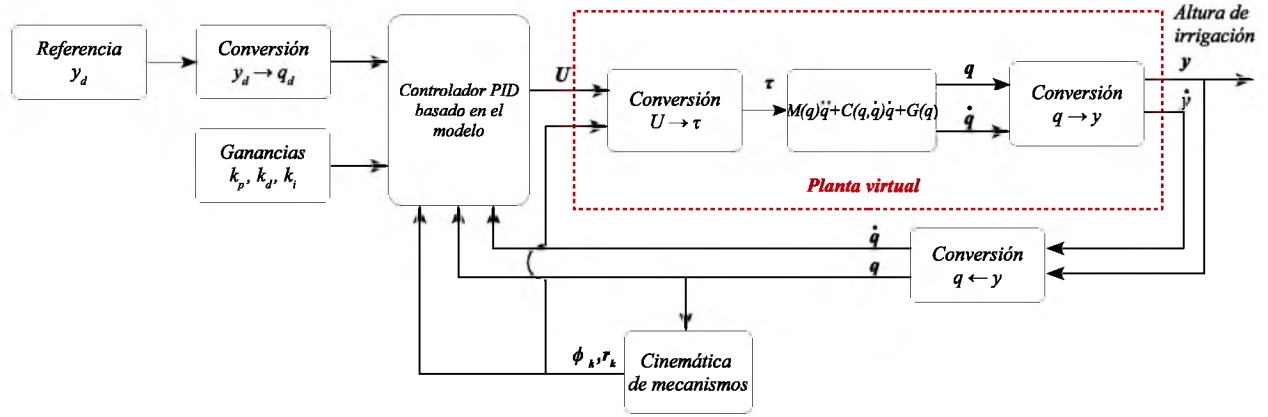


Figura 4.2: Esquema de control PID basado en el modelo del sistema.

La propiedad de planitud permite la completa parametrización de todas las variables del sistema en términos de un conjunto finito de variables independientes, conocidas como *salidas planas* y un finito número de sus derivadas en el tiempo.

Un sistema lineal de una sola entrada y una sola salida (SISO), cuyo modelo se expresa en términos de variables de estado escrita de la forma,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde  $x$  es el vector de estados del sistema,  $A$  es la matriz de estados que contiene los parámetros del sistema,  $B$  es el vector de entrada y  $u$  es la entrada de control (ver Ogata, [16]).

Uno de los criterios utilizados en la ingeniería de control para determinar si una variable de salida es controlada desde la entrada  $u$ , es el criterio algebraico de Kalman. Este afirma que si una matriz  $C_k$  es de rango completo, entonces el sistema es de estado completamente controlable.

La matriz de controlabilidad  $C_k$  es un arreglo formado por el vector  $B$  y la matriz  $A$ , definido como:

$$C_k = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad \dots \quad A^{n-2}B \quad A^{n-1}B]$$

y el sistema es de estado completamente controlable si  $\text{rank}(C_k) = n$ , donde  $n$  es el número total de estados del sistema.

$$\text{rank} [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ \dots \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B] = n$$

Saber que un sistema lineal es controlable, indica que existe la posibilidad de parametrizar la entrada de control  $u$ . Los demás estados del sistema se pueden expresar en términos de una sola variable, conocida como *salida plana* y obtener un sistema diferencial parametrizado del mismo orden. En los párrafos siguientes se muestra el procedimiento para determinar la salida, que parametrice la entrada de control, así como los demás estados.

### 4.2.1. Determinación de la salida plana

En un sistema lineal SISO, la transformación de estados

$$y = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]^{-1} x = C^{-1}x$$

resulta de la siguiente manera

$$\dot{y} = \phi y + \gamma u$$

donde  $\phi$  y  $\gamma$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$\phi = C^{-1}AC$$

$$\gamma = C^{-1}B$$

de la relación  $\gamma$  se obtiene

$$[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \gamma = B$$

entonces  $\gamma$  debe ser un vector de la forma:

$$\gamma = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T$$

por otra parte de la relación

$$C\phi = AC$$

se tiene que  $[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \phi = [AB \ A^2B \ A^3B \ \dots \ A^nB]$  y por el teorema de Cayley Hamilton Poole, [18].

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - a_{n-3}A^{n-3} \dots - a_1A - a_0I$$

se tiene también que:

$$A^n b = -a_{n-1}A^{n-1}b - a_{n-2}A^{n-2}b - a_{n-3}A^{n-3}b \dots - a_1Ab - a_0b$$

sustituyendo esta expresión en la relación  $C\phi = AC$ , podemos obtener  $\phi$  expresado como:

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema resultante  $\dot{y} = \phi y + \gamma u$  esta dada por las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= -a_0 y_1 + u \\
 \dot{y}_2 &= y_1 - a_1 y_2 \\
 \dot{y}_3 &= y_2 - a_2 y_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{y}_{n-2} &= y_{n-3} - a_{n-3} y_{n-2} \\
 \dot{y}_{n-1} &= y_{n-2} - a_{n-2} y_{n-1} \\
 \dot{y}_n &= y_{n-1} - a_{n-1} y_n
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

En el sistema de ecuaciones ec. (4.19), por transformación, la variable  $y_n$  parametriza diferencialmente a todo el sistema. A esta variable se le conoce como *salida plana* y se denota por  $L = y_n$ . Ahora se reescribe el sistema en términos de la salida plana como:

$$\begin{aligned}
 y_n &= L \\
 y_{n-1} &= \dot{y}_n + a_{n-1} y_n = \dot{L} + a_n L \\
 y_{n-2} &= \ddot{L} + a_{n-1} \dot{L} + a_{n-2} L \\
 y_{n-3} &= \dddot{L} + a_{n-1} \ddot{L} + a_{n-2} \dot{L} + a_{n-3} L \\
 &\vdots \\
 y_1 &= L^{n-1} + a_{n-1} L^{n-2} + a_{n-2} L^{n-3} + \dots + a_2 \dot{L} + a_1 L \\
 u &= L^n + a_{n-1} L^{n-1} + a_{n-2} L^{n-2} + \dots + a_2 \ddot{L} + a_1 \dot{L} + a_0 L
 \end{aligned}$$

Puesto que  $y$  y  $x$  satisfacen la relación:

$$y = C^{-1}x = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]^{-1} x$$

se sabe que la salida plana es  $y_n$ , por lo tanto  $y_n = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$ . De todo lo anterior se concluye que la salida plana de un sistema lineal controlable  $\dot{x} = Ax + Bu$ , se obtiene de la siguiente manera:

$$L = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]^{-1} x$$

Por lo tanto, si un sistema lineal es controlable, entonces es posible expresar el control y los demás estados en términos de la salida plana y obtener un sistema diferencial del mismo orden.

#### 4.2.2. Determinación de la salida plana del sistema de riego

Considerando el modelo ec. (3.83) y despreciando la entrada de perturbación  $\varepsilon_i$ , se realiza la representación en el espacio de estados.

VARIABLES DE ESTADO DEL MODELO GENERALIZADO DE CADA BARRA.

$$\begin{aligned} z_{i1} &= \theta_i & \dot{z}_{i1} &= z_{i2} \\ z_{i2} &= \dot{\theta}_i & \dot{z}_{i2} &= -\frac{B_j}{N_j} z_{i2} - \frac{H_j}{N_j} z_{i1} + \frac{1}{N_j} \tau_i \end{aligned}$$

Expresando la representación en el espacio de estados en su forma matricial de forma  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\tau$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{i1} \\ \dot{z}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{H_j}{N_j} & -\frac{B_j}{N_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{i1} \\ z_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{N_j} \end{bmatrix} \tau_i$$

Para realizar la parametrización diferencial se requiere que el sistema cumpla con la propiedad de controlabilidad, es decir:

$$\text{rank}(C_k) = 2$$

donde  $C_k$  es la matriz de controlabilidad y 2 es el orden del sistema. De este modo, si el determinante de la matriz de controlabilidad es distinto de cero, entonces el sistema es de estado completamente controlable. La matriz de controlabilidad para este sistema se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_k &= [B \quad AB] \\ |C_k| &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{N_j} \\ \frac{1}{N_j} & -\frac{B_j}{N_j^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{N_j^2} \neq 0 \end{aligned}$$

El rango de la matriz de controlabilidad es entonces 2, debido a que el sistema tiene determinante distinto de cero y no es singular, por lo tanto, el sistema es de estado completamente controlable.

La identificación de la salida plana  $L_i$  se determina a partir de la siguiente expresión:

$$L_i = [0 \quad 1] C_k^{-1} \mathbf{z} \quad (4.20)$$

Realizando la inversión de la matriz de controlabilidad y determinando la salida plana del sistema.

$$\begin{aligned} L_i &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} B_j & N_j \\ N_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{i1} \\ z_{i2} \end{bmatrix} = [N_j \quad 0] \begin{bmatrix} z_{i1} \\ z_{i2} \end{bmatrix} \\ &= N_j z_{i1} \end{aligned}$$

Esto indica que la salida plana es el estado  $z_{i1}$  correspondiente a los desplazamientos angulares del sistema de riego  $\theta_i$  (para  $i = 1, 2, 3$ ).

La salida plana y su derivada son:

$$\begin{aligned} L_i &= z_{i1} \\ \dot{L}_i &= z_{i2} \end{aligned}$$

### Parametrización diferencial.

La parametrización diferencial consiste en expresar los estados del sistema en función de la salida plana.

$$\begin{aligned} L_i &= z_{i1} & z_{i1} &= L_i \\ \dot{L}_i &= z_{i2} & z_{i2} &= \dot{L}_i \end{aligned}$$

El estado  $z_{i2}$  contiene la entrada del sistema  $\tau_i$ , entonces, se deriva ese estado con el propósito de obtener la ecuación diferencial plana en función de la salida plana y la entrada del sistema.

$$\begin{aligned} \ddot{L}_i &= \dot{z}_{i2} \\ \ddot{L}_i &= -\frac{B_j}{N_j}\dot{L}_i - \frac{H_j}{N_j}L_i + \frac{1}{N_j}\tau_i \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ordenando la expresión anterior ec. (4.21) de acuerdo a un modelo entrada-salida, se obtiene la representación general de las ecuaciones diferenciales ordinarias para cada grado de libertad en términos de la salida plana.

$$N_j\ddot{L}_i + B_j\dot{L}_i + H_jL_i = \tau_i \quad (4.22)$$

### 4.2.3. Control por planitud para regular la altura de irrigación

A partir del modelo descrito por la ec. (4.22) se propone la siguiente ley de control, cuya estructura se basa en el modelo.

$$\begin{aligned} \tau_i &= N_j\Gamma + B_j\dot{L}_i + H_jL_i \\ \Gamma &= \ddot{L}_i \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \ddot{L}_i^* - \alpha_2 \left( \dot{L}_i - \dot{L}_i^* \right) - \alpha_1 (L_i - L_i^*) - \alpha_0 \int_0^t (L_i - L_i^*) d\tau \\ \Delta L_i(t) &= L_i(t) - L_i^*(t), \quad \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $\Gamma$  es la variable de control auxiliar que contiene los términos del error  $\Delta L_i(t)$ ,  $L_i^*$  es la referencia y  $L_i$  la salida plana.

Se añade al control auxiliar ec. (4.24) el término de la integral del error, con el propósito de compensar la perturbación  $\varepsilon_i$  que se ha omitido en el análisis de planitud.

### Dinámica del sistema en lazo cerrado

La dinámica del sistema en lazo cerrado se obtiene al sustituir la ley de control ec. (4.23) en el modelo en términos de la salida plana ec. (4.22).

$$\begin{aligned} N_j \ddot{L}_i + B_j \dot{L}_i + H_j L_i &= N_j \Gamma + B_j \dot{L}_i + H_j L_i \\ \ddot{L}_i &= \Gamma \end{aligned}$$

### Dinámica el error en lazo cerrado

Sustituyendo la relación  $\ddot{L}_i = \Gamma$  en el control auxiliar ec. (4.24) se determina la dinámica del error en lazo cerrado.

$$\begin{aligned} \ddot{L}_i &= \ddot{L}_i^* - \alpha_2 (\dot{L}_i - \dot{L}_i^*) - \alpha_1 (L_i - L_i^*) - \alpha_0 \int_0^t (L_i - L_i^*) d\tau \\ \ddot{L}_i - \ddot{L}_i^* + \alpha_2 (\dot{L}_i - \dot{L}_i^*) + \alpha_1 (L_i - L_i^*) + \alpha_0 \int_0^t (L_i - L_i^*) d\tau &= 0 \\ \Delta \ddot{L}_i + \alpha_2 \Delta \dot{L}_i + \alpha_1 \Delta L_i + \alpha_0 \int_0^t \Delta L_i d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $\Delta L_i(t) = (L_i - L_i^*)$ ,  $\Delta \dot{L}_i = (\dot{L}_i - \dot{L}_i^*)$  y  $\Delta \ddot{L}_i = \ddot{L}_i - \ddot{L}_i^*$ .

Aplicando la transformada de Laplace a la dinámica del error en lazo cerrado ec. (4.25).

$$\begin{aligned} s^2 \Delta L_i(s) + \alpha_2 s \Delta L_i(s) + \alpha_1 \Delta L_i(s) + \frac{\alpha_0}{s} \Delta L_i(s) &= 0 \\ \Delta L_i(s) (s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0) &= 0 \end{aligned}$$

El polinomio característico del sistema es:

$$P(s) = s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (4.26)$$

Para garantizar la estabilidad asintótica sobre la referencia se requiere, que la dinámica del error en lazo cerrado sea cero. Entonces se propone un polinomio característico deseado  $P_d(s)$ , en función de parámetros de la respuesta transitoria como: el amortiguamiento relativo  $\zeta_i$ , frecuencia de trabajo  $\omega_{ni}$  y un polo  $p_i$ . Se seleccionan los valores de los parámetros  $\zeta_i$ ,  $\omega_{ni}$  y  $p_i$  tal que polos del sistema en lazo cerrado sean *Hurwitz*.

$$P_d(s) = (s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2) (s + p_i), \quad \zeta_i, \omega_{ni}, p_i > 0 \quad (4.27)$$



Se puede reconstruir los demás estados del sistema con la salida plana  $L$  y la entrada  $u$ , tal que los otros estados puedan expresarse en terminos de ellas.

La salida plana es obtenida de la siguiente forma:

$$L = [ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 ] [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]^{-1} z = \Psi_0(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (4.28)$$

dado que se trata de un sistema linealizado, por lo tanto las  $L^k$ ,  $k$ -ésima derivadas pueden expresarse como una combinación lineal de  $z$ ,

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \Psi_1(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ \ddot{L} &= \Psi_2(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &\vdots \\ L^{n-1} &= \Psi_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ L^n &= \Psi_n(z_1, z_2, \dots, z_n, u) \end{aligned}$$

donde  $\Psi_i$  es una combinación lineal de los estados  $z$ .

Si definimos el conjunto de estados del sistema  $z, z_2, \dots, z_n$ , y mediante la transformación  $F = Mz$  se obtiene un vector  $F$  de las derivadas de la salida plana. La matriz de transformación  $M$ , es una combinación de los parámetros constantes del sistema. De tal forma que el vector de estados  $z$  se obtiene con la inversa de  $M$ , calculado como  $z = M^{-1}F$ .

$$\begin{aligned} F &= Mz, \quad F, z \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad M \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \begin{bmatrix} L \\ \dot{L} \\ \vdots \\ L^{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.29)$$

dado que  $L^n$  contiene el término de control  $u$  y puesta en una combinación lineal con los estados  $z$ , expresado como:

$$\begin{aligned} L^n &= Hz + \delta u, \quad H \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad z \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad \delta \in \mathbb{R} \\ L^n &= [ h_{11} \ h_{12} \ \cdots \ h_{1(n-1)} \ h_{1n} ] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \delta u \end{aligned}$$

sustituyendo la transformación  $z = M^{-1}F$  en  $L^n$ , la salida se expresa de la forma:

$$L^n = HM^{-1}F + \delta u$$

El producto de las matrices  $HM^{-1}$ , es reescrito por  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}
 L^n &= \alpha F + \delta u, \\
 L^n &= \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ \dot{L} \\ \vdots \\ L^{n-2} \\ L^{n-1} \end{bmatrix} + \delta u, \\
 L^n &= \alpha_0 L + \alpha_1 \dot{L} + \dots + \alpha_{n-2} L^{n-2} + \alpha_{n-1} L^{n-1} + \delta u
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Teniendo la  $n$  -ésima derivada de la salida  $L$ , los estados restantes se estiman por integraciones sucesivas de  $L^n$ . La parametrización integral entrada-salida de las variables de estado del sistema están dadas como:

$$\begin{aligned}
 \widehat{L} &= \alpha_0 \int \int \dots \int_{n-1} L + \alpha_1 \int \int \dots \int_{n-2} L + \dots + \alpha_{n-2} \int L + \alpha_{n-1} L + \delta \int \int \dots \int_{n-1} u, \\
 \widehat{\dot{L}} &= \alpha_0 \int \int \dots \int_{n-2} L + \alpha_1 \int \int \dots \int_{n-3} L + \dots + \alpha_{n-2} L + \alpha_{n-1} \widehat{L} + \delta \int \int \dots \int_{n-2} u, \\
 &\vdots \\
 \widehat{L}^{n-2} &= \alpha_0 \int \int L + \alpha_1 \int L + \alpha_2 L + \dots + \alpha_{n-2} \widehat{L}^{n-4} + \alpha_{n-1} \widehat{L}^{n-3} + \delta \int \int u, \\
 \widehat{L}^{n-1} &= \alpha_0 \int L + \alpha_1 L + \alpha_2 \widehat{L} + \dots + \alpha_{n-2} \widehat{L}^{n-3} + \alpha_{n-1} \widehat{L}^{n-2} + \delta \int u,
 \end{aligned}$$

donde  $\widehat{L}^k$  es la estimación de la  $k$ -ésima derivada de la salida plana  $L$ , ( $k = 1, \dots, n-1$ ).

Estas expresiones son obtenidas por integraciones sucesivas para condiciones iniciales ceros. La relación que existe entre los valores actuales  $L^k$  y los valores estimados  $\widehat{L}^k$  por los reconstructores integrales, se expresan como:

$$\begin{aligned}
 \dot{L} &= \widehat{\dot{L}} + c_{1(n-2)} t^{n-2} + c_{1(n-3)} t^{n-3} + \dots + c_{11} t + c_{10}, \\
 \ddot{L} &= \widehat{\ddot{L}} + c_{2(n-2)} t^{n-2} + c_{2(n-3)} t^{n-3} + \dots + c_{21} t + c_{20}, \\
 &\vdots \\
 L^{n-2} &= \widehat{L}^{n-2} + c_{(n-2)(n-2)} t^{n-2} + c_{(n-2)(n-3)} t^{n-3} + \dots + c_{(n-2)1} t + c_{(n-2)0}, \\
 L^{n-1} &= \widehat{L}^{n-1} + c_{(n-1)(n-2)} t^{n-2} + c_{(n-1)(n-3)} t^{n-3} + \dots + c_{(n-1)1} t + c_{(n-1)0}
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

donde  $c_{ij}$ , son constantes reales dependientes del desconocimiento de las condiciones iniciales.

En la ec. (4.30) se muestra la relación de la salida plana  $L^n$  y el término de control  $u(t)$  en el sistema. De aquí resolvemos para el esquema  $u(t)$ , que garantice el seguimiento de

la referencia y compense las perturbaciones exógenos al sistema. El esquema se expresa en términos de las derivadas de la salida plana como:

$$\begin{aligned} u(t) &= (L^n - \alpha F) / \delta, \\ u &= \rho_n L^n + \rho_{(n-1)} L^{n-1} + \rho_{(n-2)} L^{n-2} \dots + \rho_1 \dot{L} + \rho_0 L \\ \rho_n &= \frac{1}{\delta}, \rho_{n-1} = -\frac{\alpha_{n-1}}{\delta}, \dots, \rho_0 = -\frac{\alpha_0}{\delta} \end{aligned}$$

La transformación lineal de la coordenada del control, dependiente de los estados  $(L, \dot{L}, \dots, L^{n-1})$ , permite sustituir a  $u(t)$  por una ley de control realimentado o control auxiliar  $\Upsilon$ . Para la estabilización de la salida  $L$  en el valor deseado  $L^*$ , se propone el siguiente esquema:

$$u = \rho_n \Upsilon + \rho_{(n-1)} L^{(n-1)} + \dots + \rho_0 L$$

$$\begin{aligned} \Upsilon &= (L^*)^n - \beta_{n-1} [L^{n-1} - (L^*)^{n-1}] - \beta_{n-2} [L^{n-2} - (L^*)^{n-2}] - \dots \\ &\dots - \beta_1 [\dot{L} - \dot{L}^*] - \beta_0 [L - L^*] \end{aligned}$$

Ahora, se reemplaza las derivadas de la salida plana por sus respectivos reconstructores integrales  $\hat{L}^k$ . Aunque esto implica que el sistema en lazo cerrado estará afectado por los términos de las condiciones iniciales, que dan origen a funciones constantes, rampa, parábola y hasta funciones polinomiales de grado  $n - 2$ . Para corregir estos errores, introducimos una compensación basada en integrales iteradas del error  $(\Delta L = L - L^*)$ , que a continuación se muestran,

$$\begin{aligned} \Upsilon &= (L^*)^n - \beta_{n-1} [\hat{L}^{n-1} - (L^*)^{n-1}] - \beta_{n-2} [\hat{L}^{n-2} - (L^*)^{n-2}] - \dots \\ &\dots - \beta_1 [\hat{L} - \dot{L}^*] - \beta_0 [L - L^*] - \lambda_1 \xi_1 - \lambda_2 \xi_2 - \dots - \lambda_{n-1} \xi_{n-1} \end{aligned}$$

donde  $\beta_i$  son las ganancias contantes de la función del control, y  $\lambda_k$  son las ganancias de los términos integrales del error  $\xi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ).

Los términos de las integrales iteradas del error  $\xi_k(t)$  son descritos como:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= (L - L^*(t)) & \xi_1(0) &= 0 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1 & \xi_2(0) &= 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ \dot{\xi}_{n-2} &= \xi_{n-3} & \xi_{n-2}(0) &= 0 \\ \dot{\xi}_{n-1} &= \xi_{n-2} & \xi_{n-1}(0) &= 0 \end{aligned}$$

El sistema en lazo cerrado es el siguiente,

$$\begin{aligned} & \Delta L^n + \beta_{n-1}\Delta L^{n-1} + \beta_{n-2}\Delta L^{n-2} + \dots + \beta_1\dot{\Delta L} + \beta_0\Delta L + \lambda_1 \int \Delta L(\tau)d\tau + \dots \\ & \dots + \lambda_2 \int \int \Delta L(\tau)d\tau + \dots + \lambda_{n-1} \int \int \dots \int_{n-1} \Delta L(\tau)d\tau - \psi(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= p_{n-2}t^{n-2} + p_{n-3}t^{n-3} + \dots + p_1t + p_0 \\ p_m &\in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1, \dots, n-2 \end{aligned}$$

donde  $\psi(t)$  es el polinomio que se origina por los términos de las condiciones iniciales.

Derivando  $n - 1$  veces la expresión (4.32), se elimina la función  $\psi(t)$  y la dinámica del sistema en lazo cerrado resulta en:

$$\begin{aligned} & \Delta L^{(2n-1)} + \beta_{n-1}\Delta L^{(2n-2)} + \dots + \beta_2\Delta L^{(n+1)} + \beta_1\Delta L^{(n)} + \beta_0\Delta L^{(n-1)} + \lambda_1\Delta L^{(n-2)} + \dots \\ & \dots + \lambda_2\Delta L^{(n-3)} + \lambda_{n-2}\dots\dot{\Delta L} + \lambda_{n-1}\Delta L = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Con este resultado (4.33) se completa la independencia de cualquier condición inicial. Se selecciona adecuadamente las ganancias  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ , tal que el polinomio característico asociado sea *Hurwitz*, que garantice que la dinámica del error tienda a cero y sea asintóticamente estable global (ver Sira-Ramírez, en [23], [24]).

### 4.3.1. Control GPI para regular la altura de irrigación

El sistema de control activo GPI se basa en la reconstrucción integral de los estados. A partir del modelo en términos de la salida plana ec. (4.22), se realiza la reconstrucción de los estados, integrando la derivada de mayor orden hasta obtener la primer derivada de la salida plana.

$$\begin{aligned} \ddot{L}_i &= -\frac{B_j}{N_j}\dot{L}_i - \frac{H_j}{N_j}L_i + \frac{1}{N_j}u_i \\ \dot{L}_i &= -\frac{B_j}{N_j}L_i - \frac{H_j}{N_j} \int L_i d\tau + \frac{1}{N_j} \int u_i d\tau + \dot{L}_i(0) \end{aligned}$$

Se puede observar que al integrar la aceleración  $\ddot{L}_i$  se obtiene el estado de la velocidad, pero en función de sus condiciones iniciales  $\dot{L}_i(0)$ . Las condiciones iniciales en la mayoría de los casos son desconocidas, por lo tanto, se ejerce una acción correctora en el sistema de control, añadiendo integrales sucesivas del error por cada condición inicial que aparezca en la reconstrucción integral de los estados.

En este caso, la reconstrucción de la velocidad  $\widehat{\dot{L}}_i$  es:

$$\widehat{\dot{L}}_i = -\frac{B_j}{N_j}L_i - \frac{H_j}{N_j} \int L_i d\tau + \frac{1}{N_j} \int u_i d\tau \quad (4.34)$$

Por lo tanto, la velocidad  $L_i$  se puede expresar como una combinación entre la velocidad reconstruida  $\widehat{\dot{L}}_i$  y las condiciones iniciales  $\dot{L}_i(0)$ :

$$\dot{L}_i = \widehat{\dot{L}}_i + \dot{L}_i(0) \quad (4.35)$$

La ley de control se basa en el modelo linealizado en función de la salida plana ec. (4.22) y en este caso, en función de la velocidad reconstruida, tal como se muestra a continuación:

$$u_i = N_j \Upsilon + B_j \widehat{\dot{L}}_i + H_j L_i \quad (4.36)$$

donde  $\Upsilon$  es la variable de control auxiliar y en este se encuentran los términos del error.

$$\Upsilon = \ddot{L}_i^* - \alpha_3 \left( \widehat{\dot{L}}_i - \dot{L}_i^* \right) - \alpha_2 (L_i - L_i^*) - \alpha_1 \int_0^t (L_i - L_i^*) d\tau - \alpha_0 \int \int_0^t (L_i - L_i^*) d\tau \quad (4.37)$$

El control auxiliar en este caso presenta dos términos integrales, el primero se debe a la compensación de la perturbación endógena y la doble integral se añade para compensar las condiciones iniciales que se presenta en la reconstrucción de los estados.

### Dinámica del sistema en lazo cerrado

La dinámica del sistema en lazo cerrado se obtiene al sustituir la ley de control ec. (4.36) en el modelo en términos de la salida plana ec. (4.22).

$$\begin{aligned} N_j \ddot{L}_i + B_j \dot{L}_i + H_j L_i &= N_j \Upsilon + B_j \widehat{\dot{L}}_i + H_j L_i \\ \ddot{L}_i &= \Upsilon \end{aligned}$$

### Dinámica el error en lazo cerrado

Sustituyendo la relación  $\ddot{L}_i = \Upsilon$  en el control auxiliar ec. (4.37) se obtiene la dinámica del error en lazo cerrado.

$$\begin{aligned} \ddot{L}_i &= \ddot{L}_i^* - \alpha_3 \left( \widehat{\dot{L}}_i - \dot{L}_i^* \right) - \alpha_2 (L_i - L_i^*) - \alpha_1 \int_0^t (L_i - L_i^*) d\tau - \alpha_0 \int \int_0^t (L_i - L_i^*) d\tau \\ \ddot{L}_i - \ddot{L}_i^* + \alpha_3 \left( \widehat{\dot{L}}_i - \dot{L}_i^* \right) + \alpha_2 (L_i - L_i^*) + \alpha_1 \int_0^t (L_i - L_i^*) d\tau - \alpha_0 \int \int_0^t (L_i - L_i^*) d\tau &= 0 \\ \Delta \ddot{L}_i + \alpha_3 \Delta \dot{L}_i + \alpha_2 \Delta L_i + \alpha_1 \int_0^t \Delta L_i d\tau - \alpha_0 \int \int_0^t \Delta L_i d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde  $\Delta L_i = (L_i - L_i^*)$ ,  $\Delta \dot{L}_i = (\dot{\hat{L}}_i - \dot{L}_i^*)$  y  $\Delta \ddot{L}_i = \ddot{L}_i - \ddot{L}_i^*$ .

Aplicando la transformada de Laplace a la dinámica del error en lazo cerrado ec. (4.38).

$$s^2 \Delta L_i(s) + \alpha_3 s \Delta L_i(s) + \alpha_2 \Delta L_i(s) + \frac{\alpha_1}{s} \Delta L_i(s) + \frac{\alpha_0}{s^2} \Delta L_i(s) = 0$$

Multiplicando por  $s^2$  la expresión anterior y factorizando el término  $\Delta L_i(s)$ , se obtiene el polinomio característico de la dinámica del error.

$$P(s) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Para que la salida del sistema se estabilice de forma asintótica sobre la referencia  $L_i^*$ , se requiere que la dinámica del error se aproxime a cero. Para garantizar la convergencia asintótica, se propone un polinomio característico deseado en función de parámetros de diseño  $\zeta$ ,  $\omega_n$  y un polo  $p$ . Se seleccionan valores de  $\zeta_i$ ,  $\omega_{ni}$  y  $p_i$ , tal que polos del sistema en lazo sean *Hurwitz*.

Dado que la dinámica del error se compone por un polinomio característico de cuarto orden, se propone el siguiente polinomio,

$$\begin{aligned} P_d(s) &= (s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2) (s + p_i)^2 \\ &= s^4 + 2(\zeta_i \omega_{ni} + p_i) s^3 + (4p_i \zeta_i \omega_{ni} + \omega_{ni}^2 + p_i^2) s^2 + 2(\omega_{ni} + p_i \zeta_i) p_i \omega_{ni} s + p_i^2 \omega_{ni}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 2(\zeta_i \omega_{ni} + 2p_i) \\ \alpha_2 &= 4p_i \zeta_i \omega_{ni} + \omega_{ni}^2 + p_i^2 \\ \alpha_1 &= 2(\omega_{ni} + p_i \zeta_i) p_i \omega_{ni} \\ \alpha_0 &= p_i^2 \omega_{ni}^2 \end{aligned}$$

En la Figura 4.4 se muestra el diagrama a bloques del sistema de control que se aplica al sistema de riego.

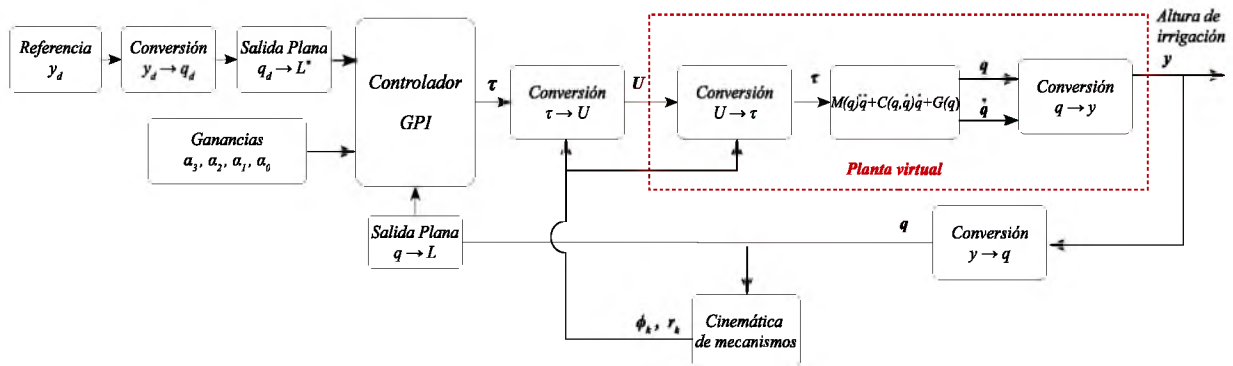


Figura 4.4: Diagrama a bloques representativo del esquema de control GPI aplicado al sistema de riego.



# Capítulo 5

## Resultados numéricos

### 5.1. Resultados a lazo abierto

#### 5.1.1. Respuesta del modelo dinámico no-lineal

A partir del modelo matemático expresado en forma matricial ec. (3.55) se realiza la programación desde la plataforma de Matlab/Simulink<sup>®</sup>, considerando el integrador numérico *Runge-Kutta* a un paso de integración constante de 1 ms. Los parámetros del sistema son los que se muestra en la Tabla 2.4 (Capítulo 2 correspondiente a la propuesta de diseño). La fricción viscosa que existe en las articulaciones de las barras pulverizadoras, son aproximados a los valores: en la primera articulación  $c_1 = 25 \text{ N m s/rad}$ , en la segunda  $c_2 = 15 \text{ N m s/rad}$  y en la tercera articulación  $c_3 = 10 \text{ N m s/rad}$ .

#### Respuesta sin aplicar torque en las articulaciones

En la Figura 5.1 se muestra el comportamiento del sistema expuesto únicamente a condiciones iniciales, es decir, se considera que el sistema es autónomo, osea, que todas las entradas son nulas. Se puede observar que la respuesta del sistema a las diferentes condiciones iniciales tienden a converger en aproximadamente a los 8 s a los mismos puntos de equilibrio.

#### Respuesta aplicando un torque constante en cada articulación

Cuando el sistema no esta sometido a torques externos tiende a estabilizarse sobre su punto de equilibrio. Sin embargo, cuando se introducen torques al sistema  $\tau_i$ , estos tienden a desplazar las barras cierta cantidad angular hasta alcanzar el estado estacionario. Las barras alcanzan el punto estacionario cuando el torque aplicado se iguala a los torques originados por los efectos gravitatorios, desplazando cada grado una cantidad angular  $\theta_i$ . La respuesta del sistema considerando las condiciones iniciales anteriores y expuesto a diferentes torques de magnitud constante se muestra en la Figura 5.2. En cada una se puede observar que el grado de libertad al que se aplica un torque no converge en su punto de equilibrio, sino en un valor diferente, el cual puede variar de acuerdo a la magnitud del torque que se aplica y su sentido.

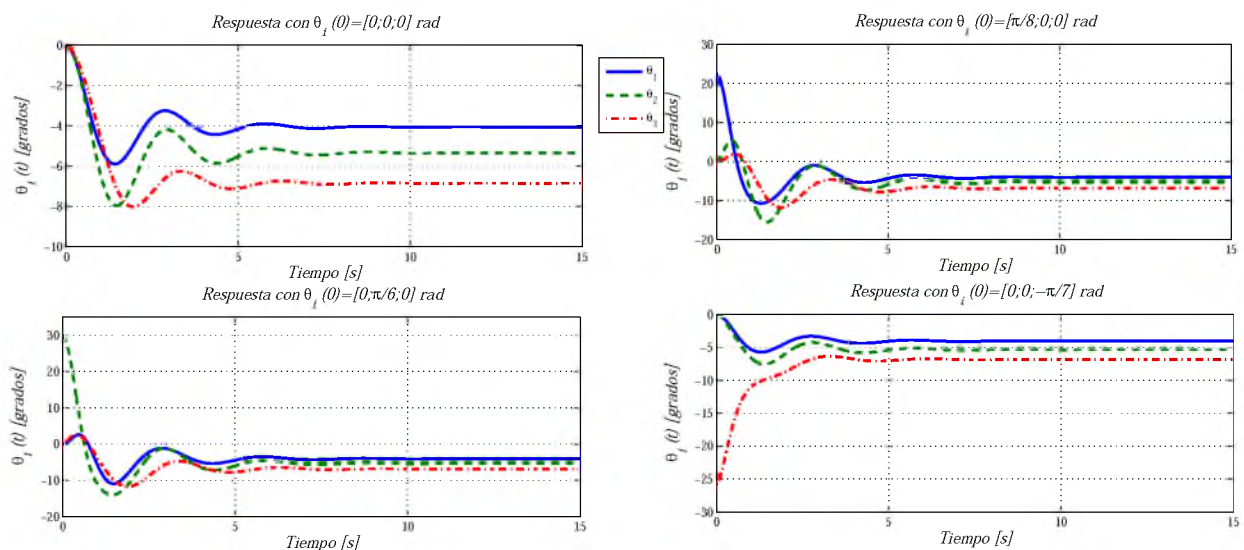


Figura 5.1: Respuesta del sistema a lazo abierto considerando diferentes condiciones iniciales y entrada cero.

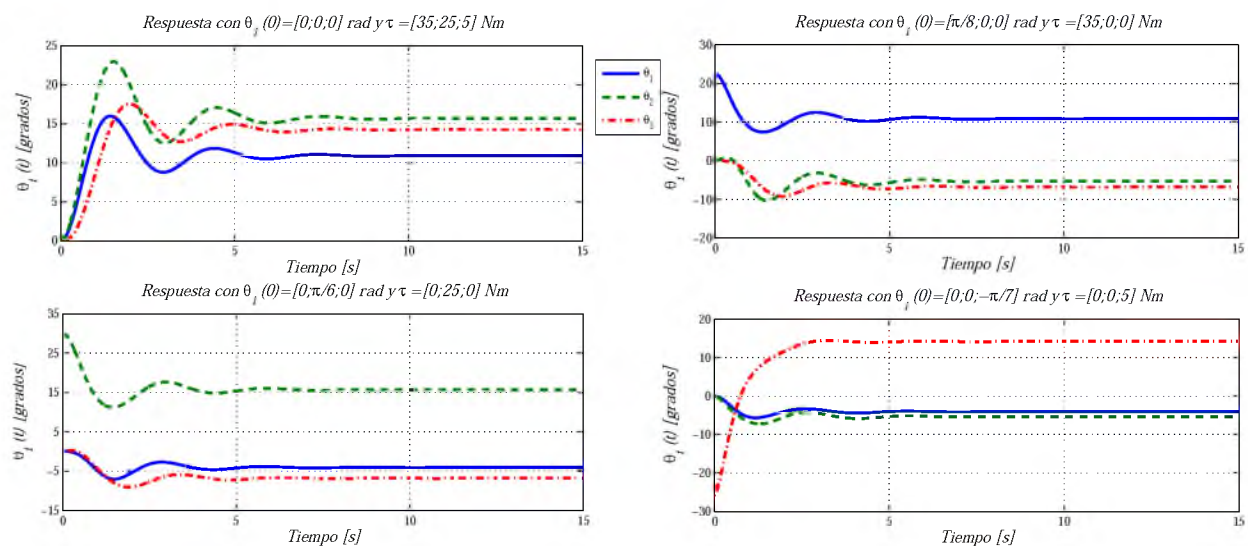


Figura 5.2: Respuesta del sistema con diferentes condiciones iniciales  $\theta_0 = [\theta_{10}, \theta_{20}, \theta_{30}]$  y torques de entrada  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]$ .

## 5.2. Resultados a lazo cerrado

En esta sección se muestran los resultados numéricos del sistema en lazo cerrado para el control de la altura de irrigación  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  y  $y_3(t)$ . Los algoritmos de control  $\tau_i(t)$  utilizado son esquemas de control activo descritos en el Capítulo 4. Las etapas del sistema de control se resume en el diagrama de la Figura 5.3.

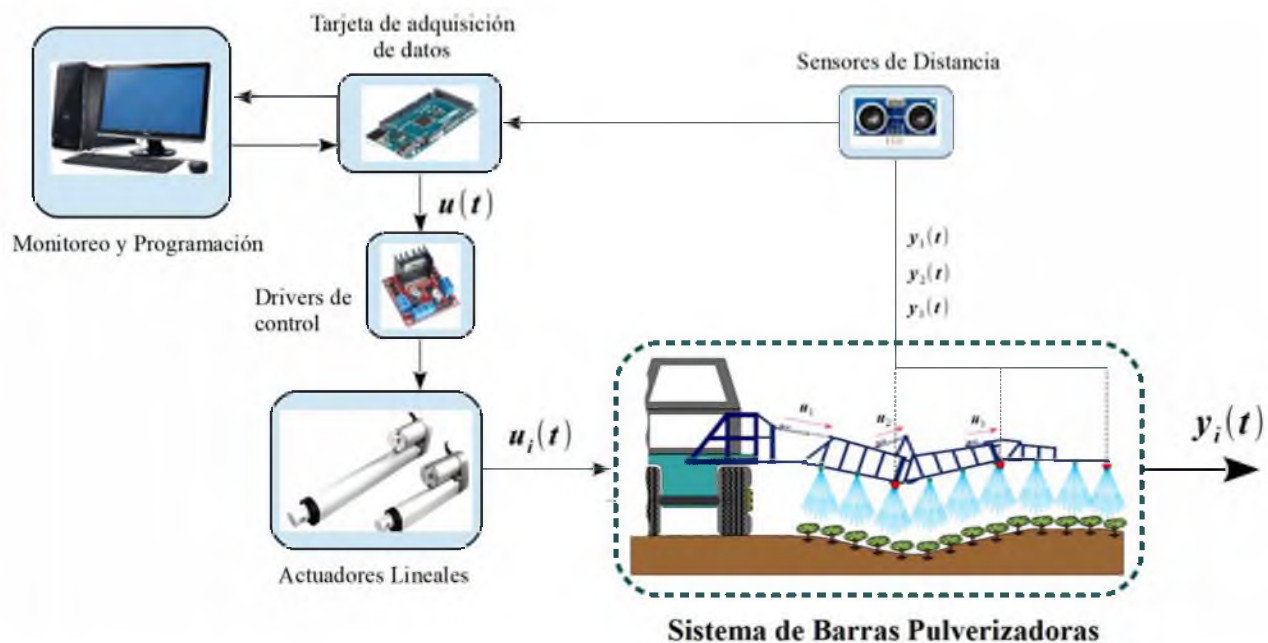


Figura 5.3: Integración del hardware y software para la aplicación de los esquemas de control en el sistema de riego.

A continuación se muestra una propuesta de implementación a lazo cerrado del sistema:

1.- Tres dispositivos accionados con sensores ultrasónicos colocados en el extremo de cada barra miden su altura respecto del suelo ( $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$ ). Posteriormente se calcula la rotación  $\theta_i(t)$  de cada barra, y así aplicar uno de los esquemas del control activo.

2.- Se propone que la lectura de los sensores, previo a una etapa de potencia, se adquieren por una tarjeta de adquisición de datos ARDUINO MEGA 2560.

3.- Las señales de la altura  $y_i(t)$  son procesadas mediante el software de Matlab-Simulink.

4.- En el software se construye el algoritmo de control activo para regular el movimiento de las barras a una altura de irrigación  $h_r$ . Por ello se propone aplicar varios esquemas: PID basado en el modelo, GPI y Planitud diferencial.

5.- El algoritmo de control es enviado a la etapa de potencia (hardware) mediante la tarjeta de adquisición en una señal de dimensión digital.

6.- El driver de potencia  $L298N$  traduce la señal digital de control en una señal de voltaje para desplazar el vástago del actuador electromecánico.

7.- Un actuador lineal se coloca en la articulación de cada barra y mediante un mecanismo

de 4 eslabones traduce la fuerza lineal  $u_i$  en una fuerza torsional  $\tau_i$  que moverá las barra hasta alcanzar la altura de irrigación deseada  $h_r$ .

### 5.2.1. Regulación de la altura de irrigación aplicando el control particionado

Los resultados numéricos a lazo cerrado se obtienen al programar la planta, relaciones cinemáticas y estrategia de control (programación de acuerdo al esquema de la Figura 4.2) desde la plataforma de Matlab/Simulink<sup>®</sup> haciendo uso del integrador numérico *Rungge-Kutta* a un paso de integración constantes de 1 ms. Los parámetros del sistema que se emplean se muestran en la Tabla 2.4 y los coeficientes de fricción se proponen en la sección 5.1.

Para la prueba en lazo cerrado se especifica que la altura de irrigación debe ser de  $h_r = 0.5$  m, por lo que el algoritmo de control desplaza las tres barras para que se adapten al perfil de terreno, de este modo la altura entre el suelo y el extremo de las barras se mantiene en la altura  $h_r$ .

Se planifica un terreno de geometría irregular, con diferente perfil de suelo para el extremo de cada una de las barras, tal como se muestra en la Figura 5.4. Las expresiones matemáticas que describen cada perfil son las siguientes:

Perfil de terreno para la primer barra.

$$Terreno\ 1 = \begin{cases} 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t - 15)\right) & 0 \leq t \leq 15\text{ s} \\ 0,05 \sin\left(\frac{2\pi}{80}(t - 15)\right) + 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t - 17,5)\right) & 15 \leq t \leq 75\text{ s} \\ -0,05 + 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t - 17,5)\right) & 75 \leq t \leq 100\text{ s} \end{cases}$$

Perfil de terreno para la segunda barra.

$$Terreno\ 2 = \begin{cases} 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t - 15) + \pi\right) & 0 \leq t \leq 14,08\text{ s} \\ 0,03 \sin\left(\frac{2\pi}{80}(t - 15) + \pi\right) + 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t - 14,523)\right) & 14,08 \leq t \leq 75\text{ s} \\ 0,03 + 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t - 14,523)\right) & 75 \leq t \leq 100\text{ s} \end{cases}$$

Perfil de terreno para la tercer barra.

$$\text{Terreno 3} = \begin{cases} 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-15)\right) & 0 \leq t \leq 25,67 \text{ s} \\ \frac{0,05}{20}(t-24,775) + 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-15)\right) & 25,67 \leq t \leq 45,695 \text{ s} \\ 0,05 + 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-15)\right) & 45,695 \leq t \leq 65 \text{ s} \\ 0,05 \cos\left(\frac{2\pi}{5}(t-65)\right) + 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-15)\right) & 65 \leq t \leq 90 \text{ s} \\ -0,05 + 0,0015 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-15)\right) & 90 \leq t \leq 100 \text{ s} \end{cases}$$

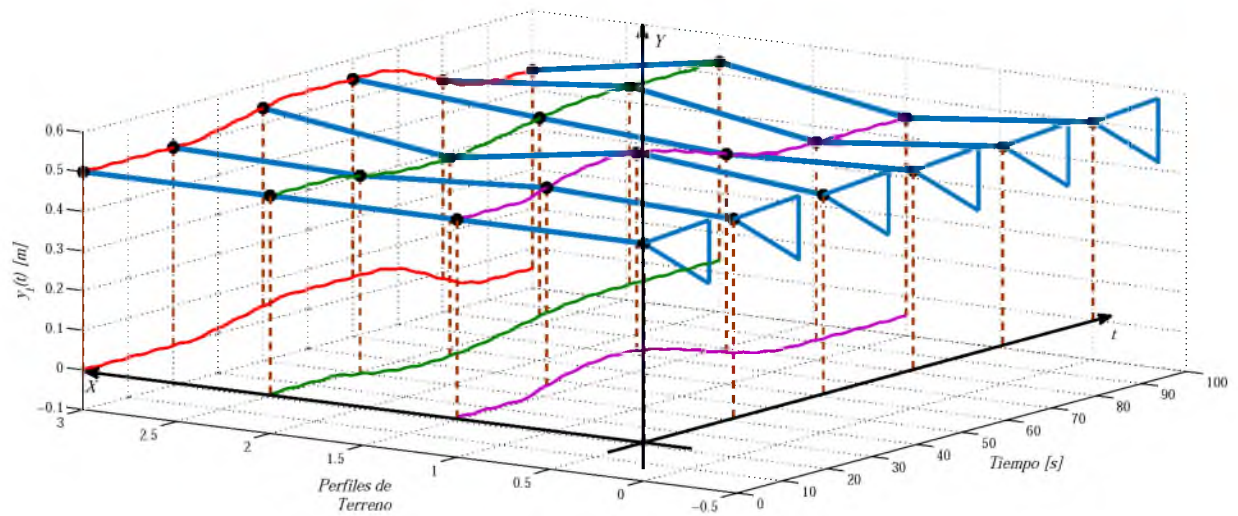


Figura 5.4: Terreno planificado para las pruebas a lazo cerrado y la posición que debe adaptar cada barra para mantener constante la altura de irrigación.

Los parámetros de sintonización del PID basado en modelo ( $\zeta_i$ ,  $\omega_{ni}$  y  $p_i$ ), fueron ajustados de acuerdo a la respuesta del sistema. Se considera un factor de amortiguamiento  $\zeta_i = 1.35$  para cada grado de libertad, de tal forma que la respuesta sea del tipo sobreamortiguado y así reducir el sobreimpulso máximo de la señal de salida  $y_i(t)$ .

El comportamiento del sistema corresponde a una dinámica del tipo péndular, a partir del modelo lineal dinámicamente desacoplado ec. (3.83) se obtiene una aproximación de la frecuencia natural  $f_{ni}$  para cada grado de libertad (ver Ogata, [15]).

$$f_{ni} \approx \sqrt{\frac{H_j}{N_j}}$$

$$f_{n1} = \sqrt{\frac{(m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1) g \cos \varphi_1}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + J_1}} = 2.92 \text{ rad/s}$$

$$f_{n2} = \sqrt{\frac{(m_2 l_{c2} + m_3 l_2) g \cos \varphi_2}{m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + J_2}} = 2.84 \text{ rad/s}$$

$$f_{n3} = \sqrt{\frac{m_3 l_{c3} g \cos \varphi_3}{m_3 l_{c3}^2 + J_3}} = 3.02 \text{ rad/s}$$

De acuerdo a los cálculos, se entiende que el sistema es de baja frecuencia y por esta razón tiende a estabilizarse en lazo abierto en poco menos de 8 s, siendo la tercer barra la primera en estabilizarse.

Esta clase de sistemas de riego operan a baja velocidad, sin embargo, se busca que el tiempo de convergencia sea al menos el doble de rápido que en lazo abierto, por lo que se establecen valores de frecuencia natural  $\omega_{ni}$  para el polinomio característico deseado mayores a la frecuencia natural del sistema  $f_{ni}$ . Los valores establecidos para cada grado de libertad son los siguientes:

$$\omega_{n1} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{n2} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{n3} = 6 \text{ rad/s}$$

El valor de frecuencia natural para el tercer grado de libertad se reduce aún más, ya que es el grado de mayor complejidad dinámica debido al acoplamiento de las barras, además de poseer la frecuencia más alta, por lo que se requiere que su movimiento sea más lento.

El polo real  $p_i$  tiene una relación con el tiempo de asentamiento de la salida, este puede ser expresado en términos de una constante de tiempo  $T$ ,

$$s + p = s + \frac{1}{T}$$

entonces, si la constante de tiempo  $T$  es grande el sistema tiene una respuesta lenta y el polo  $p$  tiende al origen,

$$p = \frac{1}{T}$$

$$\text{si } T \rightarrow \infty \Rightarrow p \rightarrow 0$$

en el caso de que se requiera aumentar la velocidad en la convergencia del sistema entonces la constante del tiempo  $T$  debe ser mínima, lo que implica que el valor del polo  $p$  debe ser grande,

$$p = \frac{1}{T}$$

$$\text{si } T \rightarrow 0 \Rightarrow p \rightarrow \infty$$

para no afectar de manera significativa el tiempo de asentamiento en la salida del sistema se considera los valores de  $p_i = \omega_{ni}$ , es decir,

$$p_1 = 10$$

$$p_2 = 10$$

$$p_3 = 6$$

La Figura 5.5 a muestra el desplazamiento vertical ( $y_1, y_2, y_3$ ) realizado por el extremo de cada barra para compensar las irregularidades que se presentan en el terreno. Hasta antes de los 15 s el perfil de terreno para cada barra es homogéneo, y por esta razón las barras se mantienen oscilando sobre el valor de 0.5 m (altura de irrigación establecida  $h_r$ ), esto quiere decir que las barras deben permanecer en posición horizontal. Se hace la consideración que, la posición inicial de las barras es de  $\theta_i(0) = 90^\circ$ , entonces en el instante inicial las barras tienden a inclinarse en sentido horario por los efectos gravitatorios presentes, pero la acción de control  $u_i$  corrige el efecto y estabiliza las barras sobre la referencia en un tiempo aproximado de 2 s. Durante el transcurso de tiempo restante el perfil de terreno cambia de forma, no obstante, el algoritmo de control garantiza el seguimiento del perfil por el extremo de las barras, esto se ve con mayor claridad en el mínimo error producido  $\Delta q_i(t)$ , ya que oscila alrededor de cero y esto se debe a la acción correctora del *control particionado*. En la Figura 5.5 b se muestra el sobreimpulso inicial en la señal del error  $\Delta q_i(t)$ , este se debe al efecto gravitatorio sobre las barras en el instante inicial y el sobrepaso es de apenas unas fracciones de milímetro.

Es importante recordar que cada uno de los actuadores  $u_i$  tiene la función de elongarse (ver Figura 5.6 a) o contraer (ver Figura 5.6 b) su longitud ( $r_1, r_4, r_9$ ) y mediante de un mecanismo originar un movimiento  $\theta_i$  en cada articulación.

En los 15 s el terreno es plano, por lo que la longitud de los actuadores se mantienen en su longitud inicial  $r_{1o} = 0.405$  m,  $r_{4o} = 0.405$  m y  $r_{9o} = 0.3295$  m para que las barras pulverizadoras permanezcan de forma horizontal. Cuando el perfil de terreno presenta una elevación o aumento del suelo la barra pulverizadora deberá rotar en sentido antihorario para mantener la altura  $h_r$  deseada, esto implica que el actuador tenga que reducir su longitud ( $r_1, r_4$  y  $r_9$ ). Por el contrario, si el perfil de terreno presenta un bajo nivel o hundimiento del suelo, la barra pulverizadora debe rotar en sentido horario a fin de que se mantenga la altura  $h_r$ , y por lo tanto el actuador incrementa su longitud. Este resultado se muestra en la gráfica de la Figura 5.7 a.

El actuador  $u_1$  está acoplado a un mecanismo de movimiento de tres eslabones, esto provoca que tenga mayor cambio en su longitud  $r_1$ , para provocar un cambio en la rotación  $\theta_1$ . Los actuadores restantes  $u_2$  y  $u_3$  están acoplados a un mecanismo de 4 eslabones, por

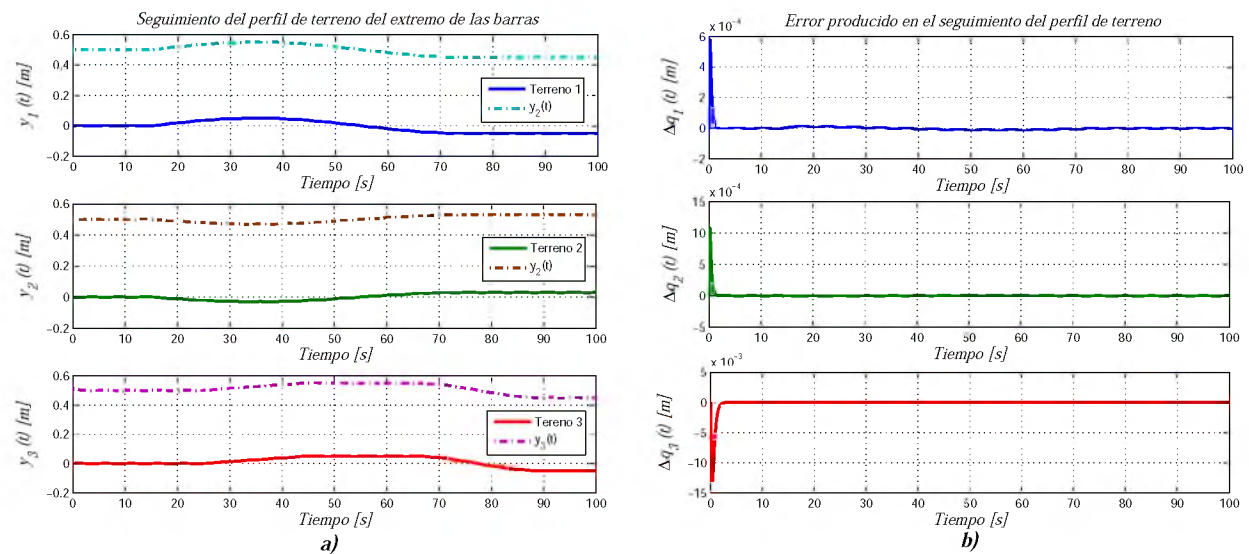


Figura 5.5: a) Recorrido del extremo de cada barra  $y_i(t)$ , b) Error producido  $\Delta q_i$  en el seguimiento del perfil debido a la irregularidad del perfil de terreno.

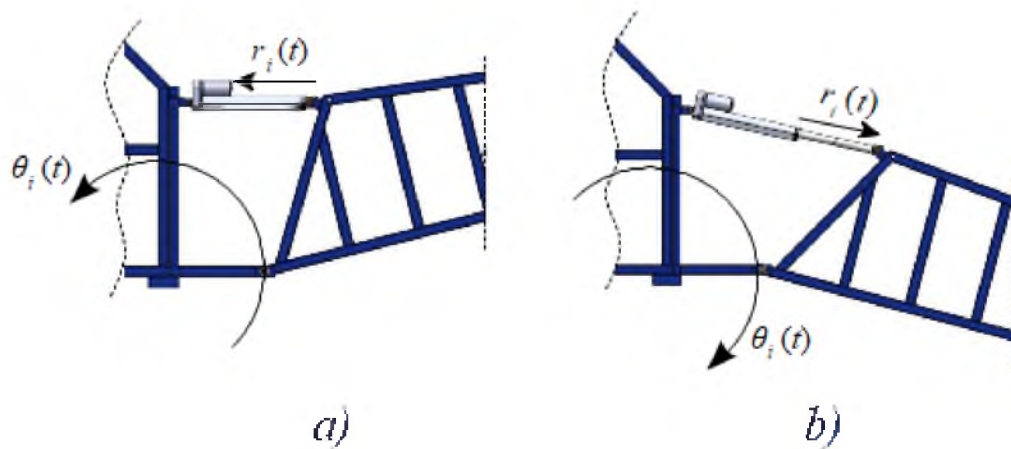


Figura 5.6: a) retracción del vástago del actuador, b) elongación del vástago del actuador.

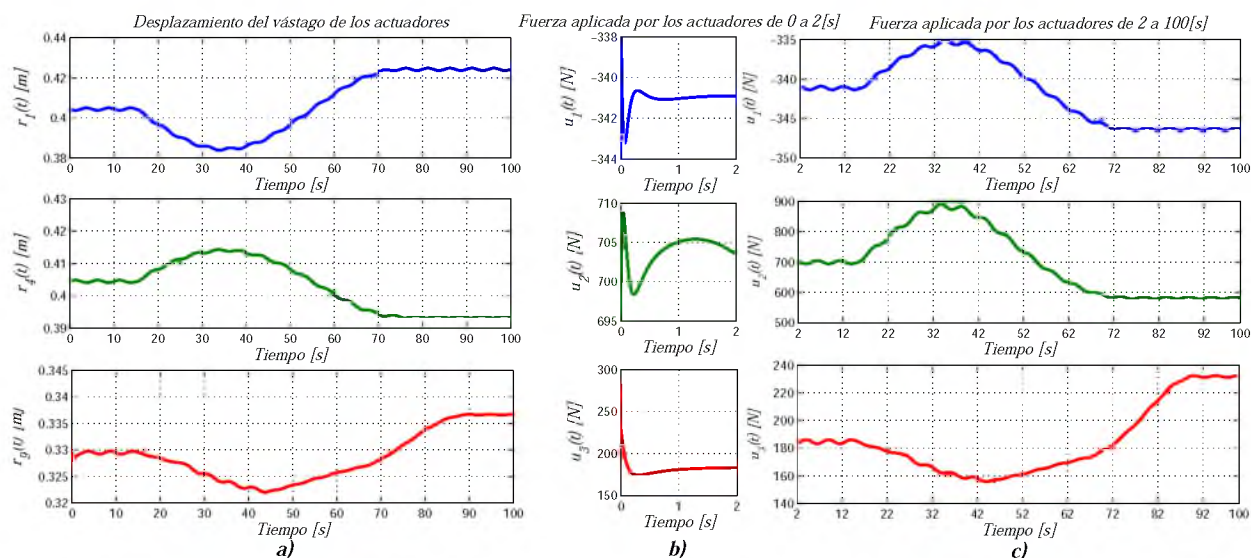


Figura 5.7: a) Desplazamiento del vástago de los actuadores lineales de cada barra, b) fuerza aplicada  $u_i$  en los primeros 2 s y c) fuerza aplicada  $u_i$  a partir de los 2 s a 100 s.

la configuración de los actuadores con los eslabones requieren de un cambio pequeño en su longitud ( $r_4$  y  $r_9$ ) para generar mayor desplazamiento angular. Este resultado se muestra en la Figura 5.7 a. En la configuración del mecanismo de 4 eslabones, el movimiento de estos es de tipo balancín, lo que implica que las barras pulverizadoras no pueden realizar revoluciones completas sobre su articulación.

La variación en la longitud de los actuadores repercute en la variación de la posición de las barras. Sin embargo, lo que realmente induce el movimiento es la magnitud de la fuerza  $u_i$  que se aplican a los mecanismos tal como se muestra en la Figura 5.7 b. Según la posición de los actuadores, el primero  $u_1$  es el encargado de soportar el peso de todas las barras. Sin embargo, es el segundo actuador  $u_2$  es el que ejerce mayor fuerza, debido al acoplamiento con el mecanismo de 4 eslabones, la fuerza aplicada se reparte en los eslabones del mecanismo y solo una parte de la fuerza total es la que genera el par  $\tau_2$  sobre la articulación.

Debido a la configuración de los mecanismos, el desplazamiento del vástago de los actuadores se produce de manera inversa al desplazamiento angular de cada barra, esto se muestra en la Figura 5.8 a.

El perfil irregular del *Terreno 1* indica que la primera barra tiene que levantar el extremo hacia arriba, por lo que el ángulo  $\theta_1$  aumenta  $3^\circ$  con respecto a su posición inicial de  $90^\circ$ . Esta rotación se produce cuando la irregularidad del terreno tiene su máxima elevación en  $t = 35$  s. Cuando el terreno presenta hundimiento del suelo provoca que la posición angular  $\theta_1$  disminuya por debajo de los  $90^\circ$ . Tal como se muestra en la Figura 5.8 a.

El mismo efecto se presenta en las otras dos barras, cuando la superficie del terreno presenta irregularidades por encima de su nivel. El extremo de las barras tienden a aumentar su rotación  $\theta_i$ , y cuando el terreno presenta hundimiento del suelo la rotación de las barras tienden a disminuir (el aumento y disminución ocurre siempre a partir del nivel de los  $90^\circ$ ).

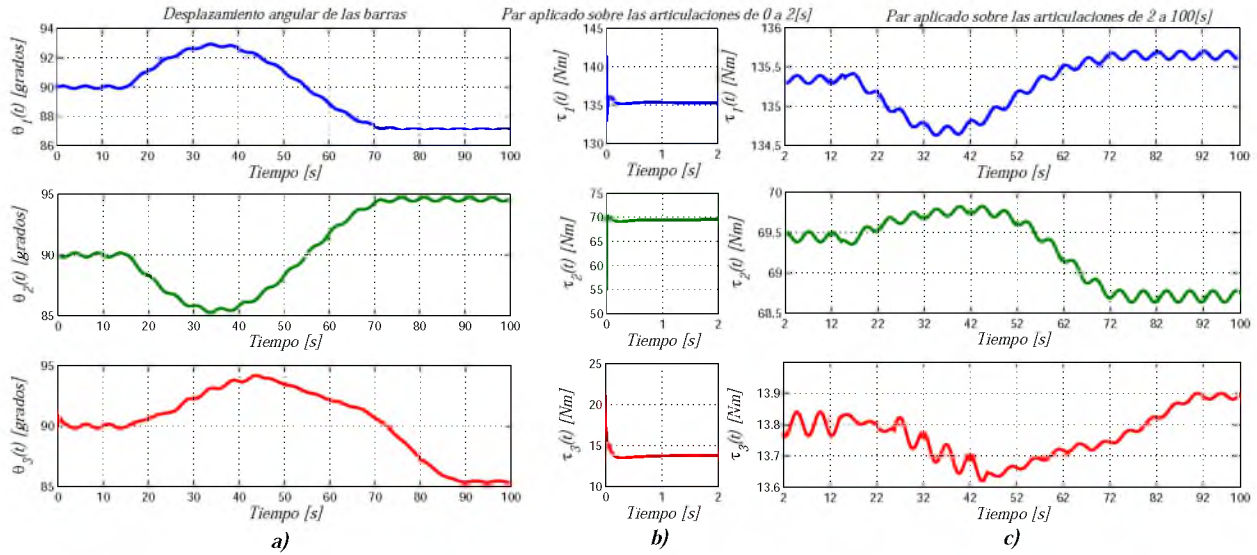


Figura 5.8: a) Desplazamiento angular  $\theta_i$ , b) torques  $\tau_i$  aplicados durante los primeros 2 s y c) torques  $\tau_i$  aplicados posterior a los 2 s.

$$\begin{aligned} \text{Si } Terreno \ i > 0 & \quad \theta_i > 90^\circ \\ \text{Si } Terreno \ i < 0 & \quad 0 < \theta_i < 90^\circ \end{aligned}$$

Por otra parte, la fuerza  $u_i$  que aplican los actuadores es la encargada de generar el movimiento, este debe convertirse en torques  $\tau_i$  sobre las articulaciones de las barras y de ese modo se inducen los desplazamientos angulares, correspondientes a la dinámica del sistema. De acuerdo a la Figura 5.8 c, todos los torques que se aplican a las articulaciones son positivos, debido a que, sin importar las irregularidades, las barras deben permanecer levantadas, por lo que en todo momento deben compensar el efecto gravitatorio, es por ello que siempre se aplica un par en sentido anti-horario. También puede observarse que el par máximo aplicado sucede en la primer barra pulverizadora  $\tau_1$  (ver Figura 5.8 b), debido a que esta tiene acoplado las otras dos barras y debe soportar toda la carga dinámica y gravitatoria de los otros elementos. No obstante, la cantidad de fuerza aplicada por los actuadores no corresponde de la misma manera debido a los diferentes mecanismos de transmisión que poseen.

### 5.2.2. Regulación de la altura de irrigación por Planitud diferencial

A continuación se aplica el algoritmo de control por Planitud diferencial descrito en la sección 4.2.3. La sintonización de los parámetros de control se basan en los parámetros empleados en el algoritmo de control PID basado en el modelo, de tal forma que se puedan comparar los resultados obtenidos.

La regulación de la altura de irrigación implica que el desplazamiento vertical  $y_i$  del extremo de cada barra se establezca a una referencia constante  $h_r = 0.5$  m respecto del nivel del suelo, aún cuando el perfil de terreno presente irregularidades. El algoritmo de control  $u_i$  compensa los cambios en el terreno realizando desplazamientos angulares de cada barra para que se adapten al perfil de terreno y se mantenga siempre una altura constante para disminuir el efecto de la deriva.

En la prueba inicial se considera que las tres barras se encuentran en posición horizontal, es decir, su condición inicial  $\theta_i(0) = 90^\circ$ . En el instante inicial las barras tienden a caer por el efecto gravitatorio y por esta razón se alejan de la altura de referencia. Sin embargo, el algoritmo de control por Planitud consigue estabilizar la altura de las barras aproximadamente en 2 s (ver la Figura 5.9 a) y con ello se consigue que se adapten al perfil de terreno. Se observa que en la señal del error de control  $\Delta L_i(t)$  presenta un sobreimpulso inicial de mayor magnitud en la tercer barra cuyo error aproximado es de 10 cm, tal como se muestra en la Figura 5.9 b. Sin embargo, una vez estabilizadas las barras el error tiende a cero por lo que el sistema logra adaptarse al perfil de terreno.

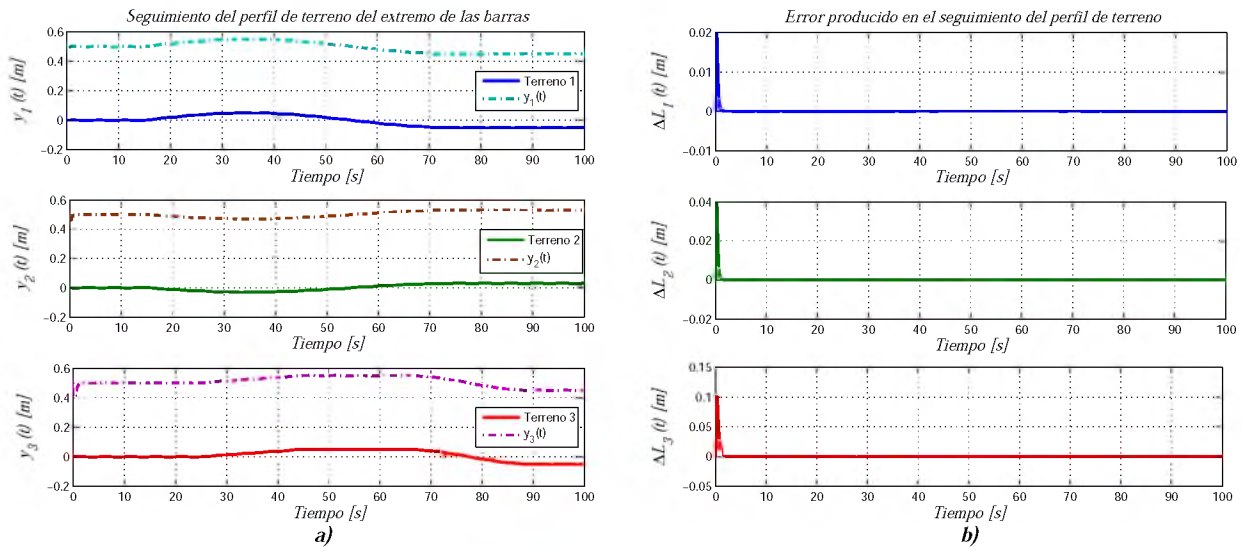


Figura 5.9: a) Recorrido del extremo de cada barra  $y_i(t)$  aplicando el control por planitud y b) error  $\Delta L_i(t)$  producido por la acción del control.

En la Figura 5.10 a, se muestra el desplazamiento del vástago de los actuadores ( $r_1$ ,  $r_4$  y  $r_9$ ), la dinámica del estiramiento o contracción del vástago será influenciado por el cambio en los perfiles de terreno, para este esquema es muy notorio el estiramiento inicial debido al aumento en la caída de las barras.

Las magnitudes de la fuerza de control  $u_i$  y su conversión a torques  $\tau_i$  son las mismas que la prueba anterior en el estado estacionario de la respuesta, dado que el perfil de regulación es el mismo (ver las las Figuras 5.10 c y 5.11 c). No obstante el estado transitorio muestra un aumento en el sobreimpulso, tal como se muestra en las Figuras 5.10 b y 5.11 b. El esquema de

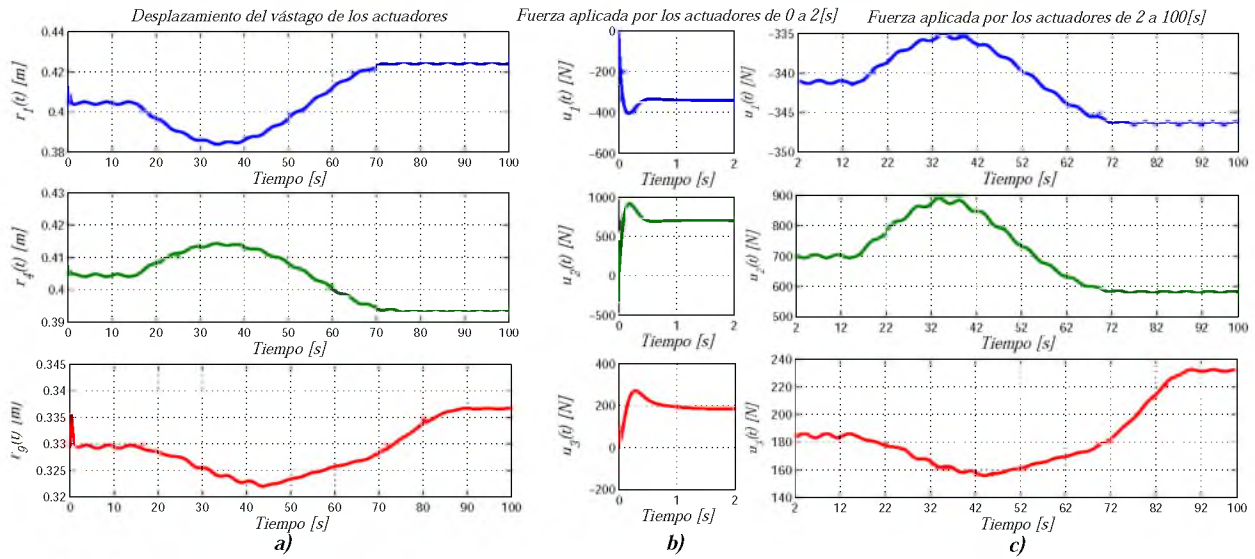


Figura 5.10: a) Desplazamiento del vástago de los actuadores lineales de cada barra, b) fuerza aplicada  $u_i$  en los primeros 2 s y c) fuerza aplicada  $u_i$  a partir de los 2 s a 100 s.

control por Planitud diferencial se diseñó basado en un modelo lineal del sistema con dinámica desacoplada, esto provoca que no se simplifique por completo las dinámicas del sistema en lazo cerrado. En el instante inicial el torque  $\tau_i$  calculado es cero y el efecto gravitatorio no considerado en el diseño del algoritmo provoca que el error aumente considerablemente en la etapa inicial. El controlador aumenta su magnitud de forma brusca para contrarrestar el efecto gravitatorio y consigue mantener las barras en la altura de irrigación deseada  $h_r$  en los primeros 2 s.

a) Desplazamiento angular  $\theta_i$ , b) torques  $\tau_i$  aplicados durante los primeros 2 s y c) torques  $\tau_i$  aplicados posterior a los 2 s.

Con respecto al desplazamiento angular realizado por las barras, es el mismo que la prueba anterior y con la diferencia en el sobreimpulso generado por el aumento en la caída de las barras, esto se observa en la gráfica de la Figura 5.11 a.

### 5.2.3. Regulación de la altura de irrigación aplicando el control GPI

Por último se aplica el esquema de control GPI descrito en la sección 4.3.1 al modelo del sistema de irrigación. De la misma forma se considera una altura de irrigación constante  $h_r = 0.5$  m, los parámetros de la ganancia de control  $\zeta_i$ ,  $\omega_{ni}$  y  $p_i$  tienen los mismos valores para fines de comparación.

En la Figura 5.12 a se muestra los resultados numéricos de la regulación en la altura. Al igual que los casos anteriores, se presenta un sobrepaso inicial, en este caso se produce con mayores amplitudes, ya que en esta ocasión, la tercer barra cae hasta un valor de casi

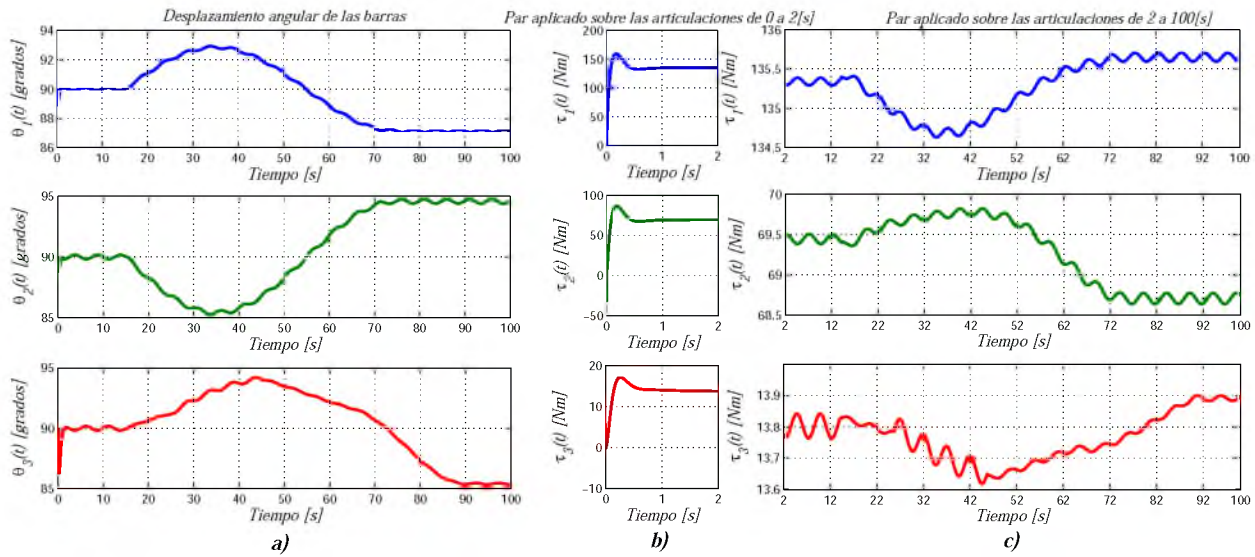


Figura 5.11: a) Desplazamiento angular  $\theta_i$ , b) torques  $\tau_i$  aplicados durante los primeros 2 s y c) torques  $\tau_i$  aplicados posterior a los 2 s.

40 cm sobre la altura de irrigación especificada. No obstante, la acción de control corrige la caída y se estabiliza con oscilaciones de magnitud mínima sobre la referencia, y se mantiene oscilando alrededor de dicho valor.

Dado que las barras tienden a caer con un valor de mayor magnitud en el instante inicial, provoca que no se adapte su geometría al perfil de terreno hasta que se estabiliza aproximadamente en 2 s con oscilaciones despreciables alrededor de su altura de irrigación, este efecto transitorio se hace más notorio aplicando este esquema de control, ya que el error  $\Delta L_i(t)$  es más grande en el estado transitorio (ver Figura 5.12 b).

El desplazamiento del vástago de los actuadores  $r_1$ ,  $r_4$  y  $r_9$  se muestra en la Figura 5.13 a, la respuesta estacionaria es la misma que se observó al aplicar los esquemas de control anterior. Sin embargo, en el estado transitorio en los primeros 2 s se ve afectado por los sobrepulsos iniciales, los cuales se generan debido a que las barras tienden a caer con gran magnitud por efectos gravitatorios. Para corregir el efecto se eleva la magnitud de la fuerza aplicada durante el estado transitorio (ver Figura 5.13 b) mientras que en estado estacionario se mantiene en los valores de fuerza  $F_i$  anteriormente obtenidos (ver Figura 5.13 c).

Con respecto al desplazamiento angular de las barras y el torque aplicado, tiene un comportamiento similar a los esquemas anteriores en el estado estacionario, excepto que difieren en magnitudes en el estado transitorio, tal como se muestra en la Figura 5.14 a y Figura 5.14 c. Es importante mencionar que este algoritmo de control estima los estados de velocidad  $\dot{\theta}_i$  de cada grado de libertad y por ende su dificultad en responder de manera instantánea en el instante inicial y provoca un aumento en el sobrepulso inicial, tal como se muestra en la Figura 5.14 b. La robustez del algoritmo permite estabilizar el sistema en un tiempo idéntico a los esquemas anteriores.

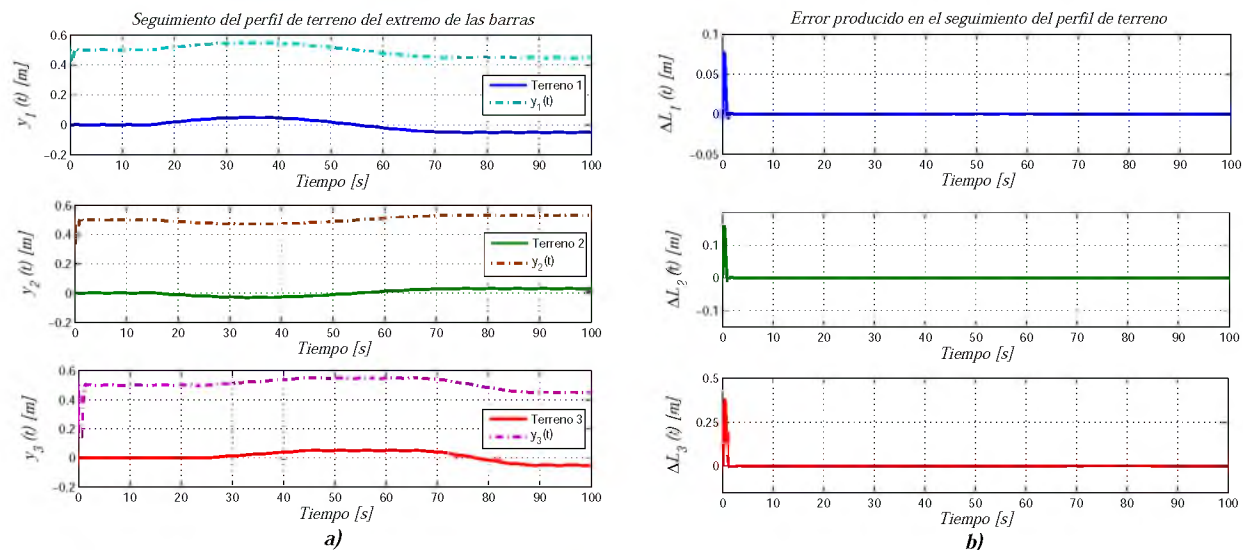


Figura 5.12: a) Desplazamiento en la altura de irrigación aplicando el control GPI y b) error producido en la salida.

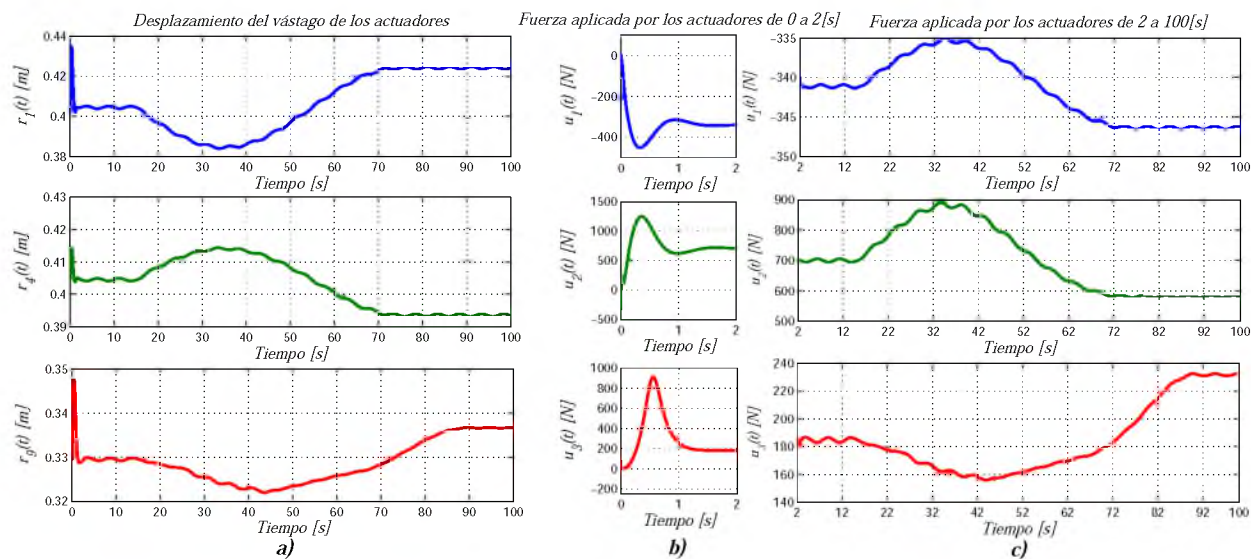


Figura 5.13: a) Desplazamiento del vástago de los actuadores lineales de cada barra, b) fuerza aplicada  $u_i$  en los primeros 2 s y c) fuerza aplicada  $u_i$  a partir de los 2 s a 100 s.

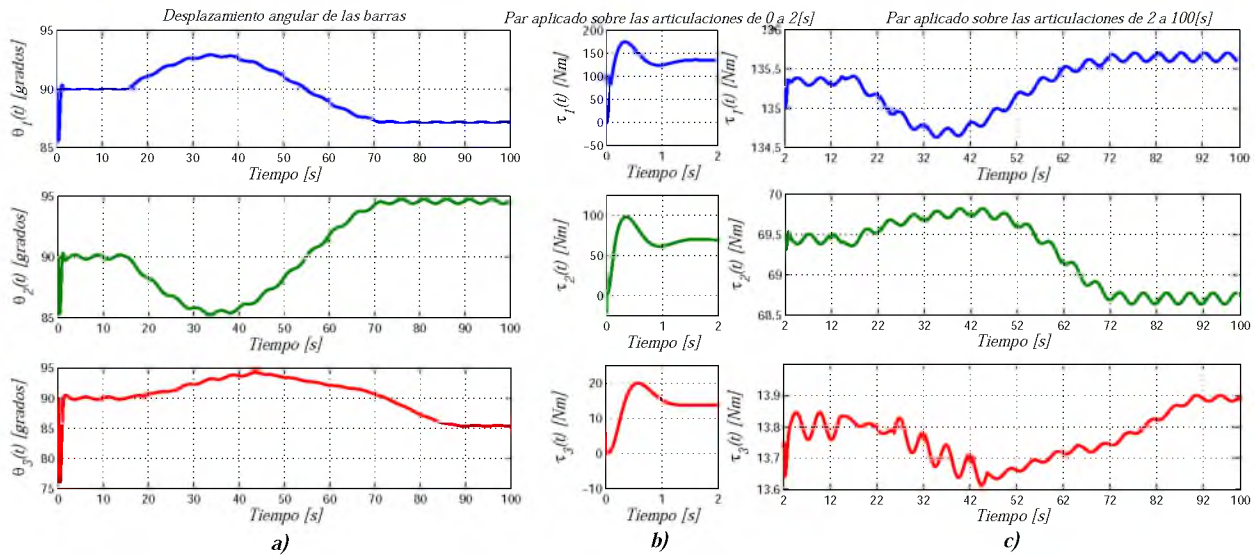


Figura 5.14: a) Desplazamiento angular  $\theta_i$ , b) torques  $\tau_i$  aplicados durante los primeros 2 s y c) torques  $\tau_i$  aplicados posterior a los 2 s.

#### 5.2.4. Resultados generales

Mediante la aplicación de los esquemas de control activo se logró efectuar la corrección en la altura de irrigación de las barras. Sin embargo, cada control efectúa la corrección de manera distinta, debido principalmente a la estructura que posee y a la cantidad de estados que se emplean en la retroalimentación. A continuación se hace la comparación de la salida  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y la fuerza de control  $u_i$  aplicada por los diferentes controladores.

En la Figura 5.15 se muestra la corrección comparativa en la altura de irrigación aplicando el esquema de control PID basado en modelo, Planitud diferencial y GPI. Se observa que el esquema de control que presenta los resultados más favorables es el PID basado en el modelo (Control Particionado), ya que la caída que se presenta en el instante inicial por los efectos de gravedad es prácticamente despreciable en comparación con el desplazamiento realizado por las barras aplicando los esquemas de control por Planitud diferencial y el GPI.

Por otra parte, el controlador GPI es el más deficiente, ya que no logra contrarrestar el efecto gravitatorio de forma rápida, provocando que la tercer barra tenga un desplazamiento de casi 40 cm hacía abajo.

En la Figura 5.16 se muestra la fuerza ejercida por los actuadores lineales, en la cual se observa como en el estado transitorio el control GPI es el que introduce la mayor fuerza, tanto así que supera el límite tolerado por los actuadores (la carga máxima de los actuadores propuestos en el diseño es de 1 kN). Sin embargo, las barras tienden a caer más con este control debido a que la fuerza aplicada tiene un retardo mayor en comparación con el esquema por Planitud y el PID.

El déficit en la respuesta transitoria que se va presentando en los esquemas de control lineal, se debe principalmente al modelo matemático empleado. Como el PID está basado en

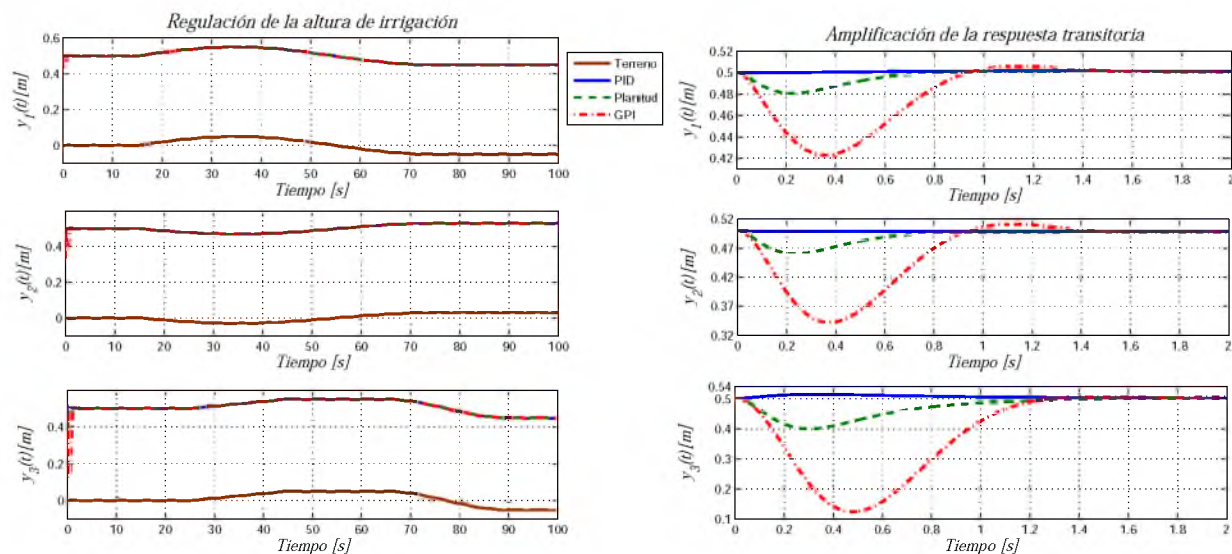


Figura 5.15: Comparación de la respuesta del sistema a lazo cerrado aplicando los diferentes esquemas de control.

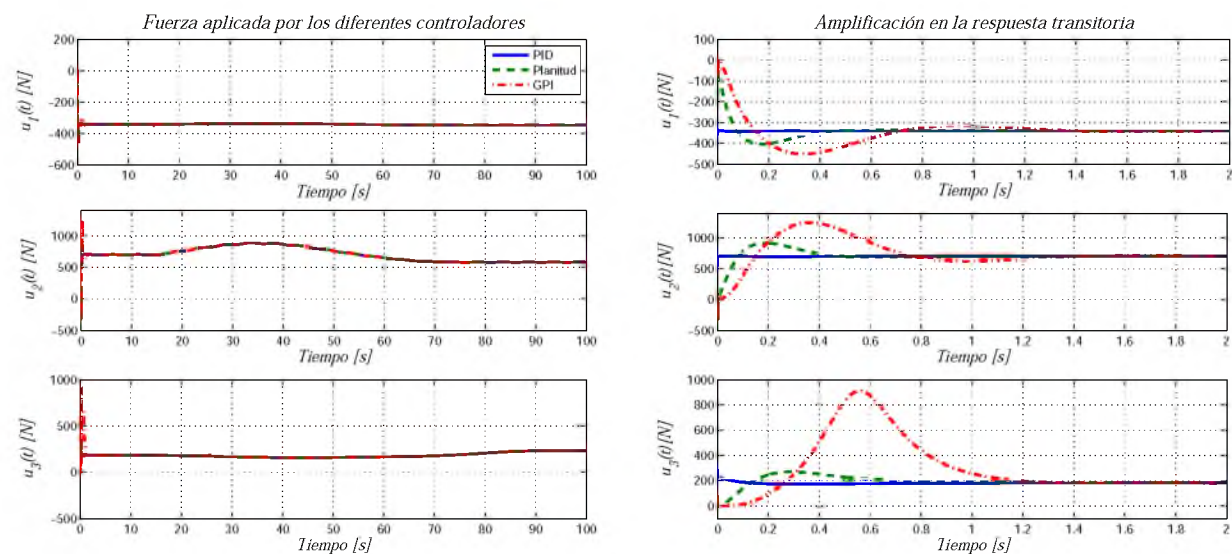


Figura 5.16: Comparación de la fuerza de control aplicada por los diferentes esquemas de control activo.

el modelo dinámico no-lineal, entonces cancela por completo las dinámicas en lazo cerrado. Los esquemas por Planitud diferencial y GPI se vuelven deficientes debido a que están basados en el modelo lineal y dinámicamente desacoplado, por lo que parte de su estructura no es empleada para el cálculo de la fuerza y torques que deben aplicar.

Por otra parte, el control GPI presenta mayor error en estado transitorio ya que su estructura no sólo se basa en el modelo linealizado y desacoplado, sino que sólo se retroalimentan los estados de posición del sistema y los de velocidad son reconstruidos mediante integrales, sin considerar las condiciones iniciales en el proceso. Es por esta razón que el controlador presenta desplazamientos de mayor magnitud en el estado transitorio.

De manera general, los tres esquemas de control activo (PID basado en el modelo, Planitud Diferencial y GPI) presentaron resultados favorables en el estado estacionario, es decir, después de haber transcurrido 2 s aproximadamente. Sin embargo, el estado transitorio de cada respuesta tuvo un cambio sustancial, ya que en el caso del controlador PID el error es casi despreciable, mientras que el de Planitud el error crece hasta casi los 10 cm y en el GPI el error incrementa hasta los casi 40 cm. La fuerza de control aplicada  $u_i$  por los actuadores en cada esquema tiende a presentar una evolución similar a la salida  $y_i$ , ya que presenta un sobreimpulso inicial y posteriormente se estabilizan alrededor de los mismos valores. Sin embargo, dado que el sobreimpulso mayor se presenta con el GPI, la magnitud de la fuerza que debe aplicar  $u_2$  es de 1,3 kN aproximadamente, por lo que supera el límite especificado por el fabricante para el actuador lineal eléctrico considerado, que es de 1 kN.



# Capítulo 6

## Conclusiones

### 6.1. Conclusiones generales

En el presente trabajo de tesis se ha realizado la propuesta integral del diseño conceptual de la estructura de barras pulverizadoras con material estructural ASTM A36, aleaciones de aluminio e instrumentación con sensores ultrasónicos que reducirán las desviaciones en la altura de irrigación con el fin de minimizar uno de los *efectos de la deriva*.

Los mecanismos de 3 y 4 eslabones que se proponen en el trabajo en combinación con los actuadores lineales permiten ofrecer un rango de fuerza aplicado en las articulaciones y estabilidad mecánica para realizar desplazamientos angulares de cada una de las barras pulverizadoras y corrigen rápidamente la desviación en la altura de irrigación.

El trabajo no solo incluye la operación de regular la altura, si no que también se incluye un mecanismo para el plegado lateral de las barras estructurales, con el propósito de resguardarlas en una posición que facilite su transporte cuando no se encuentren en operación.

Se realizó un prototipo virtual en el software Solidworks<sup>®</sup>, ya que permitió entender el funcionamiento y movimientos mecánicos de la estructura, su diseño en software permitió realizar modificaciones y añadir elementos mecánicos que mejoran el desempeño de la estructura. Para el modelado matemático fue muy importante esta etapa ya que del prototipo virtual se extrajeron los parámetros dinámicos como las masas de las barras, inercias, coeficientes dinámicos y las propiedades geométricas de cada elemento del sistema. Los alcances y restricciones geométricas se identifican claramente mediante la propuesta del diseño virtual.

El prototipo virtual y los resultados numéricos del sistema en lazo abierto permitieron comprender la forma en la que las barras tienden a estabilizarse, ya que las tres barras no se estabilizaban en el mismo punto de equilibrio, esto se debe a la ubicación de los centros de masa  $m_i$ , regidas por la orientación  $\varphi_i$  y por el acoplamiento articular entre las barras, ya que se produce un efecto de arrastre gravitatorio.

El modelo matemático del sistema es expresado mediante la dinámica rotacional de las barras. Sin embargo, se propone un análisis cinemático que sea de apoyo para obtener resultados experimentales. Dicho análisis calcula la rotación  $\theta_i$  a través de la medición del desplazamiento vertical  $y_i$  de las barras con respecto del suelo. Se propone medir las alturas mediante tres sensores Ultrasónicos, colocados cada uno en un arreglo pendular que penden

en el extremo de cada barra estructural.

Dado que los actuadores que se emplearon son lineales, entonces, mediante un análisis cinemático de mecanismos se obtuvieron todos los parámetros de los mecanismos como desplazamientos angulares de los eslabones  $\phi_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, 15$ ) y longitudes de los eslabones  $r_k$ . Mediante el análisis estático de estructuras se determinó la relación entre la fuerza aplicada por los actuadores  $u_i$  y el torque  $\tau_i$  generado en las articulaciones de las barras.

Muchas veces los terrenos de cultivos no son completamente planos, si no que presentan un suelo con irregularidades en su superficie, es decir, presentan elevación o hundimiento del suelo. Por lo tanto, un sistema de barras pulverizadoras que opera sin la información de los cambios de perfil del suelo no podrá corregir la altura de irrigación ante las variaciones. Es por ello que en este trabajo de tesis se aplicarán esquemas de control activo que ofrecen una mayor robustez para regular de forma automática la altura de irrigación en el perfil del suelo.

La aplicación de los esquemas de control activo que se proponen en el presente trabajo involucran el conocimiento del modelo matemático del sistema, así como también de sus parámetros físicos. Para el caso del análisis del controlador PID basado en el modelo, se hace uso del modelo dinámico no-lineal, así como también de la relación Fuerza-Par.

Basado en los resultados obtenidos en simulación, los esquemas de control activo lograrán corregir su geometría para adaptarse al perfil de terreno irregular y de ese modo disminuir el efecto de la deriva. El controlador por Planitud presenta un déficit no tan elevado (10 cm a la salida), al emplear el modelo lineal y dinámicamente desacoplado no requiere un poder de procesamiento tan alto, donde un microcontrolador de gama media puede ejecutar su algoritmo con mayor facilidad. El controlador GPI es el más deficiente, ya que tiene un error máximo por encima de los demás. No obstante, presenta la ventaja que no requiere la retroalimentación de los estados de la velocidad, ya que son reconstruidos vía integrales. De manera general, el controlador PID basado en el modelo es el que presenta el comportamiento más favorable. Sin embargo, requiere de un mayor poder de procesamiento para su ejecución ya que su estructura se basa por completo del modelo no-lineal y relaciones cinemáticas.

## 6.2. Trabajo futuro

Se considera como trabajo futuro la construcción de la plataforma experimental, así como también la instrumentación e integración de los elementos que conforman al prototipo virtual propuesto en el presente trabajo. Esto con el propósito de validar de manera experimental los modelos matemáticos y posteriormente aplicar algoritmos de control activos que regulen la altura de las barras para disminuir el efecto de la *deriva* durante la operación.

También se considera que se aborde el estudio de los esquemas de control activo por Planitud Diferencial y GPI para sistemas MIMO no-lineales, con el propósito de ser aplicados al sistema de barras pulverizadoras y obtener una compensación en la altura de irrigación con mayor eficiencia que los esquemas por Planitud Diferencial y GPI SISO lineales que fueron aplicados.

# Bibliografía

- [1] Åström, K., y Hägglund, T. 2009. Control PID avanzado. Pearson educación. Madrid.
- [2] Balcells, J. y Romeral, J. *Autómatas programables*. Marcombo. Barcelona.
- [3] Bongiovanni R., Chartuni E., Best S. y Roel A. 2006. *AGRICULTURA DE PRECISIÓN: Integrando conocimientos para una agricultura moderna y sustentable*. Montevideo.
- [4] Craig, J. 2006. *Robótica*. 3ra ed. Pearson educación. México.
- [5] Dennis G. Zill y Jacqueline M. Dewar. 2012. *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. 3ra ed. McGraw-Hill. New Orleans.
- [6] Fliess M., J. Levine, P. Martin y P. Rouchon. 1995. “Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples”, *Int J of Control*, vol. 61, pp. 1327-1361.
- [7] Fliess M., Márquez R., Delaleau E. and Sira-Ramírez H., “Correcteurs Proportionnels-Integraux Généralisés”, *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*. Vol. 7, pp. 23-41, 2002.
- [8] Fusario, J., Crotti S., Bursxtyrn M. y Cívale O. 2012. *Teoría de control para informáticos*. 1ra ed. Buenos Aires. Alfaomega.
- [9] Grashof, F. 1883. *Theoretische Maschinenlehre*. Vol. 2. Voss: Hamburgo.
- [10] Hibbeler, *Mecánica vectorial para ingenieros Estática*. 10ed, Pearson.
- [11] Lugo O., Quevedo A., Bauer J., Hebert D., Palacios E. y Águila M. 2011. *Revista Mexicana de Ciencias Agrícolas. PROTOTIPO PARA AUTOMATIZAR UN SISTEMA DE RIEGO MULTICULTIVO*, 2(5). 659-672. Recuperado de [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2007-24222017000400101&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-24222017000400101&lng=es&nrm=iso)
- [12] Luviano-Juarez, A., Cortes-Romero, J., & Sira-Ramírez, H. 2008. Chaotic synchronization between oscillators using robust GPI control. 2008 5th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, (Cce), 114–119. <https://doi.org/10.1109/ICEEE.2008.4723451>

- [13] Norac. [www.norac.ca/](http://www.norac.ca/)
- [14] Norton, R. 2009. *DISEÑO DE MAQUINARIA Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*. McGraw-Hill. Massachusett.
- [15] Ogata, K. 1987. *Dinámica de sistemas*. 1ra ed. Prentice Hall. Madrid.
- [16] Ogata, K. 1992. *Ingeniería de control moderna*. 2da ed. Prentice Hall. Madrid.
- [17] Ortega, B. 2008. *Agricultura de precisión y manejo sitio específico en Chile*. Chileriego, 3(18), 37-41.
- [18] Poole, D. 2010. *Álgebra lineal*. Pritice Hall.
- [19] Praba. [www.pulverizadorespraba.com/](http://www.pulverizadorespraba.com/)
- [20] Santos, L., Juan, J. Picornell, M. y Tarjuelo, J. 2010. *El riego y sus tecnologías*. [Traducido al español de Necesidades del agua e métodos de rega]. España: Centro Regional de Estudios del Agua Universidad de Castilla-La Mancha.
- [21] Sensor de barasKS. [www.ksindustriamecanica.com.br](http://www.ksindustriamecanica.com.br)
- [22] Sira-Ramírez H., y S. Agrawal (2004). *Differentially Flat Systems*, Marcel Dekker, New York.
- [23] Sira-Ramírez, H., F., B.C., and A, B.O. (2008). A generalized proportional integral output feedback controller for the robust perturbation rejection in a mechanical system. *STA*, 5(4), 24-32.
- [24] Sira-Ramírez. 2018. "From flatness, GPI observers, GPI control and flat filters to observer-based ADRC", *Control Theory Tech*, Vol. 16, No.4, pp. 249-260. <http://link.springer.com/journal/11768>
- [25] Spong, W. y Vidyasagar, M. 1989. *Robot dynamics and control*. Wiley. New York.
- [26] Valtra. [www.valtra.com.ar/index.php?q=pulverizador-bs-3020h](http://www.valtra.com.ar/index.php?q=pulverizador-bs-3020h)
- [27] Vázquez, A. 2012. *Diseño de un sistema de riego aeropónico automatizado*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional Autónoma de México) Recuperado de <https://docplayer.es/85189805-Universidad-nacional-autonoma-de-mexico-diseno-de-un-sistema-de-riego-aeropónico-automatizado-josealvaro-vazquez-rivera.html>
- [28] Wells, D. A. 1967. *Lagrangiane Dynamics*. Schaum´s Outlines, McGraw-Hill, USA.

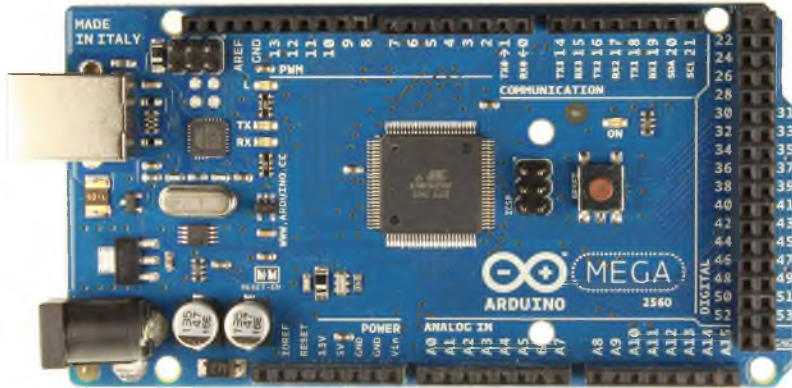
# Apéndice



# Apéndice A

## Hojas de datos

# MB0014: OEM ARDUINO MEGA 2560



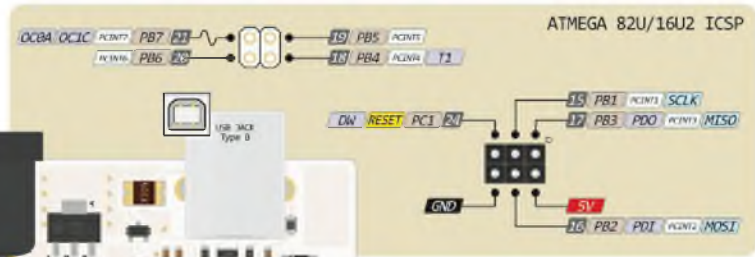
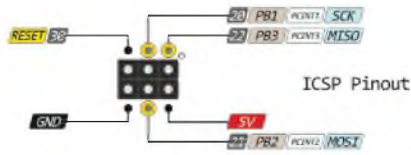
## Descripción:

El Arduino Mega es probablemente el microcontrolador más capaz de la familia Arduino. Posee 54 pines digitales que funcionan como entrada/salida; 16 entradas análogas, un cristal oscilador de 16 MHz, una conexión USB, un botón de reset y una entrada para la alimentación de la placa.

La comunicación entre la computadora y Arduino se produce a través del puerto serie, sin embargo posee un convertidor USB-SERIE, por lo que sólo se necesita conectar el dispositivo a la computadora utilizando un cable USB como el que utilizan las impresoras.

# Distribución de Pines

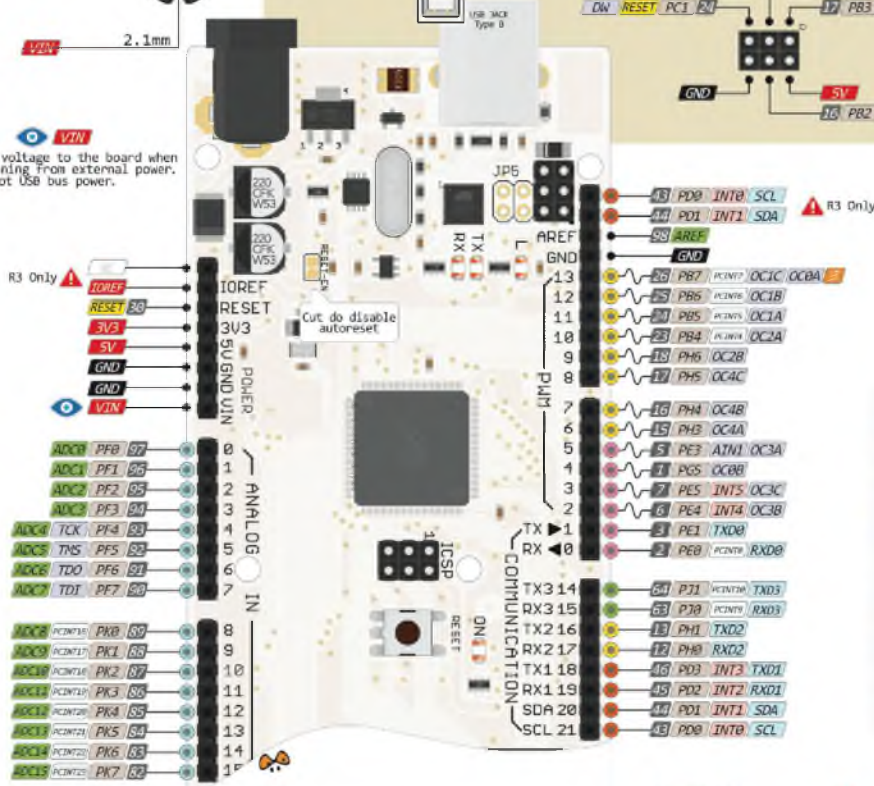
## MEGA PINOUT



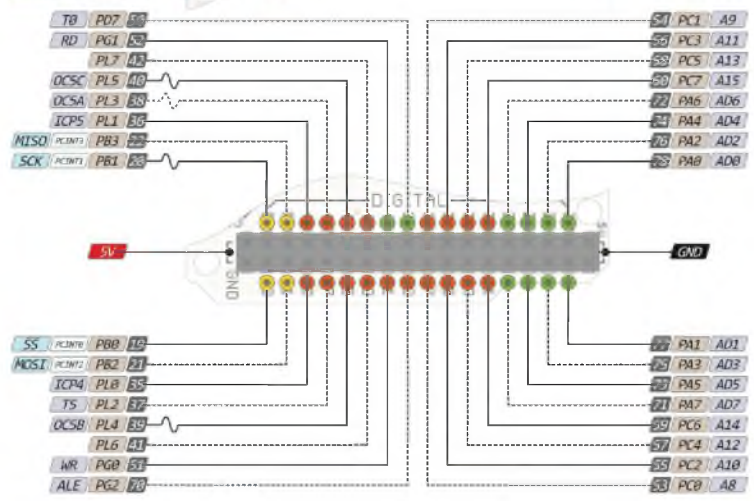
7-12V Depending on current drawn

2.1mm

The input voltage to the board when it is running from external power. Not USB bus power.



- Power
- GND
- Serial Pin
- Analog Pin
- Control
- INT
- Physical Pin
- Port Pin
- Pin function
- Interrupt Pin
- ~ PWM Pin
- ⚠ Part Power



- ⚠ The power sum for each pin's group should not exceed 100mA
- ⚠ Absolute MAX per pin 20mA recommended 10mA
- ⚠ Absolute MAX 200mA for entire package



## Características

Microcontrolador: ATmega2560.

Voltaje Operativo: 5V.

Voltaje de Entrada: 7-12V.

Voltaje de Entrada (límites): 6-20V.

Pines digitales de Entrada/Salida: 54 (de los cuales 15 proveen salida PWM).

Pines análogos de entrada: 16.

Corriente DC por cada Pin Entrada/Salida: 40 mA.

Corriente DC entregada en el Pin 3.3V: 50 mA.

Memoria Flash: 256 KB (8KB usados por el bootloader).

SRAM: 8KB.

EEPROM: 4KB.

Clock Speed: 16 MHz.

## Primeros Pasos

Para cargar el primer sketch debe tener instalado el IDE de Arduino en su computadora, que se debe descargar de la siguiente página:

<https://www.arduino.cc/en/Main/Software>

Una vez instalado el software, diríjase a la pestaña:

Archivo ->Ejemplos-> Basics

Deberá elegir Blink

Posteriormente deberá elegir la placa en:

Herramientas-> Placa -> Arduino/Genuino Mega or Mega2560

Conecte su placa y a continuación vaya a:

Herramientas->Puerto

Elija el puerto COM que su PC asigna a su placa.

## User Guide

### L298N Dual H-Bridge Motor Driver

This dual bidirectional motor driver, is based on the very popular L298 Dual H-Bridge Motor Driver Integrated Circuit. The circuit will allow you to easily and independently control two motors of up to 2A each in both directions. It is ideal for robotic applications and well suited for connection to a microcontroller requiring just a couple of control lines per motor. It can also be interfaced with simple manual switches, TTL logic gates, relays, etc. This board equipped with power LED indicators, on-board +5V regulator and protection diodes.

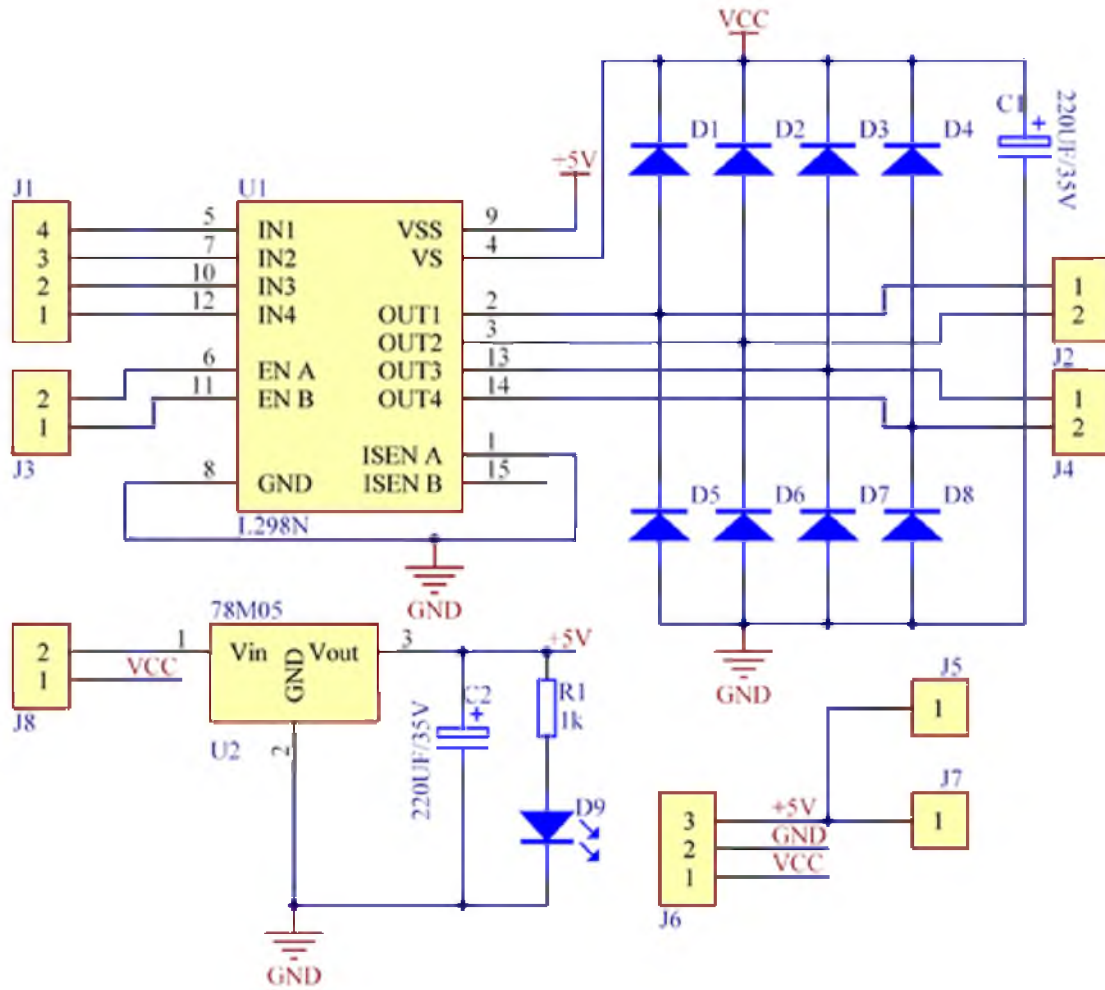


**SKU: MDU-1049**

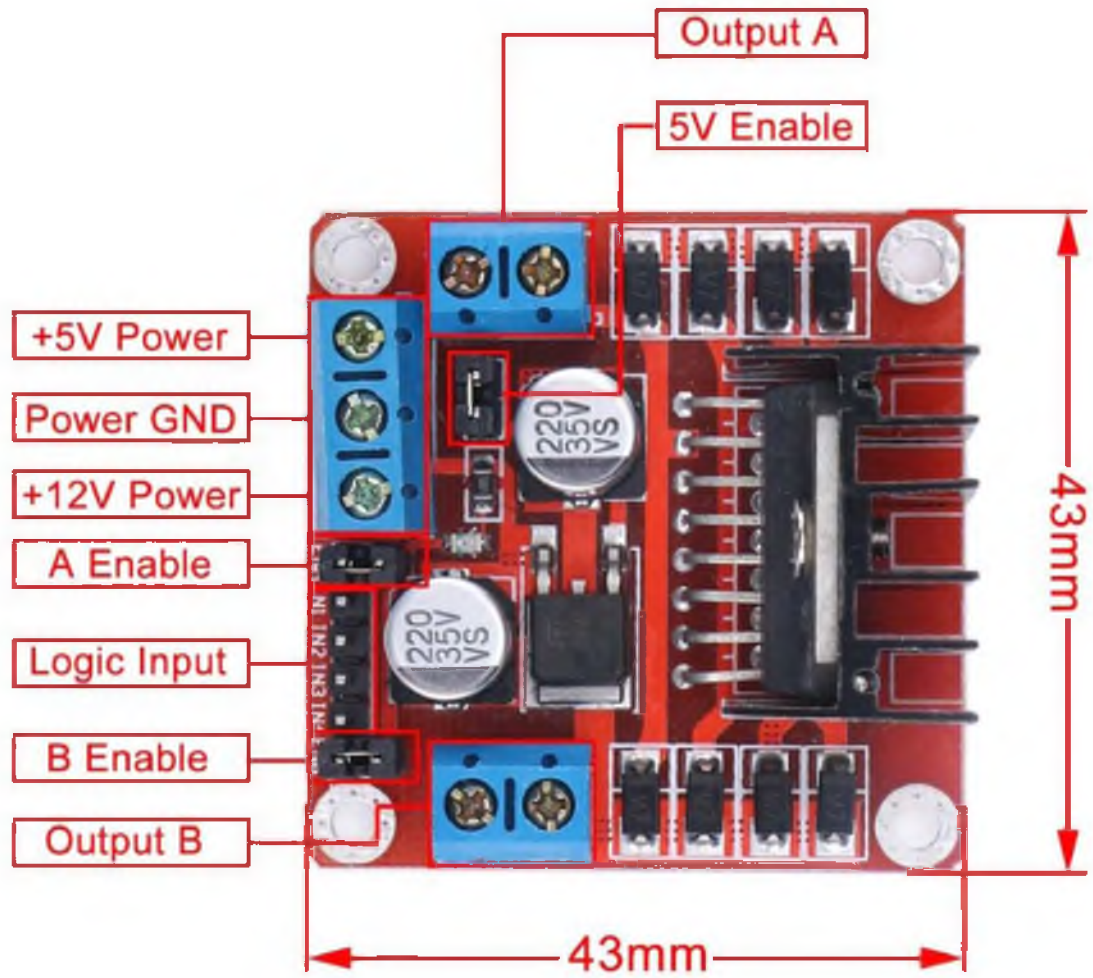
#### Brief Data:

- Input Voltage: 3.2V~40Vdc.
- Driver: L298N Dual H Bridge DC Motor Driver
- Power Supply: DC 5 V - 35 V
- Peak current: 2 Amp
- Operating current range: 0 ~ 36mA
- Control signal input voltage range :
- Low:  $-0.3V \leq V_{in} \leq 1.5V$ .
- High:  $2.3V \leq V_{in} \leq V_{ss}$ .
- Enable signal input voltage range :
  - Low:  $-0.3 \leq V_{in} \leq 1.5V$  (control signal is invalid).
  - High:  $2.3V \leq V_{in} \leq V_{ss}$  (control signal active).
- Maximum power consumption: 20W (when the temperature  $T = 75\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).
- Storage temperature:  $-25\text{ }^{\circ}\text{C} \sim +130\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
- On-board +5V regulated Output supply (supply to controller board i.e. Arduino).
- Size: 3.4cm x 4.3cm x 2.7cm

**Schematic Diagram:**



## Board Dimension & Pins Function:



## Product Data Sheet



### Standard Features:

- Compact design
- All aluminum frame and extension tube
- Nominal stroke lengths: 2" [50mm], 4" [100mm], 6" [150mm], 8" [200mm], 10" [250mm], 12" [300mm]
- Input voltage: 12VDC, 24VDC
- Standard gear ratio: 20:1 [other ratios available]
- Rated load range: 34 lbs. [150 Newtons] –to- 225 lbs. [1000 Newtons]
- Maximum static load: 562 lbs. [2,500 Newtons]
- Maximum current draw: 3.2 Amps @ 12 VDC
- Speed at no load: 0.28 in/sec [7 mm/sec] –to- 1.73 in/sec [43.9 mm/sec]
- Speed at full load: 0.22 in/sec [5.5 mm/sec] –to- 1.44 in/sec [36.5 mm/sec]
- Standard preset limit switches at both ends of stroke
- Noise level:  $\leq 70$ dB
- Mounting hole diameter (both ends): 1/4" [6.4mm]
- Duty cycle: 25% or 1 min continuous operation in 4 min.
- Working temperature: -13F [-25C] +149F [+65C]
- IP rating: IP65

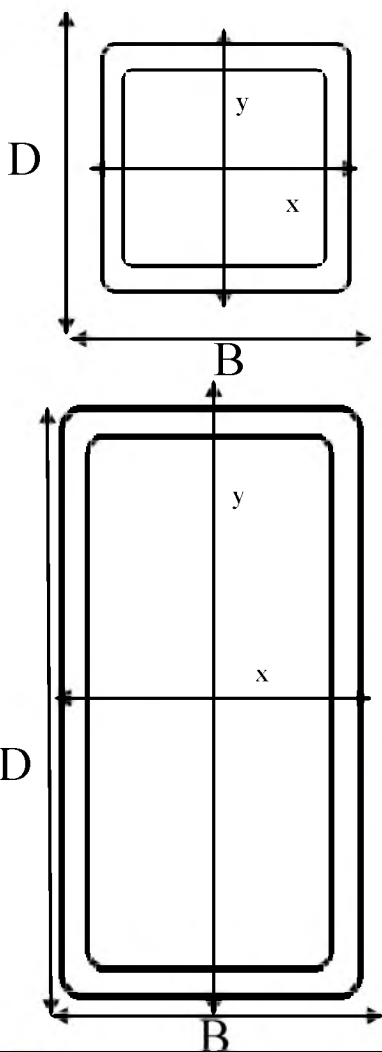
### Accessories:

- Mounting brackets
- Direction reversing switches
- Wired and wireless controllers
- Direction reversing relays

# Perfil Tubular Cuadrado y Rectangular PTR

## PTR

Diagramas de PTR



El P.T.R. es una barra hueca, comúnmente utilizada para armar estructuras que no tengan que resistir mucho peso.

Los hay en distintos calibres y tamaños, se pueden encontrar en acabado negro. También puede ser manejado en PTR galvanizado pero sólo por pedido especial. La gran ventaja de éstos perfiles es que son de fácil armado.

Éste producto está suministrado en tramos de 6.10 metros. Se puede pedir el calibre mediante código de colores, esto no significa que el PTR esté pintado, sino que indica el calibre del PTR.

**Unidad:** Kilogramos.  
**Presentación:** Tramo.  
**Acomodo:** Por medida

### Puntos de interés especial:

- El PTR es uno de los productos más comerciales en su ramos por su gran versatilidad.
- El material es acero grado ASTM A 36.
- Parte de calibre 14

## ¿Cómo interpretar la tabla dimensional?

Utilizaremos de ejemplo el PTR de 1 1/2" x 1 1/2", ya que ésta es la medida de mayor rotación en GLOBAL ACEROS.

PTR						
Dimensiones		Calibre	Espesor		kg/mt	kg/pza
pulg	mm		pulg	mm		
1 1/2" x 1 1/2"	38 x38	14	0.075	1.9	2.7	16.47
		12	0.105	2.7	3.12	19.032
		11	0.12	3	3.5	21.35
		10	0.135	3.4	3.91	23.851

- 1.-En el apartado "Dimensiones" indica el tamaño del PTR, lado por lado (D x B). Es indicado también en milímetros.
- 2.-Posteriormente indica el grosor en calibre.
- 3.-Después muestra el espesor en pulgadas y milímetros.
- 4.-En los dos últimos apartados hace referencia al peso, correspondiente por metros y por piezas.

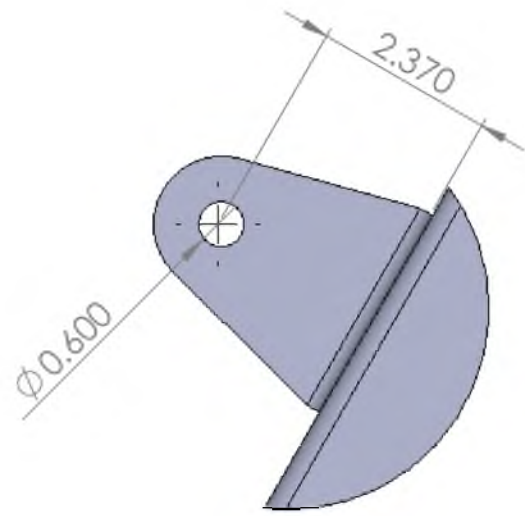
## Perfil Tubular Cuadrado

MEDIDA D x B	ESPESOR		CALIBRE	PESO			ÁREA cm <sup>2</sup>	MOMENTO DE INERCIA I cm <sup>4</sup>	MODULO DE SECCIÓN S cm <sup>3</sup>	RADIO DE GIRO r cm	COLOR
	pulg. - mm	pulg.		mm	kg/m	kg/pza					
1" x 1" 25 x 25	0.075	1.910	14	1.33	8.113	0.89	1.70	1.52	1.19	0.95	■ Azul
	0.095	2.281	13	1.62	9.882	1.09	2.07	1.75	1.38	0.92	■ Verde
	0.133	3.378	10	2.10	12.81	1.41	2.68	2.04	1.60	0.87	■ Rojo
1 1/4" x 1 1/4" 32 x 32	0.075	1.910	14	1.71	10.431	1.15	2.18	3.17	1.99	1.20	■ Azul
	0.090	2.281	13	2.20	13.42	1.48	2.62	3.62	2.34	1.18	■ Verde
	0.075	1.910	14	2.09	12.749	1.40	2.66	5.71	3.00	1.46	■ Azul
1 1/2" x 1 1/2" 38 x 38	0.110	2.794	12	2.94	17.934	1.98	3.74	7.56	3.97	1.42	□ Blanco
	0.125	3.175	11	3.27	19.947	2.20	4.18	8.21	4.31	1.40	■ Verde
	0.154	3.801	9	3.89	23.729	2.61	4.96	9.24	4.85	1.37	■ Rojo
2" x 2" 51 x 51	0.075	1.910	14	2.85	17.385	1.92	3.63	14.28	5.62	1.98	■ Azul
	0.110	2.794	12	4.05	24.705	2.72	5.16	19.43	7.65	1.94	□ Blanco
	0.125	3.175	11	4.54	27.694	3.05	5.79	21.37	8.41	1.92	■ Verde
	0.156	3.801	9	5.50	33.550	3.70	7.02	24.88	9.80	1.88	■ Rojo
	0.188	4.775	6	6.43	39.223	4.32	7.74	26.64	10.49	1.85	
2 1/2" x 2 1/2" 64 x 64	0.250	6.350	2	8.05	49.105	5.41	9.68	30.80	12.13	1.78	
	0.125	3.175	11	5.80	35.380	3.90	7.40	44.08	13.88	2.44	□ Blanco
	0.141	3.801	9	6.47	39.467	4.35	8.25	48.36	15.23	2.42	■ Verde
	0.188	4.775	6	8.34	50.874	5.60	10.63	59.32	18.68	2.36	■ Rojo
3" x 3" 76 x 76	0.250	6.350	2	10.58	64.538	7.11	12.71	67.42	21.30	2.31	■ Azul
	0.125	3.175	11	7.07	43.127	4.75	9.01	78.93	20.72	2.96	□ Blanco
	0.156	3.801	9	8.66	52.826	5.82	11.05	94.24	24.72	2.92	■ Verde
	0.188	4.775	6	10.24	62.464	6.88	13.06	108.40	28.30	2.88	■ Rojo
3 1/2" x 3 1/2" 89 x 89	0.250	6.350	2	13.11	79.971	8.81	15.68	125.29	32.94	2.82	■ Azul
	0.125	3.175	11	8.33	50.813	5.60	10.63	128.54	28.92	3.48	□ Blanco
	0.156	3.801	9	10.24	62.464	6.88	13.06	154.51	34.76	3.44	■ Verde
	0.188	4.775	6	12.14	74.054	8.16	15.48	179.01	40.27	3.40	■ Rojo
4" x 4" 102 x 102	0.250	6.350	2	15.63	95.343	10.50	19.93	220.16	49.53	3.32	■ Azul
	0.125	3.175	11	9.60	58.560	6.45	12.24	195.49	38.48	4.00	□ Blanco
	0.156	3.801	9	11.82	72.102	7.94	15.07	236.16	46.49	3.96	■ Verde
	0.188	4.775	6	14.04	85.644	9.43	17.91	275.07	54.15	3.92	■ Rojo
	0.250	6.350	2	18.16	110.776	12.20	23.16	341.94	67.31	3.84	■ Azul
	5/16"	7.950		22.07	134.627	14.83	28.13	398.80	78.50	3.76	
	3/8"	9.530		25.70	156.770	17.27	32.77	445.40	87.70	3.68	
1/2"	12.710		32.19	196.359	21.63	41.03	512.00	100.50	3.53		
4 1/2" x 4 1/2" 114 x 114	0.125	3.175	11	10.86	66.246	7.30	13.85	282.40	49.41	4.51	□ Blanco
	0.156	3.801	9	13.40	81.740	9.00	17.08	342.44	59.92	4.48	■ Verde
	0.188	4.775	6	15.94	97.234	10.71	20.33	400.48	70.07	4.44	■ Rojo
	0.250	6.350	2	20.69	126.209	13.90	26.38	501.90	87.82	4.36	■ Azul
5" x 5" 127 x 127	0.125	3.175	11	12.13	73.993	8.15	15.47	391.8	61.7	5.03	□ Blanco
	0.156	3.801	9	14.98	91.378	10.07	19.1	476.6	75.0	5.00	■ Verde
	0.188	4.775	6	17.85	108.885	11.99	22.76	559.1	88.0	4.96	■ Rojo
	0.250	6.350	2	23.22	141.642	15.60	29.61	705.2	111.0	4.88	■ Azul
	5/16"	7.950		28.39	173.179	19.08	36.19	836.6	131.4	4.80	
	3/8"	9.530		33.29	203.069	22.37	42.45	949.0	149.3	4.72	
6" x 6" 152 x 152	1/2"	12.710		42.31	258.091	28.43	53.94	1,123.8	177.0	4.57	
	3/16"	4.780		21.62	131.882	14.53	27.55	990.6	130.0	5.99	
	1/4"	6.350		28.30	172.63	19.02	36.10	1,261.2	165.5	5.92	
	5/16"	7.950		34.73	211.853	23.34	44.26	1,510.9	198.3	5.84	
	3/8"	9.530		40.89	249.429	27.48	52.13	1,731.5	227.8	5.77	
	1/2"	12.710		52.44	319.884	35.24	67.10	2,102.0	275.3	5.61	
7" x 7" 178 x 178	3/16"	4.780		25.42	155.062	17.08	32.39	1,602.5	180.3	7.04	
	1/4"	6.350		33.36	203.496	22.42	42.52	2,056.2	231.1	6.96	
	5/16"	7.950		41.06	250.466	27.59	52.32	2,476.6	278.6	6.88	
	3/8"	9.530		48.48	295.728	32.58	61.81	2,859.5	321.2	6.81	
	1/2"	12.710		62.58	381.738	42.06	80.00	3,251.3	396.6	6.65	
8" x 8" 203 x 203	3/16"	4.780		29.21	178.181	19.63	37.23	2,422.5	239.3	8.08	
	1/4"	6.350		38.42	234.362	25.82	48.97	3,125.9	308.1	8.00	
	5/16"	7.950		47.38	289.018	31.84	60.39	3,783.5	372.0	7.92	
	3/8"	9.530		56.09	342.149	37.69	71.61	4,412.1	432.6	7.85	
	1/2"	12.710		72.70	443.47	48.86	92.90	5,452.6	539.1	7.69	
10" x 10" 254 x 254	5/8"	15.880		88.28	538.508	59.33	105.81	6,077.0	598.1	7.60	
	1/4"	6.350		48.56	296.216	32.63	61.87	6,285.0	493.3	10.10	
	5/16"	7.950		60.05	366.305	40.36	76.77	7,617.0	601.4	9.98	
	3/8"	9.530		71.28	434.808	47.90	90.97	8,907.0	703.0	9.91	
	1/2"	12.710		92.95	566.995	62.47	118.71	11,280.0	881.2	9.75	
12" x 12" 305 x 305	5/8"	15.880		113.59	692.899	76.34	135.48	12,653.4	996.3	9.70	
	1/4"	6.350		56.68	345.748	38.09	74.87	11,030.0	722.7	12.14	
	5/16"	7.950		72.71	443.531	48.86	92.90	13,486.0	884.9	12.06	
	3/8"	9.530		86.46	527.406	58.10	110.32	15,817.0	1,039.0	12.00	
	1/2"	12.710		113.20	690.52	76.08	144.52	20,187.0	1,325.7	11.84	
14" x 14" 356 x 356	5/8"	15.880		138.90	847.29	93.35	165.81	22,809.5	1,497.8	11.70	
	5/16"	7.950		85.36	520.696	57.37	109.00	21,727.0	1,222.5	14.15	
	3/8"	9.530		101.66	620.126	68.32	129.68	25,598.0	1,440.4	14.07	
16" x 16" 406 x 406	1/2"	12.710		133.46	814.106	89.89	170.32	32,924.0	1,851.7	13.92	
	5/16"	7.950		98.03	597.983	65.88	125.16	32,841.0	1,615.8	16.12	
	3/8"	9.530		116.85	712.785	78.53	149.00	38,751.0	1,900.9	16.13	
1/2"	12.710		153.73	937.753	103.31	196.13	44,948.0	2,458.0	15.98		

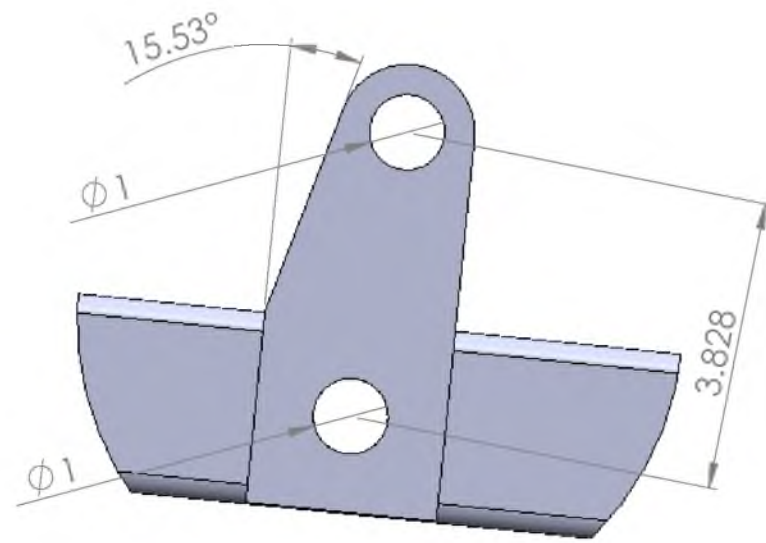
# Apéndice B

## Planos del sistema de riego

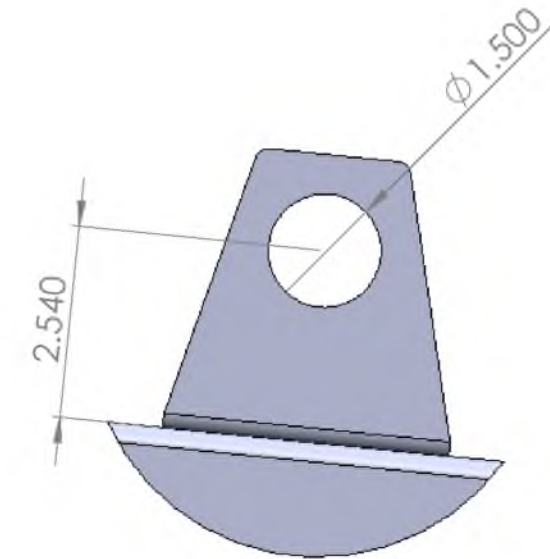
### B.1. Dibujos técnicos de las barras



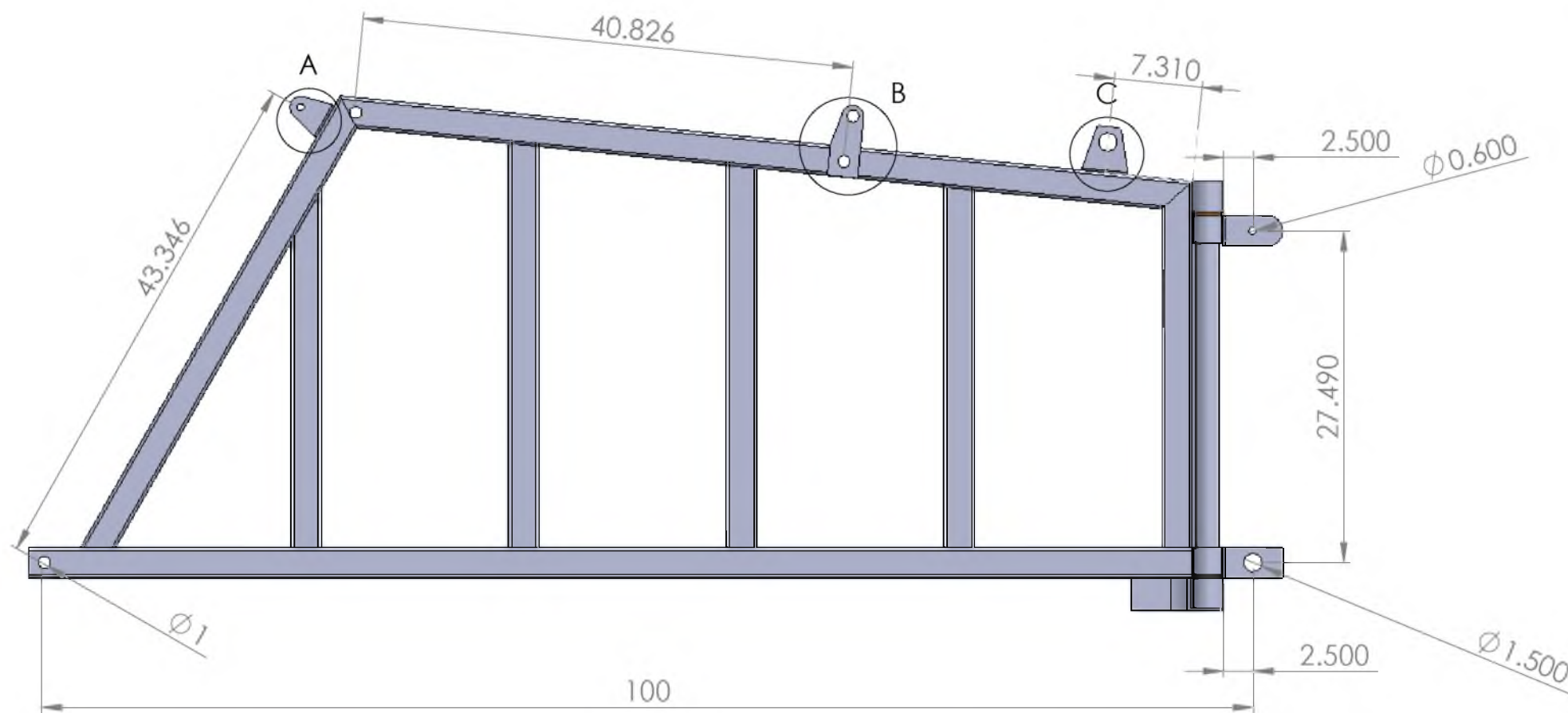
DETALLE A



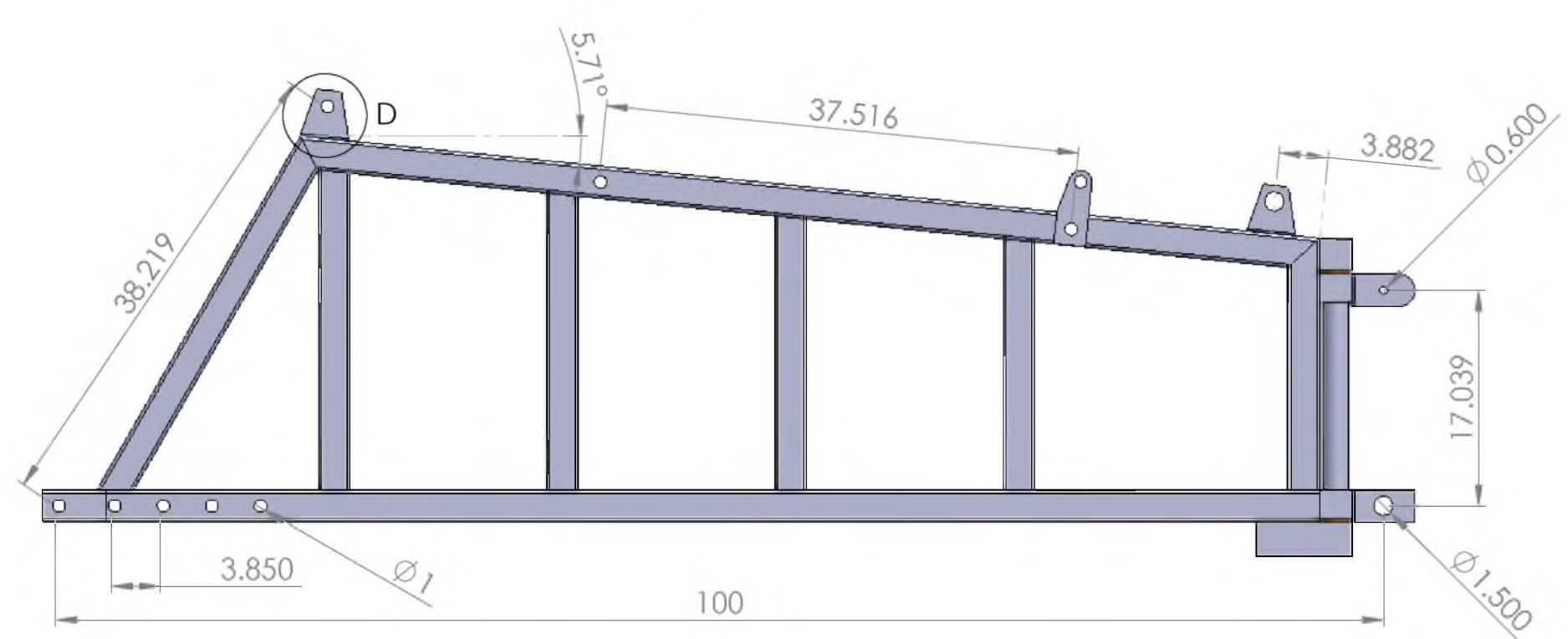
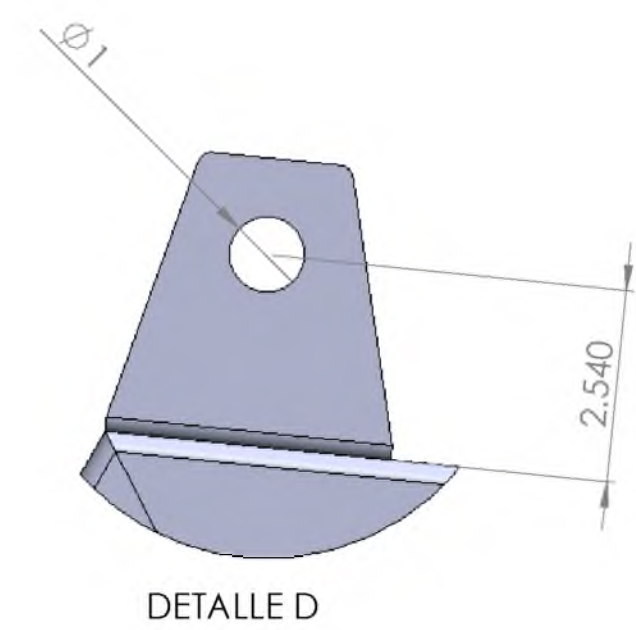
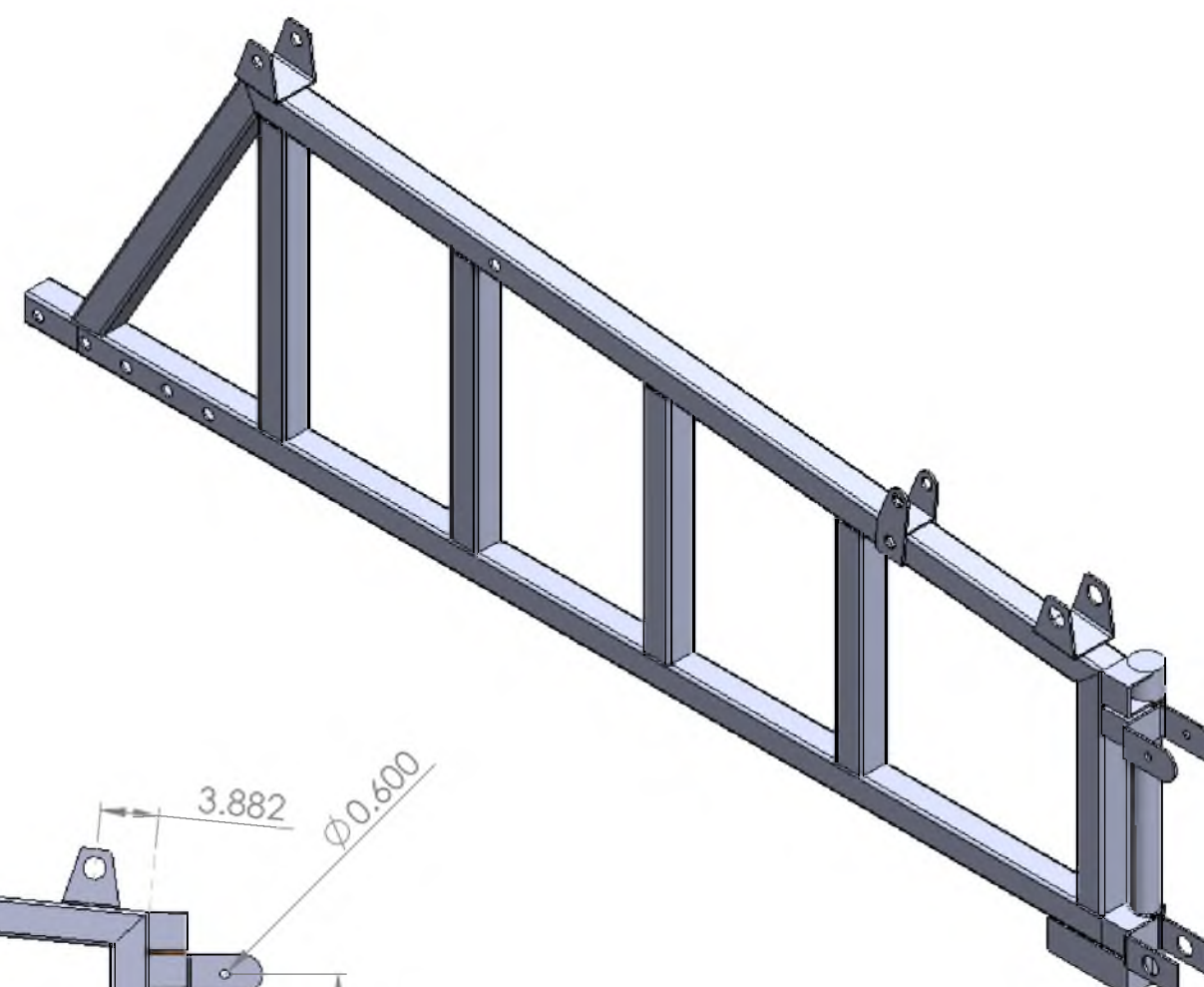
DETALLE B



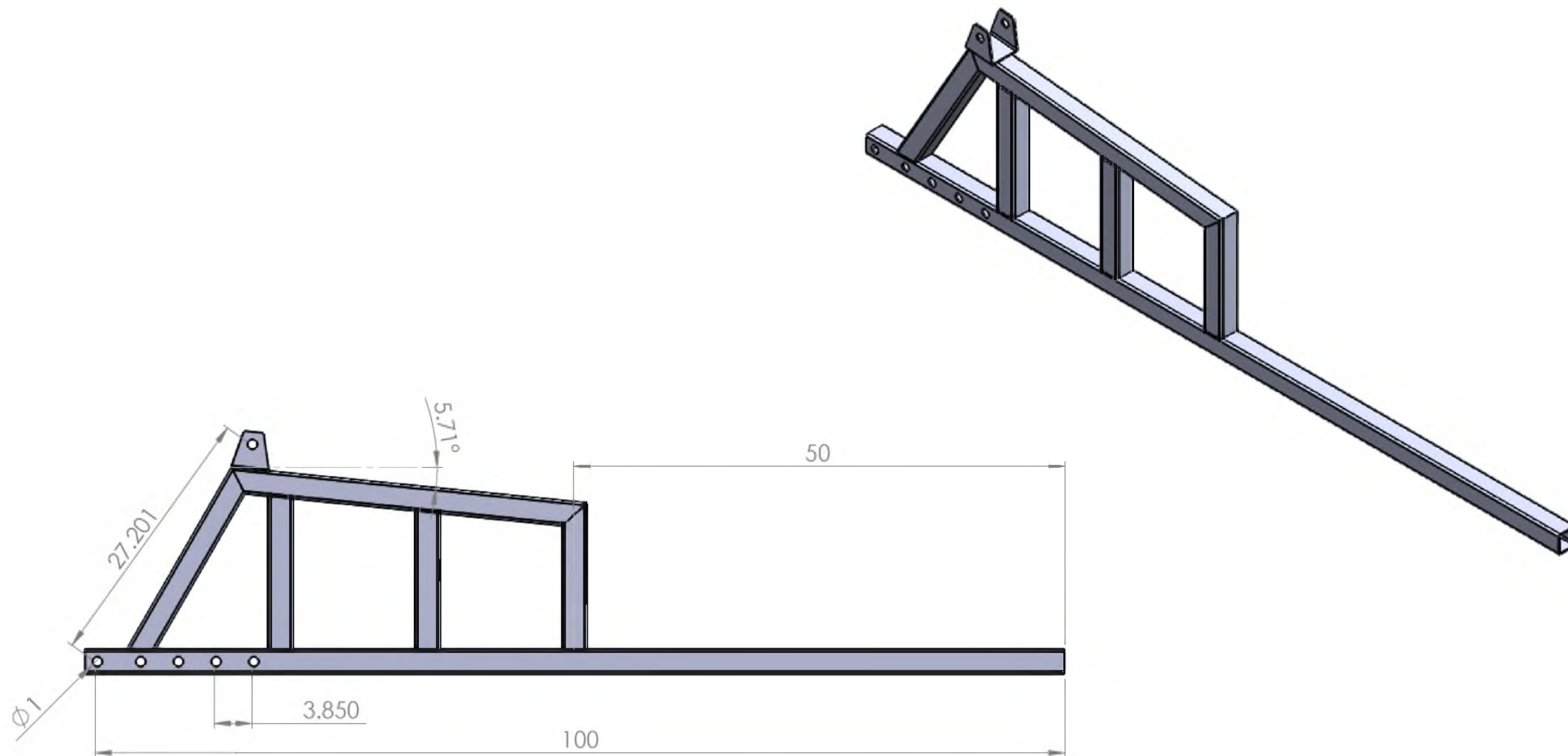
DETALLE C



INTENTO No. DE DIBUJO 1/1	PRIMER BARRA PULVERIZADORA		
TIPO DE DIBUJO	VISTAS MULTIPLES DE LA PIEZA	ESCALA 1:5	UNIDAD cm
ACERO ASTM A 36			
AUTOR:	ERWIN DE JESUS BARBABOSA MONGIOTTI	FECHA:	22/11/2020
TESIS		Vo. Bo.	
INGENIERIA EN MECATRONICA			
UNIVERSIDAD DEL PAPALOPAN			



INTENTO No. DE DIBUJO 1/1	SEGUNDA BARRA PULVERIZADORA		
TIPO DE DIBUJO	VISTAS MULTIPLES DE LA PIEZA	ESCALA 1:5	UNIDAD cm
ACERO ASTM A 36			
AUTOR:	ERWIN DE JESUS BARBABOSA MONGIOTTI	FECHA:	22/11/2020
TESIS		Vo. Bo.	
INGENIERIA EN MECATRONICA UNIVERSIDAD DEL PAPALOPAN			



INTENTO No. DE DIBUJO 1/1	TERCER BARRA PULVERIZADORA		
TIPO DE DIBUJO	VISTAS MULTIPLES DE LA PIEZA	ESCALA 1:5	UNIDAD cm
ACERO ASTM A 36			
AUTOR:	ERWIN DE JESUS BARBABOSA MONGIOTTI	FECHA:	22/11/2020
TESIS		Vo. Bo.	
INGENIERIA EN MECATRONICA			
UNIVERSIDAD DEL PAPALOPAN			