



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
CAMPUS LOMA BONITA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

EL MODELO INSUMO-PRODUCTO:
REGIONALIZACIÓN Y EFECTOS
MULTIPLICADORES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Licenciado en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Cristóbal Pacheco Marcial

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Juan Manuel Pérez Abarca

LOMA BONITA, OAXACA, MÉXICO.

2019



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN
Campus Loma Bonita

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

LA PRESENTE TESIS TITULADA

**"EL MODELO INSUMO-PRODUCTO: REGIONALIZACIÓN Y EFECTOS
MULTIPLICADORES"**

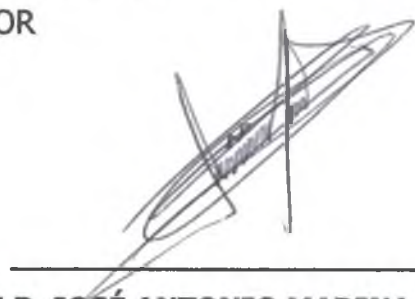
PRESENTADA POR EL SUSTENTANTE DE LA LICENCIATURA: **C. CRISTOBAL PACHECO MARCIAL** BAJO LA DIRECCION DEL **DR. JUAN MANUEL PÉREZ ABARCA**, HA SIDO REVISADA Y ACEPTADA POR EL COMITÉ EXAMINADOR PARA SER DEFENDIDA EN EL EXAMEN PROFESIONAL Y OBTENER EL TÍTULO DE **LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**.



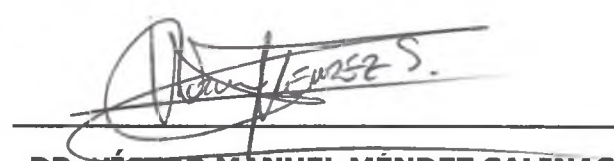
DR. JUAN MANUEL PÉREZ ABARCA
DIRECTOR



DR. JUAN MANUEL PÉREZ ABARCA
PRESIDENTE



M.E.R. JOSÉ ANTONIO MARINA CLEMENTE
SECRETARIO



DR. VÍCTOR MANUEL MÉNDEZ SALINAS
VOCAL



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

Campus Loma Bonita

Oficio No. MA051-18
Loma Bonita Oaxaca a 10 de diciembre del 2018
Asunto: Asignación de sinodales de tesis

M.E. Yesenia Barrientos Arenal
Jefa del departamento de servicios escolares
PRESENTE

Mediante la presente, le informo que la Vicerectoría Académica, ha designado a los siguientes profesores como sinodales del examen profesional del alumno **Cristobal Pacheco Marcial**, quien defenderá su trabajo de tesis titulado *El modelo insumo-producto: Regionalización y efectos multiplicadores*, para obtener el título de Licenciado en Matemáticas Aplicadas.

Titulares:

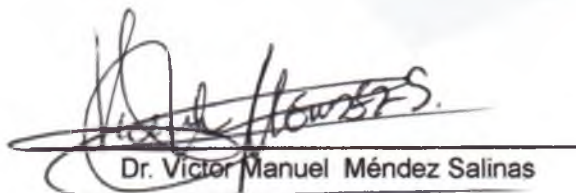
Presidente: Dr. Juan Manuel Pérez Abarca
Secretario: M.E.R. José Antonio Marina Clemente
Vocal: Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas

Suplentes:

Dra. Erendira Munguía Villanueva
M.C. Iván Guadalupe Mendoza Alonzo

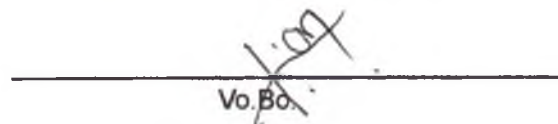
Sin otro particular me despido quedando a sus ordenes para cualquier aclaración.

ATENTAMENTE



Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas

Jefe de carrera de la Lic. en Matemáticas Aplicadas
Universidad del Papaloapan



Vo.Bo.

M.C. Hector López Arjona
Vicerector Académico

c.c.p. M.C. Héctor López Arjona. Vicerector académico

c.c.p. M.E. Yesenia Barrientos Arenal. Jefa de servicios escolares

*Dedicado a
mi familia.*

Agradecimientos

A la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y a la Universidad del Papaloapan, por la formación que me han dado.

A mis padres Cutberto y Margarita por la vida y por todo lo que me han dado, por el apoyo constante a lo largo de muchos años, por su paciencia, a mis hermanos por haberme apoyado en mi etapa de estudiante, en especial a Severino por su apoyo incondicional y por creer en mí.

A mi director de tesis Dr. Juan Manuel Pérez Abarca por su apoyo e impulso en todo momento para la culminación de la tesis.

A mis revisores; Dra. Beatriz Carely Luna Olivera y M.E.R. José Antonio Marina Clemente, por toda su contribución y sus preciados comentarios.

A mis amigos y compañeros de carrera Felix, Patricia, Emmanuel, Amayrani, Alexis, César, Ileri, Catalina, Karen y Marijose (Maya) por su apoyo y por las aventuras vividas a lo largo de mi experiencia universitaria hasta la conclusión del trabajo de tesis.

A Jessica Adai, Irma y Luis Angel por brindarme su apoyo y amistad.

A M.C. Xaab Nop Vargas por todo su apoyo e invaluable amistad.

A mis profesores por transmitirme sus conocimientos.

A todas aquellas personas que me brindaron su ayuda incondicional cuando más lo necesitaba.

Resumen

En este trabajo, se presentan los elementos del análisis económico conocido como Insumo-Producto, dicho modelo resulta muy interesante por su sencillez ya que solo requiere conocimientos del Álgebra Lineal y de algunos elementos de Macroeconomía, por tal motivo, esta al alcance de estudiantes de una licenciatura en Matemáticas.

Se debe mencionar también que por su carácter interdisciplinario, al desarrollador de dicho modelo se le otorgó un premio Nobel, como reconocimiento a los intentos de matematizar y traer coherencia a las distintas teorías económicas. En base a las observaciones anteriores, el trabajo está organizado de la siguiente manera: en los dos primeros capítulos se expone el modelo lineal básico y sus elementos constituyentes como una simplificación de las cuentas nacionales, en el tercer capítulo, se estudian las propiedades algebraicas del modelo estudiado anteriormente y finalmente, en el capítulo cuatro se ilustran algunas de sus aplicaciones como la regionalización, características de los datos y sus interrelaciones, además su efecto multiplicador que es de bastante interés en la toma de decisiones de carácter económico.

PALABRAS CLAVE: Modelo Insumo-Producto, Matriz de Leontief, Invertibilidad, Efecto multiplicador (pequeños incrementos).

Abstract

In this work, the elements of the economic analysis known as Input-Output are presented, this model is very interesting for its simplicity since it only requires knowledge of Linear Algebra and some elements of Macroeconomics, for this reason, it is within the reach of Mathematics students.

It should also be mentioned that due to its interdisciplinary nature, the developer of this model was awarded a Nobel Prize, in recognition of the attempts to mathematize and bring coherence to the different economic theories.

Based on the previous observations, the work is organized as follows: in the first two chapters the basic linear model and its constituent elements are exposed as a simplification of the national accounts report, in the third chapter, the algebraic properties of the model are studied and finally, chapter four illustrates some of its applications such as regionalization, characteristics of the data their interrelations and also its multiplying effect that is of great interest in making economic decisions.

KEYWORDS: Input-Output Model, Leontief Matrix, Invertibility, multiplicative effect (small increments).

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Índice de tablas | IX |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Presentación | 1 |
| 1.2. Estructura de la tesis | 2 |
| 2. Modelo Insumo-Producto | 3 |
| 2.1. Antecedentes del Análisis del Insumo-Producto | 4 |
| 2.2. Notación y relaciones fundamentales | 5 |
| 2.2.1. Modelo insumo-producto de una economía cerrada | 5 |
| 2.2.2. Modelo insumo-producto de una economía abierta | 7 |
| 2.2.3. Matriz de Coeficientes Tecnológicos | 12 |
| 2.3. Cerradura del modelo con respecto a los hogares | 13 |
| 2.4. El modelo de Leontief con base a precios | 18 |
| 2.4.1. El modelo de precios basado en datos monetarios | 19 |
| 3. Propiedades de la Matriz de Leontief | 22 |
| 3.1. Existencia de \mathbf{L} y propiedades de \mathbf{L} y \mathbf{A} | 22 |
| 3.2. Generalización del modelo de precios | 24 |
| 3.3. Valores característicos y el Teorema de Perron-Frobenius | 26 |
| 4. Regionalización y Efectos Multiplicadores | 30 |
| 4.1. Regionalización | 30 |
| 4.1.1. Modelo Interregional | 31 |
| 4.1.1.1. Estructura Básica de los Modelos Interregionales. | 31 |
| 4.1.2. Modelo Multiregional | 36 |
| 4.2. Estructura General del Efecto Multiplicador | 40 |
| 4.2.1. Multiplicadores de la producción | 41 |
| 4.2.2. Multiplicadores del Ingreso/empleo | 43 |
| 4.2.3. Multiplicadores del Valor Agregado | 43 |
| 4.3. Multiplicadores en los Modelos Regionales | 45 |
| 4.3.1. Multiplicadores en el Modelo Interregional | 46 |
| 4.3.2. Multiplicadores en el Modelo Multiregional | 47 |
| 5. Conclusiones | 50 |

| | |
|--|-----------|
| A. Vectores y matrices | 51 |
| A.1. Normas de vectores y matrices | 51 |
| Bibliografía | 53 |

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| 2.1. Flujos de bienes interindustriales | 5 |
| 2.2. Ejemplo: Transacciones intersectoriales | 6 |
| 2.3. Flujos interindustriales caso: Economía abierta | 9 |
| 2.4. Ejemplo: Datos numéricos de una economía abierta | 10 |
| 2.5. Flujos expandidos de una economía | 11 |
| 2.6. Flujos (z_{ij}) para un ejemplo hipotético | 13 |
| 2.7. Flujos interindustriales con hogares endógenos | 14 |
| 2.8. Ejemplo: Flujos (z_{ij}) hipotéticos, con hogares endógenos | 17 |
| 2.9. Ejemplo: Transacciones en unidades físicas | 18 |
| 2.10. Ejemplo: Transacciones en unidades monetarias | 19 |
| 2.11. Ejemplo: Transacciones en unidades físicas revisadas | 19 |
| 2.12. Transacciones en términos monetarios | 20 |
| 3.1. Transacciones monetarias (precio \times (unidades físicas)) | 25 |
| 4.1. Flujos de bienes interregional | 32 |
| 4.2. Flujos de bienes para el caso interregional hipotético de dos regiones | 34 |
| 4.3. Envíos interregionales del producto básico i | 36 |
| 4.4. Datos de flujo para el caso hipotético multiregional de dos regiones | 38 |
| 4.5. Envíos interregionales de productos para el caso hipotético multirregional de dos regiones | 39 |

Presentación

Una economía es un sistema muy complejo con muchas interrelaciones entre sus diversos sectores: los bienes y servicios que se producen y consumen. Para determinar los precios óptimos y los niveles de producción sujetos a las metas económicas deseadas se requieren métodos cuantitativos.

Uno de los métodos empleado en la teoría económica moderna que satisface los requerimientos antes mencionados es la economía matemática. Esta disciplina consiste en aplicar métodos matemáticos para representar teorías y analizar problemas económicos [(4),(20)]. El uso de las matemáticas en el análisis económico y social data del siglo XVII de acuerdo a los datos históricos, principalmente en las universidades Alemanas [Schumpeter]; en el siglo XVIII con la publicación de trabajos como el de David Hume, Political Discourses (1752), el Tableau Economique de François Quesnay (1758-1759), o The Wealth of Nations de Adam Smith (1776), se empezaron a formalizar los razonamientos económicos y a desarrollarlos en teorías, esto creó la necesidad de expresar interrelaciones e ideas de complejidad creciente de una manera automática [Sydsaeter and Hammond]; ya por el siglo XIX se creó el formalismo de los modelos económicos con el uso del cálculo diferencial para representar y explicar el comportamiento económico, entre los pioneros podemos encontrar economistas como Agustín Cournot y Léon Walras y a mediados del siglo XX la economía se convirtió en una disciplina con más contenido matemático. Una ventaja de este acercamiento es la posibilidad de formular las relaciones teóricas con rigor, generalidad y simplicidad [(19), (18)]. La amplia aplicación de las matemáticas en la economía incluye: problemas de optimización con equilibrio como meta, análisis estáticos (o de equilibrio sin cambio), análisis dinámicos (cambio de equilibrio) [(4)].

Dentro de la economía matemática moderna encontramos los modelos lineales, el álgebra lineal, una de las ramas de la matemática, resulta ser una poderosa herramienta en el desarrollo y análisis de tales modelos [(6)].

Con esta área de la matemática es con la cual se trabajará en la presente tesis, centrada en el Análisis Insumo-Producto.

El Análisis mencionado es un modelo económico desarrollado por el economista de Harvard, Wassily Leontief (1905-1999), por el que obtuvo un Premio Nobel en el año 1973[(13), (6)].

La idea original fue desarrollar un método cuyo objetivo fundamental era analizar la interdependencias de los diversos sectores de la economía [(14), (10)].

Del análisis Insumo-Producto se derivan los modelos de economía abierta y economía cerrada, los cuales son ahora herramientas estándar en la economía matemática, usados por ciudades, corporaciones y países completos para planificación y pronósticos económicos [(13)].

Estructura de la tesis

El modelo Insumo-Producto representa un gran atractivo por su simplicidad ya que se basa en conceptos del álgebra lineal de no gran complejidad, pero que a lo largo de varias décadas de su explotación ha sido sometida a una gran cantidad de modificaciones y adaptaciones a problemas de naturaleza análoga, por mencionar algunos cuantos, éstos son los modelos de energía, los modelos ambientales, las matrices de contabilidad social y de equilibrio general.

Por lo anterior la tesis se ha organizado de la manera siguiente: en el capítulo II se presentarán las bases del método de la manera más clara y objetiva para posteriormente explorar las aplicaciones mencionadas, en el capítulo III se mencionan propiedades del álgebra lineal de matrices con valores positivos, tal es el caso de la matriz inversa de Leontief y de las cadenas de Markov y finalmente en el capítulo IV se mencionan las técnicas de regionalización de los datos nacionales y se ilustra su uso para toma de decisiones, también denominado efecto multiplicativo.

Modelo Insumo-Producto

Cuando empezamos a hablar de economía nos preguntamos ¿qué es la economía? ¿cómo se define?, la versión más utilizada es la que propone el economista inglés Lionel Robbins (1898–1984) en su libro “Ensayo sobre la naturaleza y significado de la Ciencia Económica (1932)” donde define la economía como “ciencia que estudia el comportamiento humano como una relación entre fines y medios escasos que tienen usos alternativos”. Podemos entender de la definición que si pensamos en un mundo sin escasez todas las necesidades y deseos de las personas podrían ser satisfechas, al tener todo no habría problema de la economía de seleccionar qué producir y cómo producirlo, por lo tanto, no habría ningún problema económico. ¿Pero qué los recursos son escasos?, ¿es escaso el aire? ¿si no, tal vez el aire limpio es escaso? si nos quedamos con la definición tradicional de la economía, estas preguntas deben ser respondidas antes de cualquier análisis económico: de alguna manera misteriosa, todos los escasos recursos son conocidos [(14)], por lo que la numeración de estos recursos escasos debe incluirse en la definición de economía. Modificando la definición de Robbins omitiendo la palabra “escaso”, Raa define la economía como “el estudio de la asignación de recursos entre fines alternativos” y lo precisa con la siguiente definición “el estudio de la asignación de recursos a las unidades de producción de los productos básicos y la distribución de estos últimos a la población”, de acuerdo a la última definición, algunos recursos asignados a las unidades de producción pueden ser escasos algunos y otros no; un producto escaso se marca por un precio determinado y uno no escaso tiene un precio de cero. En esta etapa no es necesario ser muy específico con respecto a los conceptos de “unidades de producción”, “mercancías”, “distribución” y “hogares” [(14),(17)]. Como menciona Samuelson and Nordhaus, tras la definición se esconden dos ideas claves de la economía: los bienes son escasos y la sociedad debe utilizar sus recursos con eficiencia, por eficiencia se entiende el uso más eficaz de los recursos de una sociedad para satisfacer las necesidades y deseos de las personas, ya que todos forman parte de un sistema en el que algunos la pasan mucho mejor que otros como lo indica Lovell. La esencia de la teoría económica es reconocer la realidad de la escasez y luego encontrar la manera de organizar a la sociedad de tal manera que logre el uso más eficiente de sus recursos o simplemente que algo se maximiza. Las unidades de producción, o empresas, maximizan los beneficios y los hogares maximizan sus niveles de ingresos o bienestar.

Así, el problema económico puede resumirse como la maximización de algún objetivo sujeto a restricciones. Es importante comprender de manera contundente los principios de la maximización restringida y relacionarlos con el concepto económico básico de un precio.

INSUMOS Y PRODUCTOS

Cualquier sociedad económica tiene una cantidad de recursos limitada, por lo que cada una de ella debe tomar decisiones respecto de los insumos y productos de la economía. En [(16)], tenemos que

los **insumos** son los bienes o servicios que se utilizan para producir a su vez bienes o servicios. La economía utiliza la tecnología disponible para transformar estos insumos y generar los productos. Los **productos** son los distintos bienes o servicios que resultan del proceso de producción que se consumen o se emplean en el proceso de producción posterior. Por lo anterior toda sociedad tiene que responder tres preguntas fundamentales en términos de insumos y productos, primero *qué* producir y en qué cantidades; segundo *cómo* producirlos; es decir con qué técnicas deben combinarse para obtener los productos deseados, y por ultimo *para quién* deben elaborarse los productos y entre quienes se deben distribuir.

El éxito del modelo insumo-producto radica en representar de forma numérica los factores arriba mencionados y agruparlos en una relación lineal, como instrumento de interpretación de las interdependencias de los diversos sectores de la economía, donde fundamentalmente se trata de un análisis general del equilibrio estático de las condiciones tecnológicas de la producción total de una economía, durante el periodo de tiempo en cuestión.

Antecedentes del Análisis del Insumo-Producto

Por la década de 1930 el profesor Wassily Leontief, empezó a recopilar la primera tabla empírica de insumo-producto, la cual describe de manera natural la actividad económica real, inspirado por la tabla propuesta por el economista francés François Quesnay en su obra *Tableau Economique* publicada en el año 1758, donde intenta describir el funcionamiento de la economía de forma analítica y es una contribución importante al pensamiento económico, después Karl Marx fue el primero en traducir la obra de Quesnay a un sistema matricial de ecuaciones, en los llamados modelos de producción simple y producción ampliada que aparecen en el volumen II de El Capital, y posteriormente en el trabajo de Léon Walras publicado en 1874, donde representa matemáticamente las interdependencias de un sistema económico, planteadas bajo la hipótesis de existencia de un equilibrio general de los mercados [(21),(14),(13)].

Con el tiempo se le acreditó a Leontief la parte teórica del modelo insumo-producto, ya que fue el primero en profundizar el análisis del mismo, el cual representa una aproximación empírica de las interrelaciones existentes entre los distintos sectores en que puede dividirse una economía nacional, tratadas como piezas de un equilibrio general. En su análisis empezó con la introducción del álgebra matricial al tratamiento de los problemas del equilibrio general, desarrollando así un modelo estático muy operativo para estimar los niveles productivos sectoriales y las relaciones intersectoriales. En el primer estudio del modelo, Leontief en 1936 presentó el llamado modelo cerrado: todas las salidas también se usan como entradas y la producción es igual al consumo; posteriormente en 1941 presenta el modelo abierto[(14)].

Leontief fue galardonado con el premio Nobel de economía en 1973, como reconocimiento a los intentos de matematizar y traer coherencia a las distintas teorías económicas. Desde su introducción, el modelo ha sido una de las herramientas más poderosas para su aplicación en otras áreas como el mercado de la energía y problemas ambientales.

Notación y relaciones fundamentales

Cualquiera que sea la economía en cuestión, sus agentes son a la vez productores y/o consumidores de satisfactores (bienes y servicios) que son producidos por ellos mismos o por otros agentes. Es decir, para el análisis de Insumo-Producto consideramos cualquier economía como un complejo de industrias mutuamente interrelacionadas, en el cual, se supone que cada una de las industrias produce un solo producto, por lo que si una industria produce dos artículos diferentes o emplea dos combinaciones distintas de factores posibles, entonces esa industria se puede descomponer, al menos de manera conceptual, en dos industrias separadas.

El modelo insumo-producto se construye a partir de datos observados de un área económica

| | | Consumidor | | | | |
|-----------|----------|------------|-----|----------|-----|----------|
| | | 1 | ... | j | ... | n |
| Productor | 1 | z_{11} | ... | z_{1j} | ... | z_{1n} |
| | \vdots | \vdots | | \vdots | | \vdots |
| | i | z_{i1} | ... | z_{ij} | ... | z_{in} |
| | \vdots | \vdots | | \vdots | | \vdots |
| | n | z_{n1} | ... | z_{nj} | ... | z_{nn} |

Tabla 2.1: Flujos de bienes interindustriales

particular: ciudades, regiones y países completos para planificación y pronósticos económicos. En esta sección consideraremos el área económica a nivel nacional (ó país), donde la actividad económica se conforma de n industrias. Como es natural cada una utiliza algunos productos (insumos) de las otras para fabricar su propio producto, así que a grandes rasgos, los datos necesarios para la construcción del modelo son los flujos de productos de cada una de las industrias como productor (ó vendedor) a cada uno de los sectores como consumidor (ó comprador) como podemos observar en la Tabla 2.1, donde z_{ij} es el importe en unidades físicas o monetarias del producto que fabrica la industria i y requiere la industria j , incluyéndose ella misma cuando $i = j$ (z_{ij} también conocidas como ventas intermedias); estos flujos interindustriales, transacciones ó flujos intersectoriales (los términos industria y sector a menudo se utilizan indistintamente en el análisis de insumo-producto(13)), se miden para un período de tiempo (generalmente un año), por ejemplo, el valor monetario de acero producido y vendido a los fabricantes de automóviles el año pasado.

Modelo insumo-producto de una economía cerrada

Iniciaremos considerando una sociedad sencilla constituida por tres personas (empresas): un campesino que produce todos los alimentos, un sastre que hace todo el vestido y un carpintero que construye todo lo de la vivienda. Supondremos que las tres personas venden y compran en una central de abasto y que todo lo que se produce se consume. Como ningún producto entra o sale del sistema, en este caso se dice que se trata de una **economía cerrada**.

Cada uno de los tres individuos consumirá de cada uno de los tres productos producidos dentro de la sociedad. Supóngase que la proporción de cada uno de los productos consumidos por cada una de las personas está dada en el cuadro siguiente. Nótese que cada una de las columnas de la Tabla

| | | Consumidor | | |
|-----------|------------|------------|--------|------------|
| | | Campesino | Sastre | Carpintero |
| Productor | Campesino | 0.40 | 0.20 | 0.20 |
| | Sastre | 0.10 | 0.70 | 0.20 |
| | Carpintero | 0.50 | 0.10 | 0.60 |

Tabla 2.2: Transacciones intersectoriales

2.2 deben sumar 1.

Sean p_1 , p_2 y p_3 respectivamente los ingresos del campesino, del sastre y del carpintero. Para tener la certeza de que esta sociedad sobrevive, se requiere que el consumo de cada individuo sea igual a su ingreso, en el caso del campesino, este requisito puede traducirse en la ecuación $0.40p_1 + 0.10p_2 + 0.50p_3 = p_1$. Entonces necesitamos considerar el sistema de ecuaciones lineales

$$0.40p_1 + 0.10p_2 + 0.50p_3 = p_1$$

$$0.10p_1 + 0.70p_2 + 0.20p_3 = p_2$$

$$0.50p_1 + 0.10p_2 + 0.60p_3 = p_3$$

o su equivalente, $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}$, donde

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

y \mathbf{A} es la matriz de coeficientes del sistema. Dentro de este contexto \mathbf{A} se denomina la *matriz de consumo* y $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}$ la *condición de equilibrio*.

Para matrices \mathbf{B} y \mathbf{C} del mismo tamaño utilizaremos la notación $\mathbf{B} \geq \mathbf{C}$ [$\mathbf{B} > \mathbf{C}$] para indicar $b_{ij} \geq c_{ij}$ [$b_{ij} > c_{ij}$] para toda i, j . \mathbf{B} se denominará no negativa [positiva] si $\mathbf{B} \geq \mathbf{O}$ [$\mathbf{B} > \mathbf{O}$] donde \mathbf{O} es la matriz nula.

Al principio puede parecer razonable reemplazar la condición de equilibrio por la desigualdad $\mathbf{A}\mathbf{p} \leq \mathbf{p}$, esto es, la condición de que el consumo no exceda a la producción. Pero de hecho $\mathbf{A}\mathbf{p} \leq \mathbf{p}$ implica que $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}$ en el modelo cerrado, pues de otra manera existiría una k para la cual

$$p_k > \sum_j a_{kj} p_j.$$

Por tanto, como las columnas de \mathbf{A} suman 1.

$$\sum_i p_i > \sum_i \sum_j a_{ij} p_j = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right) p_j = \sum_j p_j$$

lo cual es una contradicción.

Una solución del sistema homogéneo $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es equivalente a decir que la condición de equilibrio es

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.35 \\ 0.40 \end{bmatrix}$$

Podemos interpretar este hecho como indicando que la sociedad sobrevivirá si el campesino, el sastre y el carpintero tienen ingresos en la proporción 25 : 35 : 40 (ó 5 : 7 : 8).

Notese que no estamos interesados simplemente en una solución no trivial al sistema, sino en una que sea no negativa. Por ello debemos considerar si el sistema $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene o no una solución no negativa, donde \mathbf{A} sea una matriz no negativa cuyas columnas suman 1. Un teorema útil en este aspecto se enuncia a continuación.

Teorema 2.2.1. *Sea \mathbf{A} una matriz de consumo de $n \times n$ de la forma*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

donde \mathbf{D} es una matriz de $1 \times (n-1)$ y \mathbf{C} es una matriz positiva de $(n-1) \times 1$. Entonces $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene un conjunto de soluciones unidimensional generado por un vector no negativo.

Observese que toda matriz de consumo positiva satisface la hipótesis de este teorema. La matriz siguiente la satisface:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.50 & 0.65 \\ 0.00 & 0.25 & 0.35 \\ 0.25 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Para mayores detalles de estas propiedades, ver los resultados del Capítulo 3.

Modelo insumo-producto de una economía abierta

En el modelo cerrado habíamos considerado que la producción total es igual al consumo, suponiendo que toda la producción es a su vez un insumo para las industrias que conforman el sistema económico.

En la realidad se observa que en cualquier país o región hay ventas que son externas o exógenas a los sectores industriales, por ejemplo, los hogares, el gobierno, las compras con fines de inversión (privadas) y el comercio exterior (exportaciones).

En esta situación las demandas de estas unidades en las magnitudes de sus compras de cada uno de los sectores industriales, generalmente están determinadas por consideraciones que no guardan relación con la cantidad que se produce. Por ejemplo, la demanda gubernamental de aeronaves está relacionada con cambios amplios en la política nacional, los niveles presupuestarios o las necesidades de defensa; la demanda del consumidor por autos pequeños está relacionada con la disponibilidad

de gasolina, y así sucesivamente [(13)]. La demanda de éstas unidades externas tiende a ser más para que los bienes se usen como tales y no se usen como un insumo para un proceso de producción industrial, generalmente se denomina demanda final y la denotaremos como f_i . A esta clase de economía se denomina como **economía abierta**, y el modelo de análisis insumo-producto tiene como objetivo determinar la producción de cada una de las industrias para satisfacer la demanda final si esta cambia, que la estructura económica no varía.

Para comprender la idea anterior de una manera simple, supongamos que una economía se constituye por tres industrias: vestido, alimentos, camiones. Cada una de las industrias utilizan una parte de la producción total de las otras para producir su propio producto ó generar algún servicio y también se requieren para su uso final, ya sea consumo y/o inversión. Por ejemplo, para hacer vestidos requiere vestidos, es decir utiliza una parte de su propio producto, para estar saludable requiere alimentos, la industria de vestidos también emplea varios camiones para entregar su producción. En este contexto, la industria de vestidos utiliza vestidos, alimentos y camiones para hacer vestidos. Podemos expresar esta relación de la siguiente manera

$$(Vestido, Alimentos, Camión) \longrightarrow Vestidos$$

La producción de vestidos es utilizada por otras plantas industriales. Parte de ello, como se indicó anteriormente, es utilizado por la industria de vestidos para producir vestidos, es decir el consumo de su propia producción. La de alimentos puede usar vestidos para producir alimentos, los camiones como medio de transporte para hacer entregas de productos. La industria de camiones, requiere de alimentos pero puede que no sea necesario requerir vestidos para producir camiones. Por lo que la producción restante se utiliza para satisfacer el consumo final lo cual podría ser lo que los hogares demandan. De acuerdo a la suposición de utilidad de la producción del vestido en las otras industrias, se puede escribir como

$$\begin{aligned} (Vestido, Alimento, Camión) &\longrightarrow Alimento \\ (Alimento, Camión) &\longrightarrow Camión \end{aligned}$$

Como es de esperar, la producción total de cada una de las industrias es igual a la suma de todos los suministros. En nuestro ejemplo: suponiendo que el suministro de vestido en las otras empresas es igual a su demanda, lo podemos expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{Prod. total de vestidos} &= \text{vestidos utilizados en la industria de vestido} \\ &+ \text{vestidos utilizados en la producción de alimentos} \\ &+ \text{vestidos utilizados en los hogares.} \end{aligned}$$

de manera análoga con las otras indutrias, como también los hogares demandan alimentos, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Prod. total de alimentos} &= \text{alimentos utilizados en la industria de vestido} \\ &+ \text{alimentos utilizados en la producción de alimentos} \\ &+ \text{alimentos utilizados en la industria de camión.} \\ &+ \text{alimentos utilizados en los hogares.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Prod. total de camiones} &= \text{camiones utilizados en la industria de vestido} \\ &+ \text{camiones utilizados en la producción de alimentos} \\ &+ \text{camiones utilizados para transportar camiones.} \end{aligned}$$

De manera general para n industrias o sectores representamos sus datos como se muestra en la Tabla 2.3, donde z_{ij} es el importe en unidades físicas o monetarias del producto que fabrica la industria i y requiere la industria j para producir su propio producto, f_i es la demanda final de la industria i .

| | | Consumidor | | | | | Demanda |
|-----------|-----|------------|-----|----------|-----|----------|-----------------|
| | | 1 | ... | j | ... | n | Final (f_i) |
| Productor | 1 | z_{11} | ... | z_{1j} | ... | z_{1n} | f_1 |
| | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| | i | z_{i1} | ... | z_{ij} | ... | z_{in} | f_i |
| | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| | n | z_{n1} | ... | z_{nj} | ... | z_{nn} | f_n |

Tabla 2.3: Flujos interindustriales en una economía abierta

Definamos la producción total de la industria i como:

Definición 2.2.1. La producción total x_i de la industria i , es la suma de las cantidades que las demás industrias le compran, incluyendo la demanda final f_i , es decir:

$$x_i = z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + f_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} + f_i; \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Desarrollando la Definición 2.2.1 para n industrias tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= z_{11} + \cdots + z_{1j} + \cdots + z_{1n} + f_1 \\
 &\vdots \\
 x_i &= z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + f_i \\
 &\vdots \\
 x_n &= z_{n1} + \cdots + z_{nj} + \cdots + z_{nn} + f_n
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Denotemos por \mathbf{x} , \mathbf{Z} y \mathbf{f} , a lo siguiente:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1j} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{i1} & \cdots & z_{ij} & \cdots & z_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nj} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

donde \mathbf{x} es el vector de producción total, \mathbf{Z} la matriz de ventas intermedias y \mathbf{f} el vector de demanda final, respectivamente.

La información del sistema (2.1) sobre la distribución de productos de cada industria se puede escribir de forma compacta con notación matricial como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{i} + \mathbf{f} \quad (2.2)$$

donde la \mathbf{i} es un vector columna con entradas de 1's, de tal manera que nos da un vector columna con las sumas de los renglones de la matriz \mathbf{Z} .

De nuestro ejemplo que conforma a tres industrias (vestido, alimentos y camiones),

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{11} + z_{12} + f_1 \\ x_2 &= z_{21} + z_{22} + z_{23} + f_2 \\ x_3 &= z_{31} + z_{32} + z_{33} \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde $i = 1, 2, 3$ denota la actividad de producción de vestido, alimentos y camiones respectivamente.

Podemos observar que z_{13} y f_3 de nuestro ejemplo toman valores de cero. Recordemos que en nuestro modelo insumo-producto cada industria utiliza algunos productos (insumos) de las otras para fabricar su propio producto, pero no necesita utilizar todos los productos disponibles en el sistema, de manera análoga con la demanda final, en particular en el ejemplo, los camiones pueden ser utilizados solo con fines comerciales y no como automóviles familiares.

En la Tabla 2.4 se presenta los datos numéricos en terminos de unidades físicas de una economía sencilla basada en el ejemplo anterior:

| | | Consumidor | | | Demanda | Producción |
|-----------|-----------|------------|-----------|----------|-----------------|-----------------|
| | | Vestido | Alimentos | Camiones | Final (f_i) | Total (x_i) |
| Productor | Vestido | 750 | 2,250 | 0 | 100 | 3,100 |
| | Alimentos | 1,500 | 1,125 | 1,875 | 30 | 4,530 |
| | Camiones | 750 | 1,125 | 625 | 0 | 2,500 |

Tabla 2.4: Datos numéricos de una economía abierta

Insumo-Producto, Demanda Final y el valor agregado

Desde el punto de vista macroeconómico, los componentes del vector de demanda final representan las compras de consumidores (hogares (c_i)), compras para fines de inversión (privados (i_i)), compras gubernamentales ((federales, estatales y locales)(g_i)) y ventas al exterior (exportaciones (e_i)). También se observa que en el sistema económico en cuestión, cada una de las industrias genera otros gastos de producción, conocidos como *el valor agregado*, en el encontramos lo siguiente: pago a los empleados (servicio laboral, l_j), valores como impuestos percibidos por el Estado, capital (pagos de intereses), suelo (pagos de alquiler), espíritu empresarial (plusvalía), entre otros; a este grupo de valores lo denotemos como n_j , así el total de valores agregados sería $v_j = l_j + n_j$. Además supongamos que algunos sectores (o quizás todos) utilizan bienes importados para producir sus productos, éste valor lo denotemos como m_j . Podemos observar la estructura de los datos mencionados en la Tabla 2.5, donde se constituye parte de un conjunto completo de

| | | Consumidor | | | | Demanda Final | | | | Producción | |
|--------------------------------|----------------|------------|-----|----------|-----|---------------|-------|-------|-------|------------|------------------------|
| | | 1 | ... | j | ... | n | Hogar | Inve. | Gob. | Exp. | Total (\mathbf{x}) |
| Productor | 1 | z_{11} | ... | z_{1j} | ... | z_{1n} | c_1 | i_1 | g_1 | e_1 | x_1 |
| | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | i | z_{i1} | ... | z_{ij} | ... | z_{in} | c_i | i_i | g_i | e_i | x_i |
| | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | n | z_{n1} | ... | z_{nj} | ... | z_{nn} | c_n | i_n | g_n | e_n | x_n |
| Sect. de pago | Valor agregado | l_1 | ... | l_j | ... | l_n | l_C | l_I | l_G | l_E | L |
| | | n_1 | ... | n_j | ... | n_n | n_C | n_I | n_G | n_E | N |
| | Importe | m_1 | ... | m_j | ... | m_n | m_C | m_I | m_G | m_E | M |
| Costo total (\mathbf{y}^t) | | y_1 | ... | y_j | ... | y_n | C | I | G | E | x |

Tabla 2.5: Flujos expandidos de una economía

cuentas de ingresos y productos para una economía [(13)]. El total de pagos que se lleva a cabo por el sector j , lo podemos expresar de la siguiente manera $s_j = v_j + m_j = l_j + n_j + m_j$. A los elementos en la intersección de las filas del sector de pagos y la columna de demanda final representan los pagos de los consumidores final, por ejemplo l_C , los pagos domésticos o ayuda doméstica, la l_G representa los pagos a los trabajadores gubernamentales y por otros valores agregado, por ejemplo, n_C incluye pagos de impuestos por parte de los hogares. Ahora podemos definir el gasto total de la industria j .

Definición 2.2.2. *El gasto total de la industria j , es la suma de cada uno de los importes que la industria j ha adquirido de las demás industrias más s_j ,*

$$y_j = z_{1j} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{nj} + s_j = \sum_{i=1}^n z_{ij} + s_j; \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

En [Samuelson and Nordhaus (16)] se define Producto Interno Bruto (PIB) la medida que abarca la producción total de bienes y servicios de un país. Es la suma del valor monetario del consumo (C), la inversión bruta (I), el gasto público (G) y las exportaciones netas (E) producidas dentro de un país en un año cualquiera y además el PIB se mide en dos formas: 1) como el flujo del gasto en productos finales, o 2) como los costos totales o ingresos de los factores. Ambos enfoques arrojan exactamente la misma medida.

Para ver que los enfoques de producto e ingreso son idénticos examinaremos la economía simple de una peluquería. Supongamos que los peluqueros no tienen otros gastos que el de la mano de obra, si venden 10 cortes de cabello a 8 pesos cada uno, el PIB es de 80 pesos. Pero los ingresos de los peluqueros (en salarios y utilidades) son también exactamente de 80 pesos. Por tanto, el PIB es idéntico aquí ya sea que se mida como flujo de productos (valor de los cortes de cabello, 80 pesos)

o como flujo de costos e ingresos (valor de salarios y utilidades, 80 pesos).

De acuerdo a lo anterior tenemos que:

$$y_i = x_i; \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

De la Tabla 2.5, la suma de la columna de producción total, es la producción total bruto en toda la economía, como se muestra lo siguiente

$$x = x_1 + \dots + x_i + \dots + x_n + L + N + M \quad (2.5)$$

el mismo valor se puede encontrar sumando a través de la fila de gastos totales

$$x = y_1 + \dots + y_j + \dots + y_n + C + I + G + E \quad (2.6)$$

igualando las ecuaciones (2.5) y (2.6) tenemos:

$$L + N + M = C + I + G + E$$

ó

$$L + N = C + I + G + (E - M) \quad (2.7)$$

donde el lado izquierdo representa el ingreso nacional bruto (el total de pagos de factores en la economía) y el lado derecho representa el producto nacional bruto: el total gastado en bienes de consumo e inversión, las compras totales del gobierno y el valor total de las exportaciones netas de la economía [(16), (13)]. De la ecuación (2.7) podemos escribir la siguiente expresión

$$V = L + N = C + I + G + (E - M) \quad (2.8)$$

y reescribiendo la Definición 2.2.2 tenemos

$$y_j = z_{1j} + \dots + z_{ij} + \dots + z_{nj} + v_j = \sum_{i=1}^n z_{ij} + v_j; \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

donde $v_j = l_j + n_j$.

Matriz de Coeficientes Tecnológicos

En esta sección se define la matriz de coeficientes tecnológicos (ó matriz de insumo); se conoce así a la matriz cuyos elementos es el valor de proporción en unidades físicas ó monetarias de la producción total de la industria i que la industria j debe adquirir para producir una unidad de su propio producto. Definamos

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_j} \quad (2.10)$$

se tiene entonces

$$x_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} + f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + f_i.$$

De esta forma podemos construir

$$\mathbf{A} = [a_{ij}].$$

El sistema de ecuaciones equivale a la ecuación matricial

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{f} = \mathbf{x} \tag{2.11}$$

agrupando \mathbf{x} tenemos

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

donde \mathbf{I}_n es la matriz identidad de orden n y $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ la matriz de Leontief. Si $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ es regular, entonces despejando \mathbf{x} tenemos:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{f}$$

llamaremos también a $\mathbf{L} := (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}$ la matriz inversa de Leontief (ó matriz de requerimiento total), de manera que lo anterior también se escribe como

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{f}$$

Los elementos de la matriz \mathbf{L} cuantifican los requerimientos directos e indirectos de producción necesarios para satisfacer la demanda final, esto deja en claro la dependencia de cada uno de los productos brutos de cada una de las demandas finales.

Ejemplo 2.2.1. Ejemplo hipotético de una pequeña economía formada por 2 industrias, como se observa en la Tabla 2.6.

| | | Consumidor | | Demanda | Producción |
|-----------------------|-------------|-------------|-------------|-----------------|-----------------|
| | | Agricultura | Manufactura | Final (f_i) | Total (x_i) |
| Productor | Agricultura | 150 | 500 | 350 | 1000 |
| | Manufactura | 200 | 100 | 1700 | 2000 |
| Sector de pago | | 650 | 1400 | 1100 | 3150 |
| Costo total (y_j) | | 1000 | 2000 | 3150 | 6150 |

Tabla 2.6: Flujos (z_{ij}) para un ejemplo hipotético

En la siguiente matriz podemos observar los coeficientes tecnológicos, de acuerdo a la ecuación (2.10) para el cálculo de dichos coeficientes los cuales representan la estructura de producción en la economía. Cada columna representa la lista de los requerimientos para la producción de una unidad en cada una de las industrias:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.25 \\ 0.20 & 0.05 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Cerradura del modelo con respecto a los hogares

En la Tabla 2.5 se observa que el sector de pagos es una componente muy importante del modelo, los elementos esenciales de este sector son el pago a los trabajadores, importaciones y

otros desembolsos.

Por otro lado, gran parte de la demanda final la hacen los mismos trabajadores para su consumo. Por esta razón es necesario incluirlos dentro del modelo como un sector especial, al cual nos referiremos como el de los hogares.

Los hogares (consumidores) obtienen ingresos (al menos en parte) en pago por sus insumos de mano de obra a los procesos de producción y como consumidores, gastan sus ingresos en formas bastante bien modeladas.

Así que uno podría mover el sector de los hogares desde la columna de demanda final y el renglón

| | | Consumidor | | | | | Hogar |
|------------------|----------|-------------|-----|-------------|-----|-------------|---------------|
| | | 1 | ... | j | ... | n | |
| Productor | 1 | z_{11} | ... | z_{1j} | ... | z_{1n} | $z_{1,n+1}$ |
| | \vdots | \vdots | | \vdots | | \vdots | \vdots |
| | i | z_{i1} | ... | z_{ij} | ... | z_{in} | $z_{i,n+1}$ |
| | \vdots | \vdots | | \vdots | | \vdots | \vdots |
| | n | z_{n1} | ... | z_{nj} | ... | z_{nn} | $z_{n,n+1}$ |
| Hogar (Labor) | | $z_{n+1,1}$ | ... | $z_{n+1,j}$ | ... | $z_{n+1,n}$ | $z_{n+1,n+1}$ |

Tabla 2.7: Flujos interindustriales con hogares endógenos

insumo de mano de obra y colocarlo dentro de la tabla de flujos interindustriales, lo cual daría origen a otra matriz de coeficientes técnicos, por lo que estos datos se vuelven una variable *endógena*. A éste proceso se le denomina **cerrar el modelo respecto a los hogares**. Con estos datos la Tabla 2.1 tendría un renglón más en la parte inferior y una columna más a la derecha como se muestra en Tabla 2.7 donde podemos ver la estructura del modelo cerrado con respecto a los hogares: donde el renglón $(n + 1)$ representa los sueldos y salarios recibidos por los hogares del pago de n sectores por sus servicios laborales, denotemos al renglón por \mathbf{h}_L y la columna $(n + 1)$ que contiene a los valores de las compras de los bienes de los n sectores que los hogares hayan adquirido por \mathbf{h}_C . La intersección del renglón $(n + 1)$ con la columna $(n + 1)$, el elemento $\mathbf{h} := z_{n+1,n+1}$ que representa el pago de servicios de mano de obra en el hogar. Así tenemos una nueva matriz de flujos como sigue:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1j} & \cdots & z_{1n} & z_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ z_{i1} & \cdots & z_{ij} & \cdots & z_{in} & z_{i,n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ z_{n1} & \cdots & z_{nj} & \cdots & z_{nn} & z_{n,n+1} \\ z_{n+1,1} & \cdots & z_{n+1,j} & \cdots & z_{n+1,n} & z_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

ó en forma compacta:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{h}_C \\ \mathbf{h}_L & \mathbf{h} \end{bmatrix}$$

Empleando la Definición 2.2.1 de la Subsección 2.2.2 en esta nueva estructura del sistema económico en la Tabla 2.7 tenemos la siguiente sistema de $(n+1)$ ecuaciones lineales:

$$x_i = z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + z_{i,n+1} + f_i^* = \sum_{j=1}^{n+1} z_{ij} + f_i^*; \quad \forall i = 1, \dots, n+1 \quad (2.13)$$

aquí f_i^* la demanda final restante de la producción del sector i incluyendo a los hogares como sector de servicios laboral.

Aplicando la definición de coeficientes tecnológicos definida en la Subsección 2.2.3 tenemos la siguiente matriz:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & a_{i,n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,j} & \cdots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

ó bien como:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{H}_C \\ \mathbf{H}_L & \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

donde \mathbf{H}_L es el vector fila de los coeficientes de insumo de mano de obra,

$$a_{n+1,j} = \frac{z_{n+1,j}}{x_j}; \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

\mathbf{H}_C el vector columna de los coeficientes tecnológicos de consumo de los hogares,

$$a_{i,n+1} = \frac{z_{i,n+1}}{x_{n+1}}; \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

y por último el elemento \mathbf{H} de la matriz de coeficientes tecnológicos $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{H} = a_{n+1,n+1} = \frac{z_{n+1,n+1}}{x_{n+1}}.$$

Sean $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{f}} \in \mathcal{M}_{(n+1) \times 1}(\mathbb{R})$ el vector columna de producción total y demanda final respectivamente, éstas se expresan de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_1^* \\ \vdots \\ f_i^* \\ \vdots \\ f_n^* \\ f_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^* \\ f_{n+1}^* \end{bmatrix}$$

Así, el nuevo sistema con $n + 1$ ecuaciones lineales del modelo con hogares endógenos, se puede escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{x}} \quad (2.15)$$

agrupando $\bar{\mathbf{x}}$ tenemos

$$(\bar{\mathbf{I}}_{n+1} - \bar{\mathbf{A}})\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (2.16)$$

donde $\bar{\mathbf{I}}_{n+1}$ es la matriz identidad de orden $n + 1$, si $(\bar{\mathbf{I}}_{n+1} - \bar{\mathbf{A}})$ es regular, entonces despejando $\bar{\mathbf{x}}$ tenemos:

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{I}}_{n+1} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{f}} \quad (2.17)$$

la ecuación (2.16) también la podemos expresar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \mathbf{A} & -\mathbf{H}_C \\ -\mathbf{H}_R & (1 - \mathbf{H}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^* \\ f_{n+1}^* \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{I}_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Como podemos observar tenemos un conjunto de n ecuaciones

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{x} - \mathbf{H}_C x_{n+1} = \mathbf{f}^*$$

y la ecuación agregada para los hogares

$$-\mathbf{H}_R \mathbf{x} + (1 - \mathbf{H})x_{n+1} = f_{n+1}^*$$

ambas expresiones determinan la producción para los n sectores originales y los servicios laborales utilizados (salarios pagados) para producir esos productos.

Despejando el vector $\bar{\mathbf{x}}$ nos queda

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \mathbf{A} & -\mathbf{H}_C \\ -\mathbf{H}_R & (1 - \mathbf{H}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^* \\ f_{n+1}^* \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

que también lo podemos escribir en su forma compacta

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{I}}_{n+1} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{f}} \quad (2.20)$$

Para ilustrar el modelo insumo-producto cerrado con respecto a los hogares proseguimos con el siguiente ejemplo hipotético tomando los datos del Ejemplo 2.2.1.

Ejemplo 2.3.1. Un ejemplo hipotético con hogares endógenos como se muestra en la Tabla 2.8.

Del Ejemplo 2.2.1, tenemos la economía con $n = 2$ sectores (agricultura y manufactura) con el siguiente sistema

$$\mathbf{Z}\mathbf{i} + \mathbf{f} = \mathbf{x}$$

donde \mathbf{i} es un vector columna con entradas de 1's, la matriz de flujos \mathbf{Z} , el vector de demanda final \mathbf{f} y el de producción total \mathbf{x} son los siguientes:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 150 & 500 \\ 200 & 100 \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 350 \\ 1700 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

| | | Consumidor | | | Otras Dem. | Producción Total (\bar{x}) |
|--------------------------------|---------------|-------------|-------------|---------------|------------|--------------------------------|
| | | Agricultura | Manufactura | Hogar (C) | | |
| Productor | Agricultura | 150 | 500 | 50 | 300 | 1000 |
| | Manufactura | 200 | 100 | 400 | 1300 | 2000 |
| | Hogar (L) | 300 | 500 | 50 | 150 | 1000 |
| Otros pagos nacionales (N) | | 325 | 800 | 300 | 250 | 1675 |
| Importe (M) | | 25 | 100 | 200 | 150 | 475 |
| Costo total (\bar{y}^t) | | 1000 | 2000 | 1000 | 2150 | 6150 |

Tabla 2.8: Flujos (z_{ij}) hipotéticos con hogares endógenos

y la matriz de coeficientes tecnológicos \mathbf{A} tenemos,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.25 \\ 0.20 & 0.05 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.2541 & 0.3300 \\ 0.2640 & 1.1221 \end{bmatrix}$$

Ahora, de la Tabla 2.8, la demanda final se descompone en dos partes, una que corresponda la adquisición de los hogares como insumo de las otras industrias (agricultura, manufactura) (\mathbf{h}_C) y la otra que corresponde a las otras demandas finales (\mathbf{f}^*). Por otro lado, considerando que los hogares forman un sector más dentro de la tabla de flujos interindustriales, los pagos y salarios que reciben de las industrias originales se consideran como la producción del hogar (\mathbf{h}_L), y $\mathbf{h} = 50$ manos de obra adquirida por parte de los hogares, por lo que la matriz $\bar{\mathbf{Z}}$ es ahora:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{h}_C \\ \mathbf{h}_L & \mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & 500 & 50 \\ 200 & 100 & 400 \\ 300 & 500 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^* \\ f_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 1300 \\ 150 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones correspondientes tenemos

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{H}_C \\ \mathbf{H}_L & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.25 & 0.05 \\ 0.20 & 0.05 & 0.40 \\ 0.30 & 0.25 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} 0.85 & -0.25 & -0.05 \\ -0.20 & 0.95 & -0.40 \\ -0.30 & -0.25 & 0.95 \end{bmatrix},$$

y finalmente

$$\bar{\mathbf{L}} = (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3651 & 0.4253 & 0.2509 \\ 0.5273 & 1.3481 & 0.5954 \\ 0.5698 & 0.4890 & 1.2885 \end{bmatrix}$$

es decir que

$$\bar{x} = \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 1.3651 & 0.4253 & 0.2509 \\ 0.5273 & 1.3481 & 0.5954 \\ 0.5698 & 0.4890 & 1.2885 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 1300 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Se puede continuar el proceso de mover, uno por uno cada uno de los sectores restantes desde el vector de la demanda final a la matriz de flujos interindustriales, construyendo filas de ingresos y columnas de compras hasta que no haya sectores exógenos en absoluto, se denomina a esto modelo económico lineal completamente cerrado, tal como se vió en la Subsección 2.2.1. Sin embargo los modelos completamente cerrados solo rara vez se implementan en la práctica, por lo que es importante estudiar y analizar sus propiedades.

El modelo de Leontief con base a precios

Como hemos mencionado anteriormente el Modelo Insumo-Producto lo podemos desarrollar en unidades físicas o en unidades monetarias. Como podemos observar en el Ejemplo 2.2.1 los datos están en unidades físicas y por otro lado tenemos la matriz \mathbf{A} de coeficientes tecnológicos correspondiente basada en unidades físicas para la producción de una unidad de cada una de las industrias que componen al sistema económico. La pregunta sería ahora, ¿Cómo reescribir la tabla de flujos interindustriales en unidades monetarias?. Para esto solo requiere que la unidad física en la que se miden los insumos se redefina como igual a la cantidad de producción del sector i que se puede comprar por un peso (\$1.00) a precios del año base.

En cualquier caso, los coeficientes de la matriz \mathbf{A} para fines analíticos deben interpretarse como relaciones de dos cantidades medidas en unidades físicas.

Procedemos con un pequeño ejemplo para ilustrar lo anterior: supongamos que tenemos una economía conformada por dos sectores (agricultura, manufactura) medidas en unidades físicas; para el sector 1 (agricultura) en bushels y toneladas para el sector 2 (manufactura), las transacciones medidas en estas unidades físicas se muestran en la Tabla 2.9.

| | | Consumidor | | Demanda Final (f_i) | Producción Total (x_i) | Medidas de unidades físicas |
|-----------|------|------------|------|-------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| | | Agr. | Man. | | | |
| Productor | Agr. | 75 | 250 | 175 | 500 | bushels |
| | Man. | 40 | 20 | 340 | 400 | toneladas |

Tabla 2.9: Transacciones en unidades físicas

Si conocemos los precios por unidad de los dos productos, la información en la Tabla 2.9 se puede convertir a unidades monetarias. Por ejemplo, si el precio por bushel es de \$2.00 y el precio por tonelada es de \$5.00, entonces la tabla de transacciones monetarias es exactamente como se muestra en la Tabla 2.10, donde d_i es demanda final del sector i y t_i la producción total del sector

i correspondiente.

Ahora, redefina la medida en unidades físicas para cada sector i para que sea la cantidad que se

| | | Consumidor | | Demanda | Producción | Precio por unidad física |
|-----------|------|------------|------|-----------------|-----------------|-----------------------------|
| | | Agr. | Man. | Final (d_i) | Total (t_i) | |
| Productor | Agr. | 150 | 500 | 350 | 1000 | \$ 2.00 |
| | Man. | 200 | 100 | 1700 | 2000 | \$ 5.00 |

Tabla 2.10: Transacciones en unidades monetarias

puede comprar por \$1.00; es decir, de modo que el precio por unidad para la producción de cada sector es de \$1.00. Esto simplemente significa que medimos la producción física del sector 1 en unidades de medio bushel y la producción física del sector 2 en quintas de una tonelada. Luego, en estas unidades revisadas, la información en la Tabla 2.10 puede reinterpretarse como registro de transacciones en unidades físicas, como podemos ver en la Tabla 2.11 y en la Tabla 2.6 del Ejemplo 2.2.1; 500 unidades de medias bushels de la producción del sector 1 fueron compradas por el sector 2 (por \$500.00), 1,700 unidades de quintos de toneladas de producción del sector 2 se entregan a la demanda final (por \$1,700), etc. En cualquier caso la transacción en términos físicos ó monetarios se

| | | Consumidor | | Demanda | Producción | Unidades físicas de medida revisada |
|-----------|------|------------|------|-----------------|-----------------|--|
| | | Agr. | Man. | Final (f_i) | Total (x_i) | |
| Productor | Agr. | 150 | 500 | 350 | 1000 | $\frac{1}{2}$ bushels |
| | Man. | 200 | 100 | 1700 | 2000 | $\frac{1}{5}$ toneladas |

Tabla 2.11: Transacciones en unidades físicas revisadas

montan sobre la base de los valores registrados de las transacciones; precio y cantidad generalmente no se registran por separado.

El modelo de precios basado en datos monetarios

Las transacciones monetarias se desarrollan de la misma forma que las transacciones en unidades físicas, como se observa en la Tabla 2.10. En la Tabla 2.12 se representa una generalización de datos de transacciones para n sectores en términos monetarios, donde d_i es la demanda final del sector i y t_i la producción total de sector i , de acuerdo a la Tabla 2.5 los resultados (2.4) y (2.9) obtenidos en la Subsección 2.2.2 tenemos lo siguiente

$$q_i = t_i; \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.21)$$

por (2.4); es decir que la suma de la j -ésima columna (desembolsos totales) es igual a la suma de la i -ésima fila (producción total) y

$$q_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} + b_j; \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

| | | Consumidor | | | | | Demanda Final (d_i) | Producción Total (t_i) |
|-------------|-----|------------|-----|----------|-----|----------|----------------------------|-------------------------------|
| | | 1 | ... | j | ... | n | | |
| Productor | 1 | b_{11} | ... | b_{1j} | ... | b_{1n} | d_1 | t_1 |
| | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | i | b_{i1} | ... | b_{ij} | ... | b_{in} | d_i | t_i |
| | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | n | b_{n1} | ... | b_{nj} | ... | b_{nn} | d_n | t_n |
| V. Agregado | | b_1 | ... | b_j | ... | b_n | b_D | V |
| T. Pago | | q_1 | ... | q_j | ... | q_n | D | q |

Tabla 2.12: Transacciones en términos monetarios

Por la ecuación (2.21), podemos expresar q_j como

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} + b_j = t_j; \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.23)$$

dividiendo entre t_j tenemos la ecuación del costo del insumo para producir \$1.0,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} + v_j = 1; \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (2.24)$$

donde

$$v_j = \frac{b_j}{t_j}; \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (2.25)$$

es el valor agregado por unidad de producción.

Expresando la ecuación (2.24) para cada industria j tenemos el siguiente sistema de n ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_{11} + \dots + a_{i1} + \dots + a_{n1} + v_1 &= 1 \\ &\vdots \\ a_{1j} + \dots + a_{ij} + \dots + a_{nj} + v_j &= 1 \\ &\vdots \\ a_{1n} + \dots + a_{in} + \dots + a_{nn} + v_n &= 1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Las cuales se pueden escribir en forma matricial, para ello, denotemos por \mathbf{i}^t el vector renglón con entradas 1's con n elementos y \mathbf{v}^t el vector renglón de valores agregados por unidad de producción de cada sector j respectivamente:

$$\mathbf{i}^t = [1 \dots 1 \dots 1], \mathbf{v}^t = [v_1 \dots v_j \dots v_n],$$

así el sistema (2.26) se puede escribir de forma compacta con notación matricial

$$\mathbf{i}^t = \mathbf{i}^t \mathbf{A} + \mathbf{v}^t \quad (2.27)$$

donde \mathbf{A} es la matriz de coeficientes técnicos.

Sabemos que los precios de la producción total es igual al costo total de producción (en el caso general, esto incluirá una asignación con fines de lucro y otros insumos primarios en b_j y por tanto en v_j), por lo que cada precio es igual a 1. Esto ilustra las unidades de medidas únicas en la tabla de año base: cantidades que se pueden comprar por \$1.00.

Denotando los índices de los precios del año base por p_j , el vector renglón de precios se escribe como $\mathbf{p}^t = [p_1, \dots, p_j, \dots, p_n]$, por lo tanto la ecuación (2.27) la podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{p}^t = \mathbf{p}^t \mathbf{A} + \mathbf{v}^t \quad (2.28)$$

donde la ecuación (2.28) es el **modelo de precios de insumo-producto**.

Despejando \mathbf{v}^t de la ecuación (2.28) y factorizando \mathbf{p}^t nos queda

$$\mathbf{p}^t (\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{v}^t,$$

si $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es regular entonces

$$\mathbf{p}^t = \mathbf{v}^t (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{v}^t \mathbf{L} \quad (2.29)$$

Como podemos ver los índices de precios, \mathbf{p}^t , son determinados por los valores exógenos (costos) de los insumos primarios.

Propiedades de la Matriz de Leontief

El objetivo de este capítulo es describir las propiedades matemáticas de la matriz de Leontief que servirán de base para describir los resultados de los efectos multiplicadores.

Existencia de \mathbf{L} y propiedades de \mathbf{L} y \mathbf{A}

Recordemos que la matriz inversa de Leontief se define como $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ donde $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es la matriz de coeficientes tecnológicos, cuyos elementos son no negativos y cumplen con la condición $\forall j = 1, \dots, n : \sum_{i=1}^n a_{ij} < 1.0$, por lo tanto $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1$, (ver apéndice A). Dado que $\|\mathbf{A}\|_1 < 1.0$, entonces por un resultado bastante conocido del álgebra lineal, se sabe que \mathbf{L} existe y además esta dado por:

$$\mathbf{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots$$

la convergencia es en la norma $\|\cdot\|_1$, de donde se siguen claramente las siguientes propiedades de $\mathbf{L} = (l_{ij})$:

- \mathbf{L} existe y $l_{ij} \geq 0$.
- $l_{ii} > 1$.

En el modelo insumo-producto, es importante que la matriz de coeficientes tecnológicos satisfaga la propiedad siguiente:

Definición 3.1.1. Una matriz no negativa \mathbf{A} se llama productiva si existe $\mathbf{x} > 0$ tal que:

$$\mathbf{x} > \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Lo cual indica que debe haber un exceso de producción, sobre el consumo intermedio además, se debe cumplir $a_{ii} < 1.0$. En general, el vector de demanda final \mathbf{f} es estrictamente positivo y la solución del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} = \mathbf{x}$ esta dada por :

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{f}$$

por lo que se concluye que $\mathbf{x} > 0$ y por lo tanto la matriz de coeficientes tecnológicos es productiva.

Un razonamiento similar permite concluir que la matriz es productiva también en el caso en que $\mathbf{f} \geq 0$, lo cual es normal en las economías reales, pues los aumentos en la demanda final pueden ser cero en algunos sectores, para ello se utilizan los siguientes teoremas, cuya demostración se puede encontrar en [(1), p.176].

Teorema 3.1.1. *(La condicion de Hawkins-Simon) Sea \mathbf{A} una matriz no negativa, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. \mathbf{A} es productiva;
2. La matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ existe y es no negativa;
3. Todos los principales menores de $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ son positivos.

Para propósitos prácticos, si una mercancía no tiene oferta ni demanda, se puede omitir. En otras palabras, una solución con significado económico del modelo insumo-producto debería ser una que asigne valores positivos de producción a todas las mercancías, incluso cuando algunas de ellas no tienen demanda para uso final. Esto corresponde al caso cuando algunas de ellas solo se usan para la producción (bienes intermedios). La cuestión entonces, es encontrar las condiciones que la matriz \mathbf{A} debe satisfacer de forma que se obtengan niveles positivos de producción. Obviamente, tales condiciones deberían de tener también una interpretación económica.

Definición 3.1.2. *Una matriz \mathbf{A} de orden $n \times n$ se llama reducible si es posible permutar sus renglones y columnas (las permutaciones de las columnas deben ser las mismas que las de los renglones) de forma que se pueda obtener una matriz de la forma siguiente:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{A}_{11} y \mathbf{A}_{22} son matrices cuadradas.

En general es más sencillo demostrar que una matriz es irreducible y que corresponde al hecho de que la gráfica asociada a ella, conecta a todos los nodos en un número finito de pasos. Se puede demostrar (ver [(1)]) que la propiedad de irreducibilidad es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones:

- \mathbf{A} es irreducible si y solo si, para cada $j \neq k$, existe una secuencia finita o cadena

$$j = i_0, i_1, \dots, i_{m-1}, i_m = k$$

tal que los elementos a_{i_{j-1}, i_j} de \mathbf{A} son todos diferentes de cero para $j = 1, \dots, m$.

- Existe un entero m positivo tal que $a_{ij}^{(m)} > 0 \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, es decir $\mathbf{A}^n > \mathbf{0}$ para toda $n \geq m$.

El teorema más importante de esta sección es el siguiente:

Teorema 3.1.2. *Para una matriz no negativa \mathbf{A} , las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Para cada $\mathbf{f} \geq 0$ diferente de cero, el sistema $\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}$ tiene una solución positiva $\mathbf{x} > 0$;*
2. *La matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ es positiva;*
3. *La matriz \mathbf{A} es productiva e irreducible.*

Generalización del modelo de precios

En la práctica, raramente se dispone de los datos de cantidades físicas de producción. Las matrices de flujo entre industrias se basan en información contable, en otras palabras, se expresan en unidades monetarias. Por lo que cada elemento de la matriz de flujos entre industrias representa el valor monetario del insumo i utilizado en la producción del artículo j , es decir $b_{ij} = p_i z_{ij}$. Es decir, en la práctica, los coeficientes reales no son observables, sin embargo, son observables los coeficientes:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{p_i z_{ij}}{p_j x_j} = \left(\frac{p_i}{p_j} \right) a_{ij} \quad (3.1)$$

en otras palabras, se ven afectados por los precios relativos. Por el resultado (2.9) de la Definición 2.2.2 tenemos

$$q_j = c_j + v_j; \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

que representa el gasto total de la industria j para su producción total.

Luego por (2.4), tenemos

$$q_i = p_i x_i; \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

por lo tanto (3.2) puede ser expresada de la siguiente manera

$$c_j + v_j = p_j x_j; \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

ó

$$\sum_{i=1}^n p_i z_{ij} + v_j = p_j x_j; \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

dividiendo entre x_j tenemos

$$\sum_{i=1}^n p_i a_{ij} + V_j = p_j; \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

| | | Consumidor | | | | | Demanda Final | Producción Total |
|---------------|---------------------------------|--------------|---------------------------------|--------------|---------------------------------|----------------------------|------------------------|---------------------|
| | | 1 | ... | j | ... | n | | |
| Productor | 1 | $p_1 z_{11}$ | ... | $p_1 z_{1j}$ | ... | $p_1 z_{1n}$ | $p_1 f_1$ | $p_1 x_1$ |
| | \vdots | \vdots | | \vdots | | \vdots | \vdots | \vdots |
| | i | $p_i z_{i1}$ | ... | $p_i z_{ij}$ | ... | $p_i z_{in}$ | $p_i f_i$ | $p_i x_i$ |
| | \vdots | \vdots | | \vdots | | \vdots | \vdots | \vdots |
| n | $p_n z_{n1}$ | ... | $p_n z_{nj}$ | ... | $p_n z_{nn}$ | $p_n f_n$ | $p_n x_n$ | |
| Costo de | $c_1 = \sum_{i=1}^n p_i z_{i1}$ | ... | $c_j = \sum_{i=1}^n p_i z_{ij}$ | ... | $c_n = \sum_{i=1}^n p_i z_{in}$ | | | |
| V. Agregado | v_1 | ... | v_j | ... | v_n | | $V = \sum_{j=1}^n v_j$ | |
| Total de pago | q_1 | ... | q_j | ... | q_n | $D = \sum_{i=1}^n p_i f_i$ | x | |

Tabla 3.1: Transacciones monetarias (precio \times (unidades físicas))

donde

$$V_j = \frac{v_j}{x_j}; \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

es el valor agregado por unidad de producción.

Expresando la ecuación (3.6) para cada industria j tenemos el siguiente sistema de n ecuaciones lineales que cuantifican el gasto total de cada sector que conforma el sistema económico en cuestión:

$$\begin{aligned}
 p_1 a_{11} + \dots + p_j a_{j1} + \dots + p_n a_{n1} + V_1 &= p_1 \\
 &\vdots \\
 p_1 a_{1j} + \dots + p_j a_{jj} + \dots + p_n a_{nj} + V_j &= p_j \\
 &\vdots \\
 p_1 a_{1n} + \dots + p_j a_{jn} + \dots + p_n a_{nn} + V_n &= p_n
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Las cuales se pueden escribir en forma matricial, para ello, denotemos por \mathbf{p}^t el vector renglón de precios de productos por sector y \mathbf{v}^t el vector renglón de valores agregados por unidad de producción de cada sector j respectivamente:

$$\mathbf{p}^t = [p_1 \dots p_j \dots p_n], \quad \mathbf{v}^t = [V_1 \dots V_j \dots V_n],$$

así el sistema (3.8) se puede escribir de forma compacta con notación matricial

$$\mathbf{p}^t = \mathbf{p}^t \mathbf{A} + \mathbf{v}^t \quad (3.9)$$

donde \mathbf{A} es la matriz de coeficientes técnicos.

Despejando \mathbf{v}^t de la ecuación (3.9) y factorizando \mathbf{p}^t nos queda

$$\mathbf{p}^t (\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{v}^t, \quad (3.10)$$

si $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es regular, entonces \mathbf{p}^t se puede despejar como:

$$\mathbf{p}^t = \mathbf{v}^t (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{v}^t \mathbf{L} \quad (3.11)$$

Es conveniente expresar el vector renglón \mathbf{p}^t en términos del vector columna \mathbf{p} , usando propiedades de las matrices transpuestas: de la ecuación (3.11) tenemos

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}^t)^t &= [\mathbf{v}^t(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]^t = (\mathbf{v}^t \mathbf{L})^t \\ \mathbf{p} &= [(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]^t (\mathbf{v}^t)^t = \mathbf{L}^t (\mathbf{v}^t)^t \\ \mathbf{p} &= [(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]^t \mathbf{v} = \mathbf{L}^t \mathbf{v}\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde se tiene:

$$\mathbf{L}^t = [(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]^t = [(\mathbf{I} - \mathbf{A})^t]^{-1} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}^t]^{-1}\tag{3.13}$$

Valores característicos y el Teorema de Perron-Frobenius

En esta sección se presenta otra herramienta que se puede ocupar para encontrar una solución económicamente significativa, ésta se basa en encontrar los eigenvalores reales no negativos de la matriz \mathbf{A} cuyos eigenvectores asociados no sean negativos, $\mathbf{x} \geq 0$. Para asegurar su existencia se tienen que cumplir condiciones específicas señaladas. De manera general el tema se llama la “teoría de Perron-Frobenius” porque evolucionó de las contribuciones de los matemáticos alemanes Oskar (u Oscar) Perron (1880–1975) y Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917). Perron publicó su tratamiento de las matrices positivas en 1907, y en 1912 Frobenius contribuyó con extensiones sustanciales de los resultados de Perron para cubrir el caso de las matrices no negativas. El Teorema 3.3.1 nos dice que si \mathbf{A} es una matriz no negativa, se puede encontrar el eigenvalor y eigenvector correspondiente.

Teorema 3.3.1. *Sea \mathbf{A} una matriz no negativa. Entonces*

1. \mathbf{A} tiene un eigenvalor real no negativo $\hat{\lambda}_{\mathbf{A}}$ (llamado eigenvalor Perron-Frobenius).
Si λ es otro eigenvalor de \mathbf{A} , entonces $|\lambda| \leq \hat{\lambda}_{\mathbf{A}}$;
2. Existe un eigenvector no negativo $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}}$ asociado con $\hat{\lambda}_{\mathbf{A}}$ (llamado eigenvector Perron-Frobenius);
3. Para $\mu \in \mathbb{R}$ la matriz $(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ es no negativa si y solo si $\mu > \hat{\lambda}_{\mathbf{A}}$.

Demostración. |(5), p. 600|.

Esto se puede expresar para el sistema de Leontief, teniendo en cuenta que se cumplen las condiciones necesarias.

Teorema 3.3.2. *Sea \mathbf{A} una matriz no negativa y $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. La matriz \mathbf{A} es productiva, i.e., existe $\mathbf{x} \geq 0$ tal que $\mathbf{x} > \mathbf{A}\mathbf{x}$;
2. $\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ existe y es no negativo;

3. Las condiciones de Hawkins-Simon se mantiene;
4. Cada eigenvalor λ de \mathbf{A} satisface la desigualdad $|\lambda| < 1$;
5. $\hat{\lambda}_{\mathbf{A}} < 1$.

En este caso, el eigenvector Perron-Frobenius de \mathbf{A} satisface la desigualdad $\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}} \geq 0$.

Demostración. [(1), p.185]

Observe que el Teorema 3.3.2 no garantiza la existencia de una solución positiva a la desigualdad $\mathbf{B}\mathbf{x} > 0$, ya que no excluye la posibilidad de que algunas entradas de $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}}$ sean ceros. Se puede obtener un resultado más fuerte si \mathbf{A} es irreducible.

Teorema 3.3.3. (Teorema Perron-Frobenius).

Sea \mathbf{A} una matriz irreducible no negativa. Entonces

1. Existe un eigenvalor real positivo $\hat{\lambda}_{\mathbf{A}}$ [llamado eigenvalor Perron-Frobenius de \mathbf{A}] tal que $\hat{\lambda}_{\mathbf{A}}$ es una raíz simple (no repetida) del polinomio característico de \mathbf{A} y para cualquier otro eigenvalor λ de \mathbf{A} tenemos $|\lambda| \leq \hat{\lambda}_{\mathbf{A}}$;
2. Existe un eigenvector positivo $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}} > 0$ asociado con $\hat{\lambda}_{\mathbf{A}}$. Este $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}} > 0$ es único hasta un múltiplo escalar. En otras palabras, no hay otros eigenvectores asociados con $\hat{\lambda}_{\mathbf{A}}$.

Demostración. [(2), p. 17].

Combinando el Teorema 3.3.3 y el 3.1.2, obtenemos el siguiente corolario. Proporciona una forma directa de comprobar si una matriz irreducible dada es productiva mediante el cálculo del eigenvalor Perron-Frobenius. También da una solución positiva de la desigualdad $\mathbf{x} > \mathbf{A}\mathbf{x}$ para una matriz irreducible productiva \mathbf{A} , este es el eigenvector Perron-Frobenius, $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}}$.

Corolario 3.3.1. Sea \mathbf{A} una matriz irreducible no negativa. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Para cada $\mathbf{f} \geq 0$ distinto de cero, el sistema $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$ tiene una solución positiva, $\mathbf{x} > 0$;
2. La matriz \mathbf{A} es productiva;
3. $\hat{\lambda}_{\mathbf{A}} < 1$;
4. $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}} > 0$.

El siguiente corolario ofrece una forma simple de evaluar el valor propio de Perron-Frobenius.

Corolario 3.3.2. Sea \mathbf{A} una matriz irreducible no negativa y

$$C_{\min} = \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

la suma de la columna más pequeña y

$$C_{\max} = \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

la suma de la columna más grande. Entonces

$$C_{\min} \leq \hat{\lambda}_{\mathbf{A}} \leq C_{\max},$$

y ambas igualdades se mantienen si solo y solo si

$$C_{\min} = C_{\max}.$$

Demostración. Sea $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}}$ eigenvector asociado con $\hat{\lambda}_{\mathbf{A}}$. Entonces

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}} = \hat{\lambda}_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}}$$

es decir

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\hat{x}_j^{\mathbf{A}} = \hat{\lambda}_{\mathbf{A}}\hat{x}_i^{\mathbf{A}} \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

donde $\hat{x}_i^{\mathbf{A}}$ es la i -ésima elemento del eigenvector $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}}$. Sumando esta expresión sobre i , tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{\mathbf{A}} \sum_{i=1}^n \hat{x}_i^{\mathbf{A}} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\hat{x}_j^{\mathbf{A}} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}\hat{x}_j^{\mathbf{A}} \\ &= \sum_{j=1}^n \hat{x}_j^{\mathbf{A}} \sum_{i=1}^n a_{ij} \\ \hat{\lambda}_{\mathbf{A}} &= \frac{\sum_{j=1}^n \left(\hat{x}_j^{\mathbf{A}} \sum_{i=1}^n a_{ij} \right)}{\sum_{i=1}^n \hat{x}_i^{\mathbf{A}}} \end{aligned}$$

Recordemos que dados n valores $\{s_1, \dots, s_n\}$ y n valores positivos $\{p_1, \dots, p_n\}$, se sabe que el promedio:

$$S_p = \frac{p_1 s_1 + \dots + p_n s_n}{p_1 + \dots + p_n}$$

satisface

$$\min\{s_1, \dots, s_n\} = S_{\min} \leq S_p \leq S_{\max} = \max\{s_1, \dots, s_n\}$$

El resultado se concluye tomando $p_i = \hat{x}_i^{\mathbf{A}}$ y $s_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$ las cuales son las sumas de cada columna, así que si llamamos

$$C_{\min} = \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

$$C_{\max} = \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

se obtiene

$$C_{\min} \leq \hat{\lambda}_{\mathbf{A}} \leq C_{\max},$$

□

Del Corolario 3.3.2 el mismo resultado se mantiene para las sumas de filas de \mathbf{A} .

Nótese además que para una cadena de Markov con matriz de transición \mathbf{P} se tiene $C_{\min} = C_{\max} = 1.0$ de donde $\hat{\lambda}_{\mathbf{P}} = 1.0$.

Regionalización y Efectos Multiplicadores

Regionalización

Los conceptos desarrollados anteriormente pueden transferirse a un nivel regional, para lo cual es necesario que la región en cuestión, recolecte datos por cada uno de los sectores correspondientes que respondan a las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuántas unidades adquirió del sector i de compañías provenientes de la misma región?
- b) ¿Cuántas unidades adquirió del sector i de compañías provenientes de una región diferente?

Por supuesto que es factible realizar dicha encuesta, pero es evidente que necesita bastante trabajo. Dado que los datos de la matriz de transferencia y por lo tanto la de coeficientes tecnológicos están disponibles a nivel nacional, una alternativa sería construir una matriz de coeficientes tecnológicos a partir de los datos a nivel nacional, los cuales son, por así decirlo, un promedio de dichos coeficientes a nivel regional, la mejor propuesta es tomar los coeficientes nacionales y corregirlos por un factor llamado de *proporción de oferta regional* del sector i , definido como:

$$p_i^r = \frac{(x_i^r - e_i^r)}{(x_i^r - e_i^r + m_i^r)}$$

en donde:

x_i^r : producción regional total del sector i

e_i^r : exportaciones del sector i de la región r

m_i^r : importaciones del sector i a la región r .

Notese que el numerador representa la cantidad de i que es *producida localmente* y que está disponible en la región r , mientras que el denominador *cantidad total* de i que está disponible en la región y claramente $0 < p_i^r \leq 1$.

Entonces se modifican los renglones de la matriz nacional de coeficientes tecnológicos \mathbf{A} por el factor correspondiente p_i^r para obtener la matriz de coeficientes regionales \mathbf{A}^{rr} , en el caso de dos sectores, está dada como se indica a continuación:

$$\mathbf{A}^{rr} := \hat{\mathbf{p}}^r \mathbf{A}$$

En el caso de dos sectores, está dada de la forma siguiente:

$$\mathbf{A}^{rr} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1^r & 0 \\ 0 & \hat{p}_2^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1^r a_{11} & \hat{p}_1^r a_{12} \\ \hat{p}_2^r a_{21} & \hat{p}_2^r a_{22} \end{bmatrix}$$

El resto del análisis se desarrolla de manera semejante a los capítulos anteriores, pero escribiéndolo ahora como:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})\mathbf{x}^r = \mathbf{f}^r$$

Con ésta representación, es posible analizar los cambios que se producen en la región debido a cambios en el gasto presupuestal a nivel regional, esto es el llamado *efecto multiplicador*, el cual se describirá más adelante. Sin embargo, el objetivo final es desarrollar algo que además capture la influencia de los cambios en otra región, lo cual se llama popularmente *salpicar*, ésto se describe en las siguientes secciones.

Modelo Interregional

Un problema fundamental en los modelos insumo-producto de muchas regiones es la obtención de las transacciones entre regiones. Una primera solución, son los modelos *interregionales*, dichos modelos requieren (idealmente) los datos completos de las transacciones entre las regiones, para un modelo de dos regiones esto significa que se deben obtener los datos de producción regional: $\mathbf{x}^r = [x_i^r]$, $\mathbf{x}^s = [x_i^s]$; transacciones *intraregionales*: $\mathbf{Z}^{rr} = [z_{ij}^{rr}]$, $\mathbf{Z}^{ss} = [z_{ij}^{ss}]$, así como de las transacciones *interregionales*: $\mathbf{Z}^{rs} = [z_{ij}^{rs}]$ contiene las transacciones del sector i de la región r al sector j de la región s y análogamente $\mathbf{Z}^{sr} = [z_{ij}^{sr}]$.

Éste modelo se conoce como *módulo insumo-producto interregional* (IRIO por sus siglas en inglés) y fue descrito por primera vez por **Isard**, también conocido como el “Modelo Isard”.

Estructura Básica de los Modelos Interregionales.

A manera de ilustración, consideremos una economía de dos regiones (por ejemplo: México y Estados Unidos ó La región del Papaloapan y la región de la Sierra Norte de Oaxaca), primeramente se recolectan los datos en forma de una tabla como la siguiente:

Estos datos se agrupan en una sola Matriz de transferencias como:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{rr} & \mathbf{Z}^{rs} \\ \mathbf{Z}^{sr} & \mathbf{Z}^{ss} \end{bmatrix}$$

En seguida veremos como se incorporan más explícitamente los acoplamientos interregionales representados por \mathbf{Z}^{rs} y \mathbf{Z}^{sr} . Obsérvese primeramente que dichas matrices no son necesariamente cuadradas, sino de orden 3×2 y 2×3 respectivamente, en cambio, las matrices en la diagonal \mathbf{Z}^{rr} y \mathbf{Z}^{ss} son de 3×3 y 2×2 . Los elementos de la matriz \mathbf{Z}^{rs} representan exportaciones de la región r a la región s , a las cuales se les llama normalmente *comercio interregional*.

Consideremos ahora la ecuación básica de la distribución de los productos del sector i dados en el Capítulo 2:

$$x_i = z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + f_i \quad (4.1)$$

| | | Sector de compras | | | | | |
|------------------|------------|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | Región r | | | Región s | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | |
| Sector de ventas | Región r | 1 | z_{11}^{rr} | z_{12}^{rr} | z_{13}^{rr} | z_{11}^{rs} | z_{12}^{rs} |
| | | 2 | z_{21}^{rr} | z_{22}^{rr} | z_{23}^{rr} | z_{21}^{rs} | z_{22}^{rs} |
| | | 3 | z_{31}^{rr} | z_{32}^{rr} | z_{33}^{rr} | z_{31}^{rs} | z_{32}^{rs} |
| | Región s | 1 | z_{11}^{sr} | z_{12}^{sr} | z_{13}^{sr} | z_{11}^{ss} | z_{12}^{ss} |
| | | 2 | z_{21}^{sr} | z_{22}^{sr} | z_{23}^{sr} | z_{21}^{ss} | z_{22}^{ss} |

Tabla 4.1: Flujos de bienes interregionales

ésta debe ser modificada agregando un super-índice que haga referencia a la región en cuestión, tal y como lo sugieren los datos de la Tabla 4.1, así por ejemplo la producción del sector 1 de la región r se expresa como:

$$x_1^r = \underbrace{z_{11}^{rr} + z_{12}^{rr} + z_{13}^{rr}}_{\text{ventas entre industrias e intrarregionales del sector 1}} + \underbrace{z_{11}^{rs} + z_{12}^{rs}}_{\text{ventas entre industrias e interregionales del sector 1}} + \underbrace{f_1^r}_{\text{ventas intrarregionales a la demanda final del sector 1}} \quad (4.2)$$

Con ecuaciones similares para x_2^r, x_3^r, x_1^s y x_2^s , los coeficientes técnicos se definen de manera análoga como:

$$a_{ij}^{rr} = \frac{z_{ij}^{rr}}{x_j^r}, \quad a_{ij}^{rs} = \frac{z_{ij}^{rs}}{x_j^s}, \quad a_{ij}^{sr} = \frac{z_{ij}^{sr}}{x_j^r}, \quad a_{ij}^{ss} = \frac{z_{ij}^{ss}}{x_j^s}$$

De manera que la ecuación (4.2) se puede reexpresar como:

$$x_1^r = a_{11}^{rr}x_1^r + a_{12}^{rr}x_2^r + a_{13}^{rr}x_3^r + a_{11}^{rs}x_1^s + a_{12}^{rs}x_2^s + f_1^r$$

y otra vez con ecuaciones similares para x_2^r, x_3^r, x_1^s y x_2^s . Siguiendo el mismo desarrollo del Capítulo 2, la ecuación anterior, también se reescribe como:

$$(1 - a_{11}^{rr})x_1^r - a_{12}^{rr}x_2^r - a_{13}^{rr}x_3^r - a_{11}^{rs}x_1^s - a_{12}^{rs}x_2^s = f_1^r \quad (4.3)$$

y ecuaciones análogas para f_2^r, f_3^r, f_1^s y f_2^s en el lado derecho de la ecuación. En el siguiente paso se reagrupan todos los coeficientes técnicos en una sola matriz \mathbf{A} cuyas submatrices serán $\mathbf{A}^{rr}, \mathbf{A}^{rs}, \mathbf{A}^{sr}$ y \mathbf{A}^{ss} , para el ejemplo en cuestión, se tiene:

$$\mathbf{A}^{rr} = \begin{bmatrix} a_{11}^{rr} & a_{12}^{rr} & a_{13}^{rr} \\ a_{21}^{rr} & a_{22}^{rr} & a_{23}^{rr} \\ a_{31}^{rr} & a_{32}^{rr} & a_{33}^{rr} \end{bmatrix}$$

y similarmente para las otras matrices, al igual que antes, cada una de ellas esta relacionada con las submatrices de transacciones interregionales correspondientes de la siguiente forma: $\mathbf{A}^{rr} = \mathbf{Z}^{rr}(\hat{\mathbf{x}}^r)^{-1}$ y así sucesivamente para las submatrices restantes, con esto, se pueden representar las ecuaciones (4.3) en forma matricial como:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})\mathbf{x}^r - \mathbf{A}^{rs}\mathbf{x}^s = \mathbf{f}^r \quad (4.4)$$

$$-\mathbf{A}^{sr}\mathbf{x}^r + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{ss})\mathbf{x}^s = \mathbf{f}^s \quad (4.5)$$

en la cual, los vectores columna \mathbf{f}^r y \mathbf{f}^s son los vectores de demanda final de los productos de las regiones r y s respectivamente. Las ecs. (4.4) y (4.5) se pueden escribir de manera aún más compacta si definimos las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{rr} & \mathbf{A}^{rs} \\ \mathbf{A}^{sr} & \mathbf{A}^{ss} \end{bmatrix}$$

y los vectores de producción y demanda regionales:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^r \\ \mathbf{f}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(3x3)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(2x2)} \end{bmatrix}$$

Entonces el problema se puede escribir como:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{rs} & \mathbf{A}^{rs} \\ \mathbf{A}^{sr} & \mathbf{A}^{ss} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^r \\ \mathbf{f}^s \end{bmatrix}$$

Aquí se subraya la estructura interregional del modelo, esto se puede escribir de la manera ya conocida y concisa:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

Si suponemos que una de las demandas regionales es cero, por ejemplo $\mathbf{f}^s = 0$, entonces las ecuaciones (4.4) y (4.5) se pueden resolver directamente, de la segunda se obtiene:

$$\mathbf{x}^s = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{ss})^{-1} \mathbf{A}^{sr} \mathbf{x}^r$$

y substituyendo en la primera:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})\mathbf{x}^r - \mathbf{A}^{rs}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{ss})^{-1} \mathbf{A}^{sr} \mathbf{x}^r = \mathbf{f}^r \quad (4.6)$$

Nótese que en el modelo de una sola región (la región r en este caso) se tendría $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})\mathbf{x}^r = \mathbf{f}^r$. El segundo término que se resta en la ecuación:

$$\mathbf{A}^{rs}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{ss})^{-1} \mathbf{A}^{sr} \mathbf{x}^r$$

representa exactamente las demandas adicionales hechas sobre la producción de la región r debido a enlaces de negocios interregionales, a continuación analizaremos sus diferentes componentes:

- $\mathbf{A}^{sr} \mathbf{x}^r$ representa la magnitud del flujo de s a r debido al aumento de producción de r .
- $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{ss})^{-1} \mathbf{A}^{sr} \mathbf{x}^r$ traslada estos flujos en necesidades directas e indirectas de s para producir el envío requerido.
- $\mathbf{A}^{rs}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{ss})^{-1} \mathbf{A}^{sr} \mathbf{x}^r$ indica la magnitud de las ventas adicionales de r a s que se necesitarán para soportar la producción total en la región s dada en el inciso anterior.

Observéese finalmente que debido a que el término de *retroalimentación* se resta del valor de $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})\mathbf{x}^r$ en (4.6), entonces dado un valor de \mathbf{x}^r , éste generará un aumento aún mayor en \mathbf{x}^r en el modelo de una sola región, debido a los envíos requeridos de la región s .

Expresado en términos de producción, los modelos regional e interregional generarán respectivamente $\mathbf{x}^r = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})^{-1} \mathbf{f}^r$ y $\mathbf{x}^r = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr} - \mathbf{A}^{rs} \mathbf{L}^{ss} \mathbf{A}^{sr})^{-1} \mathbf{f}^r$.

| | | Sector de compras | | | | | |
|------------------|------------|-------------------|-----|-----|------------|-----|-----|
| | | Región r | | | Región s | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | |
| Sector de ventas | Región r | 1 | 150 | 500 | 50 | 25 | 75 |
| | | 2 | 200 | 100 | 400 | 200 | 100 |
| | | 3 | 300 | 500 | 50 | 60 | 40 |
| | Región s | 1 | 75 | 100 | 60 | 200 | 250 |
| | | 2 | 50 | 25 | 25 | 150 | 100 |

Tabla 4.2: Flujos de bienes para el caso interregional hipotético de dos regiones

Ejemplo 4.1.1. Con los datos de la Tabla 4.2, los cuales describen un modelo de dos regiones.

Supongamos además que la demanda final está dada por:

$$\mathbf{f}^r = \begin{bmatrix} 200 \\ 1000 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^s = \begin{bmatrix} 515 \\ 450 \end{bmatrix}, \quad \text{así que: } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^r \\ \mathbf{f}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 1000 \\ 50 \\ 515 \\ 450 \end{bmatrix}$$

De manera que:

$$\mathbf{x}^r = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} 1200 \\ 800 \end{bmatrix}, \quad \text{y } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 1200 \\ 800 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene la matriz de coeficientes tecnológicos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{rr} & \mathbf{A}^{rs} \\ \mathbf{A}^{sr} & \mathbf{A}^{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.150 & 0.2500 & 0.050 & 0.0208 & 0.0938 \\ 0.200 & 0.0500 & 0.400 & 0.1667 & 0.1250 \\ 0.300 & 0.2500 & 0.050 & 0.0500 & 0.0500 \\ 0.075 & 0.0500 & 0.060 & 0.1667 & 0.3125 \\ 0.050 & 0.0125 & 0.025 & 0.1250 & 0.1250 \end{bmatrix}$$

cuya inversa de $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{rr} & \mathbf{L}^{rs} \\ \mathbf{L}^{sr} & \mathbf{L}^{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4234 & 0.4652 & 0.2909 & 0.1917 & 0.3041 \\ 0.6346 & 1.4237 & 0.6707 & 0.4092 & 0.4558 \\ 0.6383 & 0.5369 & 1.3363 & 0.2501 & 0.3108 \\ 0.2672 & 0.2000 & 0.1973 & 1.3406 & 0.5473 \\ 0.1468 & 0.0908 & 0.0926 & 0.2155 & 1.2538 \end{bmatrix}$$

Posteriormente se explicará el uso de las submatrices \mathbf{L}_{11} y \mathbf{L}_{12} etc. Por el momento solo es importante señalar que son diferentes de las matrices de la forma $\mathbf{L}^{rr} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})^{-1}$ y $\mathbf{L}^{ss} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{ss})^{-1}$, que se usan normalmente para denotar a las matrices de Leontief inversas asociadas con cada matriz de coeficientes regional.

Con estos datos, se puede encontrar el impacto en los sectores de ambas regiones debido a la demanda. Por ejemplo, para un incremento de la demanda de 100 unidades del sector 1 de la región r , se tiene $\Delta \mathbf{f} = [100 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ y usando los datos anteriores se tiene:

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^r \\ \Delta \mathbf{x}^s \end{bmatrix} = \mathbf{L} \Delta \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 142.3409 \\ 63.4613 \\ 63.8291 \\ 26.7195 \\ 14.6811 \end{bmatrix}$$

Los aumentos de producción de la región s en los sectores 1 (26.7195) y 2 (14.6811) que resultan de un aumento de la demanda en la región r reflejan un *salpicón interregional*, es decir, un estímulo económico en la región diferente a aquella en la que ocurrieron cambios en la demanda.

Además de esta ventaja respecto a los modelos regionales, es que al utilizar la matriz \mathbf{A}^{rr} , se tendría:

$$\mathbf{L}^{rr} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3651 & 0.4253 & 0.2509 \\ 0.5273 & 1.3481 & 0.5954 \\ 0.5698 & 0.4890 & 1.2885 \end{bmatrix}$$

Lo cual arrojaría para la región r un aumento en la producción dado por:

$$\Delta \mathbf{x}_U^r = \mathbf{L}^{rr} \Delta \mathbf{f}^r = \begin{bmatrix} 1.3651 & 0.4253 & 0.2509 \\ 0.5273 & 1.3481 & 0.5954 \\ 0.5698 & 0.4890 & 1.2885 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136.5086 \\ 52.7323 \\ 56.9849 \end{bmatrix}$$

en donde el subíndice U se usa para denotar que se trata del modelo de una sola región, el cual es importante comparar con el aumento de producción dado por el modelo de dos regiones, denotado por el subíndice D y que es:

$$\mathbf{x}_D^r = \begin{bmatrix} 142.3409 \\ 63.4613 \\ 63.8291 \end{bmatrix}$$

nótese la diferencia entre ambos modelos:

$$\mathbf{x}_D^r - \mathbf{x}_U^r = \begin{bmatrix} 5.8323 \\ 10.7290 \\ 6.8442 \end{bmatrix}.$$

La extensión a p regiones tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{11})\mathbf{x}^1 - \mathbf{A}^{12}\mathbf{x}^2 - \dots - \mathbf{A}^{1p}\mathbf{x}^p &= \mathbf{f}^1 \\ &\vdots \\ -\mathbf{A}^{p1}\mathbf{x}^1 - \mathbf{A}^{p2}\mathbf{x}^2 - \dots + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{pp})\mathbf{x}^p &= \mathbf{f}^p \end{aligned}$$

Modelo Multiregional

Un modelo Interregional como el descrito en la sección anterior es generalmente imposible de implementar para varias regiones y/o sectores, debido a la gran cantidad de datos que requiere, ésto ha inspirado modificaciones y simplificaciones en la dirección de un marco de trabajo más operacional.

Las interconexiones entre las regiones del modelo insumo-producto multiregional se capturan de una manera totalmente diferente al modelo interregional. En el modelo multirregional, los flujos comerciales se estiman por sector ya que así es más simple tenerlos a disposición. Para el sector i , se denota por z_i^{rs} al flujo en unidades monetarias del artículo i de la región r a la región s independientemente del sector de destino de la región receptora. De manera que para cada artículo hay una matriz de envíos del tipo que se muestra en la Tabla 4.3:

| | | Región receptora | | | | | |
|-----------------|-------|------------------|------------|-----|------------|-----|------------|
| | | 1 | 2 | ... | s | ... | p |
| Región de envío | 1 | z_i^{11} | z_i^{12} | ... | z_i^{1s} | ... | z_i^{1p} |
| | 2 | z_i^{21} | z_i^{22} | ... | z_i^{2s} | ... | z_i^{2p} |
| | ... | ... | ... | | ... | | ... |
| | r | z_i^{r1} | z_i^{r2} | ... | z_i^{rs} | ... | z_i^{rp} |
| | ... | ... | ... | | ... | | ... |
| | p | z_i^{p1} | z_i^{p2} | ... | z_i^{ps} | ... | z_i^{pp} |
| | Total | T_i^1 | T_i^2 | ... | T_i^s | ... | T_i^p |

Tabla 4.3: Envíos interregionales del producto básico i

Observéese que la suma de cada columna representa el total de envíos del artículo i a esa región desde todas las regiones del modelo, el total de la columna s del artículo i se denota por T_i^s , es decir:

$$T_i^s = z_i^{1s} + z_i^{2s} + \dots + z_i^{rs} + \dots + z_i^{ps}$$

con ellos definimos el siguiente coeficiente:

$$c_i^{rs} = \frac{z_i^{rs}}{T_i^s}$$

El cual denota la proporción de todos los artículos i usados en la región s que viene de la región r ($r = 1, \dots, p$). Para uso posterior, los coeficientes se reordenan de la manera siguiente: para cada par posible de regiones origen-destino r y s , formaremos el vector columna de n elementos como:

$$\mathbf{c}^{rs} = \begin{bmatrix} c_1^{rs} \\ \vdots \\ c_n^{rs} \end{bmatrix}$$

Estos elementos muestran, para la región s , la proporción de la cantidad de cada artículo usado en s y que proviene de la región r . Finalmente, para efectos de operación, los agruparemos también como matriz:

$$\hat{\mathbf{c}}^{rs} = \begin{bmatrix} c_1^{rs} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^{rs} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n^{rs} \end{bmatrix}$$

para $r, s = 1, \dots, p$. Note que habrá matrices intraregionales en este conjunto. Así por ejemplo, estará la matriz $\hat{\mathbf{c}}^{ss}$, a saber:

$$\hat{\mathbf{c}}^{ss} = \begin{bmatrix} c_1^{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^{ss} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n^{ss} \end{bmatrix}$$

cuyos elementos $c_i^{ss} = z_i^{ss}/T_i^s$, indican la proporción del artículo i usado en la región s y que proviene de esa misma región s .

La idea central del modelo multirregional es utilizar los coeficientes anteriores para modificar las matrices regionales de coeficientes técnicos. Consideremos un caso de dos sectores y dos regiones, donde:

$$\mathbf{A}^r = \begin{bmatrix} a_{11}^r & a_{12}^r \\ a_{21}^r & a_{22}^r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} a_{11}^s & a_{12}^s \\ a_{21}^s & a_{22}^s \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{c}}^{rs} = \begin{bmatrix} c_1^{rs} & 0 \\ 0 & c_2^{rs} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}}^{ss} = \begin{bmatrix} c_1^{ss} & 0 \\ 0 & c_2^{ss} \end{bmatrix}$$

Entonces, el modelo multirregional usa las matrices:

$$\hat{\mathbf{c}}^{rs} \mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} c_1^{rs} a_{11}^s & c_1^{rs} a_{12}^s \\ c_2^{rs} a_{21}^s & c_2^{rs} a_{22}^s \end{bmatrix}$$

como estimación de \mathbf{A}^{rs} y análogamente para las matrices \mathbf{A}^{sr} , \mathbf{A}^{rr} y \mathbf{A}^{ss} , con las cuales se pueden plantear ecuaciones similares a (4.4) y (4.5), solamente debemos notar que el lado derecho de las ecuaciones debe corregirse, ya que la demanda final en la región s se debe satisfacer en parte por compañías dentro de la región ($\hat{\mathbf{c}}^{ss} \mathbf{f}^s$) y en parte por las compañías de la región r ($\hat{\mathbf{c}}^{rs} \mathbf{f}^s$), de manera que las ecuaciones correspondientes son:

$$(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{c}}^{rr} \mathbf{A}^r) \mathbf{x}^r - \hat{\mathbf{c}}^{rs} \mathbf{A}^s \mathbf{x}^s = \hat{\mathbf{c}}^{rr} \mathbf{f}^r + \hat{\mathbf{c}}^{rs} \mathbf{f}^s \quad (4.7)$$

$$- \hat{\mathbf{c}}^{sr} \mathbf{A}^r \mathbf{x}^r + (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{c}}^{ss} \mathbf{A}^s) \mathbf{x}^s = \hat{\mathbf{c}}^{sr} \mathbf{f}^r + \hat{\mathbf{c}}^{ss} \mathbf{f}^s \quad (4.8)$$

La cual se puede simplificar aún más, agrupando los datos en las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \hat{c}^{rr} & \hat{c}^{rs} \\ \hat{c}^{sr} & \hat{c}^{ss} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^r \\ \mathbf{f}^s \end{bmatrix}$$

Entonces (4.7) y (4.8) se pueden representar como:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{CA})\mathbf{x} = \mathbf{Cf}$$

cuya solución está dada por:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{CA})^{-1}\mathbf{Cf}$$

Finalmente, en el caso de p regiones, se definen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}^p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \hat{c}^{11} & \dots & \hat{c}^{1p} \\ \hat{c}^{21} & \dots & \hat{c}^{2p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{c}^{p1} & \dots & \hat{c}^{pp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}^p \end{bmatrix}$$

en cuyo caso el sistema también se representa como $(\mathbf{I} - \mathbf{CA})\mathbf{x} = \mathbf{Cf}$, con solución dada por $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{CA})^{-1}\mathbf{Cf}$.

Ejemplo 4.1.2. Supongamos que los datos de flujo dados en la siguiente tabla representan

| | | Sector de compras | | | | | |
|---------------------|---|-------------------|-----|-----|------------|-----|-----|
| | | Región r | | | Región s | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| Sector de ventas | 1 | 225 | 600 | 110 | 225 | 325 | 125 |
| | 2 | 250 | 125 | 425 | 350 | 200 | 270 |
| | 3 | 325 | 700 | 150 | 360 | 240 | 200 |

Tabla 4.4: Datos de flujo para el caso hipotético
multiregional de dos regiones

los totales de insumos comprados por los sectores productivos en cada región, sin considerar si estos se producen localmente o se importan de otra región, es decir, estos son los datos $\mathbf{Z}^r = [z_{ij}^r]$ y $\mathbf{Z}^s = [z_{ij}^s]$, supongamos además que:

$$\mathbf{x}^r = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} 1200 \\ 800 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

Así que los coeficientes técnicos están dados por:

$$\mathbf{A}^r = \begin{bmatrix} 0.2250 & 0.3000 & 0.1100 \\ 0.2500 & 0.0625 & 0.4250 \\ 0.3250 & 0.3500 & 0.1500 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0.4062 & 0.0833 \\ 0.2917 & 0.2500 & 0.1800 \\ 0.3000 & 0.3000 & 0.1333 \end{bmatrix}$$

| | | Artículo 1 | | Artículo 2 | | Artículo 3 | |
|----------|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | | r | s | r | s | r | s |
| Regiones | r | 800 | 200 | 1300 | 700 | 900 | 100 |
| | s | 310 | 890 | 300 | 500 | 325 | 1175 |
| Total | | $T_1^r = 1110$ | $T_1^s = 1090$ | $T_2^r = 1600$ | $T_2^s = 1200$ | $T_3^r = 1225$ | $T_3^s = 1275$ |

Tabla 4.5: Envíos interregionales de productos para el caso hipotético multirregional de dos regiones

Para las proporciones de comercio, se necesitan medidas de la cantidad total de cada artículo que está disponible en cada región (T_i^r) y (T_i^s). En la Tabla 4.5 se encuentra un ejemplo para el cual se determina fácilmente que las proporciones $c_i^{rs} = z_i^{rs}/T_i^r$ son las siguientes:

$$\mathbf{c}^{rr} = \begin{bmatrix} 0.7207 \\ 0.8125 \\ 0.7347 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{rs} = \begin{bmatrix} 0.1835 \\ 0.5833 \\ 0.0784 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{sr} = \begin{bmatrix} 0.2793 \\ 0.1875 \\ 0.2653 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{ss} = \begin{bmatrix} 0.8165 \\ 0.4167 \\ 0.9216 \end{bmatrix}$$

Éstas se agrupan en las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}^{rr} & \hat{\mathbf{c}}^{rs} \\ \hat{\mathbf{c}}^{sr} & \hat{\mathbf{c}}^{ss} \end{bmatrix}$$

De manera que:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{CA})^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1.1260 & 0.4470 & 0.2996 & 0.4788 & 0.4182 & 0.1531 \\ 0.6277 & 1.3171 & 0.6056 & 0.5516 & 1.1147 & 0.3234 \\ 0.5119 & 0.5257 & 1.1000 & 0.3345 & 0.4698 & 0.2473 \\ 0.6247 & 0.3686 & 0.2495 & 1.2227 & 0.4551 & 0.2166 \\ 0.2369 & 0.3839 & 0.2046 & 0.2776 & 0.6494 & 0.1668 \\ 0.4720 & 0.4444 & 0.5890 & 0.5935 & 0.5286 & 1.2320 \end{bmatrix}$$

Entonces para un cambio $\Delta\mathbf{f} = [100 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ se encuentra:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{CA})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 112.5957 \\ 62.7745 \\ 51.1885 \\ 62.4707 \\ 23.6943 \\ 47.1950 \end{bmatrix}$$

igual que el resultado del modelo intrarregional, $\mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} 62.4707 \\ 23.6943 \\ 47.1950 \end{bmatrix}$ refleja salpicones entre las regiones del sistema multirregional.

Estructura General del Efecto Multiplicador

Uno de los principales usos de la información contenida en el modelo insumo producto es el evaluar el efecto directo en una economía, debido a cambios en los elementos exógenos del modelo de esa economía.

Los aumentos o cambios sobre la economía en cuestión pueden ocurrir a corto plazo (en un año), tales como, un cambio en el gasto gubernamental en algún sector determinado, en cuya situación se habla de un *análisis de impacto*. Por otro lado, los cambios de largo plazo (mayores de un año) se hacen más bien con propósitos de proyección y nos referiremos a ellos como *proyección*.

En ambos casos, las cifras obtenidas sirven de apoyo a los encargados de tomar decisiones y como veremos más adelante, sus principios son similares y se basan en la linealidad del modelo expresado en la siguiente propiedad, dado el modelo en equilibrio:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

Si denotamos por $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ a la Matriz inversa de Leontief, entonces la ecuación anterior también se puede escribir como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{f}$$

Expresar el modelo de ésta forma permite analizar cambios de \mathbf{x} debido a cambios en la variable exógena \mathbf{f} , si la economía se encuentra originalmente en el estado $(\mathbf{x}_1, \mathbf{f}_1)$, un cambio en la variable \mathbf{f} (por ejemplo un aumento del gasto gubernamental) ocasionará cambios en los sectores productivos, llevando a la economía al estado $(\mathbf{x}_2, \mathbf{f}_2)$. Es decir:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{L}\mathbf{f}_1 \tag{4.9}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{L}\mathbf{f}_2 \tag{4.10}$$

Denotamos $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$ respectivamente, las ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma conjunta como:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{L}(\Delta\mathbf{f})$$

Mediante la representación del modelo dado anteriormente, podemos analizar los resultados de un cambio en la variable exógena \mathbf{f} , que normalmente son:

1. Cambios en la producción de cada sector.
2. Cambios en el ingreso de cada hogar debido a lo anterior.
3. Cambios en el nivel de empleo.
4. El valor agregado que se crea por cada sector.

Antes de entrar en detalle a cada uno de ellos, recordemos que :

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots$$

Por lo que llamaremos efecto *inicial*, *directo* e *indirecto* a los cambios asociados con los términos \mathbf{I} , \mathbf{A} y $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots$ respectivamente; los cuales pueden interpretarse como ajustes inmediatos, a corto y a largo plazo.

Multiplicadores de la producción

Se define el efecto multiplicador para el sector j , como el valor total de la producción de todos los sectores de la economía que se necesitan para obtener una unidad más de demanda final de la producción del sector j .

Dicho de otra manera, si denotamos por $\Delta \mathbf{f}_j$ al vector columna con entradas cero excepto el j -ésimo renglón que es igual a 1 y además definimos:

$$\Delta \mathbf{x}_j = \mathbf{L} (\Delta \mathbf{f}_j) \quad (4.11)$$

De acuerdo a la definición de $\Delta \mathbf{f}_j$, $\Delta \mathbf{x}_j$ es la j -ésima columna de la matrix \mathbf{L} y representa el aumento en la producción de todos los sectores para satisfacer un aumento de una unidad (física ó monetaria) de la demanda final. Con esto podemos introducir lo siguiente:

Definición 4.2.1. Con la notación anterior, se define el *Multiplicador de la producción para el j -ésimo sector* como:

$$m(p)_j = \sum_{i=1}^n l_{ij} \quad (4.12)$$

Es necesario hacer algunas observaciones sobre la definición:

Si denotamos por $\mathbf{i}^t = [1, \dots, 1]$, entonces se acostumbra escribir:

$$m(p)_j = \mathbf{i}^t \Delta \mathbf{x}_j$$

Cuando el modelo es abierto respecto de los hogares, los multiplicadores se conocen como *Multiplicadores de producción simples*, si el modelo es cerrado entonces se les llama *Multiplicadores de producción total*.

Ejemplo 4.2.1. Supongamos una economía de dos sectores, cuya matriz de coeficientes tecnológicos y la inversa de Leontief son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.25 \\ 0.20 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.2541 & 0.3300 \\ 0.2640 & 1.1221 \end{bmatrix}$$

Con la notación introducida anteriormente, $\Delta \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ indica un aumento de una unidad de la demanda final de la producción del sector 1 y similarmente $\Delta \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ representa un aumento de la

demanda final del sector 2. Para satisfacer el primer aumento, se debe aumentar la producción por la cantidad:

$$\Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{L}(\Delta \mathbf{f}_1) = \begin{bmatrix} 1.2541 \\ 0.2640 \end{bmatrix}$$

en la cual se observan dos importantes aspectos:

- El sector 1 debe aumentar su producción por un poco más de una unidad.
- El sector 2 también debe aumentar su producción, aunque en menor proporción.

Análogamente para el segundo caso se tiene:

$$\Delta \mathbf{x}_2 = \mathbf{L}(\Delta \mathbf{f}_2) = \begin{bmatrix} 0.3300 \\ 1.1221 \end{bmatrix}$$

así que los multiplicadores de producción simple están dados por:

$$m(p)_1 = \sum_{i=1}^2 l_{i1} = 1.5181, \quad m(p)_2 = \sum_{i=1}^2 l_{i2} = 1.4521$$

obervése que ambos multiplicadores son mayores que 1, lo cual se debe claramente a que $l_{ii} > 1.0$.

Para encontrar los multiplicadores de producción total, se debe considerar el modelo cerrado respecto a los hogares. Para nuestro ejemplo (Ver, *Ejemplo 2.3.1*) tenemos:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.25 & 0.05 \\ 0.20 & 0.05 & 0.40 \\ 0.30 & 0.25 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1.3651 & 0.4253 & 0.2509 \\ 0.5273 & 1.3481 & 0.5954 \\ 0.5698 & 0.4890 & 1.2885 \end{bmatrix}$$

Para evaluar el aumento de una unidad en la demanda final del sector 1, tomamos $\Delta \bar{\mathbf{f}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, lo cual no significa ningún aumento directo en la demanda de mano de obra:

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{L}}(\Delta \bar{\mathbf{f}}_1) = \begin{bmatrix} 1.3651 \\ 0.5273 \\ 0.5698 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene:

$$\bar{m}(p)_1 = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{l}_{i1} = 2.4622$$

análogamente, el aumento en el sector 2, $\Delta \bar{\mathbf{f}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, da como resultado $\bar{m}(p)_2 = 2.2624$.

Multiplicadores del Ingreso/empleo

Para los reportes económicos usuales, es de mayor interés presentar los efectos de cambios exógenos en términos de aumento en trabajo e incluso ganancias cuantificadas en dinero; antes de entrar en detalle, denotaremos como siempre por $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{ij})$ y $\bar{\mathbf{L}} = (\bar{l}_{ij})$ a las matrices del modelo cerrado respecto a los hogares y la correspondiente matriz inversa de Leontief, entonces de acuerdo con los resultados de la sección anterior, el efecto multiplicador de los hogares se puede definir como:

$$m(h)_j = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{l}_{ij}$$

Ésta cantidad está dada normalmente en unidades de mano de obra (por ejemplo: horas/mes) y tiene el inconveniente de reflejar el hecho de que el mayor aumento de unidades de trabajo se deben al j -ésimo sector, cuyo salario es normalmente diferente del de los otros sectores, por lo que si tomamos la matriz \mathbf{A} expresada en unidades monetarias por unidad de producción, entonces se definen las siguientes cantidades:

Definición 4.2.2. *Se define el multiplicador simple de los hogares (h) como:*

$$m(h)_j = \sum_{i=1}^n a_{n+1,i} l_{ij}$$

y el multiplicador total de los hogares como:

$$\bar{m}(h)_j = \sum_{i=1}^{n+1} a_{n+1,i} \bar{l}_{ij}$$

Donde los coeficientes l_{ij} se refieren a la matriz que toma al trabajo como exógena y \bar{l}_{ij} a los de la matriz cerrada respecto a los hogares. En ambos casos, los multiplicadores están dados en términos monetarios, los cuales son más sencillos de interpretar económicamente.

Continuando con el ejemplo de la sección anterior, donde se tiene $a_{n+1,1} = 0.3$ y $a_{n+1,2} = 0.25$, forma que se obtiene:

$$\begin{aligned} m(h)_1 &= (0.3)(1.2541) + (0.25)(0.2640) = 0.3762 + 0.0660 = 0.4422 \\ m(h)_2 &= (0.3)(0.3300) + (0.25)(1.1221) = 0.0990 + 0.2805 = 0.3795 \end{aligned}$$

En este caso, $m(h)_1 = 0.4422$ significa que un aumento de una unidad monetaria en la demanda de la producción del sector 1 generará un aumento de \$ 0.4422 en el ingreso de los hogares. Si es necesario saber los aumentos de ganancias por sector, éstas son \$ 0.3762 y \$ 0.0660 respectivamente.

Multiplicadores del Valor Agregado

El modelo insumo-producto permite hacer un análisis de valor agregado a nivel microeconómico, si expresamos la matriz \mathbf{A} desagregada como producto por industria y denotamos por $\mathbf{p}^t = (p_i)$, $i =$

$1, \dots, n$ al vector renglón de precios, entonces cada producto produce ganancias solo si se satisface la siguiente relación:

$$p_j > \sum_{i=1}^n p_i a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n$$

expresado matricialmente como

$$\mathbf{p}^t(\mathbf{I} - \mathbf{A}) > 0 \quad (4.13)$$

la existencia del vector de precios está garantizada por el teorema de Perron-Froebenius, el cual afirma que para una matriz económica \mathbf{A} ($a_{ij} > 0$, $\forall i : \sum_j a_{ij} < 1$), existe $0 < \lambda < 1$ y un vector $\mathbf{p} > 0$ tal que:

$$\mathbf{p}^t \mathbf{A} = \lambda \mathbf{p}^t$$

entonces la ecuación (4.13) se sigue de que $\lambda \mathbf{p}^t < \mathbf{p}^t$. En tal caso, el valor agregado por cada producto es:

$$v_j = p_j - \sum_{i=1}^n p_i a_{ij} \quad j = 1, \dots, n$$

si denotamos el vector de valores agregados como $\mathbf{v}^t = (v_i)$, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\mathbf{v}^t = \mathbf{p}^t(\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

o en forma de incrementos:

$$\Delta \mathbf{v}^t = (\Delta \mathbf{p}^t)(\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

si deseamos utilizar a la variable de valor agregado como exógena, es conveniente escribirla como:

$$(\Delta \mathbf{p}^t) = \Delta \mathbf{v}^t(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = (\Delta \mathbf{v}^t)\mathbf{L}$$

la cual tiene la misma estructura que el efecto multiplicador de la producción, excepto que las operaciones son ahora por renglón debido a la multiplicación por la derecha de la matriz de Leontief. Así que en forma análoga, definimos lo siguiente:

Definición 4.2.3. Se define el multiplicador del valor agregado (v) como:

$$m(p)_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} \quad (4.14)$$

denotando por $\mathbf{i}^t = [1, \dots, 1]$ al vector renglón de 1's, entonces:

$$m(v)_i = \mathbf{i}^t(\Delta \mathbf{v}_i)$$

, donde $\Delta \mathbf{v}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^t(\Delta \mathbf{p}_i)$.

Multiplicadores en los Modelos Regionales

Con frecuencia, los analistas económicos se interesan en el impacto a nivel regional de los efectos multiplicadores, por ejemplo, el gobierno federal desea decidir si otorgar ó no, un nuevo contrato para flotas petroleras, lo cual podría favorecer a ciertas regiones.

Como ya se vió anteriormente, la matriz $\mathbf{A}^r = \hat{\mathbf{p}}^r \mathbf{A}$, representa una forma de tratar de capturar las interrelaciones regionales entre varios sectores. Por ejemplo, en la Sección 4.1, la matriz nacional $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.25 \\ 0.20 & 0.05 \end{bmatrix}$, se puede modificar con la suposición de que en la región r la tecnología de producción básica en los sectores 1 y 2 es esencialmente la que está reflejada en las columnas de \mathbf{A} , pero la proporción de insumos requeridos por los sectores 1 y 2 que se espera provengan de esas regiones son: $p_1^r = 0.8$ y $p_2^r = 0.6$ de forma que $\mathbf{p}^r = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}$ y por lo tanto:

$$\mathbf{A}^r = \hat{\mathbf{p}}^r \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.15 & 0.25 \\ 0.20 & 0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.20 \\ 0.12 & 0.03 \end{bmatrix}$$

cuya matriz inversa de Leontief es:

$$\mathbf{L}^r = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^r)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.1692 & 0.2411 \\ 0.1446 & 1.0608 \end{bmatrix}$$

de donde los multiplicadores regionales *simples* son:

$$m(p)_1^r = 1.3139 \quad \text{y} \quad m(p)_2^r = 1.3018$$

Si se dispone de los datos de consumo de los hogares, insumo de mano de obra e ingresos ganados en la región, entonces se puede cerrar el modelo con el método mostrado en el Capítulo 2, lo cual permite el cálculo de los multiplicadores *totales*. Para este ejemplo, supondremos que el insumo de mano de obra es el mismo que el nacional y que representa el trabajo proporcionado por los habitantes de la región, es decir tomamos $a_{31}^r = 0.30$, $a_{32}^r = 0.25$ y $a_{33}^r = 0.05$, también supondremos que los sectores 1 y 2 proporcionan el 80% y el 60% respectivamente de las necesidades del consumidor, entonces $a_{13}^r = (0.8)(0.05) = 0.04$ y $a_{23}^r = (0.6)(0.40) = 0.24$, de forma que se tiene:

$$\bar{\mathbf{A}}^r = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.20 & 0.04 \\ 0.12 & 0.03 & 0.24 \\ 0.30 & 0.25 & 0.05 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{L}}^r = (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{A}}^r)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2167 & 0.2825 & 0.1226 \\ 0.2627 & 1.1637 & 0.3051 \\ 0.4533 & 0.3954 & 1.1716 \end{bmatrix}$$

así que los multiplicadores totales son:

$$\bar{m}(p)_1^r = 1.9327 \quad \text{y} \quad \bar{m}(p)_2^r = 1.8416$$

los multiplicadores de valor agregado se pueden encontrar de la misma forma.

Multiplicadores en el Modelo Interregional

Con los modelos Insumo-Producto interregional y multiregional, se pueden calcular varios efectos multiplicadores (a) para una sola región (r), (b) para la interacción entre dos regiones, (c) para el “resto de la economía” (agregando todas las regiones fuera de la r) y (c) para la economía total de muchas regiones (nacional).

En seguida ilustramos estas posibilidades usando un conjunto de datos hipotéticos para un modelo de dos regiones. Consideremos la siguiente matriz de coeficientes de un modelo interregional con los mismos tres sectores en cada región:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{rr} & \mathbf{A}^{rs} \\ \mathbf{A}^{sr} & \mathbf{A}^{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.150 & 0.2500 & 0.050 & 0.0208 & 0.0938 & 0.017 \\ 0.200 & 0.0500 & 0.400 & 0.1667 & 0.1250 & 0.133 \\ 0.300 & 0.2500 & 0.050 & 0.0500 & 0.0500 & 0.000 \\ 0.075 & 0.0500 & 0.060 & 0.1667 & 0.3125 & 0.067 \\ 0.050 & 0.0125 & 0.025 & 0.1250 & 0.1250 & 0.047 \\ 0.025 & 0.1000 & 0.100 & 0.2500 & 0.2500 & 0.133 \end{bmatrix}$$

con inversa:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4626 & 0.5065 & 0.3322 & 0.2594 & 0.3827 & 0.1472 \\ 0.7208 & 1.5144 & 0.7615 & 0.5580 & 0.6289 & 0.3237 \\ 0.6776 & 0.5783 & 1.3777 & 0.3180 & 0.3897 & 0.1477 \\ 0.3180 & 0.2535 & 0.2508 & 1.4283 & 0.6492 & 0.1907 \\ 0.1773 & 0.1229 & 0.1246 & 0.2680 & 1.3149 & 0.1143 \\ 0.3463 & 0.3645 & 0.3646 & 0.5977 & 0.6949 & 1.3000 \end{bmatrix}$$

Recuérdese que en este caso se usan subíndices para las submatrices de un modelo interregional \mathbf{L} , ya que los superíndices los reservamos para $\mathbf{L}^{rr} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})^{-1}$ y $\mathbf{L}^{ss} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{ss})^{-1}$.

Efectos Intraregionales: Para cambios exógenos en la demanda final de los artículos de la región r (los tres primeros elementos del vector \mathbf{f}), sus impactos en la producción de los sectores de esa región se representan en la submatriz \mathbf{L}_{11} . En este caso los multiplicadores intrarregionales simples para la región r están dados por las sumas de las columnas de \mathbf{L}_{11} :

$$m(p)^{rr} = \mathbf{i}^t[\mathbf{L}_{11}] = [2.8610 \quad 2.5992 \quad 2.4714] \quad (4.15)$$

similarmente, para la región s :

$$m(p)^{ss} = \mathbf{i}^t[\mathbf{L}_{22}] = [2.2940 \quad 2.6590 \quad 1.6050] \quad (4.16)$$

Efectos Interregionales: El aspecto esencial de los modelos insumo-producto ya sean intraregionales o multiregionales, es que incluyen impactos en una región causados por cambios en otra región, a dichos cambios normalmente se les designa como *salpicones*. En nuestro ejemplo, éstos se reflejan en las matrices \mathbf{L}_{12} y \mathbf{L}_{21} . Considerese por ejemplo el elemento $(\mathbf{L}_{21})_{23} = 0.1246$; este indica que por cada peso de aumento en la demanda final de la producción del sector 3 en la región r , se

requieren 12.46 centavos de insumos de la producción del sector 2 de la región s .

Así que para un modelo insumo-producto interregional, definimos el multiplicador simple interregional como:

$$m(p)^{sr} = \mathbf{i}^t[\mathbf{L}_{21}] = [0.8416 \quad 0.7409 \quad 0.7400] \quad (4.17)$$

Donde la columna j representa el valor total de todos los sectores de la región s que se necesitan para satisfacer un aumento de un peso en la demanda del sector j de la región r . Análogamente, se define:

$$m(p)^{rs} = \mathbf{i}^t[\mathbf{L}_{12}] = [1.1354 \quad 1.4013 \quad 0.6186] \quad (4.18)$$

Efectos Nacionales: Como se indicó al inicio de la sección, una de las regiones, por ejemplo la s se podría considerar como el *resto* de la economía y podemos denotar como efectos nacionales a la suma de las columnas de ambas \mathbf{L}_{11} y \mathbf{L}_{12} puestas como vectores renglón,

$$m(p)^r = \mathbf{i}^t \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} \\ \mathbf{L}_{21} \end{bmatrix} = [3.7026 \quad 3.3401 \quad 3.2113]$$

$$m(p)^s = \mathbf{i}^t \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} = [3.4293 \quad 4.0603 \quad 2.2235]$$

Para el sistema interregional de dos regiones:

$$m(p) = \mathbf{i}^t[m(p)^r m(p)^s] \quad (4.19)$$

$$m(p) = [3.7026 \quad 3.3401 \quad 3.2113 \quad 3.4293 \quad 4.0603 \quad 2.2235]$$

Una interpretación política de estos datos es que para un gasto de un peso en el sector 2 en la región s tendría el mayor impacto en la economía nacional, si se mide como la producción total de todos los sectores en ambas regiones. Similarmente, si el gobierno está interesado en adquirir artículos de los sectores 1 o 3, el mayor impacto económico *nacional* (ambas regiones) se presentará si compra artículos de la región r .

Multiplicadores en el Modelo Multiregional

Todos los multiplicadores en el modelo insumo-producto interregional tienen su contraparte en el modelo multirregional, lo cual era de esperarse, puesto que el modelo multiregional es un intento de capturar todas las interconexiones en el modelo interregional usando un conjunto de datos más simple.

La forma final del modelo multiregional es:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{CA})^{-1}\mathbf{Cf}$$

Donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^s \end{bmatrix}$ es una matriz de bloques diagonal cuyas submatrices representan coeficientes técnicos regionales y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}^{rr} & \hat{\mathbf{c}}^{rs} \\ \hat{\mathbf{c}}^{sr} & \hat{\mathbf{c}}^{ss} \end{bmatrix}$ en la que cada componente de \mathbf{C} representan flujos entre regiones en la forma de proporciones de un artículo en una región que viene de la

misma región y también de cada una de las demás regiones.

Es importante hacer notar que en el modelo interregional, los sectores externos representan demandas finales, cualquiera que sea su localización, de artículos hechos por productores en una región particular. En cambio, en el modelo multiregional, las matrices \mathbf{f} representan demandas ejercidas por sectores externos localizados en una región dada, sin importar donde se producen. En un modelo multiregional de dos regiones, son las matrices $\hat{\mathbf{c}}^{rr}$ y $\hat{\mathbf{c}}^{sr}$ las que distribuyen la demanda final de la región r entre los productores de r y de s .

Por ejemplo, suponga que hay dos sectores en cada una de dos regiones y que deseamos evaluar el impacto a través del sistema de dos regiones de un aumento de \$100 de la demanda final del artículo 1 por los hogares localizados en la región r , de manera que $\mathbf{f}^r = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}^s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, así que:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^r \\ \mathbf{f}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sean:

$$\hat{\mathbf{c}}^{rr} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}}^{rs} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}}^{sr} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}}^{ss} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}^{rr} & \hat{\mathbf{c}}^{rs} \\ \hat{\mathbf{c}}^{sr} & \hat{\mathbf{c}}^{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.0 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

De donde se encuentra:

$$\mathbf{Cf} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.0 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo cual indica que el impacto de los nuevos \$100 no se siente exclusivamente en la región r , sino que más bien solo \$70 se presentan como una nueva demanda del artículo 1 hecha en la región r y \$30 se convierten en una nueva demanda del artículo 1 en la región s .

Así que la matriz \mathbf{C} distribuye las demandas finales en un modelo multiregional de acuerdo con los porcentajes incorporados en las componentes de \mathbf{C} y de esta manera los diferentes multiplicadores de los cuales se derivan los diferentes multiplicadores del modelo multiregional se encuentran en la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{CA})^{-1}\mathbf{C}$, que en el presente caso está dado por:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{CA})^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1.1260 & 0.4470 & 0.2996 & 0.4788 & 0.4182 & 0.1531 \\ 0.6277 & 1.3171 & 0.6056 & 0.5516 & 1.1147 & 0.3234 \\ 0.5119 & 0.5257 & 1.1000 & 0.3345 & 0.4698 & 0.2473 \\ 0.6247 & 0.3686 & 0.2495 & 1.2227 & 0.4551 & 0.2166 \\ 0.2369 & 0.3839 & 0.2046 & 0.2776 & 0.6494 & 0.1668 \\ 0.4720 & 0.4444 & 0.5890 & 0.5935 & 0.5286 & 1.2320 \end{bmatrix}$$

Esta es la matriz que juega el mismo papel para el análisis de multiplicadores en el modelo multiregional, así como lo es

$$\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}$$

en el modelo interregional. En seguida, examinaremos de manera no exhaustiva algunas de las posibilidades, en las cuales, el paralelismo con el modelo interregional deben ser claras. Para enfatizar este hecho, escribimos:

$$\mathcal{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{CA})^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix}$$

Efectos Intrarregionales: Las sumas de las columnas de los elementos de \mathcal{L}_{11} y \mathcal{L}_{22} son simplemente los multiplicadores de la producción intrarregionales que corresponden a las ecuaciones (4.15) y (4.16).

$$m(p)^{rr} = \mathbf{i}^t \mathcal{L}_{11} = [2.2656 \quad 2.2898 \quad 2.0052]$$

$$m(p)^{ss} = \mathbf{i}^t \mathcal{L}_{22} = [2.0938 \quad 1.6331 \quad 1.6154]$$

Efectos Interregionales: Como en el modelo interregional, estos efectos se derivan de \mathcal{L}_{12} y \mathcal{L}_{21} y corresponden a las ecuaciones (4.17) y (4.18).

$$m(p)^{sr} = \mathbf{i}^t \mathcal{L}_{21} = [1.3336 \quad 1.1969 \quad 1.0431]$$

$$m(p)^{rs} = \mathbf{i}^t \mathcal{L}_{12} = [1.3649 \quad 2.0027 \quad 0.7238]$$

Efectos Nacionales: Correspondiente a (4.19), tenemos el siguiente multiplicador simple de la producción que refleja la producción de todos los sectores de las dos regiones para contribuir al aumento de un peso en la nueva demanda final de un artículo particular.

$$m(p)^r = \mathbf{i}^t \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} \\ \mathcal{L}_{21} \end{bmatrix} = [3.5992 \quad 3.4867 \quad 3.0483]$$

$$m(p)^s = \mathbf{i}^t \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix} = [3.4588 \quad 3.6359 \quad 2.3391]$$

$$m(p) = [3.5992 \quad 3.4867 \quad 3.0483 \quad 3.4588 \quad 3.6359 \quad 2.3391]$$

Así que un nuevo aumento de un peso en la demanda hecha por los hogares del sector r por el artículo 2, generará un aumento total de \$3.4867 de producción en el sistema multirregional.

Conclusiones

El presente trabajo ha sido una tarea de recopilación bibliográfica de varias fuentes que puede utilizarse de referencia para desarrollos más avanzados del Modelo Insumo-Producto. Para su realización, fué necesario adquirir nuevos conocimientos matemáticos y económicos relacionados con la parte teórica del modelo. Como parte fundamental, se revisaron temas, términos y definiciones de economía y se fortalecieron conocimientos del álgebra lineal.

En este trabajo se puso énfasis en la definición de las componentes del modelo y la construcción de la tabla de flujos interindustriales siguiendo las definiciones económicas de las fuentes revisadas, así como también se estudiaron las diferentes economías (cerrada y abierta), se definió la *Matriz de Coeficientes Tecnológicos*, donde sus elementos representan la estructura de producción en la economía. Para que el sistema tenga una solución con interpretación económica razonable (producción mayor que consumo y generación de valor agregado), se tuvieron que estudiar y analizar con mayor detalles las propiedades que tiene que cumplir la matriz de coeficientes tecnológicos, tanto económicamente como matemáticamente. Con los resultados descrito anteriormente, el modelo se puede transferirse a nivel regional, siempre y cuando se cuente con datos necesarios para su implementación. Además se definieron los efectos multiplicadores a nivel nacional y regional respectivamente.

Este modelo se estudió utilizando ejemplos simples, como pequeñas economías que constan de dos o tres sectores lo cual es suficiente para entender su mecánica interna.

Pensamos que el presente trabajo es suficiente para comprender las bases del modelo y deja abierta la cuestión de aplicación a una región en particular, así como el desarrollo de otras aplicaciones íntimamente relacionadas como son: problemas de energía y de medio ambiente, los cuales se puede atacar siguiendo la misma metodología del Modelo Insumo-Producto.

Vectores y matrices

Normas de vectores y matrices

Definición A.1.1. Una norma matricial sobre el conjunto de todas las matrices de $n \times n$ es una función real $\|\cdot\|$, que satisface las siguientes condiciones para todas las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y números reales α :

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0$.
2. $\|\mathbf{A}\| = 0$, si y solo si $\mathbf{A} = 0$.
3. $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|$.
4. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$.
5. $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$.

El siguiente es un teorema bastante conocido en relación a las normas de matrices.

Teorema A.1.1. Si $\|\cdot\|$ es una norma vectorial de \mathbb{R}^n , entonces:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$$

es una norma matricial.

A dicha norma se le llama *norma matricial natural* o también *norma inducida* asociada con la norma vectorial.

Para cualquier $\mathbf{z} \neq 0$, se tiene que $\mathbf{x} = \mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|$ es un vector unitario. Por lo tanto:

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\| = \max_{\|\mathbf{z}\| \neq 0} \left\| \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right) \right\| = \max_{\|\mathbf{z}\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{Az}\|}{\|\mathbf{z}\|}$$

Por lo que se puede escribir:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{z}\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{Az}\|}{\|\mathbf{z}\|}$$

De la definición de la norma matricial, se ve claramente que ésta depende de la norma de \mathbb{R}^n . Dado $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ las más usuales son las siguientes:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|\mathbf{x}\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}\end{aligned}$$

Entonces, se puede demostrar (ver [(3),(12)]), que las normas matriciales asociadas $\|\mathbf{A}\|_1$ y $\|\mathbf{A}\|_\infty$ se pueden calcular como:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Aleskerov, F., Ersel, H., and Piontkovski, D. (2011). *Linear Algebra for Economists*. Springer-Verlag, first edition. [23](#), [27](#)
- [2] Bapat, R. and Raghavan, T. (1997). *Nonnegative Matrices And Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, first edition. [27](#)
- [3] Burden, R. L. and Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, Cengage Learning, Canada, ninth edition. [52](#)
- [4] Chiang, A. C. and Wainwright, K. (2007). *Métodos fundamentales de economía matemática*. McGRAW-HILL, México, Cuarta edición. [1](#)
- [5] Debreu, G. and Herstein, I. N. (1953). Nonnegative square matrices. *Econometrica*, 21(4):597–607. [26](#)
- [6] Friedberg, S. H. (2003). *Linear algebra*. Pearson Education, New Jersey, USA, fourth edition. [1](#)
- [7] Isard, W. (1951). Interregional and regional input-output analysis: A model of a space-economy. *Review of Economics and Statistics*, 33(4):318–328. [31](#)
- [8] Leontief, W. (1936). Quantitative input and output relations in the economic systems of the united states. *Review of Economics and Statistics*, 18(3):105–125. [4](#)
- [9] Leontief, W. (1941). *The Structure of the American Economy, 1919–1929*. Harvard University Press, Cambridge, MA, USA, first edition. [4](#)
- [10] Leontief, W. (1986). *Input-output economics*. Oxford, Oxford University Press, Oxford, second edition. [1](#)
- [11] Lovell, M. C. (2004). *Economics with calculus*. World Scientific Publishers, Singapore, first edition. [3](#)
- [12] Meyer, C. D. (2000). *Matrix analysis and applied linear algebra*. Society for industrial y applied mathematics, USA, first edition. [52](#)
- [13] Miller, R. E. and Blair, P. D. (2009). *Input-output analysis: Foundations and extensions*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition. [1](#), [2](#), [4](#), [5](#), [8](#), [11](#), [12](#)
- [14] Raa, T. t. (2006). *The Economics of Input-Output Analysis*. Cambridge University Press, NY, USA, first edition. [1](#), [3](#), [4](#)

- [15] Robbins, L. (1932). *Essay on the Nature and Significance of Economic Science*. Macmillan, London, first edition. [3](#)
- [16] Samuelson, P. A. and Nordhaus, W. D. (2010). *Economía con aplicaciones a Latinoamérica*. The McGraw-Hill, México, Decimonovena edición. [3](#), [11](#), [12](#)
- [17] Schettino, M. (2002). *Introducción a la economía para no economistas*. Prentice-Hall/Pearson, México, Primera edición. [3](#)
- [18] Schumpeter, J. A. (1954). *Elizabeth B. Schumpeter, ed. History of Economic Analysis*. Oxford University Press, NY,USA. pp. 209-212. [1](#)
- [19] Sydsaeter, K. and Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Prentice Hall, Madrid, España, Primera edición. [1](#)
- [20] Takayama, A. (1974). *Mathematical economics*. The Dryden Press, USA, first edition. [1](#)
- [21] Tarancón, M. A. (2003). *Técnicas de Análisis Económico Input-Output*. Editorial Club Universitario, Spain, first edition. [4](#)