La cicloide, la curva del ritmo perfecto

Sección Hablando de ...

Eréndira Munguía Villanueva

Resumen

Se demuestra la propiedad isócrona de la cicloide, la cual descubrió y utilizó Christiaan Huygens para construir el reloj de péndulo cicloidal. El presente artículo pretende ser un ejemplo de cómo construir conocimientos y habilidades a partir de un problema concreto, y donde las técnicas empleadas no sobrepasan los contenidos del primer año de una licenciatura en matemáticas o ingeniería.

1. Introducción

El Siglo XVII es llamado el "siglo de la física" debido a aportaciones como las de Galileo Galilei, René Descartes e Isaac Newton que dieron origen a la física clásica y al sistema de pensamiento mecanisista. Es un siglo de esplendor económico y científico en Europa, gran parte gracias a la explotación de las colonias europeas en América, África y Asia.

Es también el siglo de la mexicana Juana Inés de Asbaje que en el año 1666 ingresa al convento para convertirse en Sor Juana Inés de la Cruz, poder estudiar latín y continuar su carrera de escritora y filósofa. En Inglaterra en el mismo año otra escritora, Margaret Cavendish, publica el primer libro de ciencia ficción del que se tiene registro "La Descripción de un Nuevo Mundo, El Mundo-Abrasador" (The Description of a New World, Called the Blazing-World), cuyo personaje principal es una joven que descubre un mundo lleno de criaturas y tecnologías fantásticas. Esta es una de entre muchas obras de Margaret, algunas de las cuales no son ficciones sino tratados de Filosofía Natural, o lo que conocemos actualmente como ciencias exactas. Sirve de inspiración a Margarete la correspondencia que sostiene con los diplomáticos y científicos holandeses Constantijn Huygens y su hijo Cristhiaan Huygens. Además de recibir y enviar cartas a Margaret, Cristhiaan Huygens dedicó gran parte de su trabajo al problema de la medición del tiempo, y fruto de su dedicación fue la invención del reloj de péndulo en 1656. Tratando de perfeccionar su invento Huygens descubrió las propiedades de la Cilcloide que describiremos en este artículo, él mismo da a conocer en 1673 este descubrimiento en su obra "Horologium oscillatorium" con las siguientes palabras:

"El péndulo simple no puede ser considerado como una medida del tiempo segura y uniforme, porque las oscilaciones amplias tardan más tiempo que las de menos amplitud; con ayuda de la geometría he econcontrado un método, hasta ahora desconocido, de suspender el péndulo; pues he investigado la curvatura de una determinada curva que se presta admirablemente para lograr la deseada uniformidad. Una vez que hube aplicado esta forma de suspensión a los relojes, su marcha se hizo tan pareja y segura, que después de numerosas experiencias sobre la tierra y sobre el agua, es indudable que estos relojes ofrecen la mayor seguridad a la astronomía y a la navegación. La línea mencionada es la misma que describe en el aire un clavo sujeto a una rueda cuando ésta avanza girando; en matemáticas se la denomina cilcoide, y ha sido cuidadosamente estudiada porque posee muchas otras propiedades; pero yo la he estudiado por su aplicación a la medida del tiempo ya mencionada, que descubrí mientras la estudiaba con interés puramente científico, sin sospechar el resultado."

En el presente artículo se estudiarán algunas de las propiedades de la Cicloide que menciona Huygens, las herramientas que usaremos serán conceptos de matemáticas y física que pudieran estar contenidos en los cursos de preparatoria de la especialidad de física-matemática. Resaltando que no siempre se necesita una cantidad inmensa de conocimiento para resolver algún problema de matemáticas o sus aplicaciones, a veces basta con manejar herramientas básicas y echar a volar la imaginación y la creatividad.

2. Construcción y propiedades geométricas de la Cicloide

Para dibujar una cicloide podemos simplemente tomar un círculo que ruede sin deslizarse por una línea recta, marcar un punto y seguir su trayectoria durante el rodamiento. Por ejemplo en la figura 1 el punto A yace en la circunferencia que rueda por la línea L, al inicio del movimiento el punto marcado coincide con el punto M, pero conforme la circunferencia gira A describe una curva que va formando arcos, esta curva es la famosa Cicloide.

Si la recta por donde rueda la circunferencia estuviera en una banqueta recién pintada de rojo, entonces la parte de la circunferencia que ha estado en contacto con el suelo se pintaría también. Con esto en mente es fácil deducir que si O el punto de contacto de la circunferencia con la recta L en algún momento del rodamiento, entonces el segmento de circunferencia OA tiene la misma longitud que el segmento de recta MO.

Antes de continuar con nuestro estudio de la cicloide hablaremos sobre una herramienta importante en el estudio de movimientos de rotación.

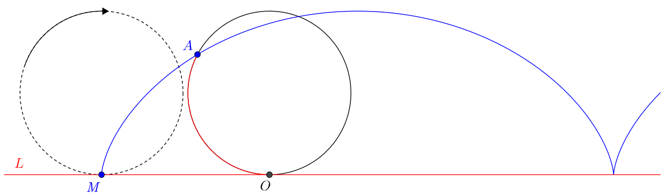

Figura 1

2.1. Velocidad de un cuerpo que gira

La velocidad de un cuerpo en movimiento indica su rapidez, es decir si va más o menos lento, pero también la dirección instantánea del movimiento. Veamos un ejemplo, imaginemos que amarramos una piedra a una cuerda y la hacemos girar. La piedra describirá un movimiento circular si logramos mantener fijo el otro extremo de la cuerda. Claramente este movimiento circular cambiará si la cuerda se rompe, en ese caso la fuerza de tensión de la cuerda desaparece y, despreciando otras fuerzas, la piedra saldrá disparada en la dirección de su velocidad en el momento de la ruptura, esto es, en dirección perpendicular al radio del círculo que describía antes del corte.

Además, recordemos que una recta es tangente a una curva si la recta toca a la curva (localmente) sólo en un punto. Teniendo en mente la simetría del círculo no es difícil convencerse de que la recta tangente a una circunferencia en un punto debe ser perpendicular al radio que pase por dicho punto. Así, para cada punto, la dirección con la que escapa nuestra piedra (esto es, su vector velocidad) y la dirección de la recta tangente al círculo coniciden. Véase la figura 2.

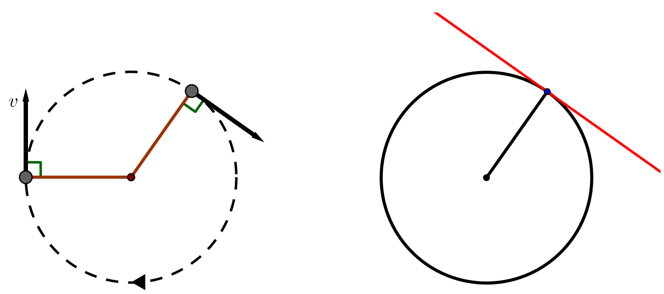

Figura 2

2.2. Centro instantáneo de rotación

Examinemos el movimiento giratorio de una figura plana rígida, por ejemplo un pedazo de cartón, cuando la figura se mueve en un plano de manera tal que un punto O permanece inmóvil en todo momento, mientras que la figura gira alrededor de O. Cualquier otro punto A de la figura en movimiento describe una circunferencia que tendrá como radio el segmento OA, así que la velocidad a la que se mueve el punto A va dirigida perpendicularmente a dicho segmento.

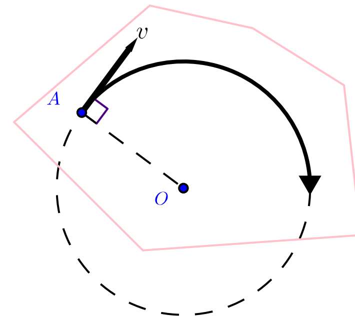

Figura 3

Consideremos ahora un cuerpo que se mueve sobre un plano de manera arbitraria. Pensemos en su movimiento en un instante de tiempo, es decir, no a lo largo de un intervalo de tiempo, sino solamente durante un instante determinado. Imaginemos el tipo de movimientos que realiza durante su desplazamiento arbitrario, como las dimensiones y la forma del objeto no cambian, en cada momento aislado de tiempo efectúa un *movimiento instantáneo* que o bien es un *movimiento de avance rectilíneo* con cierta velocidad instantánea, o bien es de *rotación* alrededor de cierto punto denominado **centro instantáneo de rotación**. El centro instantáneo de rotación es aquel punto que no se mueve en el instante de tiempo que consideramos, mientras que cualquier otro punto A de la figura en movimiento tiene en ese momento una velocidad que no es nula y que está dirigida perpendicularmente al segmento OA.

Regresando a nuestra cicloide, recordemos que para dibujarla hacemos rodar un círculo por una línea inmóvil L sin que resbale. Resulta que en todo momento de tiempo, el punto O de contacto del círculo con L es el centro instantáneo de rotación. Entonces en cada momento el punto A sobre la circunferencia tiene una velocidad instantánea que está orientada perpendicularmente al segmento OA.

La dirección de la velocidad de un punto en movimiento coincide con la tangente a la curva descrita por el punto. Así resulta que la recta que pasa por A en la dirección de su vector velocidad es la recta tangente a la cicloide en dicho punto. Sea D el punto de la circunferencia opuesto por el diámetro al punto O. No es difícil verificar que el segmento AD está contenido en la recta tangente a la cicloide en el punto A (basta aplicar propiedades elementales de los triángulos). Véase la figura 4.

2.3. Evoluta de la Cicloide

A una línea recta que es perpendicular a la tangente de una curva y que pasa por el punto de tangencia, se la denomina *recta normal* a la curva. En nuestro caso la recta que contiene el segmento AO es la normal a la cicloide en el punto A.

Observaremos ahora una de las propiedades más importantes de la cicloide. La figura 5 muestra las rectas normales a la cicloide en varios puntos.

¡Las normales de la cicloide original parecen formar una

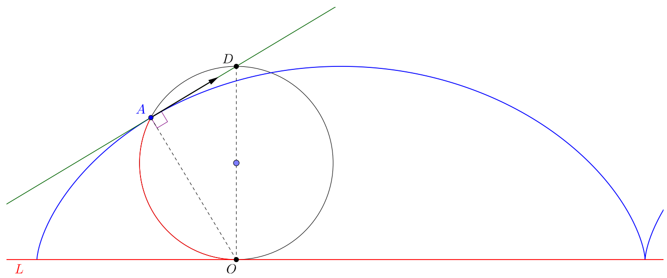

Figura 4

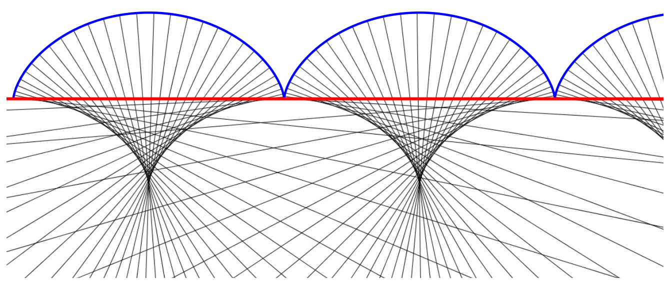

Figura 5

nueva cicloide! Además, si observamos con cuidado veremos que cualquier normal a la cicloide superior es tangente a la cicloide inferior. Si dos curvas K_1 y K_2 tienen la propiedad de que cualquier normal de K_1 es tangente a K_2 y viceversa decimos que K_2 es la *evoluta* de K_1. Así nuestra observación puede ser reformulada como que la evoluta de la cicloide es igual a ella misma pero desplazada. Demostremos matemáticamente esta propiedad.

Examinemos cierta posición del círculo cuya rodadura por la recta L forma la cicloide superior, llamemos M a la posición inicial del punto marcado de esta circunferencia. Las letras A, O y D tienen el mismo significado que antes. Construyamos un círculo que sea simétrico al que acabamos de examinar respecto al punto O, y supongamos que A' y D' son puntos simétricos a los puntos A y D. Sea L' una recta paralela a L que pasa por D', entonces la cicloide inferior está generada al seguir el punto del círculo inferior que en la posición inicial coincidía con M, cuando el círculo rueda por L' sin deslizamiento. El segmento MC tiene la misma longitud que la semicircunferencia OD (igual a πr, donde r es el radio de la circunferencia). Por consiguiente, el segmento OC es de la misma longitud que el arco AD. En otras palabras, el segmento $D'Q$ tiene la misma longitud que el arco $D'A'$. Esto significa que el punto A' yace en la cicloide inferior. De las propiedades de las tangentes y normales demostradas anteriormente se deduce ahora (dado que D' es el centro momentáneo de rotación durante la rodadura del círculo por la recta L') que OA' es tangente y $A'D'$ es normal a la cicloide inferior. Puesto que los segmentos OA y OA' son la continuación uno del otro veremos que la normal AA' respecto a la cicloide superior, elegida arbitrariamente, es una tangente para la cicloide inferior.

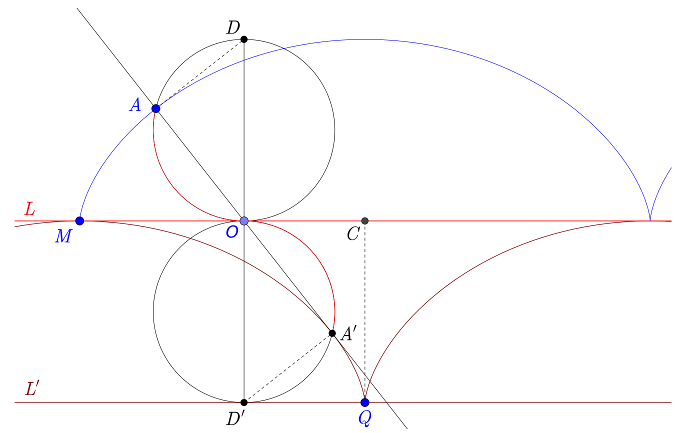

Figura 6

3. La Cicloide en ecuaciones

Hasta aquí, para estudiar todas las propiedades de la cicloide hemos utilizando herramientas elementales de la geometría y algunas nociones intuitivas de física, ni siquiera hemos tenido necesidad de introducir coordenadas. Es hasta ahora que escogeremos un sistema coordenado y usaremos ahora sí algunas herramientas del cálculo diferencial.

3.1. Ecuaciones paramétricas

Por comodidad supongamos que el origen de nuestro sistema de coordenadas coincide con el punto marcado en la posición inicial, es decir el punto M, el eje X con la recta L y que la circunferencia que rueda tiene radio 1. Veamos cuáles son las coordenadas del punto marcado A en un momento determinado del rodamiento de la circunferencia. A esta descripción de los puntos sobre la cicloide en términos de sus coordenadas le llamaremos ecuaciones paramétricas.

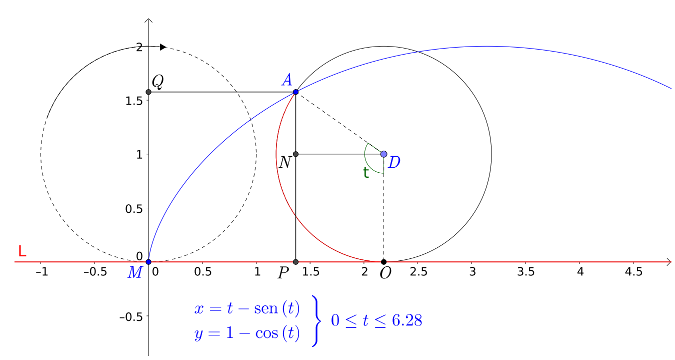

Figura 7

Sea P el punto de intersección de la vertical que pasa por A con el eje X, sea Q el punto de intersección de la horizontal que pasa por A con el eje Y, y sea N el punto de intersección de la horizontal que pasa por el centro D de la circunferencia y el segmento AP. Entonces la coordenada x del punto A es igual a la longitud del segmento MP, y la coordenada y del punto A es igual a la longitud del segmento MQ. Llamemos t al ángulo $\sphericalangle ADO$. Supongamos por ahora que $\pi/2 < t < \pi$ como en la figura 7. Entonces $\sphericalangle ADN = t - \pi/2$. Como la circunferencia tiene radio 1, el segmento ND es igual al $\cos(t - \pi/2)$, y el segmento NA es igual al $\sin(t - \pi/2)$. Recordemos que $\cos(t - \pi/2) = \sin(t)$ y $\sin(t - \pi/2) = -\cos(t)$. Observemos que si t está medido en radianes, dado que la circunferencia tiene radio 1, la medida de t es igual a la medida del arco OA cuya longitud es la misma que la del segmento MO. Así las coordenadas (x, y) del punto A en nuestro sistema coordenado están dadas por:

$$x = |MP| = |MO| - |PO| = t - \cos(t - \pi/2) = t - \sin(t)$$
$$y = |MQ| = |PN| + |NA| = 1 + \sin(t - \pi/2) = 1 - \cos(t)$$

Se puede demostrar que las ecuaciones se cumplen también para otros intervalos, el primer arco completo de la cicloide corresponde al conjunto de puntos (x, y) que satisfacen las ecuaciones anteriores cuando t varía de 0 a 2π.

Esta manera de describir las coordenadas de los puntos que conforman una curva se conoce como ecuaciones paramétricas porque describen las coordenadas de dichos puntos como funciones del parámetro t.

3.2. Longitud de arco

¿Cuánto medirá un arco completo de la cicloide? ¿Y un segmento de arco? Se puede demostrar que si conocemos la descripción de las coordenadas (x, y) de los puntos que forman una curva, y si éstas están dadas en función de un parámetro t, entonces la longitud del pedazo de curva que va desde el punto correspondiente a t_0 hasta el correspondiente a t_1 está dada por

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Así, tomando al ángulo t como parámetro (véase la figura 7), la longitud de la mitad de un arco de la cicloide está dada por la expresión en (1).

De lo anterior tenemos que un arco completo tiene longitud 8 (cuando el radio de la cicloide es 1). Siguiendo el mismo razonamiento obtendremos que si A es el punto correspondiente a un valor t del parámetro, entonces la longitud del arco sobre la cilcoide de M a A está dada por

$$\int_0^{t/2} 4\sin(u)\, du = 4 - \cos(u)\Big|_0^{t/2} = 4[1 - \cos(t/2)]$$

La longitud del arco sobre la cicloide del punto A al punto más alto la denotaremos por α, está dada por:

$$\begin{aligned} \alpha &= 4 - 4[1 - \cos(t/2)] = 4\cos(t/2) \\ &= 4\cos(\pi/2 - s) = 4\sin(s) \end{aligned}$$

donde s es el ángulo mostrado en la figura 8. Este último cálculo nos ayudará a descubrir otra de las propiedades fascinantes de la cicloide.

4. El péndulo de Huygens

Regresemos al estudio de las normales de la cicloide.

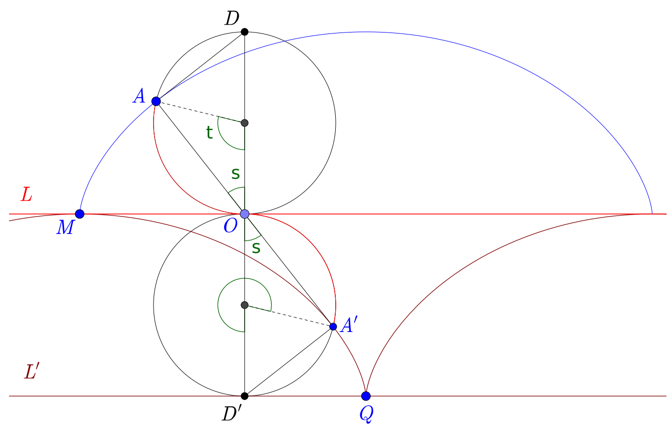

Figura 8

Calculemos la distancia $|AA'|$, como el triángulo OAD es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 2, entonces $cos(s) = |OA|/2$, y como el punto O es el punto medio del segmento AA' entonces

$$|AA'| = 4\cos(s) = 4\cos\left(\frac{\pi - t}{2}\right) = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

Además, por lo que vimos anteriormente la longitud del segmento sobre la cicloide inferior del punto A' al punto Q está dada por

$$\widehat{A'Q} = 8 - 4\left[1 - \cos\left(\frac{\pi + t}{2}\right)\right] = 4 - 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

Así, si sumamos la longitud del arco sobre la cicloide del punto Q al punto A' más la longitud del segmento $A'A$ el

$$\int_0^{\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2}\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)}\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)}\, dt \tag{1}$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos(t))}\, dt = \int_0^{\pi} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_0^{\pi/2} 4\sin(u)\, du = 4\left[-\cos(u)\Big|_0^{\pi/2}\right] = 4[-\cos(\pi/2) - (-\cos(0))] = 4$$

resultado será siempre

$$\widehat{A'Q} + |AA'| = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) + 4 - 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) = 4$$

en particular no dependerá de la posición de A, ni del ángulo t.

Imaginemos pues que construimos un péndulo suspendiendo un peso de un hilo entre dos contornos sólidos que tienen la forma de arcos de cicloide. Al oscilar el péndulo, el hilo se ciñe a uno u otro de estos contornos cicloidales. Lo que acabamos de demostrar es que si el hilo mide cuatro veces la longitud del radio del círculo con el que se trazaron la cicloides, en condiciones ideales, el movimiento del peso suspendido describirá una cicloide de las mismas dimensiones. Véase la figura 9 y observe que ésta se obtiene volteando de cabeza la figura 8.

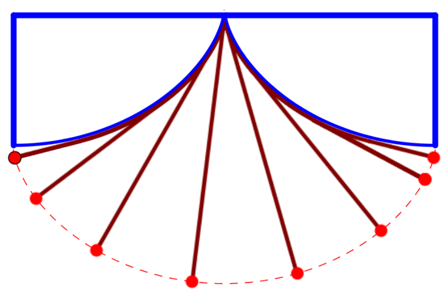

Figura 9

4.1. Ecuación diferencial del péndulo cicloidal

Describamos con mayor detalle el movimiento de nuestro péndulo cicloidal. Supongamos que en el punto Q está sujeto un hilo de 4 unidades de longitud, de cuyo extremo pende un cuerpo P. Consideremos que el hilo que sostiene al péndulo es inextensible y carece de peso. Con los resultados de la sección anterior, y con la suposición de que el hilo es inextensible, podemos afirmar que el cuerpo P se moverá describiendo una cicloide. El péndulo puede considerarse como un punto pesado, es decir, que tiene cierta masa m pero prescindimos de sus dimensiones. De las fuerzas que actúan sobre P tendremos en cuenta, además de la tensión del hilo, la fuerza de gravedad. La fuerza de resistencia del aire se puede despreciar y no consideraremos el rozamiento del hilo contra el tope en forma de cicloide. Aunque sabemos ya muchas cosas del movimiento del péndulo, no tenemos una manera de saber exactamente cuál será su posición en un tiempo determinado si echamos a andar el péndulo. Encontrar esta descripciónes es la labor que haremos a continuación usando nuevamente algunos conceptos de física, geometría y una pizca de cálculo.

Supongamos que el cuerpo P se encuentra en cierto instante en un punto A de la cicloide que describe. El punto inferior de esta cicloide lo designaremos por C. Marquemos las circunferencias que generan las cicloides (seguimos suponiendo que estas circunferencias tienen radio 1). El ángulo en radianes que forma el hilo con la vertical lo denotaremos por s como antes. El punto A se encuentra más alto que C, la diferencia entre estas alturas la denotaremos por h, como el diámetro de la cicunferencia es 2, tenemos que $\cos(s) = (2-h)/|OA|$. Pero como vimos anteriormente, la longitud del segmento $|OA|$ es igual a $2\cos(s)$. Véase la figura 10. Obtenemos entonces:

$$h = 2 - |OA|\cos(s) = 2 - 2\cos(s)\cos(s) = 2\sin^2(s)$$

Como antes denotemos por la letra griega α la longitud del arco de la cicloide de A a C, anteriormente observamos que $\alpha = 4\sin(s)$, así tenemos que $h = \alpha^2/8$.

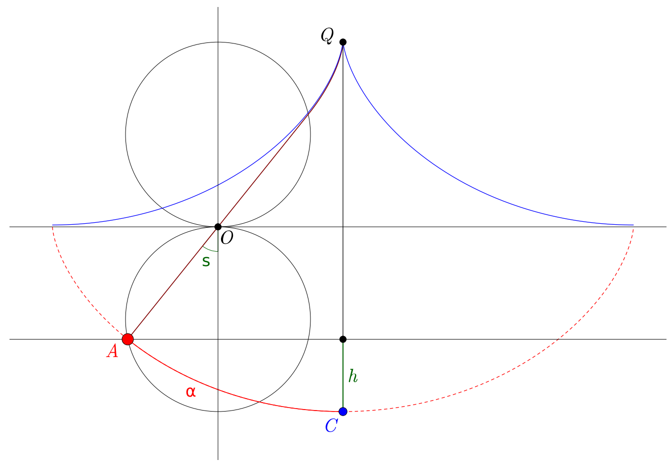

Figura 10

Por esto, considerando que cuando el péndulo se encuentra en la posición C su energía potencial es nula, hallamos que si está en la posición A el valor de dicha energía será

$$W^{(p)} = mgh = mg \cdot \frac{\alpha^2}{8}$$

Denotemos por v la rapidez a la que se mueve el péndulo, su energía cinética tiene entonces el valor

$$W^{(c)} = \frac{mv^2}{2}.$$

Por tanto, la energía total E del péndulo (cuando se encuentra en el punto A) se expresa por la fórmula

$$E = mg\frac{\alpha^2}{8} + \frac{mv^2}{2}$$

Puesto que el péndulo al moverse no realiza ningún trabajo (ya que hemos despreciado las fuerzas de rozamiento y de resistencia), su energía se conserva siempre igual, es decir, la magnitud de E es constante. Manipulando la última igualdad obtenemos

$$\frac{8E}{mg} = \alpha^2 + \frac{4v^2}{g}$$

En el lado izquiero de ésta ecuación aparecen cantidades constantes, las únicas cantidades que varían en función de la posición del cuerpo P son α y v. Como v es la velocidad del cuerpo P y α representa el avance de dicho cuerpo, entonces estas magnitudes están relacionadas: la derivada de α respecto del tiempo es igual a v. De ahora en adelante t denotará el tiempo en segundos (y no un álgulo como había sido antereriormente). Podemos entonces escribir

$$\frac{8E}{mg} = \alpha^2 + \frac{4}{g}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Esta última es una ecuación diferencial, resolverla significa encontrar una expresión de α en función del tiempo. Es decir, una vez encontrada la solución de esta ecuación podremos saber la posición y la velocidad de nuestro péndulo después de t segundos de haberlo soltado para que empezara a oscilar.

4.2. Resolución de la ecuación diferencial para el péndulo cicloidal

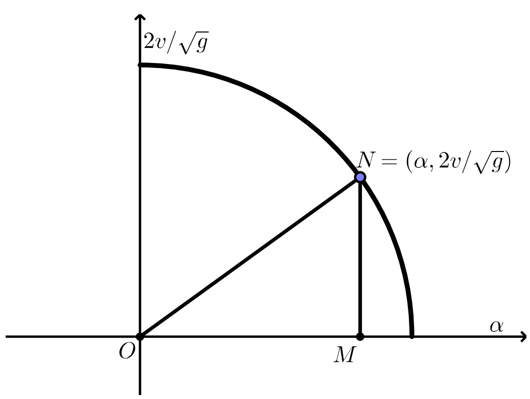

Figura 11

Elijamos un sistema de coordenadas en el plano, tomemos sobre su eje de abscisas la magnitud α y sobre su eje de ordenadas la magnitud $v/2\sqrt{g}$. En cada instante de tiempo t, al cuerpo P le corresponden unos determinados valores del camino recorrido α y de la velocidad v, a su vez estos valores determinan la coordenadas de un punto en nuestro sistema coordenado, llamemos N a dicho punto. Así, en cada instante t el péndulo P se representa por cierto punto N, si conocemos dónde está dicho punto podemos encontrar sus coordenadas α y $2v/\sqrt{g}$. Si O es el origen de nuestro sistema coordenado y M es la intersección de la vertical que pasa por N con el eje de las abscisas, la longitud del segmento ON se puede calcular usando el teorema de Pitágoras

$$|ON| = \sqrt{|MN|^2 + |MN|^2} = \sqrt{\frac{2v^2}{g} + \alpha^2},$$

pero como $\dfrac{8E}{mg} = \alpha^2 + \dfrac{4v^2}{g}$ obtenemos $|ON| = \sqrt{\dfrac{8E}{mg}}$.

Al moverse el péndulo variarán las magnitudes α y v, es decir, el punto N se moverá en el plano en que se tomó el sistema de coordenadas, pero la distancia de dicho punto al origen será siempre la misma, será igual a la cantidad constante $\sqrt{8E/mg}$. Esto último significa que el punto N se moverá sobre una circunferencia de radio

$$R = \sqrt{\frac{8E}{mg}}$$

Esta circunferencia se llama *circunferencia de fases* . Véase la figura 11.

Hallemos la velocidad con que se mueve el punto N siguiendo la circunferencia. Esta velocidad tiene dirección tangencial a la circunferencia, supongamos que se representa por el vector NA. Descompongamos este vector en su componente horizontal y su componente vertical. La componente horizontal de la velocidad de N corresponde a la velocidad de la componente horizontal del punto N, y la componente vertical a la velocidad de la componente vertical de N.

Es decir, en este caso la componente horizontal NB representará la velocidad de traslación del punto M por el eje de abscisas. Como la distancia al punto M desde O es igual a α, la velocidad del punto M será igual a $v = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$, es decir, $NB = v$. Por otro lado, partiendo de la semejanza de los triángulos ONM y NAB tenemos

$$\frac{|MN|}{|ON|} = \frac{|NB|}{|NA|}$$

De lo anterior, y como $|MN| = 2v/\sqrt{g}$, obtenemos

$$\frac{2v/\sqrt{g}}{R} = \frac{v}{|NA|}$$

Despejando tenemos

$$|NA| = \frac{\sqrt{g}R}{2}$$

Esta es la magnitud de la velocidad del punto N por la circunferencia (Véase la figura 12).

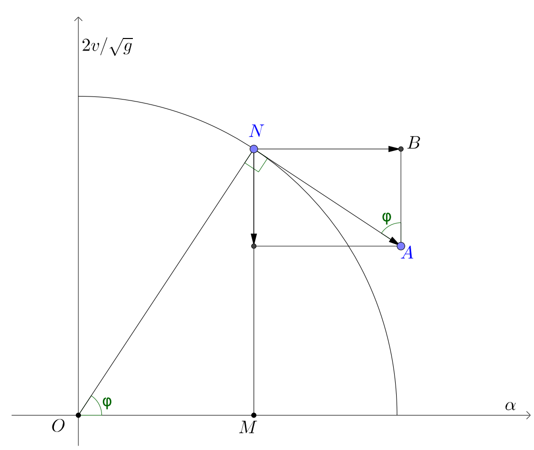

Figura 12

Llamemos α_0 y v_0 respectivamente a la elongación y a la velocidad del péndulo en el instante inicial, y N_0 al punto correspondiente de la circunferencia de fases. Entonces el radio de esta circunferencia tendrá el valor

$$R = \sqrt{\alpha_0^2 + \frac{4v_0^2}{g}}$$

Al cabo de t segundos de comenzar a moverse el péndulo, el punto N que se mueve con rapidez $\sqrt{g}R/2$, habrá recorrido desde N_0 la distancia $\sqrt{g}Rt/2$, por lo tanto, la magnitud del ángulo $\sphericalangle N_0ON$ será en radianes igual a $\sqrt{g}t/2$ (ver la figura 13). De este modo

$$\varphi = \sphericalangle MON = \sphericalangle M_0ON_0 - \sphericalangle N_0ON = \varphi_0 - \frac{\sqrt{g}t}{2}$$

De aquí obtenemos

$$|OM| = R\cos(\varphi) = R\cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{2} - \varphi_0\right)$$

$$|NM| = R\sin(\varphi) = -R\sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{2} - \varphi_0\right)$$

Recordando que $|OM| = \alpha$ y $|MN| = 2v/\sqrt{g}$, se tiene que

$$\alpha(t) = R\cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{2} - \varphi_0\right)$$

$$v(t) = -R\sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{2} - \varphi_0\right)$$

Estas fórmulas expresan la elongación y la rapidez del péndulo al cabo de t segundos de haber comenzado su movimiento, es decir, resuelven completamente el problema del movimiento del péndulo con las simplificaciones hechas.

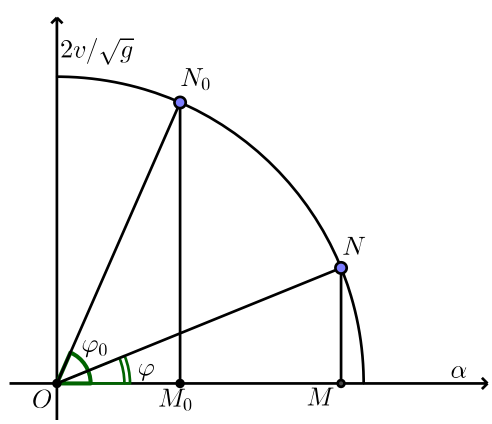

Figura 13

5. Periodo de oscilación

¿Cuánto tardará nuestro péndulo en ir y regresar? Podemos calcular esto usando las ecuaciones que encontramos, el periodo de oscilación será el intervalo de tiempo T al cabo del cual la posición y la velocidad del péndulo sean las mismas en el instante t y en el instante $t + T$. Es decir, necesitamos encontrar T tal que $\alpha(t) = \alpha(t + T)$ y $v(t) = v(t + T)$.

Como las ecuaciones que rigen el movimiento del péndulo involucran seno y coseno, y éstas funciones tienen periodo 2π, entonces los valores de la expresión $\sqrt{g}t/2 - \varphi_0$ en los instantes t y $t + T$ deberán diferir uno de otro en 2π

$$\frac{\sqrt{g}}{2}(t + T) - \varphi_0 = \frac{\sqrt{g}}{2}t - \varphi_0 + 2\pi$$

Despejando T de esta expresión obtenemos $T = 4\pi/\sqrt{g}$.

La propiedad más importante de este péndulo es que su periodo de oscilación no depende del valor inicial α_0, es decir, que el péndulo tardará el mismo tiempo en ir y regresar sin importar en qué posición comenzó a oscilar, esta propiedad se conoce somo **isócrona**.

6. Conclusiones

A lo largo de este artículo hemos conocido la cicloide, encontrado un método para trazar sus rectas tangentes y normales, demostrado que es igual a su evoluta, todo esto considerando sólo sus propiedades geométricas (sin hacer uso de un sistema de coordenadas). Además de esto, una vez elegido un sistema de coordenadas adecuado, hemos encontrado sus ecuaciones paramétricas y su longitud de arco. Haciendo uso de todo lo anterior hemos demostrado que en un péndulo cicloidal, bajo condiciones ideales, el periodo de oscilación no depende de su amplitud, encontrando y resolviendo las ecuaciones diferenciales correspondientes con métodos elementales.

La autora de este artículo espera que la lectura haya sido amena, y que quien tenga estas páginas en sus manos se anime a descubrir nuevos fenómenos haciendo uso de las herramientas que posea, el conocimiento matemático y físico con que cuente, y una buena dosis de valentía e imaginación.

Referencias

[1] Boltianski, V.: *¿Qué es el cálculo diferencial?* Lecciones populares de matemáticas. Mir, 1974.

[2] Boltianski, V. y V. Más: *La envolvente*. Lecciones populares de matemáticas. Mir, 1977.

[3] Varberg, D., E. Purcell y S. Rigdon: *Calculus*. Prentice Hall, 2000.

Eréndira Munguía Villanueva

Egresada de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco y del doctorado en ciencias matemáticas de la UNAM. Actualmente es profesora investigadora en la Universidad de Papaloapan. Ha impartido numerosas charlas y talleres de divulgación de las matemáticas y su relación con las ciencias naturales, la música y los estudios de género.

Universidad del Papaloapan
Av. Ferrocarril s/n, Col. Cd. Universitaria, Loma Bonita, Oax., México C.P. 68400
erendira.munguia@gmail.com

¿Sabías que...

La UNESCO proclamó el 2019 como el Año Internacional de la Tabla Periódica de los Elementos Químicos.

La celebración conmemora el 150º aniversario de la creación de la tabla periódica por el químico ruso Dmitri Ivánovich Mendeléyev y permitirá rendir homenaje al descubrimiento de los elementos químicos nihonio (113), moscovio (115), teneso (117) y oganesón (118).