

---

Proyecto de Tesis

Control de Movimiento basado en un  
Observador de Perturbación para un  
Servosistema Mecatrónico de un Eje

---

**Título de la Tesis: Control de Movimiento basado en un Observador de Perturbación para un Servosistema Mecatrónico de un Eje.**

Tesista: C. Jonathan Bonfilio Bautista Ocampo.

Asesor de Tesis: M. en C. Esteban Chávez Conde.

Co-asesor externo: Dr. Francisco Beltrán Carbajal.

Co-asesor interno: Dr. Álvaro Cabrera Amado.

Ingeniería en Mecatrónica.

Universidad del Papaloapan Campus Loma Bonita.

Loma Bonita, Oaxaca. México.

Enero del 2015.

Documento elaborado con el procesador Scientific WorkPlace.

MATLAB y Simulink son marcas registradas de MathWorks, Inc.



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN  
CAMPUS LOMA BONITA

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

# Control de Movimiento basado en un Observador de Perturbación para un Servosistema Mecatrónico de un Eje

Tesis que presenta el

**C. Jonathan Bonfilio Bautista Ocampo**

Para obtener el Grado de Licenciatura  
en la especialidad de

**Ingeniería en Mecatrónica**

Asesor de Tesis:

**M. en C. Esteban Chávez Conde**

Co-asesor externo: Dr. Francisco Beltrán Carbajal

Co-asesor interno: Dr. Álvaro Cabrera Amado

Loma Bonita, Oaxaca.

Enero del 2015.



# Dedicatoria

A mi madre María del Carmen Ocampo Márquez y a mi hermana María de Jesús Bautista Ocampo les dedico este gran logro, porque con su apoyo me recordaban que iba por el buen camino de lucha y entrega para no dejarme vencer nunca. Les agradezco toda su comprensión y confianza que depositaron en mí.

A mi padre Bonfilio Bautista Echeverría que me apoyo económicamente hasta concluir con mi licenciatura. A mi abuela Luz María Márquez García que constantemente me apoyaba y alentaba en todo momento de mi carrera.



## Agradecimientos

Primeramente le agradezco a Dios, por permitirme presenciar cómo mis padres han recorrido los caminos de la vida, apoyándome cada quien a su manera.

A la Universidad del Papaloapan por haberme otorgado la oportunidad de realizar mis estudios de licenciatura. A la maestra Cheryl Lynn Gad Jefa del Centro de Idiomas, por haberme tenido mucha paciencia y brindarme su ayuda para la liberación del idioma extranjero.

A mi director de tesis el M. en C. Esteban Chávez Conde, por haber confiado en mí para desarrollar en conjunto este tema de tesis, por sus valiosas enseñanzas y consejos.

Al Dr. Álvaro Cabrera Amado, al Dr. Rafael Castillo Rincón y al Dr. Hiram Netzahualcóyotl García Lozano, por haber aceptado formar parte del jurado y por las sugerencias realizadas al presente trabajo de tesis.



# Resumen

Los servosistemas mecatrónicos están comúnmente constituidos por un servomotor, un servoamplificador y un mecanismo; puede verse su amplia aplicación en la industria, por ejemplo: en ejes de máquinas cartesianas, en robots industriales, en sistemas de transporte de material, en sistemas de almacenamiento automático y máquinas de diseño específico. Dichos servosistemas se encuentran sujetos a perturbaciones endógenas y/o exógenas, como por ejemplo: la fricción dinámica, cargas, fuerzas de corte, entre otras, que afectan su desempeño en el movimiento deseado. Este es un problema abierto que ha causado mucho interés en los ingenieros y en los grupos de investigación científica.

En este sentido, el presente trabajo de tesis hace un acercamiento a dicho problema, tomando en cuenta la dinámica lineal del actuador (motor eléctrico de corriente directa) y del mecanismo (compuesto por un husillo de bolas y una guía lineal, llamado industrialmente como mesa lineal).

Los modelos matemáticos del servosistema mecatrónico de un eje fueron desarrollados considerando dos casos de estudio: en el primero, todos los elementos se consideran como cuerpos rígidos y, en el segundo, se incluyó un elemento flexible. Y aprovechando la propiedad de planitud del servosistema, se utilizó la metodología de Planitud Diferencial, con la finalidad de parametrizar al servosistema; obteniéndose una ecuación diferencial ordinaria lineal entrada-salida. De esta manera, la entrada (el voltaje de armadura del motor eléctrico), fue expresada en función de una salida denominada salida plana (definida por el desplazamiento rectilíneo de la mesa lineal) y de un número finito de derivadas.

A partir del modelo parametrizado, fue parcialmente empleada una metodología de rechazo activo de perturbaciones, basada en un Observador Proporcional Integral Generalizado. Esta metodología está inspirada en el contexto de procesamiento de señales, y considera que la perturbación (debida a las dinámicas no modeladas y/o perturbaciones exógenas) puede ser localmente aproximada por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo; y usando una extensión del Observador de Luenberger, se consigue estimar la perturbación.

Los resultados de simulación numérica obtenidos para el seguimiento de trayectoria del servosistema mecatrónico de un eje, muestran un desempeño satisfactorio y la efectividad de la estrategia empleada.



# Abstract

Mechatronic Servo Systems are commonly composed of a servo motor, servo amplifier and a mechanism; its wide application can be seen in industry, for example: cartesian axis machines, industrial robots, in material transport systems, automatic storage systems and specific design machines. These servo system, are subject to disturbances endogenous and/or exogenous, for example: the dynamics friction, loads, cutting forces, among others, that affect their performance in the desired movement. This is a common problem which has stirred much interest in engineering and scientific research groups.

For this reason, the present thesis takes a specific approach to this problem, taking into account the linear dynamics of the actuator (direct current electric motor) and of the mechanism (comprised of a ball screw and a linear guide).

Mathematical models of the mechatronic servo system of an axis were developed considering two case studies: the first, all elements are considered as rigid bodies and, in the second, a flexible element is included. And taking advantage of the flatness property of the servo system, the methodology of differential flatness was used, in order to parameterize the servo system; obtaining an linear ordinary differential equation input-output. In this way, the input (the armature voltage of the electric motor), was expressed in terms of a output called flat output (defined by the rectilinear displacement of the linear table) and a finite number of derivatives.

From the parameterized model, was partially employed a methodology active disturbance rejection, based on a Generalized Proportional Integral Observer. This methodology is inspired in the context of signal processing, and considers that the perturbation signal (due to unmodeled dynamics and/or exogenous disturbance) can be locally approximated by a family of Taylor polynomials time-varying; and using a Luenberger Observer extension, is achieved estimate the disturbance.

Numerical simulation results were obtained by the trajectory tracking of a mechatronic servo system of an axis, showing a satisfactory performance and affectiveness of the strategy employed.



# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Marco teórico . . . . .	1
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.3. Antecedentes . . . . .	3
1.4. Justificación . . . . .	4
1.5. Hipótesis y predicciones . . . . .	4
1.6. Objetivos . . . . .	5
1.6.1. Objetivo general . . . . .	5
1.6.2. Objetivos particulares . . . . .	5
<b>2. Modelado matemático del servosistema mecatrónico</b>	<b>7</b>
2.1. Modelado matemático . . . . .	7
2.1.1. Caso I: Servosistema con elementos rígidos . . . . .	7
2.1.2. Caso II: Servosistema con un elemento flexible . . . . .	12
2.2. Propiedades del servosistema . . . . .	16
2.2.1. Controlabilidad . . . . .	16
2.2.2. Observabilidad . . . . .	18
<b>3. Parametrización diferencial del servosistema</b>	<b>21</b>
3.1. Sistemas lineales diferencialmente planos . . . . .	21
3.1.1. Sistemas de una entrada y una salida . . . . .	21
3.1.2. Obtención de la salida plana . . . . .	22
3.2. Sistema parametrizado . . . . .	23
3.2.1. Caso I: Servosistema con elementos rígidos . . . . .	23
3.2.2. Caso II: Servosistema con un elemento flexible . . . . .	24

<b>4. Controlador basado en un observador de perturbación</b>	<b>27</b>
4.1. Control por planitud diferencial de sistemas lineales . . . . .	28
4.2. Observador de perturbación . . . . .	28
4.3. Caso I: Servosistema con elementos rígidos . . . . .	32
4.3.1. Diseño del controlador PD por planitud . . . . .	32
4.3.2. Diseño de controlador PID por planitud . . . . .	33
4.3.3. Diseño del observador de perturbación . . . . .	34
4.3.4. Resultados de simulación numérica . . . . .	36
4.4. Caso II: Servosistema con un elemento flexible . . . . .	42
4.4.1. Diseño del controlador PD por planitud . . . . .	42
4.4.2. Diseño del observador de perturbación . . . . .	43
4.4.3. Resultados de simulación numérica . . . . .	46
<b>5. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>49</b>
5.1. Conclusiones generales . . . . .	49
5.2. Trabajo futuro . . . . .	50
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>
<b>Apéndice</b>	<b>57</b>
<b>A. Trayectoria de Bézier</b>	<b>59</b>
<b>B. Diagramas de simulación</b>	<b>63</b>
B.1. Bloques de Simulink: Servosistema de elementos rígidos . . . . .	63
B.1.1. Sistema dinámico . . . . .	64
B.1.2. Parametrización diferencial . . . . .	65
B.1.3. Controlador por planitud diferencial . . . . .	66
B.1.4. Observador de perturbación . . . . .	67
B.2. Bloques de Simulink: Servosistema con elementos flexible . . . . .	68
B.2.1. Ecuaciones dinámicas . . . . .	69
B.2.2. Parametrización diferencial . . . . .	70
B.2.3. Control por planitud diferencial. . . . .	71
B.2.4. Observador de perturbación . . . . .	72
B.3. Trayectoria polinomial de Bézier . . . . .	73

# Índice de figuras

1.1. Mecatrónica: sinergia e integración en el proceso de diseño de productos y sistemas (información tomada de [7]). . . . .	1
1.2. Estructura de un servosistema industrial de un sólo eje (información tomada de [9]). . . . .	2
1.3. Estructura de un servosistema mecatrónico industrial (información tomada de [9]). . . . .	3
2.1. Servosistema de un eje (mesa lineal). . . . .	8
2.2. Diagrama esquemático del servosistema de elementos rígidos . . . . .	8
2.3. Resultados de simulación numérica del servosistema mecatrónico modelado con elementos rígidos. . . . .	11
2.4. Diagrama esquemático del servosistema con un elemento flexible. . . . .	12
2.5. Resultados de simulación del servosistema mecatrónico considerando un acoplamiento flexible. . . . .	16
4.1. Estrategia de control de movimiento con estimación de la perturbación. . . . .	27
4.2. Fuerza externa sinusoidal $A \sin(2\pi f)$ , con $A = 0,5[N]$ y $f = 5[Hz]$ . . . . .	37
4.3. Resultados de simulación numérica del controlador PD sin observador de perturbación. . . . .	37
4.4. Resultados de simulación numérica del esquema de control PID sin observador de perturbación. . . . .	38
4.5. Resultados de simulación numérica del esquema de control PD por planitud con observador de perturbación, ante una fuerza externa. . . . .	39
4.6. Resultado de simulación numérica de la estimación de las derivadas de la salida plana y el error de observación. . . . .	39
4.7. Resultados de simulación numérica del servosistema, considerando el conocimiento parcial del sistema y la perturbación desconocida. . . . .	41
4.8. Resultado de simulación numérica del error del observador y la estimación de las derivadas de la salida plana, considerando el conocimiento parcial del modelo del servosistema. . . . .	41
4.9. Resultados de simulación numérica del servosistema con elemento flexible, considerando a un término de la dinámica como desconocido. . . . .	47
4.10. Resultados de simulación numérica del servosistema con elemento flexible, considerando dos términos desconocidos como la perturbación. . . . .	48

5.1. Concepto de una plataforma experimental del tipo servosistema mecatrónico de un eje. . . . .	51
A.1. Trayectoria polinomial deseada $y_d$ de Bézier. . . . .	61
B.1. Diagrama principal de la simulación numérica del servosistema de elementos rígidos. . . . .	63
B.2. Diagrama de bloques del sistema dinámico: parte mecánica y eléctrica del servosistema mecatrónico de elementos rígidos. . . . .	64
B.3. Diagrama de bloques: parametrización diferencial del servosistema con elementos rígidos. . . . .	65
B.4. Diagrama de controlador por planitud diferencial, elementos rígidos . . . . .	66
B.5. Diagrama de simulación del observador de perturbación del servosistema con elementod rígidos. . . . .	67
B.6. Diagrama principal de la simulación numérica del servosistema con elemento flexible. . . . .	68
B.7. Diagrama de simulación de la dinámica del servosistema con elemento flexible. . . . .	69
B.8. Diagrama de la parametrización diferencial del servosistema de elementos flexibles. . . . .	70
B.9. Diagrama del controlador por planitud diferencial del servosistema de elementos flexibles. . . . .	71
B.10. Diagrama del observador de perturbación de elementos flexibles. . . . .	72
B.11. Diagrama de bloque de la trayectoria de Bezier y sus derivadas correspondientes. . . . .	73

# Índice de tablas

2.1. Parámetros del servosistema con elementos rígidos. . . . .	11
2.2. Parámetros del servosistema con elemento flexible. . . . .	15



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Marco teórico

La palabra mecatrónica se puede definir de varias maneras, siendo la esencia de todas éstas la combinación sinérgica de la ingeniería mecánica, eléctrica, control y sistemas computacionales, en el proceso de diseño y desarrollo de productos y sistemas inteligentes (*ver* [1], [2], [3], [4], [5]). El origen de la palabra mecatrónica se remonta al año 1969 en la compañía Yaskawa Electric Corporation (*ver* Mori en [6]), empleada como una combinación de las palabras “*meca*” de mecanismos y “*trónica*” de electrónica. Entre los campos de aplicación de ésta multidisciplina se encuentran: la manufactura, los procesos de materiales, los productos de consumo, la automotriz, la medicina, etc. En la Figura 1.1 (*ver* Craig en [7]), se muestra un diagrama de Venn que incluye las disciplinas y los campos de aplicación de la Ingeniería en Mecatrónica.

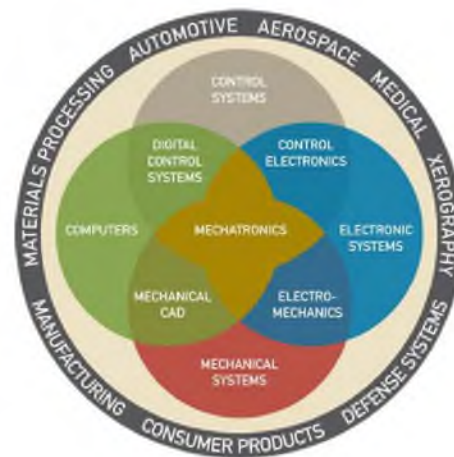


Figura 1.1: Mecatrónica: sinergia e integración en el proceso de diseño de productos y sistemas (información tomada de [7]).

Algunos ejemplos comunes de productos mecatrónicos han sido las cámaras fotográficas, cámaras de video digitales, puertas de acceso automáticas, máquinas fotocopiadoras, máquinas expendedoras, lavadoras inteligentes, robots industriales, máquinas de control numérico, entre otros (*ver* Bishop et al. en [5]).

En las aplicaciones de la mecatrónica es común ver servosistemas, que son sistemas de control para seguimiento de trayectoria, es decir, su entrada de referencia es variable con el tiempo a diferencia del sistema regulador donde la referencia es constante (*ver* Ogata en [8]).

En este sentido, un servosistema mecatrónico de acuerdo a Nakamura et al. en [9], es un sistema que está constituido por un motor eléctrico con encoder óptico (servomotor), un servoamplificador (servodrive) y un mecanismo, tal como se muestra en la Figura 1.2. El actuador es un servomotor eléctrico de corriente directa o alterna, que tiene acoplado un codificador óptico incremental (encoder) para la medición del desplazamiento angular y que se utiliza como señal de realimentación al servoamplificador (*ver* [10]). El servoamplificador (servodrive) está compuesto por un microcontrolador o procesador digital de señales (que contiene en memoria los algoritmos de control PID (*ver* Johnson en [11])) y dispositivos de electrónica de potencia (arreglo tipo “H” normal y modificado para dos o tres fases). Los modos de operación que comúnmente tienen los servoamplificadores son: control de posición, control de velocidad y control de par. El servoamplificador recibe la señal de referencia desde un controlador superior.

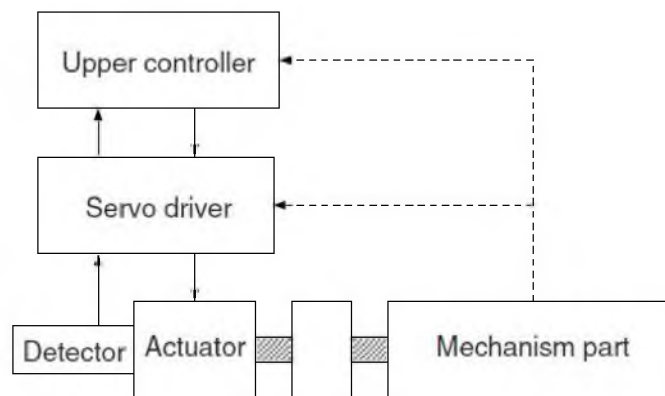


Figura 1.2: Estructura de un servosistema industrial de un sólo eje (información tomada de [9]).

También, el mecanismo que es parte componente del servosistema mecatrónico puede encontrarse en diversos tipos, para conversión de movimiento y transmisión de potencia, mediante: tren de engranes, engranes planetarios, cadena-catarina, banda-polea, husillo de bolas, etc. Uno de los mecanismos comúnmente empleados en la industria son los sistemas mesas lineales, que emplean un medio de transmisión por banda-polea o husillo de bolas, y guías lineales (*ver* [12], [13]).

Los servosistemas mecatrónicos son extensamente empleados en la industria, en diversas aplicaciones que requieren uno o más ejes; como por ejemplo: en robots industriales,

en máquinas herramientas de control numérico, en sistemas de transporte de material, en máquinas especiales, etc. En la Figura 1.3 se muestra un diagrama esquemático de un servosistema mecatrónico industrial de uno o más ejes (*ver* Nakamura et al. en [9]); que incluye lazos internos de las señales de corriente de armadura y velocidad, como señales de realimentación, junto con la señal de posición angular dada por el codificador óptico (encoder).

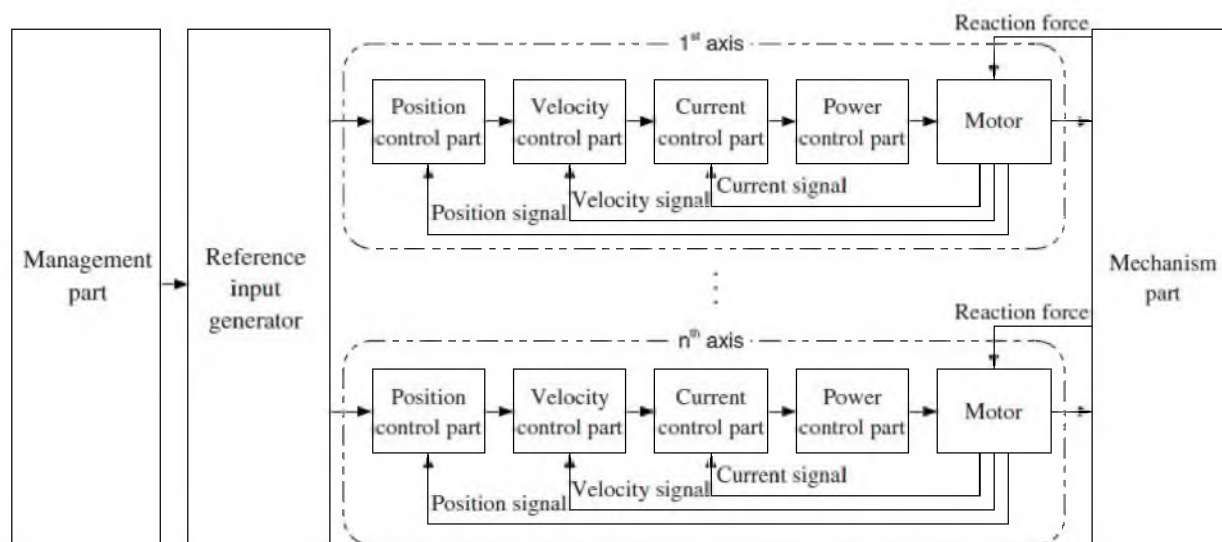


Figura 1.3: Estructura de un servosistema mecatrónico industrial (información tomada de [9]).

## 1.2. Planteamiento del problema

Se requiere minimizar al error de seguimiento de un servosistema mecatrónico de un eje, mediante acciones de control clásicas y la compensación de las perturbaciones (sean dinámicas no modeladas y/o fuerzas externas), considerando la señal de entrada y la señal de salida del servosistema. Dicho sistema está compuesto principalmente por un motor eléctrico de corriente directa y un mecanismo del tipo husillo de bolas con una guía lineal.

## 1.3. Antecedentes

El controlador PID (Proporcional Integral Derivativo) ha sido utilizado ampliamente en la industria, y por décadas se han desarrollado métodos para su sintonización y estrategias para reducir los problemas técnicos de su implementación (*ver* [11], [14], [15], [16]). Una alternativa al control PID ha sido propuesta por Han en [17], donde emplea una estrategia de rechazo activo de perturbación como parte componente de un esquema de control que ha desarrollado.

En particular, el control de movimiento de mesas lineales y ejes de máquinas herramienta ha sido abordado por diversos investigadores que han empleado diversos esquemas de control, tales como controladores adaptables (*ver* [18] y las referencias ahí citadas) con compensaciones geométricas, y estrategias para el rechazo activo de perturbaciones mediante observadores. Por ejemplo, Yao et al. en [19] presenta un esquema de control robusto de movimiento, considerando la prealimentación de la fricción de los ejes de una máquina herramienta, un controlador con retroalimentación y prealimentación, y un observador digital de perturbación propuesto por Ohnishi et al. en [20] (para la estimación de la perturbación, con el fin de darle robustez al algoritmo de control ante las incertidumbres paramétricas del modelo). Por otro lado, Hace et al. en [21] presenta resultados experimentales de un esquema de control modos deslizantes aplicado a una mesa lineal de transmisión por banda, basado en un observador por modos deslizantes.

En años recientes, Sira-Ramírez et al. en [22], [23], [24] han estudiado y desarrollado un algoritmo de rechazo activo de perturbación basado en un Observador Proporcional Integral Generalizado, inspirado en el contexto de procesamiento de señales, por considerar a la perturbación como una señal acotada por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, y haciendo una extensión del Observador de Luenberger se logra la estimación. Así también, en [25], [26], [27] se pueden ver las aplicaciones de éste esquema de control en robots paralelos, suspensiones activas de automóvil y ejes de máquinas herramientas. Dicha metodología se ha de emplear para el control de movimiento del servosistema mecatrónico.

## 1.4. Justificación

Los servosistemas mecatrónicos son ampliamente utilizados en la industria, tal como se mencionó en la sección 1.1. Dichos sistemas se encuentran sujetos a perturbaciones endógenas y/o exógenas, como por ejemplo: fricción dinámica, cargas, fuerzas de corte, entre otras. Por tal motivo, la exploración y desarrollo de esquemas de control basados en observadores de perturbación, ha sido una alternativa empleada para mejorar el desempeño de éstos servosistemas mecatrónicos.

## 1.5. Hipótesis y predicciones

El uso de trayectorias suaves con velocidad y aceleración cero, al inicio y al término de la trayectoria, es necesario para evitar las vibraciones indeseadas y con ésto mejorar el desempeño de los servosistemas mecatrónicos industriales. Sin embargo, lograr estos movimiento en ocasiones es complicado, debido a la presencia de fuerzas externas o internas en dicho servosistema. De acuerdo a esto, se ha de considerar una estrategia de control para minimizar el error de seguimiento del servosistema. Dicha estrategia consiste en emplear un controlador clásico PD de baja ganancia; pero ante la presencia de perturbaciones (fuerzas externas o internas desconocidas), se tendrá que emplear alta ganancia para rechazar la perturbación en la medida de lo posible. Para evitar la alta ganancia en el controlador PD se considera un observador de perturbación, con el fin de estimar la perturbación desconocida y compensar

dicha dinámica en el servosistema vía el controlador; rechazando de ésta manera las fuerzas que afectan el desempeño del servosistema mecatrónico.

## 1.6. Objetivos

### 1.6.1. Objetivo general

Diseñar un sistema de control de movimiento basado en un observador de perturbación para un servosistema mecatrónico de un eje, sujeto a dinámicas no modeladas y/o a una fuerza externa desconocida, con el fin de minimizar el error de seguimiento.

### 1.6.2. Objetivos particulares

- Modelar matemáticamente al servosistema mecatrónico de un eje, considerando la dinámica del actuador y del mecanismo.
- Obtener una ecuación diferencial entrada-salida del servosistema por la metodología de Planitud Diferencial.
- Diseñar un controlador PD para seguimiento de trayectoria del sistema parametrizado.
- Diseñar un observador de perturbación a partir del sistema parametrizado, considerando a la perturbación como una señal acotada por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo.
- Obtener resultados de simulación numérica del desempeño de la estrategia de control PD + Observador de perturbación.



# Capítulo 2

## Modelado matemático del servosistema mecatrónico

En este capítulo se presentan los modelos matemáticos de dos casos de estudios del servosistema mecatrónico de un eje, que se han obtenido por las ecuaciones Euler-Lagrange (*ver* [28], [29]), y las leyes de Kirchhoff (*ver* [30]). Las ecuaciones de movimiento del servosistema mecatrónico están descritas en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, compuestas por la dinámica de un motor eléctrico de corriente directa (como actuador), y la dinámica de un mecanismo conocido industrialmente como mesa lineal. El primer caso de estudio ha sido modelado considerando todos sus elementos como cuerpos rígidos; en el segundo caso, se considera un acoplamiento flexible entre la flecha del actuador y el husillo de bolas.

### 2.1. Modelado matemático

#### 2.1.1. Caso I: Servosistema con elementos rígidos

El servosistema en estudio está conformado por un motor eléctrico de corriente directa (como actuador) y un mecanismo (constituido por un husillo de bolas, rodamientos y una guía lineal), tal como se muestra en la Figura 2.1. El sistema completo es conocido como mesa lineal. El acoplamiento entre la flecha del motor eléctrico y el husillo de bolas, como también todas las piezas mecánicas que se involucran en el modelado, se consideran como cuerpos rígidos.

En la Figura 2.2 se muestra un diagrama esquemático de la parte mecánica del servosistema, donde  $J_m, B_m$  representa el momento de inercia de masa y el coeficiente de fricción viscosa del motor eléctrico de corriente directa, respectivamente;  $J_t$  representa el momento de inercia de masa del husillo de bolas,  $c_t$  y  $c_b$  representan los coeficientes de fricción viscosa equivalente de los dos rodamientos que sostienen al husillo de bolas y el coeficiente de fricción viscosa equivalente de los rodamientos lineales (uno se encuentra sobre el husillo de bolas, comúnmente conocido como tuerca, y el otro se encuentra sobre la guía lineal, conocido comúnmente como patín), respectivamente;  $m$  representa la masa de la mesa (que se

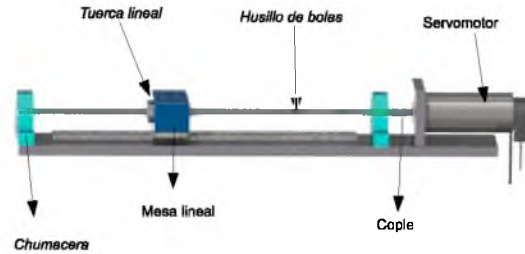


Figura 2.1: Servosistema de un eje (mesa lineal).

desplaza en forma rectilínea de acuerdo a la transmisión de movimiento del husillo de bolas),  $p_t$  es el paso del husillo de bolas,  $\tau$  es el par aplicado por el motor eléctrico sobre el husillo de bolas (para la transmisión de movimiento hacia la mesa),  $\theta$  es el desplazamiento angular del husillo de bolas y  $x$  es el desplazamiento lineal de la mesa.

El acoplamiento entre la flecha del actuador y el husillo de bolas, se considera como rígido, entonces, el desplazamiento de la flecha del motor  $\theta_m$  es igual al desplazamiento angular del husillo de bolas, es decir,  $\theta_m = \theta$ . Por lo cual, la relación cinemática de la transformación del movimiento angular (del husillo de bolas) a movimiento lineal (de la mesa) está dada por,  $x = a\theta$  con  $a = p_t/2\pi$ .

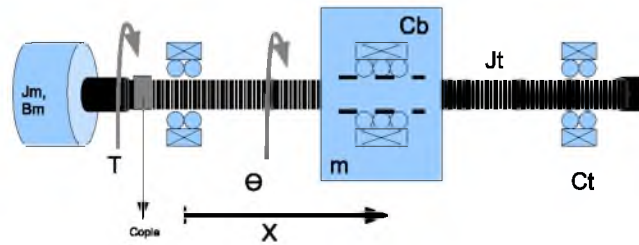


Figura 2.2: Diagrama esquemático del servosistema de elementos rígidos

De acuerdo a las ecuaciones Euler-Lagrange, el Lagrangiano  $L$  del sistema está dado por  $L = T - V$ , siendo  $T$  la energía cinética total del sistema y  $V$  la energía potencial total del sistema. Aplicado a la parte mecánica del servosistema, la coordenada generalizada queda definida por  $q = x$ , el desplazamiento lineal de la mesa y la fuerza generalizada por  $Q = \tau$ , el par aplicado por el actuador.

La energía cinética total del sistema se calcula por la suma de la energía cinética mecánica del motor eléctrico, la energía cinética del husillo de bolas y la energía cinética de la mesa,

$$T = T_{motor} + T_{husillo} + T_{mesa}, \quad (2.1)$$

donde<sup>1</sup>,

$$T_{motor} = \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2, \quad T_{husillo} = \frac{1}{2}J_t\dot{\theta}^2, \quad T_{mesa} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

La energía potencial mecánica del sistema es  $V = 0$ , debido a que no tenemos elementos que almacenen energía. Se ha considerado la fricción viscosa debido a los rodamientos en el servosistema, empleando la función de disipación de Rayleigh (*ver* Goldstein en [29]), denotada por  $D$ . La energía total disipada por el servosistema, se calcula por la suma de las contribuciones de las chumaceras que sostienen al husillo y los rodamientos lineales (de la mesa y de la guía lineal), siendo,

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}c_h\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}B_m\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}c_m\dot{x}^2, \\ &= \frac{1}{2}c_h\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}B_m\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}c_m\dot{x}^2. \end{aligned}$$

El Lagrangiano de la parte mecánica del servosistema en términos de la coordenada generalizada  $x$ , está dado por,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}J_t\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \\ &= \frac{1}{2}J_m\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}J_t\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La ecuación Euler-Lagrange para la parte mecánica del servosistema, incluyendo un término debido a la función de disipación de Rayleigh y una fuerza externa  $f_{ext}$  que perturba el movimiento lineal de la mesa, está dada por,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = Q - f_{ext}, \quad (2.3)$$

donde  $q$  es la coordenada generalizada y  $Q$  la fuerza generalizada.

Calculando cada uno de los términos de la ec.(2.3) se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) &= \frac{J_m}{a^2}\ddot{x} + \frac{J_t}{a^2}\ddot{x} + m\ddot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} &= \frac{c_h}{a^2}\dot{x} + \frac{B_m}{a^2}\dot{x} + c_m\dot{x}, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la misma ecuación, se tiene que,

---

<sup>1</sup>Abusando en la notación,  $\dot{x}$  representa la derivada de  $x$  respecto del tiempo,  $\frac{dx}{dt}$ ;  $\dot{q}$  representa la derivada de  $q$  con respecto del tiempo,  $\frac{dq}{dt}$ .

$$\left(\frac{J_m}{a^2} + \frac{J_t}{a^2} + m\right) \ddot{x} + \left(\frac{c_h}{a^2} + \frac{B_m}{a^2} + c_m\right) \dot{x} = \frac{\tau}{a} - f_{ext}.$$

Por otro lado, la ecuación dinámica de la parte eléctrica del servosistema que corresponde al actuador, se obtiene mediante un análisis de malla a un circuito en serie, equivalente a la parte eléctrica de un motor de corriente directa controlado por armadura (véase [31], [8]). Esta ecuación está dada por,

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_e \frac{d\theta_m}{dt} = V_a,$$

donde,  $L_a$  y  $R_a$  representan la inductancia y resistencia de armadura (devanado en el rotor) del motor eléctrico, respectivamente;  $k_e$  representa la constante de fuerza contraelectromotriz,  $\theta_m$  es el desplazamiento angular de la flecha del motor eléctrico,  $i_a$  es la corriente que circula al interior de la armadura y  $V_a$  es el voltaje aplicado en la armadura del motor eléctrico. También se conoce que la corriente de armadura genera un par sobre la flecha del rotor, que corresponde a una relación proporcional dada por  $\tau = k_m i_a$ , donde  $k_m$  representa la constante mecánica.

Las ecuaciones dinámicas del servosistema están dadas por,

$$\gamma_1 \ddot{x} + \gamma_2 \dot{x} = \frac{k_m i_a}{a} - f_{ext}, \quad (2.4)$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_e \frac{d\theta_m}{dt} = V_a. \quad (2.5)$$

donde,  $\gamma_1 = \frac{J_m}{a^2} + \frac{J_t}{a^2} + m$  y  $\gamma_2 = \frac{c_h}{a^2} + \frac{B_m}{a^2} + c_m$ .

Se definen variables de estado de la siguiente manera:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = i_a$ , y se considera el voltaje de armadura como señal de entrada al servosistema,  $u = V_a$ . Se escriben las ecuaciones dinámicas del servosistema en tres ecuaciones de primer orden, como,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} x_2 + \frac{k_m}{a\gamma_1} x_3 - \frac{1}{\gamma_1} f_{ext}, \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L_a} u - \frac{k_e}{aL_a} x_2 - \frac{R_a}{L_a} x_3. \end{aligned}$$

Una representación en el espacio de estado de las ecuaciones dinámicas del servosistema mecatrónico, está dada por,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{E}f_{ext}, \quad (2.6)$$

donde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & \frac{k_m}{a\gamma_1} \\ 0 & -\frac{k_e}{aL_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\gamma_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

En la Figura 2.3 se muestran resultados de simulación de las soluciones en el tiempo de las ecuaciones dinámicas del servosistema, usando un simulador comercial. Se ha considerado el método numérico *Runge-Kutta* y un paso de integración de  $0,1 [ms]$ . Los valores considerados de los parámetros del servosistema se indican en la Tabla 2.1.

En los resultados del servosistema en lazo abierto, se puede verificar que si hay relación entre el desplazamiento y la velocidad, de acuerdo a la relación cinemática de transformación del movimiento rotacional a lineal. Además, el voltaje y la corriente de armadura corresponden a las características dinámicas del actuador.

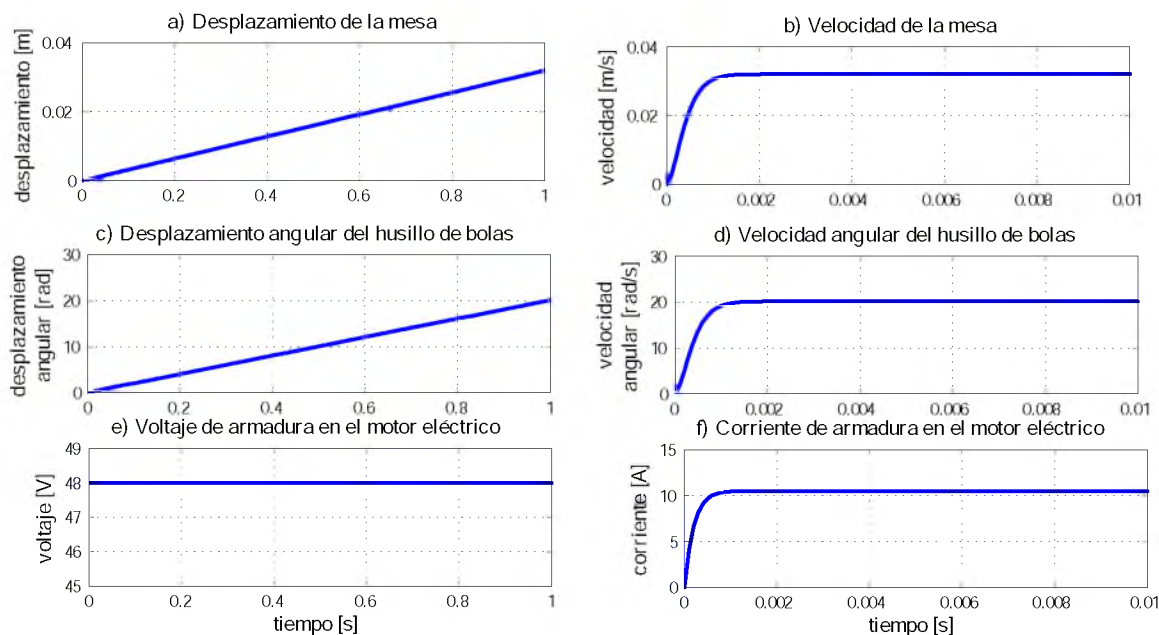


Figura 2.3: Resultados de simulación numérica del servosistema mecatrónico modelado con elementos rígidos.

Valores de los parámetros del servosistema con elementos rígidos		
$J_m = 1 \times 10^{-5} [kg.m^2]$	$V_a = 48 [V]$	$k_e = 96,1 \times 10^{-3} [\frac{V \cdot s}{rad}]$
$J_t = 1 \times 10^{-6} [kg.m^2]$	$L_a = 0,937 [mH]$	$k_m = 96,1 \times 10^{-3} [\frac{N}{A}]$
$m = 0,1 [kg]$	$R_a = 4,4 [\Omega]$	$B_m = 2,0414 \times 10^{-5} [\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}]$
$p_t = 0,01 [m]$	$c_h = 0,05 [\frac{N \cdot s}{m}]$	$c_m = 0,05 [\frac{N \cdot s}{m}]$

Tabla 2.1: Parámetros del servosistema con elementos rígidos.

### 2.1.2. Caso II: Servosistema con un elemento flexible

El servosistema mecatrónico en estudio, es como el que se describe en la sección 2.1.1 (véase Figura 2.1); con la única diferencia en que el acoplamiento entre la flecha del motor eléctrico y el husillo de bolas, se considera como un elemento flexible. En el caso I, el acoplamiento se consideró como elemento rígido.

En la Figura 2.4. se muestra un diagrama esquemático de la parte mecánica del servosistema (los parámetros no mencionados en este caso de estudio se definieron en el caso I), donde  $K_c$  es la constante de rigidez del acoplamiento entre la flecha del actuador y el husillo debido al elemento flexible. El desplazamiento angular de la flecha del motor  $\theta_m$  es diferente al desplazamiento angular del husillo, es decir,  $\theta_m \neq \theta$ . De tal manera que el desplazamiento angular del husillo  $\theta$ , se verá afectado por los valores que tome la constante de rigidez.

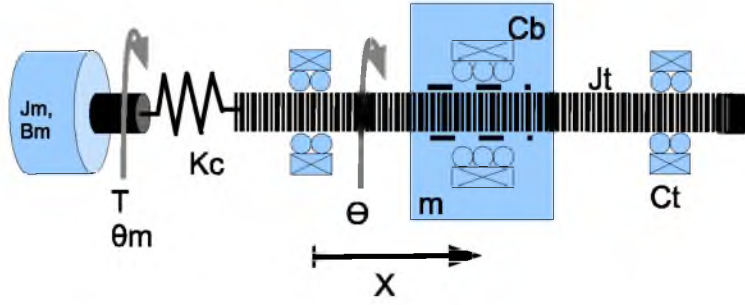


Figura 2.4: Diagrama esquemático del servosistema con un elemento flexible.

El vector de coordenadas generalizadas queda definida por  $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T = [\theta_m, x]^T$ , siendo  $x$  el desplazamiento lineal de la mesa y  $\theta_m$  el desplazamiento angular de la flecha del actuador; la fuerza generalizada está dada por  $Q_1 = \tau$  y  $Q_2 = 0$ , siendo  $\tau$  el par aplicado por el actuador.

La energía cinética del sistema se calcula por la suma de la energía cinética mecánica del motor, la energía cinética del husillo y la energía cinética de la mesa, siendo,

$$T = T_{motor} + T_{husillo} + T_{mesa}, \quad (2.7)$$

donde,

$$T_{motor} = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_m^2, \quad T_{husillo} = \frac{1}{2} J_t \dot{\theta}^2, \quad T_{mesa} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

La energía potencial mecánica del sistema es  $V = \frac{1}{2} K_c (\theta - \theta_m)^2$ , debido a que la constante de rigidez se representa mediante resorte que almacena energía. Se ha considerado la fricción viscosa debido a los rodamientos en el servosistema, empleando la función de

disipación de Rayleigh, denotada por  $D$ . La energía disipada de la parte mecánica del servosistema, se calcula por la suma de las contribuciones de las chumaceras que sostienen al husillo y los rodamientos lineales (de la mesa y de la guía lineal), siendo,

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}c_h\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}B_m\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}c_m\dot{x}^2, \\ &= \frac{1}{2}c_h\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}B_m\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}c_m\dot{x}^2. \end{aligned}$$

El Lagrangiano de la parte mecánica del servosistema en términos de la coordenadas generalizadas  $x$  y  $\theta_m$  (tomando en cuenta que  $\theta_m \neq \theta$ ), esta por,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}J_t\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}K_c(\theta - \theta_m), \\ &= \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}J_t\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}K_c\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\frac{x}{a}\theta_m + \theta_m^2\right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La ecuación Euler-Lagrangue para la parte mecánica del servosistema con acoplamiento flexible, está dada por,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = Q_1, \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = Q_2. \quad (2.10)$$

Calculando cada uno de los términos de la ec.(2.9) se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) &= J_m\ddot{\theta}_m, \\ \frac{\partial L}{\partial q_1} &= \frac{K_c}{a}x - K_c\theta_m, \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} &= B_m\dot{\theta}_m, \end{aligned}$$

como también cada uno de los términos de la ec.(2.10) se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) &= \frac{J_t}{a^2}\ddot{x} + m\ddot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -\frac{K_c}{a^2}x + \frac{K_c}{a}\theta_m, \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{c_h}{a^2}\dot{x} + c_m\dot{x}. \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación Euler-Lagrange, se tiene que,

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m + K_c \theta_m - \frac{K_c}{a} x = \tau, \quad (2.11)$$

$$\left( \frac{J_t}{a^2} + m \right) \ddot{x} + \left( \frac{c_h}{a^2} + c_m \right) \dot{x} + K_c \left( \frac{x}{a^2} - \frac{\theta_m}{a} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Por otro lado, la ecuación dinámica de la parte eléctrica del servosistema se calculó en el caso I, y está dada por,

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_e \frac{d\theta_m}{dt} = V_a. \quad (2.13)$$

Las ecuaciones dinámicas del servosistema con acoplamiento flexible, están dadas por,

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m + K_c \theta_m - \frac{K_c}{a} x = k_m i_a, \quad (2.14)$$

$$\alpha_1 \ddot{x} + \alpha_2 \dot{x} + K_c \left( \frac{x}{a^2} - \frac{\theta_m}{a} \right) = 0, \quad (2.15)$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_e \frac{d\theta_m}{dt} = V_a. \quad (2.16)$$

donde  $\alpha_1 = \frac{J_t}{a^2} + m$  y  $\alpha_2 = \frac{c_h}{a^2} + c_m$ .

Se definen variables de estado de la siguiente manera:  $x_1 = \theta_m$ ,  $x_2 = \dot{\theta}_m$ ,  $x_3 = x$ ,  $x_4 = \dot{x}$ ,  $x_5 = i_a$ , considerando el voltaje de armadura como la señal de entrada al servosistema, dada por  $u = V_a$ . Ahora se pueden escribir las ecuaciones dinámicas del servosistema en cinco ecuaciones de primer orden, como,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J_m} \left( -K_c x_1 - B_m x_2 + \frac{K_c}{a} x_3 + k_m x_5 \right), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{\alpha_1} \left[ -K_c \left( \frac{1}{a^2} x_3 - \frac{1}{a} x_1 \right) - \alpha_2 x_4 \right], \\ \dot{x}_5 &= \frac{1}{L_a} (u - k_e x_2 - R_a x_5). \end{aligned}$$

Una representación en el espacio de estado de las ecuaciones dinámicas del servosistema, está dada por,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (2.17)$$

donde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_c}{J_m} & \frac{-B_m}{J_m} & \frac{K_c}{aJ_m} & 0 & \frac{k_m}{J_m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_c}{a\alpha_1} & 0 & -\frac{K_c}{\alpha_1 a^2} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & -\frac{k_e}{L_a} & 0 & 0 & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

En la Figura 2.5 se muestran los resultados de simulación de las soluciones en el tiempo de las ecuaciones dinámicas del servosistema mecatrónico de un eje, considerando el método numérico *Runge-Kutta* y un paso de integración de  $0,1 [ms]$ , empleando un simulador comercial. Los valores considerados para los parámetros del servosistema se indican en la Tabla 2.2.

Valores de los parametros del servosistema con acoplamiento flexible		
$J_m = 1x10^{-5} [kg.m^2]$	$V_a = 48 [V]$	$k_e = 96,1x10^{-3} [\frac{V-s}{rad}]$
$J_t = 1x10^{-6} [kg.m^2]$	$L_a = 0,937 [mH]$	$k_m = 96,1x10^{-3} [\frac{N}{A}]$
$m = 0,1 [kg]$	$R_a = 4,4 [\Omega]$	$B_m = 2,0414x10^{-5} [\frac{N.m-s}{rad}]$
$p_t = 0,01 [m]$	$c_h = 0,05 [\frac{N-s}{m}]$	$K_c = 0,1 [\frac{N.m}{rad}]$
$a = \frac{p_t}{2\pi}$	$c_m = 0,05 [\frac{N-s}{m}]$	

Tabla 2.2: Parámetros del servosistema con elemento flexible.

Los resultados del servosistema con acoplamiento flexible en lazo abierto, muestran que la constante de rigidez toma un papel importante para el desempeño del servosistema. Como se aprecia, el desplazamiento angular del motor tiene una ligera curvatura; en la velocidad se ve reflejado este efecto. No obstante, la velocidad en el husillo se ve ligeramente afectada, esto se debe a la constante de rigidez. En cuanto al voltaje y la corriente de armadura, se encuentran en los rangos de valores de acuerdo a las características dinámicas del actuador.

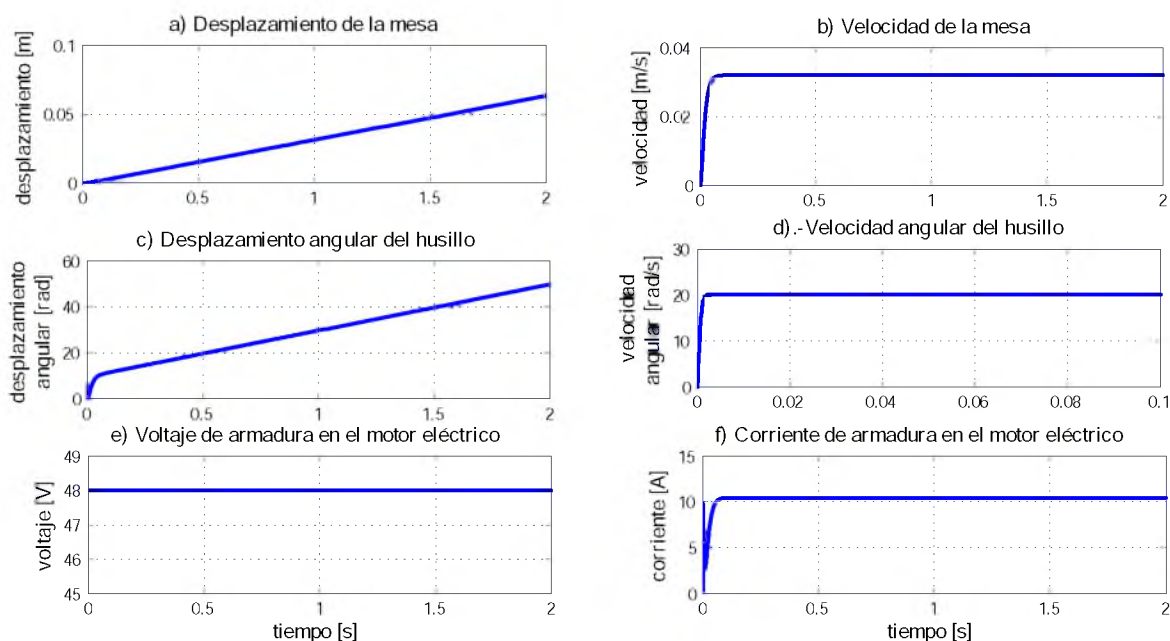


Figura 2.5: Resultados de simulación del servosistema mecatrónico considerando un acoplamiento flexible.

## 2.2. Propiedades del servosistema

De acuerdo a Ogata en [8], un sistema es controlable en el tiempo  $t_0$  si se puede llevar de cualquier estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones en un intervalo de tiempo finito. Así también, un sistema es observable en el tiempo  $t_0$  si, con el sistema en el estado  $\mathbf{x}(t_0)$ , es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

Aunque la mayor parte de los sistemas físicos son controlables y observables, los modelos matemáticos correspondientes tal vez no posean la propiedad de controlabilidad y observabilidad. En este caso, es necesario conocer las condiciones bajo las cuales un sistema es controlable y observable. De hecho, las condiciones de controlabilidad y observabilidad, determinan la existencia de una solución completa para un problema de diseño de un sistema de control. Tal vez no exista una solución para este problema, si el sistema considerado no es controlable.

### 2.2.1. Controlabilidad

Un sistema lineal de una entrada y una salida descrito mediante la ecuación de estado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ , es de estado completamente controlable (ver [8]) si y sólo si los vectores  $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$  son linealmente independientes, o la matriz de  $n \times n$ ,

$$C_k = [B \ : \ AB \ : \ \dots \ : \ A^{n-1}B],$$

es de rango  $n$ . La matriz se denomina, por lo común, *matriz de controlabilidad*.

### Caso I: Servosistema con elemento rígido

Para el servosistema del caso I (ver pág. 10), de acuerdo a la ec.(2.6), la matriz de controlabilidad está dada por:  $C_k = [B \ AB \ A^2B]$ ,

$$C_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a\gamma_1 L_a} k_m \\ 0 & \frac{1}{a\gamma_1 L_a} k_m & -\frac{1}{L_a} \left( \frac{1}{a\gamma_1^2} \gamma_2 k_m + \frac{1}{a\gamma_1 L_a} k_m R_a \right) \\ \frac{1}{L_a} & \frac{1}{a\gamma_1 L_a} k_m & \frac{1}{L_a} \left( \frac{1}{L_a^2} R_a^2 - \frac{1}{a^2 \gamma_1} \frac{k_e}{L_a} k_m \right) \end{bmatrix}.$$

Se obtiene que el determinante de la matriz de controlabilidad es:  $\det C_k = -\frac{1}{a^2 \gamma_1^2 L_a^3} K_m^2$ , es no singular; y por tanto, el rango  $C_k = 3$ . Por lo que el sistema es de *estado completamente controlable*.

### Caso II: Servosistema con elemento flexible

De esta misma manera, en referencia a la ec.(2.17) del servosistema del caso II (ver página 14), la matriz de controlabilidad está dada por:  $C_k = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B]$ ,

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{k1,1} & C_{k1,2} & C_{k1,3} & C_{k1,4} & C_{k1,5} \\ C_{k2,1} & C_{k2,2} & C_{k2,3} & C_{k2,4} & C_{k2,5} \\ C_{k3,1} & C_{k3,2} & C_{k3,3} & C_{k3,4} & C_{k3,5} \\ C_{k4,1} & C_{k4,2} & C_{k4,3} & C_{k4,4} & C_{k4,5} \\ C_{k5,1} & C_{k5,2} & C_{k5,3} & C_{k5,4} & C_{k5,5} \end{bmatrix},$$

donde los elementos de la matriz se definen a continuación, para propósitos de simplificación,

$$\begin{aligned} C_{k1,1} &= C_{k1,2} = 0, & C_{k1,3} &= \frac{k_m}{L_a J_m}, & C_{k1,4} &= -\frac{1}{L_a} \left( \frac{B_m}{J_m^2} k_m + \frac{1}{L_a J_m} k_m R_a \right), \\ C_{k1,5} &= -\frac{1}{L_a} \left[ \frac{k_m}{J_m} \left( \frac{K_c}{J_m} - \frac{B_m^2}{J_m^2} + \frac{k_e}{L_a J_m} k_m \right) - \frac{R_a}{L_a} \left( \frac{B_m}{J_m^2} k_m + \frac{1}{L_a J_m} k_m R_a \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{k2,1} &= 0, & C_{k2,2} &= \frac{k_m}{L_a J_m}, & C_{k2,3} &= -\frac{1}{L_a} \left( \frac{B_m}{J_m^2} k_m + \frac{1}{L_a J_m} k_m R_a \right), \\
C_{k2,4} &= -\frac{1}{L_a} \left[ \frac{k_m}{J_m} \left( \frac{K_c}{J_m} - \frac{B_m^2}{J_m^2} + \frac{k_e}{L_a J_m} k_m \right) - \frac{R_a}{L_a} \left( \frac{B_m}{J_m^2} k_m + \frac{1}{L_a J_m} k_m R_a \right) \right], \\
C_{k2,5} &= \frac{1}{L_a} \left\{ \frac{R_a}{L_a} \left[ \frac{k_m}{J_m} \left( \frac{K_c}{J_m} - \frac{B_m^2}{J_m^2} + \frac{k_e}{L_a J_m} k_m \right) - \frac{R_a}{L_a} \left( \frac{B_m}{J_m^2} k_m + \frac{1}{L_a J_m} k_m R_a \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{k_m}{J_m} \left[ B_m \frac{K_c}{J_m^2} + \frac{B_m}{J_m} \left( \frac{K_e}{J_m} - \frac{B_m^2}{J_m^2} + \frac{k_e}{L_a J_m} k_m \right) + \frac{K_e}{L_a} \left( \frac{B_m}{J_m^2} k_m + \frac{1}{L_a J_m} k_m R_a \right) \right] \right\}, \\
C_{k3,1} &= C_{k3,3} = C_{k3,4} = 0, & C_{k3,2} &= \frac{k_m}{L_a J_m}, & C_{k3,5} &= \frac{1}{a\alpha_1} \frac{K_c}{L_a J_m} k_m, \\
C_{k4,1} &= C_{k4,2} = C_{k4,3} = 0, & C_{k4,4} &= \frac{1}{a\alpha_1} \frac{K_c}{L_a J_m} k_m, \\
C_{k4,5} &= -\frac{1}{L_a} \left[ \frac{k_m}{J_m} \left( \frac{1}{a\alpha_1^2} \alpha_2 K_c + \frac{1}{a\alpha_1} B_m \frac{K_c}{J_m} \right) + \frac{1}{a\alpha_1} \frac{K_c}{L_a J_m} k_m R_a \right], \\
C_{k5,1} &= \frac{1}{L_a}, & C_{k5,2} &= -\frac{1}{L_a^2} R_a, & C_{k5,3} &= \frac{1}{L_a} \left( \frac{1}{L_a^2} R_a^2 - \frac{k_e}{L_a J_m} k_m \right), \\
C_{k5,4} &= -\frac{1}{L_a} \left[ \frac{R_a}{L_a} \left( \frac{1}{L_a^2} R_a^2 - \frac{k_e}{L_a J_m} k_m \right) - \frac{k_m}{J_m} \left( \frac{k_e}{L_a^2} R_a + k_e \frac{B_m}{L_a J_m} \right) \right], \\
C_{k5,5} &= -\frac{1}{L_a} \left\{ \frac{k_m}{J_m} \left[ \frac{k_e}{L_a} \left( \frac{1}{L_a^2} R_a^2 - \frac{k_e}{L_a J_m} k_m \right) + \frac{B_m}{J_m} \left( \frac{k_e}{L_a^2} R_a + k_e \frac{B_m}{L_a J_m} \right) - k_e \frac{K_c}{L_a J_m} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{R_a}{L_a} \left[ \frac{R_a}{L_a} \left( \frac{1}{L_a^2} R_a^2 - \frac{k_e}{L_a J_m} k_m \right) - \frac{k_m}{J_m} \left( \frac{k_e}{L_a^2} R_a + k_e \frac{B_m}{L_a J_m} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Se obtiene que el determinante de la matriz de controlabilidad es:  $\det C_k = \frac{1}{a^2 \alpha_1^2} \frac{K_c^2}{L_a^5 J_m^4} k_m^4$ , es no singular; y por tanto, el rango  $C_k = 5$ . Por lo que el sistema es de *estado completamente controlable*.

### 2.2.2. Observabilidad

El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles, a partir de variables que sí lo son en el tiempo mínimo posible (*véase* [8]). Dado un sistema lineal descrito mediante la ecuación de estado  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  y la ecuación de salida  $y = C\mathbf{x}$ , es completamente observable si el estado  $\mathbf{x}(t_0)$  se determina a partir de la observación de  $y(t)$  durante un intervalo de tiempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Por tanto, el sistema es completamente observable si y sólo si la matriz de  $n \times nm$ ,

$$O_k = [C^T \ : \ A^T C^T \ : \ \dots \ : \ (A^T)^{n-1} C^T],$$

es de rango  $n$ , o tiene  $n$  vectores columna linealmente independientes. Ésta se denomina *matriz de observabilidad*.

#### Caso I: Servosistema con elemento rígido

Para el servosistema del caso I (*ver* página 10), de acuerdo a la ec.(2.6), la matriz de observabilidad obtiene mediante  $O_k = [C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T]$ , considerando como salida al desplazamiento de la mesa,  $y = C\mathbf{x} = x_1$ , con  $C = [1 \ 0 \ 0]$ . Por tanto, la matriz de observabilidad es,

$$O_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\gamma_1} \gamma_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a\gamma_1} k_m \end{bmatrix}.$$

Se obtiene que el determinante de la matriz de observabilidad es:  $\det O_k = \frac{1}{a\alpha_1} k_m$ , es no singular; y por tanto, el rango  $O_k = 3$ . Por lo que el sistema es de *estado completamente observable*.

### Caso II: Servosistema con elemento flexible

De esta misma manera, en referencia a la ec.(2.17) del servosistema del caso II (ver pág. 14), la matriz de observabilidad está dada por  $O_k = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, (A^T)^3 C^T, (A^T)^4 C^T]$ , considerando como salida al desplazamiento de la mesa,  $y = C\mathbf{x} = x_3$ , con  $C = [0, 0, 1, 0, 0]$ . Por tanto, la matriz de observabilidad es,

$$O_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a\alpha_1} K_c & -\frac{1}{a\alpha_1^2} \alpha_2 K_c & \frac{1}{a\alpha_1^3} \alpha_2^2 K_c - \frac{1}{a^3 \alpha_1^2} K_c^2 - \frac{1}{a\alpha_1} \frac{K_c^2}{J_m} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a\alpha_1} K_c & -\frac{1}{a\alpha_1^2} \alpha_2 K_c - \frac{1}{a\alpha_1} B_m \frac{K_c}{J_m} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{a^2 \alpha_1} K_c & \frac{1}{a^2 \alpha_1^2} \alpha_2 K_c & \frac{1}{a^4 \alpha_1^2} K_c^2 - \frac{1}{a^2 \alpha_1^3} \alpha_2^2 K_c + \frac{1}{a^2 \alpha_1} \frac{K_c^2}{J_m} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\alpha_1} \alpha_2 & \frac{1}{\alpha_1^2} \alpha_2^2 - \frac{1}{a^2 \alpha_1} K_c & \frac{1}{a^2 \alpha_1^2} \alpha_2 K_c - \frac{1}{\alpha_1} \alpha_2 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} \alpha_2^2 - \frac{1}{a^2 \alpha_1} K_c \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a\alpha_1} \frac{K_c}{J_m} k_m \end{bmatrix}.$$

Se obtiene que el determinante de la matriz de observabilidad es:  $\det O_k = \frac{1}{a^3 \alpha_1^3} \frac{K_c^2}{J_m} k_m$ , es no singular; y por tanto, el rango  $O_k = 5$ . Por lo que el sistema es de *estado completamente observable*.



# Capítulo 3

## Parametrización diferencial del servosistema

En este capítulo se presenta la parametrización diferencial de los dos casos de estudio del servosistema mecatrónico de un eje, tratados en el capítulo anterior. La *Planitud Diferencial* o planitud fue propuesta por Fliess y colaboradores (*ver* [32] y [33]), y es una propiedad que tienen algunos sistemas dinámicos controlados, que permite trivializar las tareas de planificación de trayectoria y simplifica el problema de diseño de control por retroalimentación, tanto de sistemas lineales como no lineales. La planitud es equivalente a la controlabilidad y, por lo tanto, el sistema de interés en este trabajo, exhibe esta propiedad. La propiedad de planitud permite una parametrización completa de todas las variables del servosistema (estados, entrada, salida) en términos de una variable independiente, llamada *salida plana*, y un número finito de sus derivadas en el tiempo. Esto permite el diseño de un controlador para seguimiento de trayectoria del servosistema mecatrónico, teniendo como salida plana al desplazamiento lineal de la mesa y la entrada definida por el voltaje de armadura del motor eléctrico de corriente directa.

### 3.1. Sistemas lineales diferencialmente planos

#### 3.1.1. Sistemas de una entrada y una salida

Un sistema lineal de una entrada y una salida (SISO, del inglés Single Input-Single Output) se dice que es *plano* (de acuerdo a [32], [33]), si existe en este una salida endógena, llamada *salida plana*, la cual es una función de los estados del sistema, y también de un número finito de sus derivadas. Los estados, la entrada y la salida del sistema pueden ser expresados con la salida plana y un número finito de derivadas.

Sea un sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ z &= h(x),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  que son los estados del sistema,  $u \in \mathbb{R}$  como entrada, y  $z \in \mathbb{R}$  que es la salida, se dice que el sistema es plano si existe una salida,

$$y = \theta(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}), \quad (3.2)$$

tal que,

$$\begin{aligned} x &= \lambda(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}), \\ u &= \pi(y, \dot{y}, \dots, y^{(k+1)}), \\ z &= \zeta(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Al conjunto de ecuaciones (3.3), se le denomina *parametrización diferencial* del sistema de la ec.(3.1), en función de la salida plana.

### 3.1.2. Obtención de la salida plana

De acuerdo a lo anterior, si el sistema es controlable, entonces es diferencialmente plano, y tiene por lo tanto una salida plana. La matriz de controlabilidad está dada por,

$$C_k = [B, AB, \dots, A^{(n-1)}B]. \quad (3.4)$$

Ahora, la salida plana puede ser encontrada por medio de la siguiente expresión,

$$y = \lambda x, \quad (3.5)$$

donde  $y$  es la salida plana,  $x$  el vector de estado del sistema y  $\lambda$  está dada por:

$$\lambda = k [0 \ 0 \ \dots \ 1] C_k^{-1}, \quad (3.6)$$

siendo  $k$  una constante que podría resultar la unidad o un parametro o parametros del sistema, que bien, podría no tomarse en cuenta.

Ahora bien, una vez encontrada la salida es necesario conocer las derivadas finitas de ésta de acuerdo al orden del sistema. El número finito de derivadas de la salida plana se pueden encontrar mediante,

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \lambda A^2 \\ \vdots \\ \lambda A^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

donde  $\lambda$  se debe redefinir de acuerdo a la salida plana encontrada. Una vez encontrando  $y^{(n-1)}$ , se deriva una vez más para encontrar  $y^n$ , y se pueda ver la entrada de control.

## 3.2. Sistema parametrizado

### 3.2.1. Caso I: Servosistema con elementos rígidos

Las ecuaciones dinámicas del servosistema están descritas en las ecs.(2.4) y (2.5), y se representan en el espacio de estado por la ec.(2.6). El servosistema es controlable (véase la sección 2.2.1 en la pág. 17, para más detalles), y en consecuencia, es diferencialmente plano.

Para realizar la parametrización diferencial del servosistema, se obtiene primeramente la salida plana mediante las ecs.(3.5) y (3.6), donde  $C_k^{-1}$  es la matriz de controlabilidad invertida del sistema,

$$C_k^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a\gamma_1 L_a k_m} (a^2 \gamma_1^2 R_a^2 + k_m a \gamma_1 L_a R_a + \gamma_2 k_m a L_a^2 - k_e k_m \gamma_1 L_a) & -L_a & L_a \\ \frac{1}{k_m} (a \gamma_2 L_a + a \gamma_1 R_a) & a \gamma_1 \frac{L_a}{k_m} & 0 \\ a \gamma_1 \frac{L_a}{k_m} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo que,

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C_k^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a \gamma_1 \frac{L_a}{K_m} x_1.$$

La salida plana se considera simplemente como  $y = x_1$ , ya que el coeficiente  $a \gamma_1 \frac{L_a}{K_m}$  contiene parámetros del servosistema y no afecta en la parametrización. Para mostrar la parametrización de todas las variables de estado y la entrada de control, se calculan las derivadas en el tiempo de la salida plana  $y = x_1$  hasta la segunda derivada; y se deriva una vez más  $\ddot{y}$  para encontrar la entrada de control  $u$ , por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} y &= x_1, \\ \dot{y} &= x_2, \\ \ddot{y} &= -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} x_2 + \frac{k_m}{\gamma_1 a} x_3 - \frac{1}{\gamma_1} \dot{f}_{ext}, \\ y^{(3)} &= \frac{k_m}{\gamma_1 a L_a} u + \left( \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} - \frac{k_m k_e}{\gamma_1 a^2 L_a} \right) x_2 - \left( \frac{\gamma_2 k_m}{\gamma_1^2 a} + \frac{k_m R_a}{\gamma_1 a L_a} \right) x_3 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} \dot{f}_{ext} - \frac{1}{\gamma_1} \ddot{f}_{ext}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Entonces, las variables de estado y la entrada de control, son parametrizadas en términos de la salida plana y un número finito derivadas, considerando así también la perturbación, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y}, \\ x_3 &= \frac{a}{k_m} (\gamma_1 \ddot{y} + \gamma_2 \dot{y} + \dot{f}_{ext}), \\ u &= \left( \frac{L_a \gamma_1 a}{k_m} \right) y^{(3)} + \left( \frac{L_a \gamma_2 a}{k_m} + \frac{R_a \gamma_1 a}{k_m} \right) \ddot{y} + \left( \frac{R_a \gamma_2 a}{k_m} + \frac{k_e}{a} \right) \dot{y} + \frac{a R_a}{k_m} \dot{f}_{ext} + \frac{a L_a}{k_m} \ddot{f}_{ext}. \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de la entrada de control en función de la salida plana y la perturbación, puede ser reescrita como:

$$u = \eta_1 y^{(3)} + \eta_2 \bar{y} + \eta_3 \dot{\bar{y}} + \frac{aR_a}{k_m} f_{ext} + \frac{aL_a}{k_m} \dot{f}_{ext}, \quad (3.9)$$

donde,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{L_a \gamma_1 a}{k_m}, \\ \eta_2 &= \frac{L_a \gamma_2 a}{k_m} + \frac{R_a \gamma_1 a}{k_m}, \\ \eta_3 &= \frac{R_a \gamma_2 a}{k_m} + \frac{k_e}{a}. \end{aligned}$$

### 3.2.2. Caso II: Servosistema con un elemento flexible

Las ecuaciones dinámicas del servosistema están dadas por las ecs.(2.14) y (2.15), presentadas en la sección 2.1.2; y su representación en el espacio de estado, dada por la ec.(2.17). El servosistema es controlable (*véase* la sección 2.2.1 en la pág. 17, para más detalles), y en consecuencia, es diferencialmente plano.

De acuerdo a las ecs.(3.5) y (3.6), obtenemos la salida plana del servosistema mediante:

$$y = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] C_k^{-1} \mathbf{x},$$

por lo que,

$$y = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] C_k^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = a\alpha_1 \frac{L_a J_m}{K_c k_m} x_3.$$

La salida plana se considera simplemente como  $y = x_3$ . Para mostrar la parametrización de todas las variables de estado y la entrada de control; de la ec.(3.7) se calculan primeramente las derivadas en el tiempo de la salida plana  $y = x_3$ , hasta la cuarta derivada, es decir,

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ y^{(3)} \\ y^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \lambda A^2 \\ \lambda A^3 \\ \lambda A^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

siendo  $\lambda = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ , definida de ésta manera porque la salida plana es  $x_3$ , la tercer componente del vector de estado  $\mathbf{x}$ .

Por lo tanto, considerando hasta la quinta derivada de la salida plana, tenemos:

$$\begin{aligned}
y &= x_3, \\
\dot{y} &= x_4, \\
\ddot{y} &= \frac{K_c}{a\alpha_1}x_1 - \frac{K_c}{a^2\alpha_1}x_3 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_4, \\
y^{(3)} &= -\frac{\alpha_2 K_c}{a\alpha_1^2}x_1 + \frac{K_c}{a\alpha_1}x_2 + \frac{\alpha_2 K_c}{a^2\alpha_1^2}x_3 + \left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \frac{K_c}{a^2\alpha_1}\right)x_4, \\
y^{(4)} &= \left[\frac{K_c}{a\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \frac{K_c}{a^2\alpha_1}\right) - \frac{1}{a\alpha_1}\frac{K_c^2}{J_m}\right]x_1 - \left(\frac{\alpha_2 K_c}{a\alpha_1^2} + \frac{B_m K_c}{a\alpha_1 J_m}\right)x_2 \\
&\quad - \left[\frac{K_c}{a^2\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \frac{K_c}{a^2\alpha_1}\right) - \frac{1}{a^2\alpha_1}\frac{K_c^2}{J_m}\right]x_3 - \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \frac{K_c}{a^2\alpha_1}\right) - \frac{\alpha_2 K_c}{a^2\alpha_1^2}\right]x_4 \\
&\quad + \frac{K_c k_m}{a\alpha_1 J_m}x_5, \\
y^{(5)} &= \left(\frac{k_m K_c}{L_a J_m a\alpha_1}\right)u + \left(\frac{\alpha_2 K_c^2}{a\alpha_1^2 J_m} + \frac{B_m K_c^2}{J_m^2 a\alpha_1} + \frac{\alpha_2 K_c^2}{a^3\alpha_1^3} - \frac{\alpha_2^3 K_c}{a\alpha_1^4} + \frac{\alpha_2 K_c^2}{a^3\alpha_1^3}\right)x_1 \\
&\quad + \left(\frac{B_m K_c \alpha_2}{a\alpha_1^2 J_m} + \frac{B_m^2 K_c}{J_m^2 a\alpha_1} - \frac{K_c k_m k_e}{a\alpha_1 J_m L_a} + \frac{\alpha_2^2 K_c}{a\alpha_1^3} - \frac{K_c^2}{a\alpha_1 J_m} - \frac{K_c^2}{a^3\alpha_1^2}\right)x_2 \\
&\quad + \left(-\frac{K_c^2 \alpha_2}{a^2\alpha_1^2 J_m} - \frac{B_m K_c^2}{J_m^2 a^2\alpha_1} - \frac{\alpha_2 K_c^2}{a^4\alpha_1^3} + \frac{\alpha_2^3 K_c}{a^4\alpha_1^2} - \frac{\alpha_1 K_c^2}{a^4\alpha_1^3}\right)x_3 \\
&\quad + \left(\frac{K_c^2}{a^4\alpha_1^2} + \frac{K_c^2}{J_m a^2\alpha_1} - 2\frac{\alpha_2^2 K_c}{a^2\alpha_1^3} - \frac{\alpha_2^2 K_c}{a^2\alpha_1^3} + \frac{\alpha_1^4}{\alpha_1^4}\right)x_4 \\
&\quad + \left(-\frac{\alpha_1 K_c k_m}{J_m a\alpha_1^2} - \frac{B_m K_c k_m}{J_m^2 a\alpha_1} - \frac{k_m K_c R_a}{a\alpha_1 J_m L_a}\right)x_5.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Entonces, las variables de estado y la entrada de control, son parametrizadas en términos de la salida plana y un número finito derivadas, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\alpha_1 a}{K_c}\ddot{y} + \frac{\alpha_2 a}{K_c}\dot{y} + \frac{1}{a}y, \\
x_2 &= \frac{\alpha_1 a}{K_c}y^{(3)} + \frac{\alpha_2 a}{K_c}\ddot{y} + \frac{1}{a}\dot{y}, \\
x_3 &= y, \\
x_4 &= \dot{y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_5 &= \frac{\alpha_1 a J_m}{K_c k_m} y^{(4)} - \left( -\frac{\alpha_2 J_m a}{K_c k_m} - \frac{B_m \alpha_1 a}{k_m K_c} \right) y^{(3)} - \left[ \left( -\frac{\alpha_2^2 J_m a}{K_m \alpha_1 K_c} - \frac{B_m \alpha_2 a}{K_m K_c} \right) + \frac{\alpha_1^2 a^2 J_m p_1}{K_c^2 K_m} \right] \ddot{y} \\
&+ \left[ -\left( -\frac{\alpha_2 J_m}{a K_m \alpha_1} - \frac{B_m}{a K_m} \right) - \frac{\alpha_1 a^2 J_m \alpha_2 p_1}{K_c^2 K_m} - \left( \frac{\alpha_2 J_m}{\alpha_1 a K_m} - \frac{\alpha_2^3 a J_m}{\alpha_1^2 K_c K_m} + \frac{\alpha_2 J_m}{\alpha_1 a K_m} \right) \right] \dot{y} \\
&+ \left( -\frac{\alpha_1 J_m p_1}{K_c K_m} - \frac{p_2 \alpha_1 a J_m}{K_c K_m} \right) y, \\
u &= \left( \frac{L_a J_m a \alpha_1}{k_m K_c} \right) y^{(5)} + \left( \frac{L_a J_m \alpha_2 a}{k_m K_c} + \frac{L_a B_m a \alpha_1}{k_m K_c} + \frac{R_a J_m a \alpha_1}{k_m K_c} \right) y^{(4)} \\
&+ \left( \frac{L_a J_m}{k_m a} + \frac{L_a a \alpha_1}{k_m} + \frac{L_a B_m \alpha_2 a}{k_m K_c} + \frac{R_a J_m \alpha_2 a}{k_m K_c} + \frac{R_a B_m a \alpha_1}{k_m K_c} + \frac{k_e a \alpha_1}{K_c} \right) y^{(3)} \\
&+ \left( \frac{L_a \alpha_2 a}{k_m} + \frac{L_a B_m}{k_m a} + \frac{R_a J_m}{k_m a} + \frac{R_a a \alpha_1}{k_m} + \frac{R_a B_m \alpha_2 a}{k_m K_c} + \frac{k_e \alpha_2 a}{K_c} \right) \ddot{y} \\
&+ \left( \frac{R_a \alpha_2 a}{k_m} + \frac{R_a B_m}{k_m a} + \frac{k_e}{a} \right) \dot{y},
\end{aligned}$$

que para propósitos de simplificación se considera,

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\frac{K_c^2}{J_m \alpha_1 a} - \frac{K_c^2}{\alpha_1^2 a^3} + \frac{\alpha_2^2 K_c}{\alpha_1^3 a}, \\
p_2 &= \frac{K_c^2}{\alpha_1 a^2 J_m} + \frac{K_c^2}{\alpha_1^2 a^4} - \frac{\alpha_2^2 K_c}{\alpha_1^3 a^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de la entrada de control en función de la salida plana, puede ser reescrita como:

$$u = \epsilon_1 y^{(5)} + \epsilon_2 y^{(4)} + \epsilon_3 y^{(3)} + \epsilon_4 \ddot{y} + \epsilon_5 \dot{y}, \quad (3.11)$$

donde,

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{L_a J_m a \alpha_1}{k_m K_c}, \\
\epsilon_2 &= \frac{L_a J_m \alpha_2 a}{k_m K_c} + \frac{L_a B_m a \alpha_1}{k_m K_c} + \frac{R_a J_m a \alpha_1}{k_m K_c}, \\
\epsilon_3 &= \frac{L_a J_m}{k_m a} + \frac{L_a a \alpha_1}{k_m} + \frac{L_a B_m \alpha_2 a}{k_m K_c} + \frac{R_a J_m \alpha_2 a}{k_m K_c} + \frac{R_a B_m a \alpha_1}{k_m K_c} + \frac{k_e a \alpha_1}{K_c}, \\
\epsilon_4 &= \frac{L_a \alpha_2 a}{k_m} + \frac{L_a B_m}{k_m a} + \frac{R_a J_m}{k_m a} + \frac{R_a a \alpha_1}{k_m} + \frac{R_a B_m \alpha_2 a}{k_m K_c} + \frac{k_e \alpha_2 a}{K_c}, \\
\epsilon_5 &= \frac{R_a \alpha_2 a}{k_m} + \frac{R_a B_m}{k_m a} + \frac{k_e}{a}.
\end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Controlador basado en un observador de perturbación

En este capítulo se presenta el diseño de un controlador por planitud diferencial basado en un observador de perturbación para propósitos de control de movimiento del servosistema mecatrónico, considerando una trayectoria polinomial del tipo Bézier (*véase* la trayectoria en el Apéndice A, pág. 59). Se consideran como perturbaciones a la fuerza externa y a las dinámicas no modeladas del servosistema mecatrónico. A partir de la parametrización diferencial del servosistema mecatrónico, se diseña la estrategia de control. El observador de perturbación se diseña empleando parcialmente una metodología de rechazo activo de perturbaciones, basada en un Observador Proporcional Integral Generalizado propuesto por Sira-Ramírez y colaboradores en [22], inspirado en el contexto de procesamiento de señales. Dicha propuesta considera a la perturbación (debida a las dinámicas no modeladas y/o perturbaciones exógenas) como una señal acotada por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, y se hace una extensión del Observador de Luenberger para estimar la perturbación. En la Figura 4.1 se muestra un diagrama del esquema de control considerado.

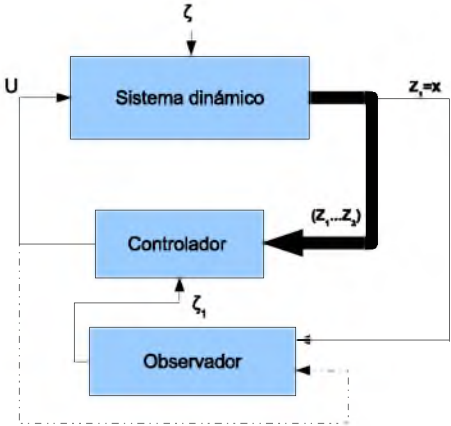


Figura 4.1: Estrategia de control de movimiento con estimación de la perturbación.

## 4.1. Control por planitud diferencial de sistemas lineales

Una vez definida la parametrización diferencial de un sistema lineal de *una entrada y una salida* (véase sección 3.1.2 en la pág. 22), donde  $u$  queda expresada en términos de la salida plana y un número finito de derivadas,

$$u = \pi(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}).$$

Haciendo una transformación, con un controlador auxiliar  $v$  en lugar de la derivada de mayor orden de la salida plana,

$$u = \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, v),$$

el sistema queda en una forma canónica de *Brunovski*,

$$y^{(n)} = v.$$

Nótese que la dinámica del sistema lineal depende ahora sólo de la salida plana de orden  $n$ , y del control auxiliar  $v$ . Por lo tanto, puede proponerse un control auxiliar para el seguimiento de trayectoria de la forma,

$$v = y_d^{(n)}(t) - \alpha_n(y^{(n-1)} - y_d^{(n-1)}(t)) - \dots - \alpha_2(\dot{y} - \dot{y}_d(t)) - \alpha_1(y - y_d).$$

Finalmente, la dinámica del error estaría dada por,

$$e^{(n)}(t) + \alpha_n e^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_2 \dot{e}(t) + \alpha_1 e(t) = 0.$$

El diseño de las ganancias  $\alpha_n, \dots, \alpha_1$  se realiza proponiendo un polinomio característico de la forma,

$$s^n + \alpha_n s^{(n-1)} + \dots + \alpha_2 s + \alpha_1 = 0,$$

tal que sea *Hurwitz*, para garantizar la estabilidad asintótica global del sistema.

## 4.2. Observador de perturbación

El Observador Proporcional Integral Generalizado (Observador GPI) fue propuesto por Sira-Ramírez y colaboradores en [22], y emplea una extensión del Observador de Luenberger para el rechazo activo de perturbaciones.

El Observador de Luenberger (propuesto por Luenberger en [34]), es un observador de estado que estima las variables de estado con base a las mediciones de las variables de salida y de control, y puede diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad<sup>1</sup>. Si el

---

<sup>1</sup>Se dice que el sistema es completamente observable si el estado  $x(t_o)$  se determina a partir de la observación de  $y(t)$  durante un intervalo de tiempo finito,  $t_o \leq t \leq t_1$ . Por tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida (ver [8]).

observador de estado capta toda las variables de estado del sistema, incluso las no disponibles para una medición directa, se denomina *observador de estado de orden completo*.

Considere el sistema lineal definido mediante:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.1)$$

$$y = Cx. \quad (4.2)$$

El estado  $x$  se aproximará mediante el estado  $\tilde{x}$  del modelo dinámico:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x}), \quad (4.3)$$

que representa al observador de estado (*véase* [8] para más detalles). Vemos que el observador de estado tiene a  $y$  y a  $u$  como entradas, y  $\tilde{x}$  como salida. El último término del segundo miembro de esta ecuación del modelo, ec.(4.3), es un término de corrección que contiene la diferencia entre la salida  $y$  medida y la salida  $\tilde{y} = C\tilde{x}$  estimada. La matriz  $L$  funciona como una matriz de ponderación. El término de corrección vigila el estado  $\tilde{x}$ . Ante la presencia de una discrepancia entre las matrices  $A$  y  $B$  usadas en este modelo y las del sistema real, la adición del término de corrección ayuda a reducir los efectos producidos por la diferencia entre el modelo dinámico y el sistema real.

Para el diseño de las ganancias de un observador de estado de orden completo, se requiere obtener la dinámica del error del observador, restando la ec.(4.3) de la ec.(4.1), obteniendo:

$$\dot{e} = (A - LC)e, \quad (4.4)$$

siendo el vector de error  $e$ , la diferencia entre  $x$  y  $\tilde{x}$ , es decir,  $e = x - \tilde{x}$ .

A partir de la ec.(4.4), vemos que el comportamiento dinámico del vector de error se determina mediante los valores característicos de la matriz  $(A - LC)$ . Si dicha matriz es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial  $e(0)$ . Es decir, que  $\tilde{x}(t)$  convergerá a  $x(t)$  sin considerar los valores de  $x(0)$  y  $\tilde{x}(0)$ . Si se eligen los valores característicos de la matriz  $(A - LC)$  en tal forma que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y suficientemente rápido, cualquier vector de error tenderá a *cero* (el origen) con una velocidad adecuada. Si el sistema es completamente observable, se demuestra que es posible seleccionar una matriz  $L$  tal que  $(A - LC)$  tenga valores valores característicos arbitrariamente deseados.

Como se comentó anteriormente, el Observador GPI emplea un observador de Luenberger extendido para el rechazo activo de perturbaciones. Tal estrategia fue inspirada en el contexto de procesamiento de señales. En principio, el proceso de diseño del observador de perturbación, considera que la señal de entrada de perturbación  $\xi(t)$  puede ser localmente aproximada por una familia de polinomios de Taylor de  $(r - 1)$ -ésimo grado:

$$\xi(t) = \sum_{i=0}^{r-1} p_i t^i, \quad (4.5)$$

donde todos los coeficientes  $p_i$  son completamente desconocidos.

La señal de perturbación puede ser localmente descrita por el siguiente modelo matemático lineal en variables de estado:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r, \\ \dot{\xi}_r &= 0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

donde,  $\xi_1 = \xi$ ,  $\xi_2 = \dot{\xi}$ ,  $\xi_3 = \ddot{\xi}$ ,  $\dots$ ,  $\xi_r = \xi^{(r-1)}$ .

Un modelo de estado aproximado extendido para la dinámica de la salida perturbada, es dado por:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n, \\ \dot{z}_n &= -a_0 z_1 - a_1 z_2 - \dots - a_{n-1} z_n - bu + \xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r, \\ \dot{\xi}_r &= 0. \\ y &= z_1.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Un Observador de Luenberger para el sistema de la ecuación anterior, es dado por,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \beta_{r+(n-1)}(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \beta_{r+(n-2)}(y - \hat{y}), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{z}}_{n-1} &= \hat{z}_n + \beta_{r+(n-(n-1))}(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{z}}_n &= -a_0 \hat{z}_1 - a_1 \hat{z}_2 - \dots - a_{n-1} \hat{z}_n - bu + \hat{\xi}_1 + \beta_r(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \beta_{r-(n-(n-1))}(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \beta_{r-(n-(n-2))}(y - \hat{y}), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{r-1} &= \hat{\xi}_r + \beta_1(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_r &= \beta_0(y - \hat{y}),\end{aligned}\tag{4.8}$$

siendo,  $y = z_1$ ,  $\hat{y} = \hat{z}_1$ .

El error de estimación puede ser obtenido al restar la dinámica del observador dado por la ec.(4.8), de la dinámica lineal del sistema extendido dado por la ec.(4.7), obteniendo,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= -\beta_{r+(n-1)}e_1 + e_2, \\
\dot{e}_2 &= -\beta_{r+(n-2)}e_1 + e_3, \\
&\vdots \\
\dot{e}_{n-1} &= -\beta_{r+(n-(n-1))}e_1 + e_n, \\
\dot{e}_n &= -(\beta_5 + a_0)e_1 - a_1e_2 - \cdots - a_{n-1}e_n + e_{z1}, \\
\dot{e}_{z1} &= -\beta_{r-(n-(n-1))}e_1 + e_{z2}, \\
\dot{e}_{z2} &= -\beta_{r-(n-(n-2))}e_1 + e_{z3}, \\
&\vdots \\
\dot{e}_{z(r-1)} &= -\beta_1e_1 + e_{zr}, \\
\dot{e}_{zr} &= -\beta_0e_1,
\end{aligned}$$

con,  $e_1 = y - \hat{y}$ ,  $e_2 = z_2 - \hat{z}_2, \dots, e_n = z_n - \hat{z}_n$ ,  $e_{zi} = \xi_i - \hat{\xi}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Para esta expresión no es difícil ver que la dinámica del error de observación de la salida  $e_1 = y - \hat{y}$ , satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
e_1^{(r+n)} + (\beta_{r+(n-1)} + a_{(n-1)})e_1^{(r+(n-1))} + (\beta_{r+(n-2)} + a_{(n-2)} + \beta_{r+(n-1)}a_{(n-1)})e_1^{(r+(n-2))} \\
+ \cdots + (\beta_{r+1} + a_1 + \beta_{r+2}a_3 + \beta_{r+3}a_2)e_1^{(r+1)} \\
+ (\beta_r + a_0 + \beta_{r+1}a_3 + \beta_{r+2}a_2 + \beta_{r+3}a_1)e_1^{(r)} + \beta_{r-1}e_1^{(r-1)} \\
+ \cdots + \beta_2\ddot{e}_1 + \beta_1\dot{e}_1 + \beta_0e_1 = 0,
\end{aligned}$$

la cual es completamente independiente de cualquiera de los coeficientes  $p_i$ ,  $i = 0, \dots, r-1$ , de la expansión polinomial de Taylor de  $\xi(t)$ . Esto significa que el observador de alta ganancia continuamente se actualiza. Por lo tanto, conforme pasa el tiempo, la señal de entrada de perturbación acotada  $\xi(t)$  se aproxima a la forma de un polinomio en el tiempo de  $(r-1)$ -ésimo grado.

Claramente, los coeficientes del polinomio característico asociado, pueden ser ajustados por medio de una especificación de las ganancias  $\{\beta_{r+(n-1)}, \dots, \beta_1, \beta_0\}$  lo suficientemente lejos del eje imaginario del semiplano complejo izquierdo, tal que el error de estimación de la salida converga exponencialmente asintóticamente a cero.

### 4.3. Caso I: Servosistema con elementos rígidos

#### 4.3.1. Diseño del controlador PD por planitud

Rescribiendo la ecuación entrada-salida perturbada del servosistema (véase ec.(3.9) de la pág. 24), donde la entrada  $u$  está en función de la salida plana  $y$ , de un número finito de derivadas, y de la fuerza externa,

$$y^{(3)} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \ddot{y} + \frac{\eta_3}{\eta_1} \dot{y} = \frac{1}{\eta_1} u + \frac{1}{\eta_1} \xi(t), \quad (4.9)$$

con la fuerza externa reescrita como,

$$\xi(t) = -\frac{aL_a}{k_m} \dot{f}_{ext} - \frac{aR_a}{k_m} f_{ext}.$$

La dinámica de la salida plana del servosistema puede describirse como un sistema lineal perturbado de tercer orden. Se definen como nuevas variables de estado  $z_1 = y$ ,  $z_2 = \dot{y}$  y  $z_3 = \ddot{y}$ , a partir del modelo parametrizado, como sigue,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= -\frac{\eta_3}{\eta_1} z_2 - \frac{\eta_2}{\eta_1} z_3 + \frac{1}{\eta_1} u + \frac{1}{\eta_1} \xi(t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

De la ec.(4.9) se obtiene un controlador basado en la planitud diferencial del sistema, definido por:

$$u = \eta_1 \nu + \eta_2 \ddot{y} + \eta_3 \dot{y} - \xi(t), \quad (4.11)$$

con un control auxiliar  $\nu$  definido por<sup>2</sup>:

$$\nu = y_d^{(3)} - \alpha_3 (\ddot{y} - \ddot{y}_d) - \alpha_2 (\dot{y} - \dot{y}_d) - \alpha_1 (y - y_d).$$

Sustituyendo el controlador dado por la ec.(4.11) en el modelo descrito por la ec.(4.9), se obtiene la dinámica en lazo cerrado, siendo la dinámica del error:

$$e^{(3)} + \alpha_3 \ddot{e} + \alpha_2 \dot{e} + \alpha_1 e = 0,$$

con  $e = y - y_d$ . Por lo tanto, la ecuación característica de la dinámica del error está dada por:

$$s^3 + \alpha_3 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1 = 0.$$

Para el diseño de las ganancias del controlador, se propone un polinomio característico deseado de la forma:  $p_d(s) = (s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ ; tal que sea *Hurwitz*, con  $\zeta, \omega_n, p > 0$ ,

<sup>2</sup>Las derivadas correspondientes de la trayectoria deseada  $y_d$  se definen en el Apéndice A (ver pág. 59).

para garantizar la estabilidad global del sistema. Por lo tanto, las ganancias del controlador quedan definidas de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 2\zeta\omega_n + p, \\ \alpha_2 &= \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p, \\ \alpha_1 &= \omega_n^2 p.\end{aligned}$$

Es evidente que el controlador requiere el conocimiento perfecto de la señal de perturbación  $\xi(t)$ , y esto es un inconveniente en el esquema de control. Sin embargo, podemos tomar ventaja empleando una estrategia de rechazo activo de perturbación basada en una extensión del Observador de Luenberger, presentada en la sección 4.2.

### 4.3.2. Diseño de controlador PID por planitud

Se considera también el diseño de un controlador PID por planitud diferencial para el servosistema. A partir de la ec.(4.11), que es el controlador basado en la planitud diferencial del sistema, se propone un control auxiliar  $\nu$  de la siguiente forma:

$$\nu = y_d^{(3)} - \alpha_3(\ddot{y} - \ddot{y}_d) - \alpha_2(\dot{y} - \dot{y}_d) - \alpha_1(y - y_d) - \alpha_0 \int (y - y_d), \quad (4.12)$$

donde se ha incluido una acción de control integral, con el objeto de que el controlador  $u$  pueda corregir a través de  $\alpha_0 \int (y - y_d)$  el error en estado estable, debido a la perturbación desconocida.

La dinámica del error resulta en una ecuación de la forma,

$$e^{(4)} + \alpha_3 e^{(3)} + \alpha_2 \ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 e = 0,$$

con  $e = y - y_d$ . Por lo tanto, la ecuación característica de la dinámica del error está dada por:

$$s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0.$$

Para el diseño de las ganancias del controlador se propone un polinomio característico deseado de la forma:  $p_d(s) = (s + p)^2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ ; tal que sea *Hurwitz*, con  $\zeta, \omega_n, p > 0$ , para garantizar la estabilidad global del sistema. Por lo tanto, las ganancias del controlador quedan definidas de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 2\zeta\omega_n + 2p, \\ \alpha_2 &= \omega_n^2 + 4\zeta\omega_n p + p^2, \\ \alpha_1 &= 2\omega_n^2 p + 2\zeta\omega_n p^2, \\ \alpha_0 &= \omega_n^2 p^2.\end{aligned}$$

### 4.3.3. Diseño del observador de perturbación

El servosistema es de estado completamente observable (*ver* sección 2.2.2 pág. 18), y para el diseño del observador de perturbación se emplea la metodología descrita en la sección 4.2. Se considera que la señal de perturbación  $\xi(t)$  puede ser aproximada localmente por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, de cuarto grado. De acuerdo a la ec.(4.5) (*véase* pág. 29), la perturbación aproximada toma la siguiente forma:

$$\xi(t) \approx p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4,$$

donde todos los coeficientes  $p_i$  son completamente desconocidos.

La señal de perturbación puede ser localmente descrita por un modelo matemático lineal en variables de estado de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde,  $\xi_1 = \xi(t)$ ,  $\xi_2 = \dot{\xi}(t)$ ,  $\xi_3 = \ddot{\xi}(t)$ ,  $\xi_4 = \xi^{(3)}(t)$ ,  $\xi_5 = \xi^{(4)}(t)$ .

El modelo de estado aproximado extendido para la dinámica de la salida plana perturbada del sistema, puede escribirse de acuerdo a la ec.(4.7). Considerando la ec.(4.10) y la ec.(4.13), la dinámica resulta,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= -\frac{\eta_3}{\eta_1} z_2 - \frac{\eta_2}{\eta_1} z_3 + \frac{1}{\eta_1} u + \frac{1}{\eta_1} \xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Un Observador de Luenberger para el sistema de la ec.(4.14), de acuerdo a la ec.(4.8), se escribe como:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \beta_7(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \beta_6(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_3 &= -\frac{\eta_2}{\eta_1}\hat{z}_3 - \frac{\eta_3}{\eta_1}\hat{z}_2 + \frac{1}{\eta_1}u + \frac{1}{\eta_1}\hat{\xi}_1 + \beta_5(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \beta_4(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \beta_3(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_3 &= \hat{\xi}_4 + \beta_2(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_4 &= \hat{\xi}_5 + \beta_1(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_5 &= \beta_0(y - \hat{y}),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

siendo,  $z_1 = y$ ,  $\hat{z}_1 = \hat{y}$ .

El error de estimación puede ser obtenido al restar la dinámica del observador dada por la ec.(4.15), de la dinámica lineal del sistema extendido dado por la ec.(4.14), resultando,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 - \beta_7 e_1, \\
\dot{e}_2 &= e_3 - \beta_6 e_1, \\
\dot{e}_3 &= -\frac{\eta_2}{\eta_1}e_3 - \frac{\eta_3}{\eta_1}e_2 + \frac{1}{\eta_1}u + \frac{1}{\eta_1}e_{z1} + \beta_5 e_1, \\
\dot{e}_{z1} &= e_{z2} - \beta_4 e_1, \\
\dot{e}_{z2} &= e_{z3} - \beta_3 e_1, \\
\dot{e}_{z3} &= e_{z4} - \beta_2 e_1, \\
\dot{e}_{z4} &= e_{z5} - \beta_1 e_1, \\
\dot{e}_{z5} &= -\beta_0 e_1,
\end{aligned}$$

con,  $e_1 = z_1 - \hat{z}_1$ ,  $e_2 = z_2 - \hat{z}_2$ ,  $e_3 = z_3 - \hat{z}_3$ ,  $e_{zi} = \xi_i - \hat{\xi}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . La dinámica del error escrita en forma vectorial está dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_{z1} \\ \dot{e}_{z2} \\ \dot{e}_{z3} \\ \dot{e}_{z4} \\ \dot{e}_{z5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_5 & -\frac{\eta_3}{\eta_1} & -\frac{\eta_2}{\eta_1} & \frac{1}{\eta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_{z1} \\ e_{z2} \\ e_{z3} \\ e_{z4} \\ e_{z5} \end{bmatrix}.$$

Y su ecuación característica es:

$$\begin{aligned}
s^8 + \left(\beta_7 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right)s^7 + \left(\beta_6 + \frac{\eta_3}{\eta_1} + \frac{\beta_7\eta_2}{\eta_1}\right)s^6 + \left(\beta_5 + \frac{\beta_6\eta_2}{\eta_1} + \frac{\beta_7\eta_3}{\eta_1}\right)s^5 \\
+ \frac{\beta_4}{\eta_1}s^4 + \frac{\beta_3}{\eta_1}s^3 + \frac{\beta_2}{\eta_1}s^2 + \frac{\beta_1}{\eta_1}s + \frac{\beta_0}{\eta_1} = 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Ahora, para el diseño de las ganancias del observador, se propone un polinomio característico deseado de la siguiente forma:

$$p_d(s) = (s + p)^2 (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^3,$$

tal que sea *Hurwitz*, con  $\zeta, \omega_n, p > 0$ ; y las raíces lo suficientemente alejadas del eje imaginario del semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ , tal que el error de estimación tenga una rápida convergencia exponencialmente a cero.

Finalmente, las ganancias del observador quedan definidas como:

$$\begin{aligned}\beta_7 &= \frac{(6\zeta\omega_n + 2p)\eta_1 - \eta_2}{\eta_1}, \\ \beta_6 &= \frac{(12\zeta^2\omega_n^2 + 12\zeta\omega_n p + 3\omega_n^2 + p^2)\eta_1 - \eta_3 - \beta_7\eta_2}{\eta_1}, \\ \beta_5 &= \frac{(8\zeta^3\omega_n^3 + 12\zeta^2\omega_n^2 p + 12\zeta\omega_n^3 + 6\zeta\omega_n^2 p)\eta_1 - \beta_6\eta_2 - \beta_7\eta_3}{\eta_1}, \\ \beta_4 &= (16\zeta^3\omega_n^3 p + 12\zeta^2\omega_n^4 + 12\zeta^2\omega_n^2 p^2 + 24\zeta\omega_n^3 p + 3\omega_n^4 + 3\omega_n^2 p^2)\eta_1, \\ \beta_3 &= (8\zeta^3\omega_n^3 p^2 + 24\zeta^2\omega_n^4 p + 6\zeta\omega_n^5 + 12\zeta\omega_n^3 p^2 + 6p\omega_n^4)\eta_1, \\ \beta_2 &= (12\zeta^2\omega_n^4 p^2 + 12\zeta\omega_n^5 p + \omega_n^6 + 3\omega_n^4 p^2)\eta_1, \\ \beta_1 &= (6\zeta\omega_n^5 p^2 + 2\omega_n^6 p)\eta_1, \\ \beta_0 &= \omega_n^6 p^2 \eta_1.\end{aligned}$$

#### 4.3.4. Resultados de simulación numérica

Se considera que el servosistema se encuentra perturbado por una fuerza externa<sup>3</sup> del tipo sinusoidal  $f_{ext} = A \sin(2\pi f)$ , con  $A = 0,5[N]$  y  $f = 5[Hz]$ ; tal como se muestra en la Figura 4.2. Se ha escogido una señal sinusoidal por tener un comportamiento suave.

#### Controlador PD sin observador de perturbación

El controlador está descrito por la ec.(4.11), donde  $\xi(t)$  depende de la fuerza externa  $f_{ext}$  que se considera completamente desconocida, y no se estima. Sin embargo, la dinámica del servosistema dada por las ecs.(2.4) y (2.5), está siendo afectada por dicha fuerza externa  $f_{ext}$ . Las ganancias del controlador se ajustaron con valores de  $\zeta = 0,7071$ ,  $\omega_n = 80$  y  $p = 100$ ; ya que con estos valores se minimiza el error de seguimiento. Los resultados de simulación se muestran en la Figura 4.3.

<sup>3</sup>Dicha fuerza externa puede ser por ejemplo, las fuerzas de corte en un proceso de maquinado que son entradas de perturbación al sistema, también la fricción dinámica como una perturbación endógena.

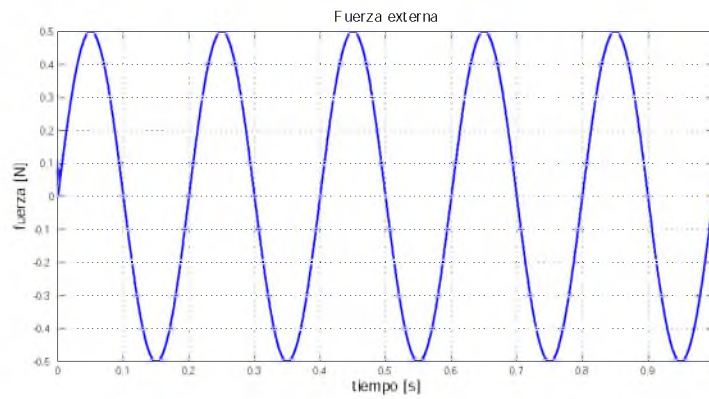


Figura 4.2: Fuerza externa sinusoidal  $A \sin(2\pi f)$ , con  $A = 0,5[N]$  y  $f = 5[Hz]$ .

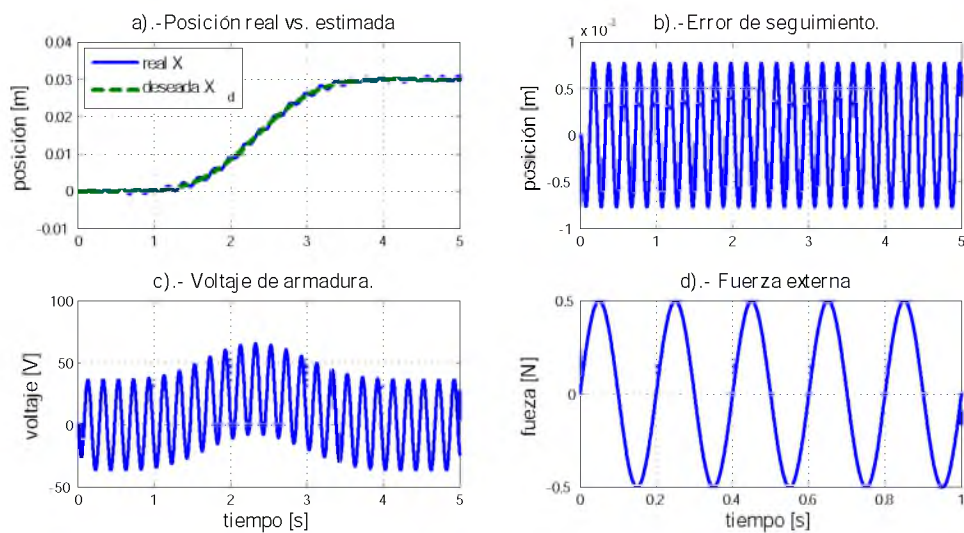


Figura 4.3: Resultados de simulación numérica del controlador PD sin observador de perturbación.

### Controlador PID sin observador de perturbación

El controlador está descrito por la ec. (4.11), donde  $\xi(t)$  se desconoce, y el control auxiliar está dado por la ec.(4.12). La dinámica del servosistema dada por las ecs.(2.4) y (2.5), está sometida a una fuerza externa  $f_{ext}$  completamente desconocida, definida anteriormente. La acción de control integral se ha incorporado al controlador con el fin de rechazar la perturbación. Las ganancias del controlador se ajustaron con valores de  $\zeta = 0,7071$ ,  $\omega_n = 80$  y  $p = 100$ ; ya que con estos valores se minimiza el error de seguimiento. Los resultados de simulación se muestran en la Figura 4.4.

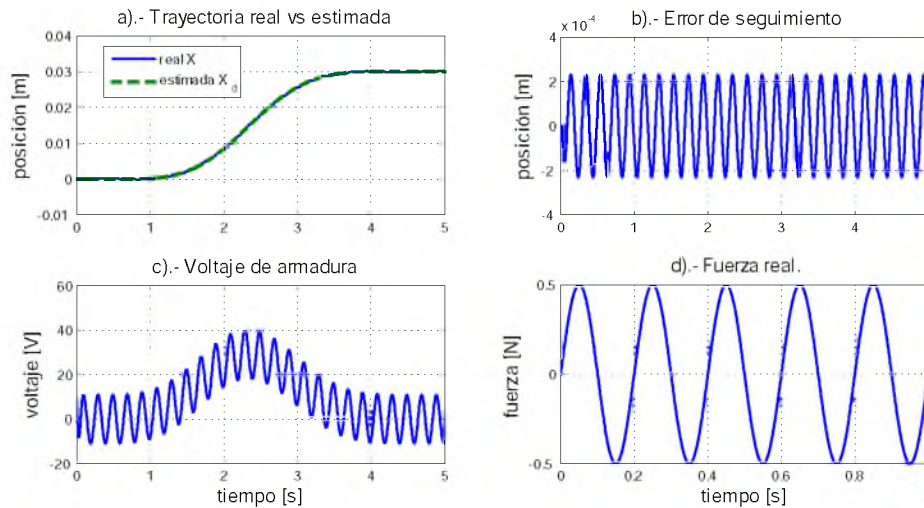


Figura 4.4: Resultados de simulación numérica del esquema de control PID sin observador de perturbación.

### Estudio A. Controlador PD con Observador de perturbación: aplicación de una fuerza externa desconocida y la dinámica del servosistema completamente conocida.

El controlador basado en observador de perturbación empleado, está dado por la ec.(4.11); donde  $\xi(t)$  es reemplazado por  $\hat{\xi}(t) = \hat{\xi}_1$ , que es la perturbación estimada por el observador de la ec.(4.15). En este sentido, la entrada de perturbación al servosistema  $\xi(t)$ , es estimada y compensada vía el controlador, permitiendo seguir la trayectoria deseada. Los resultados de simulación numérica se muestran en la Figura 4.5.

Las ganancias del controlador fueron ajustadas con valores de  $\zeta = 0,7071$ ,  $\omega_n = 12$  y  $p = 12$ ; y las ganancias del observador de perturbación con valores de  $\zeta = 2$ ,  $\omega_n = 500$ ,  $p = 500$ . Los resultados de simulación numérica de la estimación de las derivadas de la salida plana y el error de observación, se muestran en la Figura 4.6.

Los resultados de simulación muestran que el seguimiento de la trayectoria es satisfactorio, así como la estimación de la perturbación.

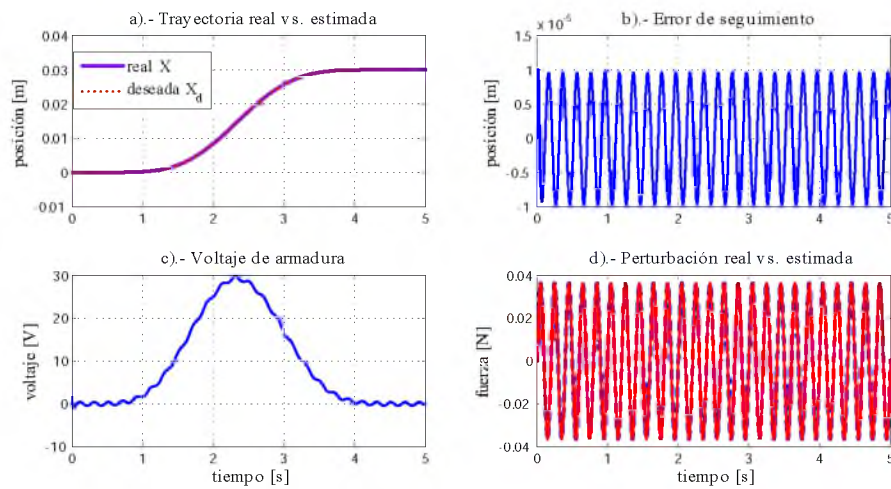


Figura 4.5: Resultados de simulación numérica del esquema de control PD por planitud con observador de perturbación, ante una fuerza externa.

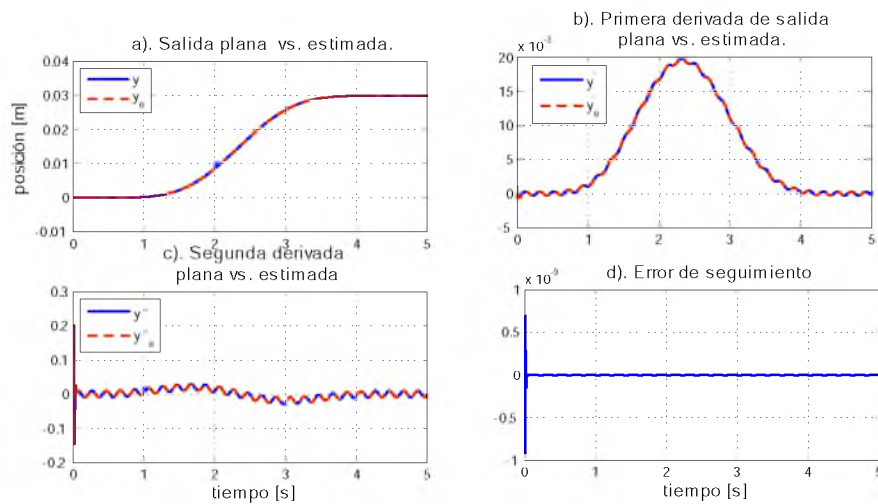


Figura 4.6: Resultado de simulación numérica de la estimación de las derivadas de la salida plana y el error de observación.

### Estudio B. Controlador PD con Observador de perturbación: algunas dinámicas no modeladas y fuerza externa desconocida

En este caso de estudio, el controlador tiene conocimiento parcial de la dinámica del servosistema mecatrónico y la fuerza externa es desconocida. Los términos de fricción viscosa del servosistema se consideran como desconocidos, al igual que la fuerza externa. Todo este conjunto de terminos desconocidos, son ahora la perturbación  $\xi(t)$  que se requiere estimar y compensar vía el controlador. De acuerdo a lo anterior, el controlador propuesto, en orden a la planitud diferencial del servosistema de la ec.(3.9), está dado por,

$$u = \eta_{1c}\nu + \eta_{2c}\ddot{y} + \eta_{3c}\dot{y} - \xi(t), \quad (4.17)$$

considerando el control auxiliar  $\nu$  de la forma,

$$\nu = y_d^{(3)} - \alpha_3(\ddot{y} - \ddot{y}_d) - \alpha_2(\dot{y} - \dot{y}_d) - \alpha_1(y - y_d),$$

donde la perturbación ahora es,

$$\xi(t) = -\frac{L_a\gamma_2 a}{k_m}\ddot{y} - \frac{R_a\gamma_2 a}{k_m}\dot{y} - \frac{aL_a}{k_m}\dot{f}_{ext} - \frac{aR_a}{k_m}f_{ext},$$

y los coeficientes de la ec.(4.17) están dados por,

$$\eta_{1c} = \frac{L_a\gamma_1 a}{k_m}, \quad \eta_{2c} = \frac{R_a\gamma_1 a}{k_m}, \quad \eta_{3c} = \frac{k_e}{a}.$$

Se ha considerado el observador de perturbación de la ec.(4.15) (véase pág. 35), con las modificaciones correspondientes de los coeficientes de la ec(4.17),

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \beta_7(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \beta_6(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{z}}_3 &= -\frac{\eta_{2c}}{\eta_{1c}}\hat{z}_3 - \frac{\eta_{3c}}{\eta_{1c}}\hat{z}_2 + \frac{1}{\eta_{1c}}u + \frac{1}{\eta_{1c}}\hat{\xi}_1 + \beta_5(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \beta_4(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \beta_3(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_3 &= \hat{\xi}_4 + \beta_2(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_4 &= \hat{\xi}_5 + \beta_1(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{\xi}}_5 &= \beta_0(y - \hat{y}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde los parámetros  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  fueron sustituidos por  $\eta_{1c}, \eta_{2c}, \eta_{3c}$  respectivamente. Así también, del controlador de la ec.(4.17), se ha sustituido  $\xi(t)$  por  $\hat{\xi}(t) = \hat{\xi}_1(t)$ , que es la perturbación estimada por el observador de la ec.(4.18). En este sentido, la perturbación es estimada y compensada vía el controlador. Los resultados de simulación numérica de éste control de movimiento vía el observador se muestran en la Figura 4.7. En dicha figura se

muestran los resultados de simulación numérica del servosistema modelado con elementos rígidos, considerando el conocimiento parcial del sistema, siendo la perturbación desconocida los términos de fricción viscosa y la fuerza externa.

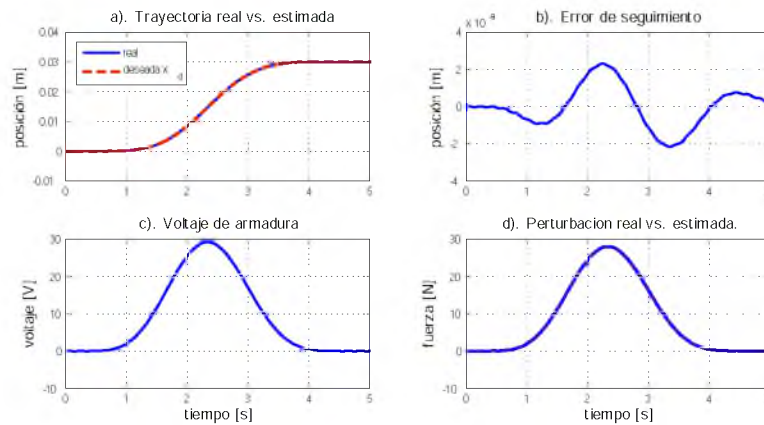


Figura 4.7: Resultados de simulación numérica del servosistema, considerando el conocimiento parcial del sistema y la perturbación desconocida.

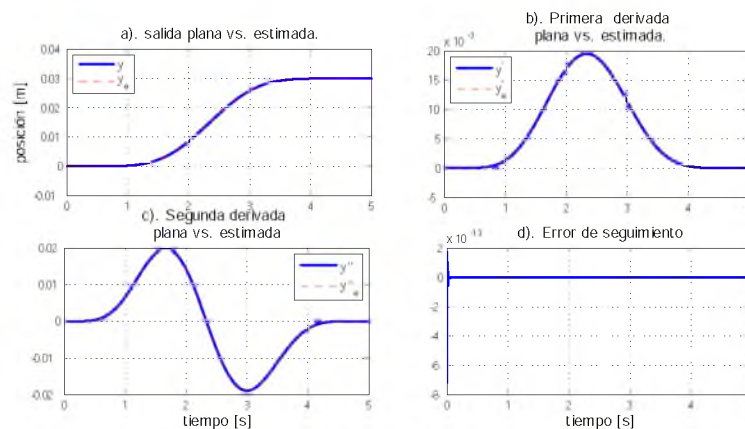


Figura 4.8: Resultado de simulación numérica del error del observador y la estimación de las derivadas de la salida plana, considerando el conocimiento parcial del modelo del servosistema.

Las ganancias del controlador se ajustaron con valores de  $\zeta = 0,7071$ ,  $\omega_n = 5$  y  $p = 5$ ; y las ganancias del observador de perturbación con valores de  $\zeta = 2$ ,  $\omega_n = 2800$  y  $p = 2800$ . Los resultados de simulación numérica de la estimación de las derivadas de la salida plana y el error de observación, se muestran en la Figura 4.8.

## 4.4. Caso II: Servosistema con un elemento flexible

### 4.4.1. Diseño del controlador PD por planitud

De acuerdo a la ec.(3.11) (*ver* pág. 26), donde la entrada  $u$  está en función de la salida plana y de un número finito de derivadas, puede ser rescrita como,

$$y^{(5)} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}y^{(4)} + \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}y^{(3)} + \frac{\epsilon_4}{\epsilon_1}\ddot{y} = \frac{1}{\epsilon_1}u + \frac{1}{\epsilon_1}\xi(t), \quad (4.19)$$

donde la perturbación es,

$$\xi(t) = -\epsilon_5\dot{y}.$$

La dinámica de la salida plana del servosistema, puede describirse como un sistema lineal de quinto orden, con  $z_1 = y$ ,  $z_2 = \dot{y}$ ,  $z_3 = \ddot{y}$ ,  $z_4 = y^{(3)}$ , y  $z_5 = y^{(4)}$ , como sigue,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_4 &= z_5, \\ \dot{z}_5 &= -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}z_5 - \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}z_4 - \frac{\epsilon_4}{\epsilon_1}z_2 + \frac{1}{\epsilon_1}u - \frac{1}{\epsilon_1}\xi(t). \end{aligned} \quad (4.20)$$

De la ec.(4.19), se obtiene un controlador basado en la planitud diferencial del sistema, definido por,

$$u = \epsilon_1\nu + \epsilon_2y^{(4)} + \epsilon_3y^{(3)} + \epsilon_4\ddot{y} - \xi(t), \quad (4.21)$$

donde  $\nu$  es el controlador auxiliar<sup>4</sup>,

$$\nu = y_d^{(5)} - \gamma_5 \left( y^{(4)} - y_d^{(4)} \right) - \gamma_4 \left( y^{(3)} - y_d^{(3)} \right) - \gamma_3 (\ddot{y} - \ddot{y}_d) - \gamma_2 (\dot{y} - \dot{y}_d) - \gamma_1 (y - y_d).$$

Sustituyendo el controlador dado por la ec.(4.21), en la ec.(4.19), se obtiene la dinámica en lazo cerrado, siendo la dinámica del error:

$$e^{(5)} + \gamma_5e^{(4)} + \gamma_4e^{(3)} + \gamma_3\ddot{e} + \gamma_2\dot{e} + \gamma_1e = 0,$$

con  $e = y - y_d$ .

Por lo tanto, la ecuación característica de la dinámica del error está dada por,

$$s^5 + \gamma_5s^4 + \gamma_4s^3 + \gamma_3s^2 + \gamma_2s + \gamma_1 = 0.$$

---

<sup>4</sup>Las derivadas correspondientes de la trayectoria deseada  $y_d$  se definen en el Apéndice A (*ver* pág. 59).

Para el diseño de las ganancias del controlador, se propone un polinomio característico deseado de la siguiente forma:  $p_d(s) = (s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^2$ ; tal que sea *Hurwitz*, con  $\zeta, \omega_n, p > 0$ , para garantizar la estabilidad global del sistema. Por lo tanto, las ganancias del controlador quedan definidas de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\gamma_5 &= 4\zeta\omega_n + p, \\ \gamma_4 &= 4\zeta^2\omega_n^2 + 4p\omega_n\zeta + 2\omega_n^2, \\ \gamma_3 &= 4p\zeta^2\omega_n^2 + 4\zeta\omega_n^3 + 2p\omega_n^2, \\ \gamma_2 &= 4p\zeta\omega_n^3 + \omega_n^4, \\ \gamma_1 &= p\omega_n^4.\end{aligned}$$

Es evidente que el controlador requiere el conocimiento perfecto de la señal de perturbación  $\xi(t)$ , y esto es un inconveniente en el esquema de control. Sin embargo, podemos tomar ventaja empleando una estrategia de rechazo activo de perturbación basada en la extensión del Observador de Luenberger, presentada en la sección 4.2.

#### 4.4.2. Diseño del observador de perturbación

El servosistema es de estado completamente observable (*ver* sección 2.2.2 pág. 19), y para el diseño del observador de perturbación se emplea la metodología descrita en la sección 4.2. Se considera que la señal de perturbación  $\xi(t)$  puede ser aproximada localmente por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, de cuarto grado. De acuerdo a la ec.(4.5) (*véase* pág. 29), la perturbación aproximada toma la siguiente forma:

$$\xi(t) \approx p_0 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3 + p_4t^4,$$

donde todos los coeficientes  $p_i$  son completamente desconocidos.

Entonces, la señal de perturbación puede ser localmente descrita por un modelo matemático lineal en variables de estado, como,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0.\end{aligned}\tag{4.22}$$

donde,  $\xi_1 = \xi(t)$ ,  $\xi_2 = \dot{\xi}(t)$ ,  $\xi_3 = \ddot{\xi}(t)$ ,  $\xi_4 = \xi^{(3)}(t)$ ,  $\xi_5 = \xi^{(4)}(t)$ .

El modelo de estado aproximado extendido para la dinámica de la salida plana perturbada del sistema, puede escribirse de acuerdo a la ec.(4.7). Considerando la ec.(4.20) y la ec.(4.22), la dinámica resulta,

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2, \\
\dot{z}_2 &= z_3, \\
\dot{z}_3 &= z_4, \\
\dot{z}_4 &= z_5, \\
\dot{z}_5 &= -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} z_5 - \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} z_4 - \frac{\epsilon_4}{\epsilon_1} z_3 + \frac{1}{\epsilon_1} u - \frac{1}{\epsilon_1} \xi(t), \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\
\dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\
\dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\
\dot{\xi}_5 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Un Observador de Luenberger para el sistema de la ec.(4.23), es dado por,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \beta_9(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \beta_8(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_3 &= \hat{z}_4 + \beta_7(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_4 &= \hat{z}_5 + \beta_6(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_5 &= -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \hat{z}_4 - \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} \hat{z}_3 - \frac{\epsilon_4}{\epsilon_1} \hat{z}_2 + \frac{1}{\epsilon_1} u + \frac{1}{\epsilon_1} \hat{\xi}_1 + \beta_5(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \beta_4(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \beta_3(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_3 &= \hat{\xi}_4 + \beta_2(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_4 &= \hat{\xi}_5 + \beta_1(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_5 &= \beta_0(y - \hat{y}),
\end{aligned} \tag{4.24}$$

siendo,  $z_1 = y$ ,  $\hat{z}_1 = \hat{y}$ .

El error de estimación puede ser obtenido al restar la dinámica del observador dado por la ec.(4.24), de la dinámica lineal del sistema extendido dado por la ec.(4.23), obteniendo,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 - \beta_9 e_1, \\
\dot{e}_2 &= e_3 - \beta_8 e_1, \\
\dot{e}_3 &= e_4 - \beta_7 e_1, \\
\dot{e}_4 &= e_5 - \beta_6 e_1, \\
\dot{e}_5 &= -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} e_5 - \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} e_4 - \frac{\epsilon_4}{\epsilon_1} e_3 + \frac{1}{\epsilon_1} u + \frac{1}{\epsilon_1} e_{z1} - \beta_5 e_1, \\
\dot{e}_{z1} &= e_{z2} - \beta_4 e_1, \\
\dot{e}_{z2} &= e_{z3} - \beta_3 e_1, \\
\dot{e}_{z3} &= e_{z4} - \beta_2 e_1, \\
\dot{e}_{z4} &= e_{z5} - \beta_1 e_1, \\
\dot{e}_{z5} &= -\beta_0 e_1,
\end{aligned}$$

con,  $e_1 = z_1 - \hat{z}_1$ ,  $e_2 = z_2 - \hat{z}_2$ ,  $e_3 = z_3 - \hat{z}_3$ ,  $e_4 = z_4 - \hat{z}_4$ ,  $e_5 = z_5 - \hat{z}_5$ ,  $e_{zi} = \xi_i - \hat{\xi}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . La dinámica del error escrita en forma vectorial está dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ \dot{e}_5 \\ \dot{e}_{z1} \\ \dot{e}_{z2} \\ \dot{e}_{z3} \\ \dot{e}_{z4} \\ \dot{e}_{z5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_5 & 0 & -\frac{\epsilon_4}{\epsilon_1} & -\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} & -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_{z1} \\ e_{z2} \\ e_{z3} \\ e_{z4} \\ e_{z5} \end{bmatrix},$$

y su ecuación característica es,

$$\begin{aligned}
s^{10} + \left( \beta_9 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) s^9 + \left( \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} + \beta_8 + \frac{\beta_9 \epsilon_2}{\epsilon_1} \right) s^8 + \left( \beta_7 + \frac{\epsilon_4}{\epsilon_1} + \frac{\beta_8 \epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{\beta_9 \epsilon_3}{\epsilon_1} \right) s^7 \\
+ \left( \frac{\epsilon_5 + \beta_6 \epsilon_1 + \beta_7 \epsilon_2 + \beta_8 \epsilon_3 + \beta_9 \epsilon_4}{\epsilon_1} \right) s^6 + \left( \frac{\epsilon_6 + \beta_5 \epsilon_1 + \beta_6 \epsilon_2 + \beta_7 \epsilon_3 + \beta_8 \epsilon_4 + \beta_9 \epsilon_5}{\epsilon_1} \right) s^5 \\
+ \frac{\beta_4}{\epsilon_1} s^4 + \frac{\beta_3}{\epsilon_1} s^3 + \frac{\beta_2}{\epsilon_1} s^2 + \frac{\beta_1}{\epsilon_1} s + \frac{\beta_0}{\epsilon_1} = 0.
\end{aligned}$$

Ahora, para el diseño de las ganancias del observador se propone un polinomio característico deseado de la siguiente forma,

$$p_d(s) = (s + p)^2 (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^4,$$

tal que sea *Hurwitz*, con  $\zeta, \omega_n, p > 0$ ; y las raíces lo suficientemente alejadas del eje imaginario del semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ , tal que el error de estimación tenga una rápida convergencia exponencialmente a cero.

Finalmente, las ganancias del observador quedan definidas como,

$$\begin{aligned}
\beta_9 &= \frac{(8\zeta\omega_n + 2p) \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1}, \\
\beta_8 &= \frac{(24\zeta^2\omega_n^2 + 16\zeta\omega_n p + 4\omega_n^2 + p^2) \epsilon_1 - \epsilon_3 - \beta_9\epsilon_2}{\epsilon_1}, \\
\beta_7 &= \frac{(32\zeta^3\omega_n^3 + 48p\zeta^2\omega_n^2 + 24\zeta\omega_n^3 + 8\zeta\omega_n p^2 + 8p\omega_n^2) \epsilon_1 - \epsilon_4 - \beta_8\epsilon_2 - \beta_9\epsilon_3}{\epsilon_1}, \\
\beta_6 &= \frac{(16\zeta^4\omega_n^4 + 64p\zeta^3\omega_n^3 + 48\zeta^2\omega_n^4 + 24\zeta^2\omega_n^2 p^2 + 48p\zeta\omega_n^3 + 6\omega_n^4 + 4p^2\omega_n^2) \epsilon_1 - \epsilon_5 - \beta_6\epsilon_2 - \beta_7\epsilon_3 - \beta_8\epsilon_4 - \beta_9\epsilon_5}{\epsilon_1}, \\
\beta_5 &= \frac{(32\zeta^4\omega_n^4 p + 32\zeta^3\omega_n^5 + 32\zeta^3\omega_n^3 p^2 + 96\zeta^2\omega_n^4 p + 24\zeta\omega_n^5 + 24\zeta p^2\omega_n^3 + 12p\omega_n^4) \epsilon_1 - \epsilon_6 - \beta_6\epsilon_2 - \beta_7\epsilon_3 - \beta_8\epsilon_4 - \beta_9\epsilon_5}{\epsilon_1}, \\
\beta_4 &= (16\zeta^4\omega_n^4 p^2 + 64\zeta^3\omega_n^5 p + 24\zeta^2\omega_n^6 + 48\zeta^2\omega_n^4 p^2 + 48\zeta p\omega_n^5 + 4\omega_n^6 + 6p^2\omega_n^4) \epsilon_1, \\
\beta_3 &= (32p^2\zeta^3\omega_n^5 + 48p\zeta^2\omega_n^6 + 8\zeta\omega_n^7 + 24\zeta p^2\omega_n^5 + 8p\omega_n^6) \epsilon_1, \\
\beta_2 &= (24p^2\zeta^2\omega_n^6 + 16p\zeta\omega_n^7 + 4p^2\omega_n^6 + \omega_n^8) \epsilon_1, \\
\beta_1 &= (8\zeta p^2\omega_n^7 + 2p\omega_n^8) \epsilon_1, \\
\beta_0 &= \omega_n^8 p^2 \epsilon_1.
\end{aligned}$$

### 4.4.3. Resultados de simulación numérica

#### Estudio A. Controlador PD con Observador de perturbación: Dinámica parcialmente conocida del servosistema con un sólo término desconocido.

En este caso de estudio, se ha considerado la dinámica parcialmente conocida del servosistema, donde un término del modelo parametrizado de la ec.(3.11) es desconocido. Tal término desconocido, es la perturbación que se requiere estimar y compensar vía el controlador. El controlador empleado para el seguimiento de trayectoria de acuerdo a la plantitud diferencial del servosistema, está dado por la ec.(4.21), donde  $\xi(t)$  es reemplazado por  $\hat{\xi}(t) = \xi_1(t)$ , que es la estimación de la perturbación de acuerdo al observador propuesto de la ec.(4.24).

Los resultados de simulación numérica se muestran en la Figura 4.9. Las ganancias del controlador fueron ajustadas con los valores de  $\zeta = 2$ ,  $\omega_n = 80$  y  $p = 80$ , y las ganancias del observador con valores  $\zeta = 10$ ,  $\omega_n = 3000$  y  $p = 3000$ ; ya que con estos valores se minimiza el error de seguimiento y el error del observador.

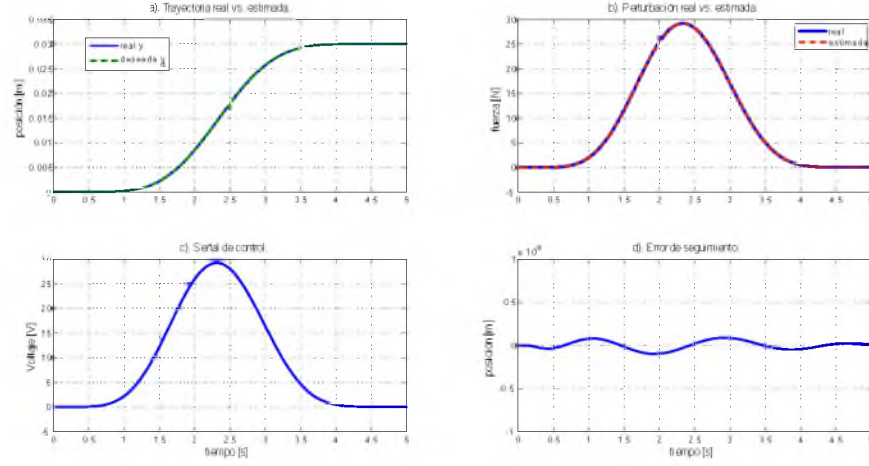


Figura 4.9: Resultados de simulación numérica del servosistema con elemento flexible, considerando a un término de la dinámica como desconocido.

### Estudio B. Controlador PD con Observador de perturbación: Dinámica parcialmente conocida del servosistema con dos términos desconocidos.

Ahora se considera la dinámica parcialmente conocida del servosistema, donde dos términos del modelo parametrizado de la ec.(3.11) son desconocidos. Este conjunto de términos desconocidos, son ahora la perturbación que se requiere estimar y compensar vía el controlador. De acuerdo a lo anterior, el controlador propuesto, en orden a la planitud diferencial del servosistema de la ec.(3.11) está dado por,

$$u = \epsilon_1 \nu + \epsilon_2 y^{(4)} + \epsilon_3 y^{(3)} - \xi(t), \quad (4.25)$$

con un control auxiliar  $\nu$  de la forma,

$$\nu = y_d^{(5)} - \gamma_5 (y^{(4)} - y_d^{(4)}) - \gamma_4 (y^{(3)} - y_d^{(3)}) - \gamma_3 (\ddot{y} - \ddot{y}_d) - \gamma_2 (\dot{y} - \dot{y}_d) - \gamma_1 (y - y_d),$$

donde la perturbación ahora es,

$$\xi(t) = -\epsilon_4 \ddot{y} - \epsilon_5 \dot{y}.$$

Para éste caso se ha considerado el observador de perturbación de la ec.(4.24) con una simple modificación,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \beta_9(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + \beta_8(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_3 &= \hat{z}_4 + \beta_7(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_4 &= \hat{z}_5 + \beta_6(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{z}}_5 &= -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\hat{z}_4 - \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}\hat{z}_3 + \frac{1}{\epsilon_1}u + \frac{1}{\epsilon_1}\hat{\xi}_1 + \beta_5(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \beta_4(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \beta_3(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_3 &= \hat{\xi}_4 + \beta_2(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_4 &= \hat{\xi}_5 + \beta_1(y - \hat{y}), \\
\dot{\hat{\xi}}_5 &= \beta_0(y - \hat{y}).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Del controlador de la ec.(4.25), se ha sustituido  $\xi(t)$  por  $\hat{\xi}(t) = \hat{\xi}_1(t)$ , que es la perturbación estimada por el observador de la ec.(4.26). En este sentido, la perturbación es estimada y compensada vía el controlador. Los resultados de simulación numérica de esta estrategia de control de movimiento vía el observador se muestran en la Figura 4.10. Las ganancias del controlador fueron ajustadas con los valores de  $\zeta = 2, \omega_n = 280$  y  $p = 280$ ; y las ganancias del observador con  $\zeta = 10, \omega_n = 3000$  y  $p = 3000$ ; ya que con estos valores se minimiza el error de seguimiento y el error del observador.

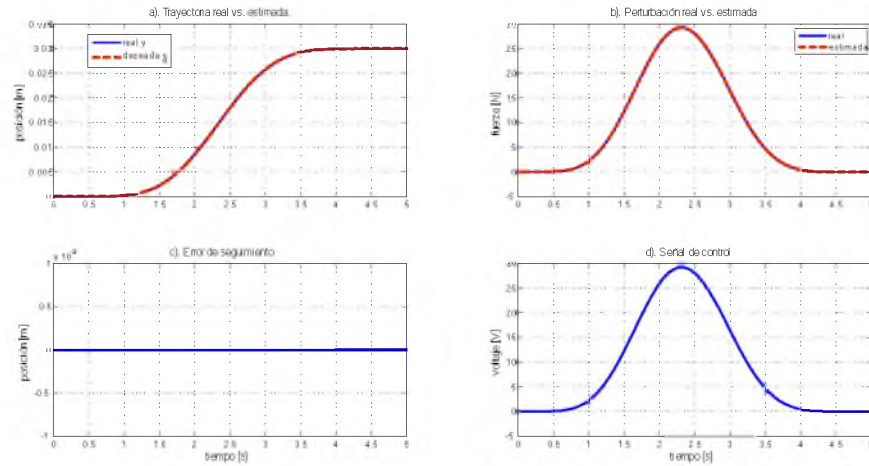


Figura 4.10: Resultados de simulación numérica del servosistema con elemento flexible, considerando dos términos desconocidos como la perturbación.

# Capítulo 5

## Conclusiones y perspectivas

### 5.1. Conclusiones generales

Se estudió a un servosistema mecatrónico de un eje para propósitos de control de movimiento. El servosistema considerado estuvo compuesto por un motor eléctrico de corriente directa acoplado a un mecanismo que transforma el movimiento angular en movimiento lineal, conocido industrialmente como mesa lineal (constituido por un husillo y tuerca).

Las ecuaciones dinámicas del servosistema se obtuvieron considerando la dinámica lineal del motor eléctrico y de la mesa, sin considerar los efectos que producen algunas dinámicas; tales como, el efecto Stribeck (transición de la fricción estática a dinámica) debido a la lubricación del husillo-tuerca y chumaceras, las dinámicas inducidas en el movimiento debido a las deformaciones laterales o axiales del husillo por la carga existente, o dinámicas laterales o axiales producidas por el acoplamiento entre la flecha del motor eléctrico con el husillo. Se consideraron dos casos de estudio para el servosistema: el Caso I consideró todos los elementos como cuerpos rígidos, y en el Caso II se consideró como flexible el acoplamiento entre el motor eléctrico y el husillo. Los modelos matemáticos del servosistema fueron obtenidos por las ecuaciones Euler-Lagrange.

Se explotó la propiedad de planitud que tiene el servosistema, ya que es completamente controlable. La planitud diferencial del servosistema permitió parametrizar la dinámica en términos de una salida plana (dada por el desplazamiento lineal de la mesa); y se obtuvo una ecuación entrada-salida, siendo la entrada el voltaje de armadura del motor eléctrico. Así también, se diseñaron controladores basados en la planitud diferencial del sistema, y un observador de perturbación mediante una extensión del observador de Luenberger.

Para el Caso I, las Figuras 4.3, 4.4 y 4.5 (*ver* págs. 37, 38, 39) muestran los resultados de simulación numérica del desempeño de los controladores PD, PID y PD+Observador de perturbación, respectivamente; considerando una fuerza externa como perturbación de entrada al servosistema. De los resultados del controlador PD, se observó que el error de seguimiento está cerca de  $1 \times 10^{-3}$  [m], y la señal de control (voltaje de armadura) tiene oscilaciones en amplitudes pico a pico de más de 40 [V]. Tales resultados fueron obtenidos

con ganancias ajustadas por los valores de  $\zeta = 0,7071$ ,  $\omega_n = 80$  y  $p = 100$ , para minimizar el error de seguimiento. En cuanto a los resultados del controlador PID, se observó que el error de seguimiento está alrededor de  $2 \times 10^{-4}$  [m], y la señal de control tiene oscilaciones en amplitudes pico a pico de 20 [V]. Estos resultados fueron obtenidos considerando los mismos valores de  $\zeta$ ,  $\omega_n$  y  $p$ , usados en el controlador PD. Se observó que el controlador PD+Observador de perturbación presenta un mejor desempeño en el seguimiento de la trayectoria deseada, donde las ganancias para el controlador fueron ajustadas con valores de  $\zeta = 0,7071$ ,  $\omega_n = 12$  y  $p = 12$ , que están por debajo a los usados en los controladores anteriores. El observador de perturbación es de alta ganancia, y se usaron valores de  $\zeta = 2$ ,  $\omega_n = 500$  y  $p = 500$ ; para asegurar una dinámica más rápida que la inyectada por la frecuencia de excitación proveniente de la fuerza externa. Así también, se observó que el error de seguimiento está cerca de  $1 \times 10^{-5}$  [m] y la señal de control tiene oscilaciones muy pequeñas, reducidas a menos del 3% en comparación de los controladores anteriores; y la estimación de la perturbación es muy satisfactoria, con un error del observador menor del  $0,05 \times 10^{-9}$  [m]. Para este caso de estudio se diseñó otro controlador PD+Observador de perturbación, y se consideró a todos los términos de fricción viscosa del servosistema en conjunto con la fuerza externa, como la perturbación. En la Figura 4.7 (ver pág. 41) se muestran resultados satisfactorios de este otro controlador, con un error de seguimiento de  $2 \times 10^{-8}$  [m] y un error del observador de  $0,05 \times 10^{-13}$  [m].

Para el Caso II, solamente se diseñó un controlador PD+Observador de perturbación. En las Figuras 4.9 y 4.10 (ver págs. 47 y 48) se muestran los resultados de simulación numérica del desempeño de la estrategia de control. En este caso de estudio no se consideró una fuerza externa que perturbara al sistema; en vez de eso, en una primer prueba se consideró como perturbación a un término desconocido del modelo parametrizado, y en otra, se consideraron dos términos como perturbación. Es decir, el controlador tenía conocimiento parcial del modelo parametrizado; mientras que la dinámica no modelada, era estimada por el observador de perturbación y se compensaba vía el controlador. En ambas pruebas, el error de seguimiento y el error del observador es menor del  $0,1 \times 10^{-9}$  [m].

Finalmente, lo anterior muestra el desempeño satisfactorio de la estrategia de control empleada, para el control de movimiento del servosistema mecatrónico de un eje; considerando las condiciones dinámicas establecidas en el estudio de éste tipo de sistema.

## 5.2. Trabajo futuro

Como un siguiente trabajo a nivel simulación numérica, sería conveniente considerar dinámicas no lineales en el servosistema mecatrónico. En un primer paso se podría considerar algún modelo de fricción dinámica, y que éste en conjunto con una fuerza externa, sea la perturbación a estimar. Así también, estudiar hasta donde es posible mantener un desempeño satisfactorio del controlador y del observador de perturbación, con la mínima información del servosistema.

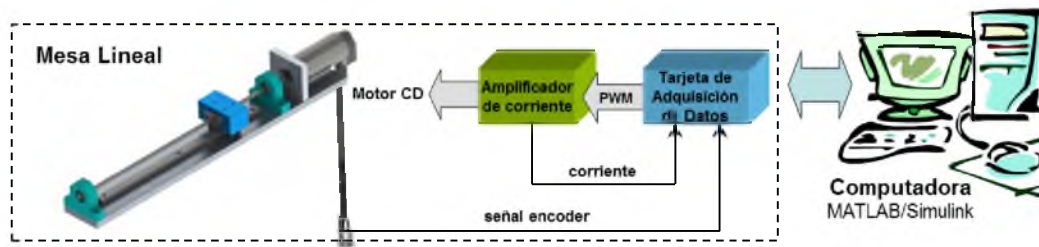


Figura 5.1: Concepto de una plataforma experimental del tipo servosistema mecatrónico de un eje.

Por otro lado, es importante llevar a la implementación la estrategia de control con observador de perturbación sobre una plataforma experimental. En la Figura 5.1 se muestra un concepto de una plataforma experimental, compuesta por: una mesa lineal, un servomotor, amplificador de corriente, una tarjeta de adquisición de datos y un computador; para la rápida implementación de técnicas de identificación, estimación y control vía Simulink. La implementación práctica sería muy importante, con el fin de resolver los problemas técnicos que se puedan presentar; y de esta forma, la estrategia de control empleada, tendría un mayor impacto en el área de control de movimiento a nivel industrial.



# Bibliografía

- [1] Harshama, F., Tomizuka, M., Fukuda, T. 1996. “Mechatronics—What is it, why, and how?—an editorial”. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. Vol. 1, No. 1, pp. 1–4.
- [2] Auslander, D. M., Kempf, C. J. 1996. Mechatronics: Mechanical System Interfacing. Prentice-Hall. Upper Saddle River, NJ. U.S.A.
- [3] Shetty, D. and Kolk, R. A. 1997. Mechatronic System Design. PWS Publishing Company. Boston, MA. U.S.A.
- [4] Bolton, W. 1999. Mechatronics: Electrical Control Systems in Mechanical and Electrical Engineering. 2nd Ed., Addison-Wesley Longman. Harlow, England.
- [5] Bishop, R. 2006. Mechatronics: An Introduction. CRC Press Taylor & Francis. Boca Raton, FL. U.S.A.
- [6] Mori, T. 1969. “Mechatronics”. Yasakawa Internal Trademark Application Memo 21.131.01. July 12. Japan.
- [7] Craig, K. 2001. “Is Anything Really New in Mechatronics Education?”. IEEE Robotics & Automation Magazine. June. U.S.A.
- [8] Ogata, K. 2000. Ingeniería de Control Moderna. Prentice Hall. Madrid.
- [9] Nakamura, M., Goto, S., Kyura, M. 2004. Mechatronic Servo System Control. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.
- [10] Maxonmotor, Inc. Página web: [www.maxonmotor.com](http://www.maxonmotor.com)
- [11] Johnson, M. A., Moradi, M. H. (Eds). 2005. PID Control: New Identification and Design Methods. Springer-Verlag. London.
- [12] SKF, Inc. Página web: [www.skf.com](http://www.skf.com)
- [13] Thomson, Inc. Página web: [www.thomsonlinear.com](http://www.thomsonlinear.com)
- [14] K. Astrom and T. Hagglund. 1995. PID Controllers: Theory, Design and Tuning. Ed. ISA.
- [15] K. Astrom and T. Hagglund. 2005. Advanced PID Control. Ed. ISA.

- [16] A. Visioli. 2006. *Practical PID Control*. Springer. USA.
- [17] Han, J. 2009. “From PID to Active Disturbance Rejection Control”. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 56, No. 3, pp. 900-906.
- [18] Koren, Y. 1997. “Control of Machine Tools”. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*. Vol. 119, pp. 749-755.
- [19] Yao, B., Al-Majed, M., Tomizuka, M. 1997. “High-Performance Robust Motion Control of Machine Tools: An Adaptive Robust Control Approach and Comparative Experiments”. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. Vol. 2, No. 2, pp. 63–76. U.S.A.
- [20] Ohnishi, K., Shibata, M., Murakami, T. 1996. “Motion Control for Advanced Mechatronics”. *IEEE/ASME Transaction on Mechatronics*. Vol. 1, pp. 56–67. U.S.A.
- [21] Hace, A., Jezernik, K., Šabanovic, A. 2007. “SMC with Disturbance Observer for a Linear Belt Drive”. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 54, No. 6, pp. 3402-3412. U.S.A.
- [22] Sira-Ramírez, H., Feliu-Batlle, V., Beltrán-Carbajal, F., Blanco-Ortega, A. 2008. “Sigma-Delta Modulation Sliding Mode Observers for Linear Systems Subject to Locally Unstable Inputs”. *IEEE 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp. 344–349. Ajaccio, France.
- [23] Sira-Ramírez, H., Núñez, C., Visairo, N. 2009. “Robust sigma-delta generalised proportional integral observer based control of a “buck” converter with uncertain loads”. *International Journal of Control*. Vol. 83, No. 8, pp. 1631-1640.
- [24] Sira-Ramírez, H., Ramírez-Neria, M., Rodríguez-Angeles, A. 2010. “On the Linear Control of Nonlinear Mechanical Systems”. *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 1999–2004. Atlanta, USA.
- [25] Beltrán-Carbajal, F., Chávez-Conde, E., Silva-Navarro, G., Vázquez-González B., Favela-Contreras A. 2011. “Control of Nonlinear Active Vehicle Suspension Systems using Disturbance Observers”. Chapter of Book in “*Vibration Analysis and Control-New Trends and Developments*”. pp. 131-150. ISBN: 978-953-307-433-7. INTECH. Croatia.
- [26] Ramírez-Neria, M., Sira-Ramírez, H., Rodríguez-Ángeles, A., Luviano-Juárez, A. 2012. “An Active Disturbance Rejection Controller for a Parallel Robot via Generalized Proportional Integral Observers”. *American Control Conference*. pp. 5478-5483. Montreal, Canada.
- [27] Beltrán-Carbajal F., Chávez-Conde E., Favela-Contreras A. and R. F. Vázquez-Bautista. 2013. “Active Perturbation Rejection in Motion Control of Milling Machine Tools”. *Revista Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia*. No. 69. pp. 193-204. Colombia.

- [28] Wells, D. A. 1967. Lagrangiane Dynamics. Schaum's Outlines, McGraw-Hill. USA
- [29] Goldstein, H. 1987. Mecánica Clásica. Editorial Reverté. España.
- [30] Boylestad, R. L. and Nashelsky, L. 2003. Introducción al Análisis de Circuitos Eléctricos. Prentice Hall. México.
- [31] Cogdell, J. R. 2002. Fundamentos de Máquinas Eléctricas. Prentice Hall. México.
- [32] Fliess, M., Lévine, J., Martin, Ph. and Rouchon, P. 1993. "Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples". International Journal of Control, Vol. 61, No. 6, pp. 1327-1361.
- [33] Sira-Ramírez, H. and Agrawal, S. 2004. Differentially Flat Systems. Marcel Dekker. USA.
- [34] Luenberger, D.G. 1964. "Observing the State of a Linear System". IEEE Trans. Military Electr., MIL-8,pp. 74-80.
- [35] Rennes. 1987. Courbes et surfaces Bézier/B-splines. Sablonnière et Le Méhauté. Ed. INSA de Rennes.
- [36] J. Auñóm López. 1999. Las curvas del diseño asistido por ordenador. Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia.



# Apéndice



# Apéndice A

## Trayectoria de Bézier

Las propiedades de las curvas de Bézier se deducen directamente de las propiedades de los polinomios de Bernstein (*véase* [35], [36], para más detalles). Son una herramienta muy eficaz para el modelado y, por lo tanto, aceptadas en todos los sistemas informáticos relevantes en el diseño industrial.

Dado un valor de salida  $y_o$  y un valor final o de llegada  $y_f$  puede proponerse una trayectoria de interpolación entre estos valores de la forma:

$$y^* = y_o + (y_f - y_o) \varphi(t), \quad \text{donde } t \in [t_o, t_f].$$

La función de interpolación  $\varphi(t)$  es parametrizada dentro del intervalo  $[0, 1]$  de la forma:

$$\varphi(t, t_o, t_f) = \left( \frac{t - t_o}{t_f - t_o} \right)^\alpha \left[ r_0 + r_1 \left( \frac{t - t_o}{t_f - t_o} \right) + \dots + r_n \left( \frac{t - t_o}{t_f - t_o} \right)^n \right] \quad (\text{A.1})$$

donde  $n$  es el número de derivadas que suministra la función de interpolación a la trayectoria suave. Dado que se busca llevar al sistema de un estado estático estable a otro, tanto las condiciones iniciales como finales de las derivadas de esta trayectoria deseamos que sean cero. Las condiciones iniciales se cumplen desde que  $\varphi(t)$  ha sido parametrizada entre el rango  $[0, 1]$ . Estableciendo que,

$$\begin{aligned} \varphi(t, t_o, t_f) &= 0, \\ \frac{d^\theta}{dt^\theta} (\varphi(t, t_o, t_f)) \Big|_{t=t_o} &= 0, \quad \text{para } \theta = 1, 2, \dots, \alpha - 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, los coeficientes  $r_0, r_1, \dots, r_n$  deberán ser calculados a fin de cumplir con las condiciones finales,

$$\frac{d^\vartheta}{dt^\vartheta} (\varphi(t, t_o, t_f)) \Big|_{t=t_f} = 0, \quad \text{para } \vartheta = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Considerando a  $p \geq n$ , la condición  $\varphi(t_f, t_o, t_f) = 1$  se satisface con,

$$\sum_{k=0}^n r_k = r_0 + r_1 + \cdots + r_n = 1 \quad \text{en } t = t_f. \quad (\text{A.2})$$

De acuerdo a la ec.(A.2) y, desarrollando las  $\theta$  y  $\vartheta$  derivadas de la función  $\varphi(t, t_o, t_f)$  dada por la ec.(A.1), se puede construir el sistema de ecuaciones de la ec.(A.3); formada por  $r + 1$  ecuaciones con  $r + 1$  incógnitas, para encontrar los coeficientes  $r_k$  que satisfacen las condiciones finales de la función de interpolación y de sus derivadas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & \alpha + 1 & \cdots & \alpha + n \\ \alpha(\alpha - 1) & (\alpha + 1)\alpha & \cdots & (\alpha + n)(\alpha + n - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon_1 & \Upsilon_2 & \cdots & \Upsilon_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

donde  $\Upsilon_1 = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)$ ,  $\Upsilon_2 = (\alpha + 1)\alpha \cdots (\alpha - n + 2), \dots, \Upsilon_m = (\alpha + n) \cdots (\alpha + 1)\alpha$ .

Ahora, en el control de movimiento del servosistema mecatrónico se considera una trayectoria polinomial de Bézier,

$$y_d = y_o + (y_f - y_o) \varphi(t, t_o, t_f)$$

donde,

$$\varphi(t, t_o, t_f) = \Delta^8 \sum_{i=1}^9 (-1)^{i+1} r_i \Delta^{i-1}$$

siendo  $\Delta = \frac{t-t_o}{t_f-t_o}$ , y los valores de  $r_i$  dados por:  $r_1 = 12870$ ,  $r_2 = 91520$ ,  $r_3 = 288288$ ,  $r_4 = 524160$ ,  $r_5 = 600600$ ,  $r_6 = 443520$ ,  $r_7 = 205920$ ,  $r_8 = 54912$  y  $r_9 = 6435$ ; con  $t_o = 0$ ,  $t_f = 5$  [s],  $y_o = 0$  y  $y_f = 0,03$  [m].

Esta trayectoria garantiza tener derivadas igual a cero, al inicio y al final del intervalo de la planificación de trayectoria. Por tanto, considerando a  $\Gamma = t - t_o$  y  $\Lambda = t_f - t_o$ , la trayectoria deseada hasta la quinta derivada están dadas por,

$$\begin{aligned} y_d &= y_o + (y_f - y_o) \varphi(t, t_o, t_f), \\ \dot{y}_d &= (y_f - y_o) \dot{\varphi}(t, t_o, t_f), \\ \ddot{y}_d &= (y_f - y_o) \ddot{\varphi}(t, t_o, t_f), \\ y_d^{(3)} &= (y_f - y_o) \varphi^{(3)}(t, t_o, t_f), \\ y_d^{(4)} &= (y_f - y_o) \varphi^{(4)}(t, t_o, t_f), \\ y_d^{(5)} &= (y_f - y_o) \varphi^{(5)}(t, t_o, t_f), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde,

$$\begin{aligned}
\varphi(t, t_o, t_f) &= \Delta^8 A, \\
\dot{\varphi}(t, t_o, t_f) &= \Delta^8 A' + \frac{8A\Gamma^7}{\Lambda^8}, \\
\ddot{\varphi}(t, t_o, t_f) &= \Delta^8 A'' + \frac{16A'\Gamma^7}{\Lambda^8} + \frac{56A\Gamma^6}{\Lambda^8}, \\
\varphi^{(3)}(t, t_o, t_f) &= \Delta^8 A''' + \frac{24A''\Gamma^7}{\Lambda^8} + \frac{168A'\Gamma^6}{\Lambda^8} + \frac{336A\Gamma^5}{\Lambda^8}, \\
\varphi^{(4)}(t, t_o, t_f) &= \Delta^8 A^{iv} + \frac{32A'''\Gamma^7}{\Lambda^8} + \frac{336A''\Gamma^6}{\Lambda^8} + \frac{1344A'\Gamma^5}{\Lambda^8} + \frac{1680A\Gamma^4}{\Lambda^8}, \\
\varphi^{(5)}(t, t_o, t_f) &= \Delta^8 A^v + \frac{40A^{iv}\Gamma^7}{\Lambda^8} + \frac{560A'''\Gamma^6}{\Lambda^8} + \frac{3360A''\Gamma^5}{\Lambda^8} + \frac{8400A'\Gamma^4}{\Lambda^8} + \frac{6720A\Gamma^3}{\Lambda^8},
\end{aligned}$$

con,

$$\begin{aligned}
A &= r_1 - r_2\Delta + r_3\Delta^2 - r_4\Delta^3 + r_5\Delta^4 - r_6\Delta^5 + r_7\Delta^6 - r_8\Delta^7 + r_9\Delta^8, \\
A' &= \frac{-r_2}{\Lambda} + \frac{2r_3\Gamma}{\Lambda^2} - \frac{3r_4\Gamma^2}{\Lambda^3} + \frac{4r_5\Gamma^3}{\Lambda^4} - \frac{5r_6\Gamma^4}{\Lambda^5} + \frac{6r_7\Gamma^5}{\Lambda^6} - \frac{7r_8\Gamma^6}{\Lambda^7} + \frac{8r_9\Gamma^7}{\Lambda^8}, \\
A'' &= \frac{2r_3}{\Lambda^2} - \frac{6r_4\Gamma}{\Lambda^3} + \frac{12r_5\Gamma^2}{\Lambda^4} - \frac{20r_6\Gamma^3}{\Lambda^5} + \frac{30r_7\Gamma^4}{\Lambda^6} - \frac{42r_8\Gamma^5}{\Lambda^7} + \frac{56r_9\Gamma^6}{\Lambda^8}, \\
A''' &= -\frac{6r_4}{\Lambda^3} + \frac{24r_5\Gamma}{\Lambda^4} - \frac{60r_6\Gamma^2}{\Lambda^5} + \frac{120r_7\Gamma^3}{\Lambda^6} - \frac{210r_8\Gamma^4}{\Lambda^7} + \frac{336r_9\Gamma^5}{\Lambda^8}, \\
A^{iv} &= \frac{24r_5}{\Lambda^4} - \frac{120r_6\Gamma}{\Lambda^5} + \frac{360r_7\Gamma^2}{\Lambda^6} - \frac{840r_8\Gamma^3}{\Lambda^7} + \frac{1680r_9\Gamma^4}{\Lambda^8}, \\
A^v &= -\frac{120r_6}{\Lambda^5} + \frac{720r_7\Gamma}{\Lambda^6} - \frac{2520r_8\Gamma^2}{\Lambda^7} + \frac{6720r_9\Gamma^3}{\Lambda^8}.
\end{aligned}$$

La trayectoria polinomial deseada  $y_d$  del tipo Bézier, se muestra en la Figura A.1.

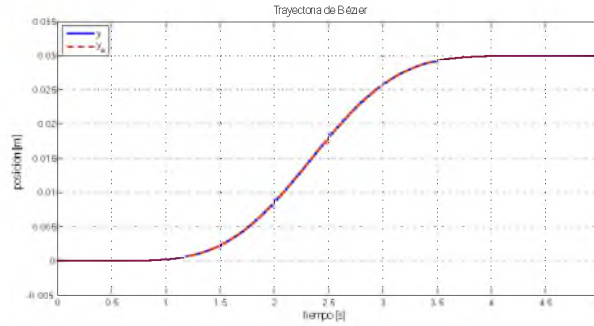


Figura A.1: Trayectoria polinomial deseada  $y_d$  de Bézier.



# Apéndice B

## Diagramas de simulación

### B.1. Bloques de Simulink: Servosistema de elementos rígidos

En la Figura B.1 se muestra el diagrama principal de Simulink del servosistema de elementos rígidos.

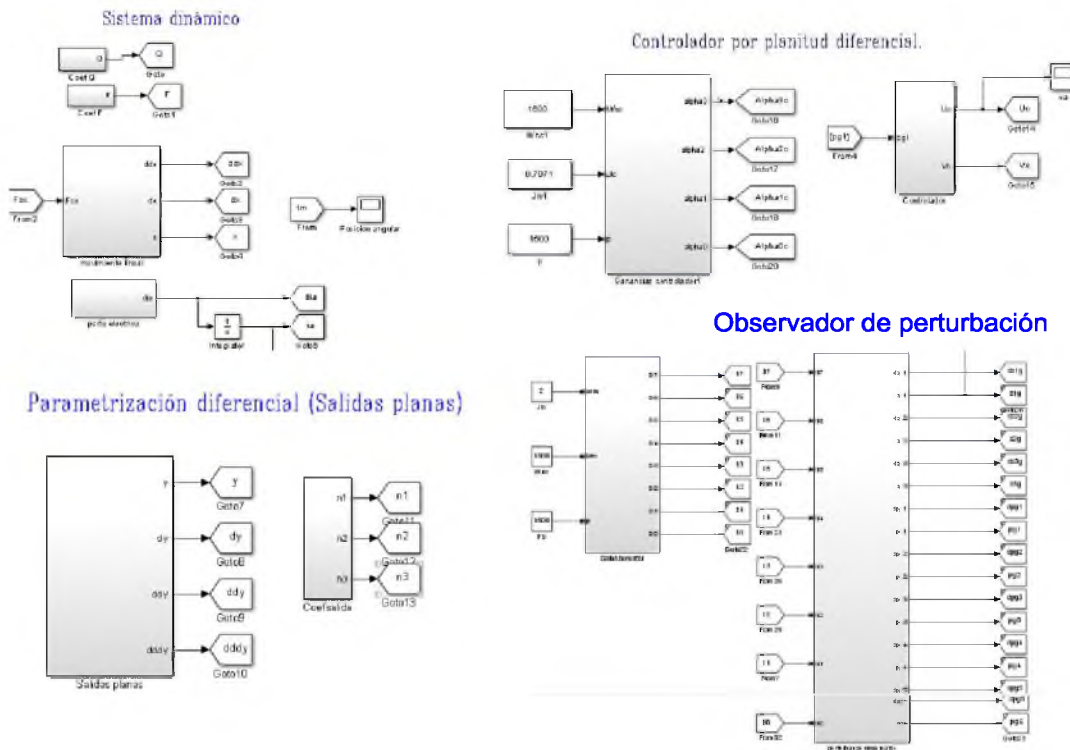


Figura B.1: Diagrama principal de la simulación numérica del servosistema de elementos rígidos.

El diagrama principal incluye en forma de subsistemas a: la dinámica del servosistema, la parametrización diferencial, el controlador y el observador de perturbación. Los resultados de simulación se encuentran en la sección 4.3.4 (*ver* pág. 38).

### B.1.1. Sistema dinámico

En la Figura B.2 se muestran los subsistemas mecánico y eléctrico del diagrama de bloques de la dinámica del sistema.

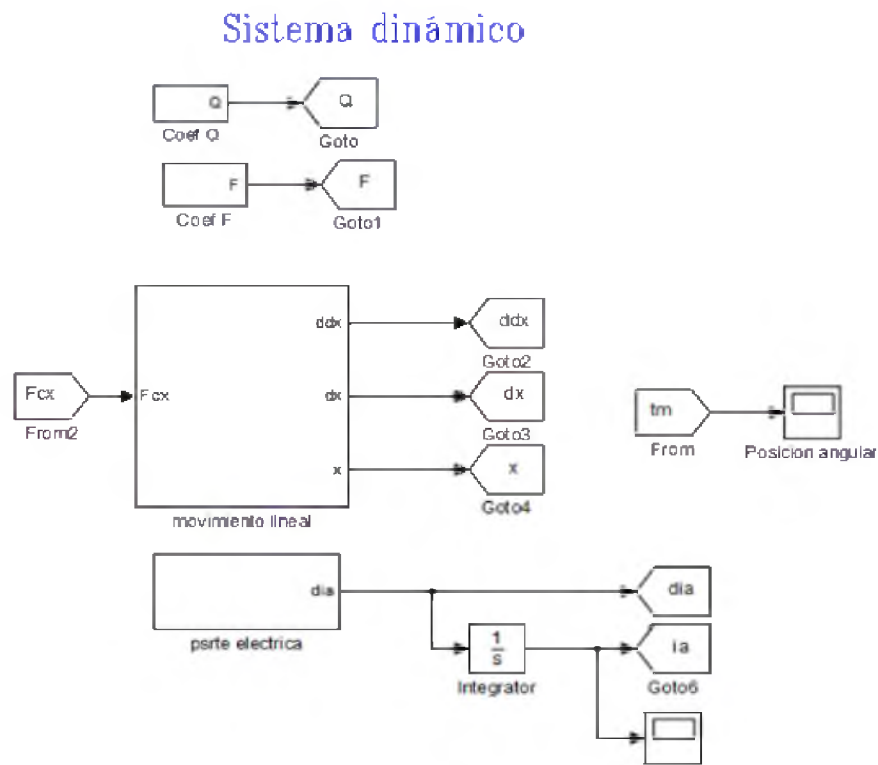


Figura B.2: Diagrama de bloques del sistema dinámico: parte mecánica y eléctrica del servosistema mecatrónico de elementos rígidos.

En el bloque de la parte mecánica se construyó la ec.(2.4) de la pág. 10. Y en el bloque de la parte eléctrica la ec.(2.5) de la pág 10.

### B.1.2. Parametrización diferencial

En la Figura B.3 se muestra el subsistema de la parametrización diferencial, de acuerdo a la salida plana y sus derivadas finitas.

#### Parametrización diferencial (Salidas planas)

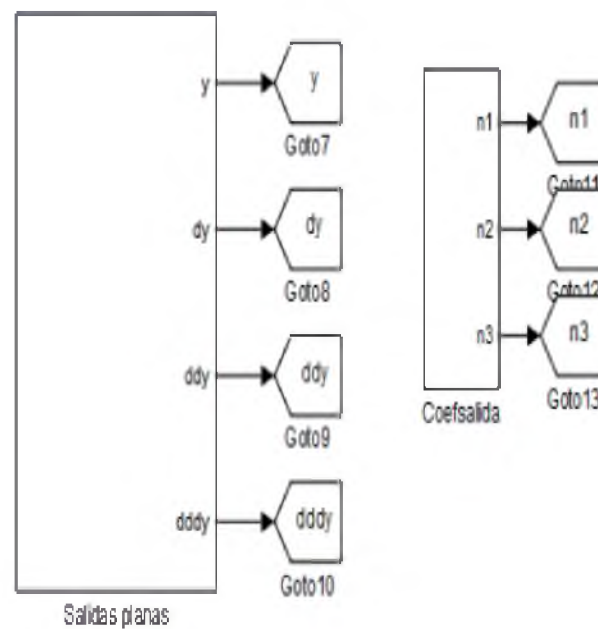


Figura B.3: Diagrama de bloques: parametrización diferencial del servosistema con elementos rígidos.

En el diagrama de bloque se encuentra construido el modelo parametrizado de acuerdo a la ec.(3.8) para el Caso I (ver sección 3.2.1, pág. 23).

### B.1.3. Controlador por planitud diferencial

En la Figura B.4 se muestra el subsistema del controlador para el seguimiento de trayectoria.

#### Controlador por planitud diferencial.

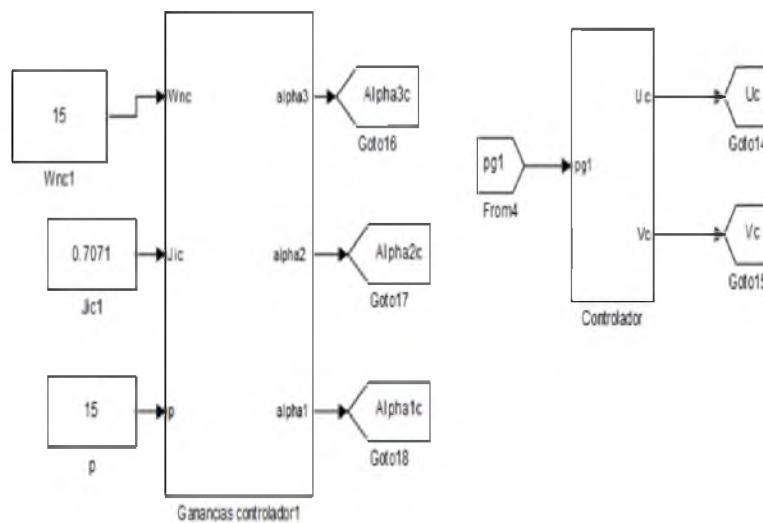


Figura B.4: Diagrama de controlador por planitud diferencial, elementos rígidos

Se programaron tanto las ganancias como el controlador dado por la ec.(4.11) de la pág. 32.

### B.1.4. Observador de perturbación

En la Figura B.5 se muestra el subsistema del observador de perturbacion.

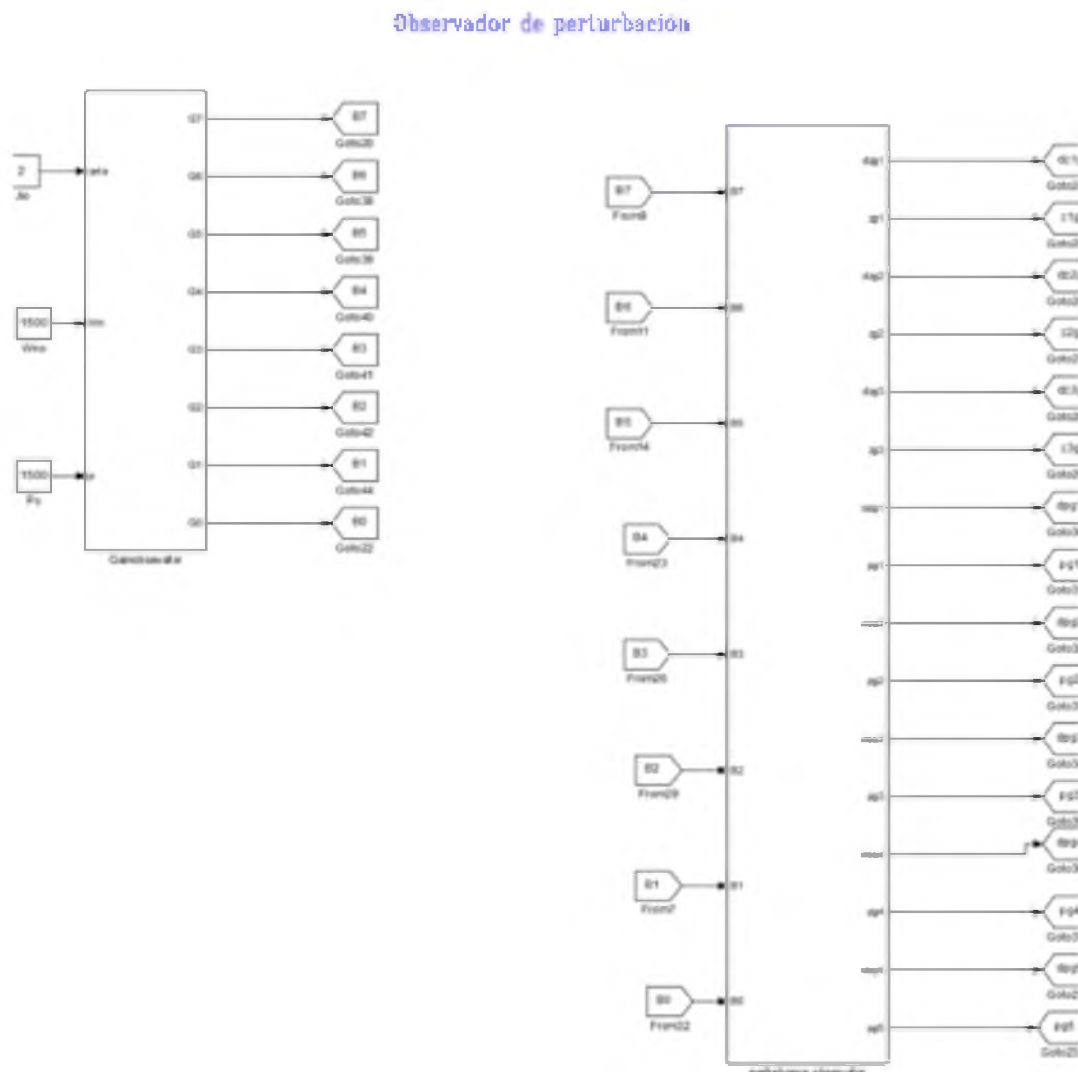


Figura B.5: Diagrama de simulación del observador de perturbación del servosistema con elementos rígidos.

En bloques se programaron tanto las ganancias como el observador de perturbación dado por la ec.(4.15) de la pág. 35.

## B.2. Bloques de Simulink: Servosistema con elemento flexible

En la Figura B.6 se muestra el diagrama principal de Simulink del servosistema con elemento flexible.

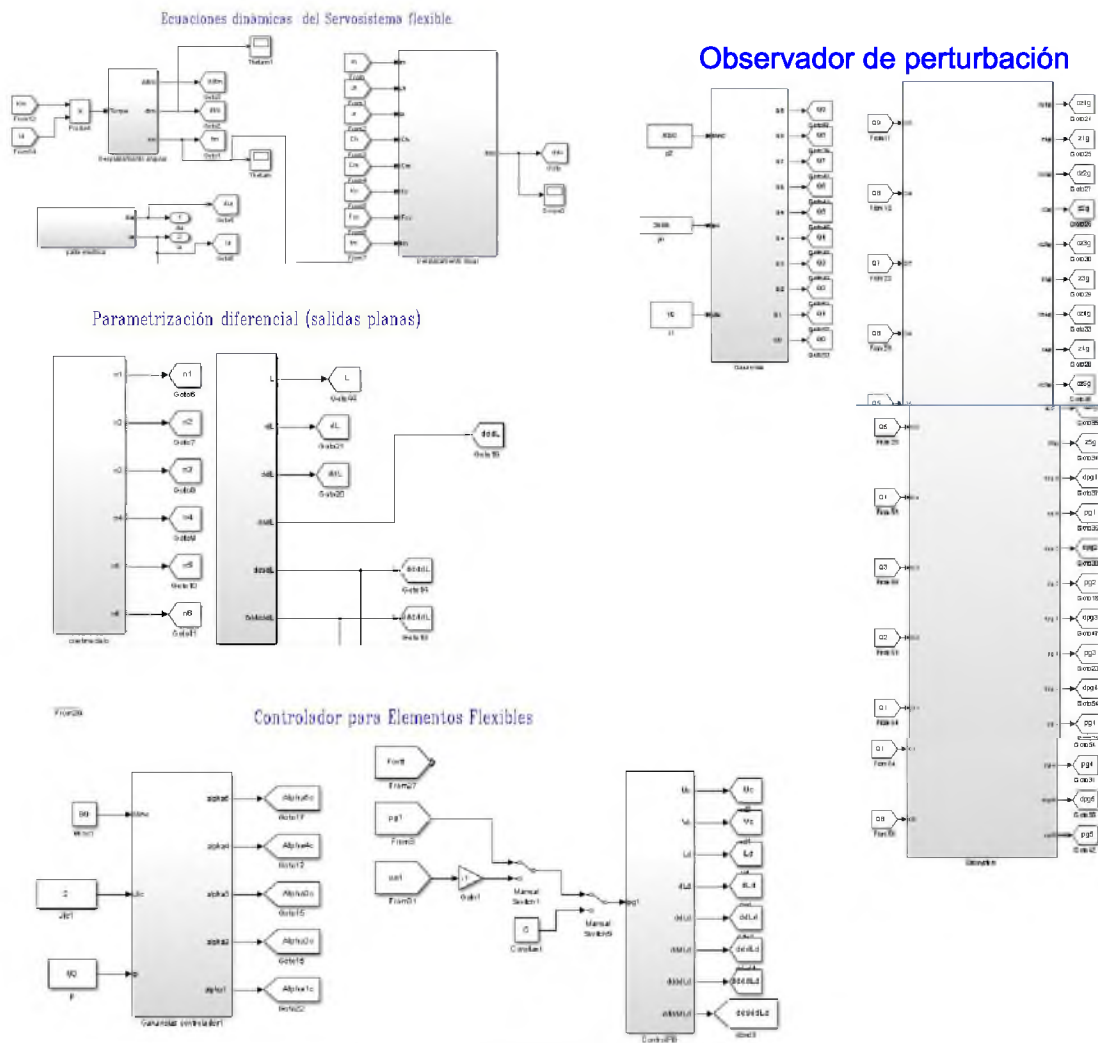


Figura B.6: Diagrama principal de la simulación numérica del servosistema con elemento flexible.

En el diagrama principal se encuentran los subsistemas de: la dinámica del servosistema con elemento flexible, la parametrización diferencial, el controlador y el observador de perturbación. Los resultados de simulación se encuentran en la sección 4.4.3 (*ver* pag. 46).

### B.2.1. Ecuaciones dinámicas

En la Figura B.7 se muestra el subsistema de la dinamica del servosistema con elementos flexible.

#### Ecuaciones dinámicas del Servosistema flexible.

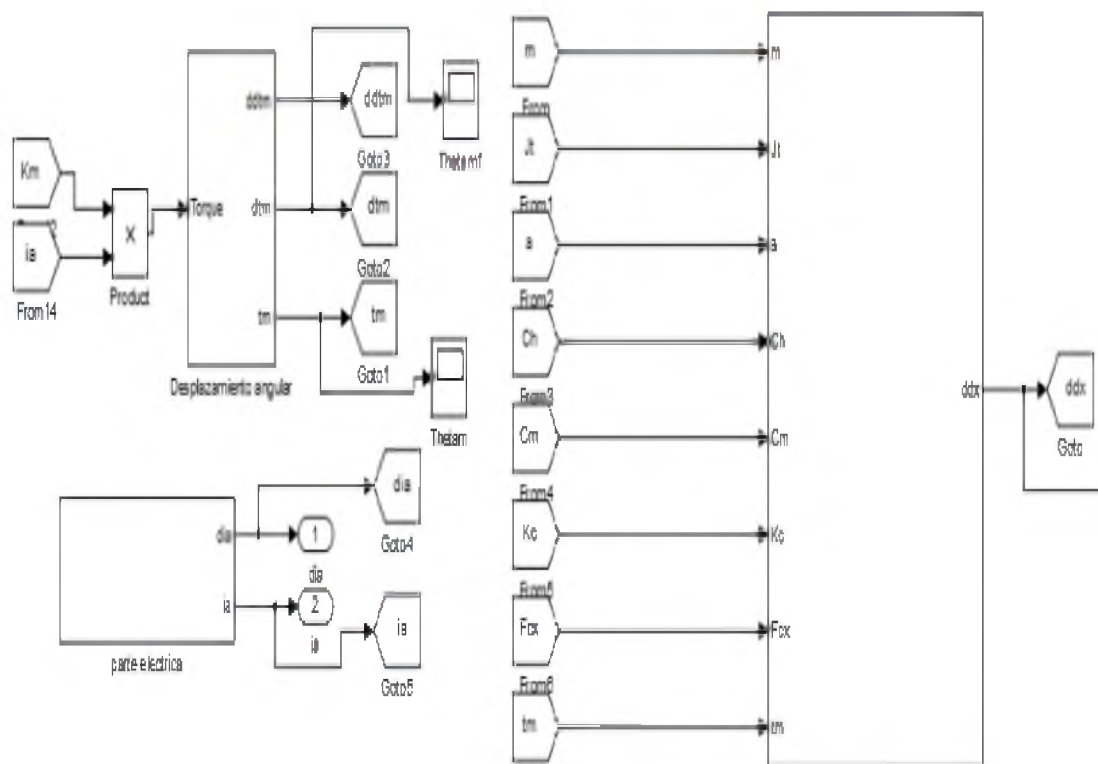


Figura B.7: Diagrama de simulación de la dinámica del servosistema con elemento flexible.

En el subsistema se construyeron en bloques las ecuaciones dinámicas del servosistema, dado por las ecs.(2.14), (2.15) y (2.16) de la pág. 14.

### B.2.2. Parametrización diferencial

En la Figura B.8 se muestra el diagrama de bloques del servosistema parametrizado, de acuerdo a la salida plana y sus derivadas finitas.

#### Parametrización diferencial (salidas planas)

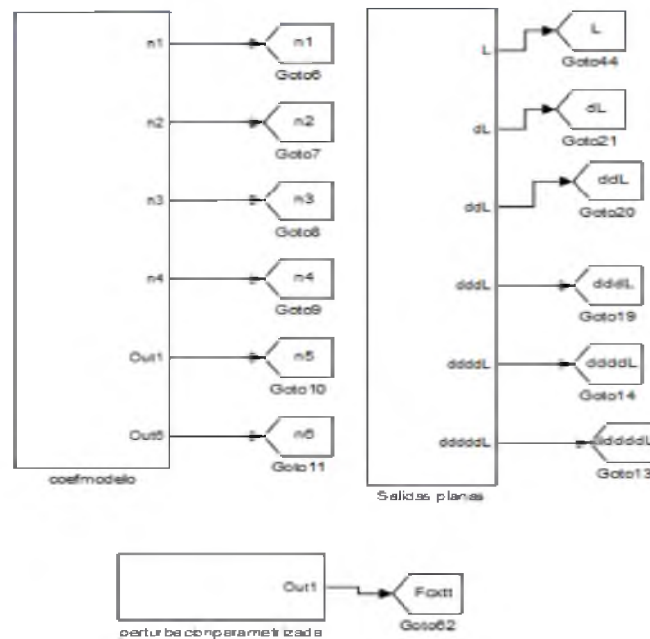


Figura B.8: Diagrama de la parametrización diferencial del servosistema de elementos flexibles.

En los subsistemas del diagrama de bloques se programaron las ecuaciones parametrizadas del servosistema con elemento flexible, dado por las ec.(3.10) de la pág. 25.

### B.2.3. Control por planitud diferencial.

En la Figura B.9 se muestra el subsistema del controlador por planitud diferencial para el seguimiento de trayectoria.

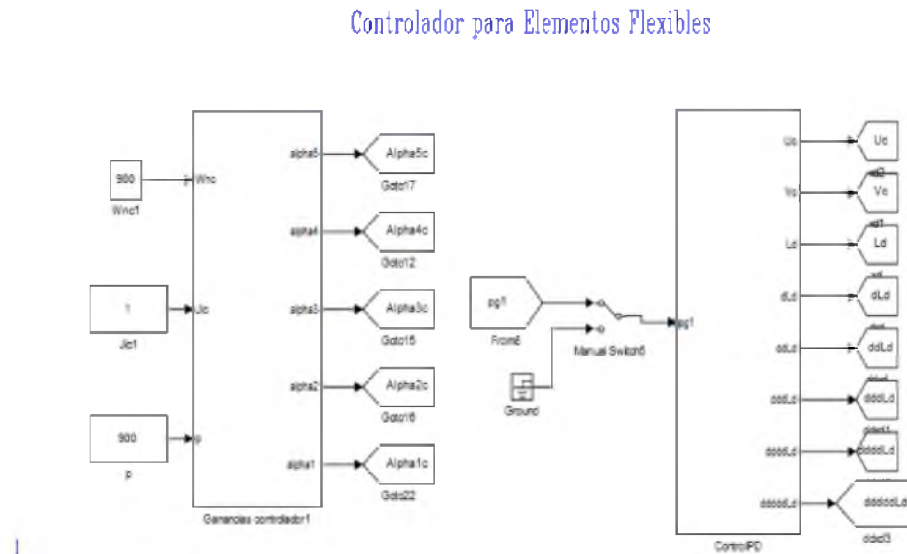


Figura B.9: Diagrama del controlador por planitud diferencial del servosistema de elementos flexibles.

En los diagramas de bloques se construyeron tanto las ganancias como el controlador de la ec.(4.21) de la pág. 42.

### B.2.4. Observador de perturbación

En la Figura B.10 se muestra el diagrama de bloques del observador de perturbación.

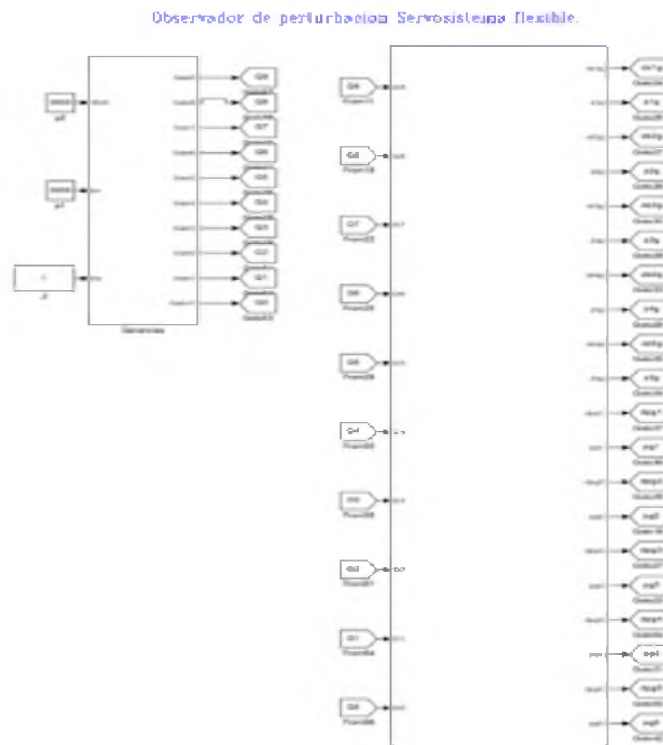


Figura B.10: Diagrama del observador de perturbación de elementos flexibles.

En los subsistemas se programaron tanto las ganancias como el observador de perturbación de la ec.(4.24) de la pág. 44.

### B.3. Trayectoria polinomial de Bézier

En la Figura B.11 se muestra el diagrama de bloques de la planificación de trayectorias con polinomios de interpolación del tipo Bézier.

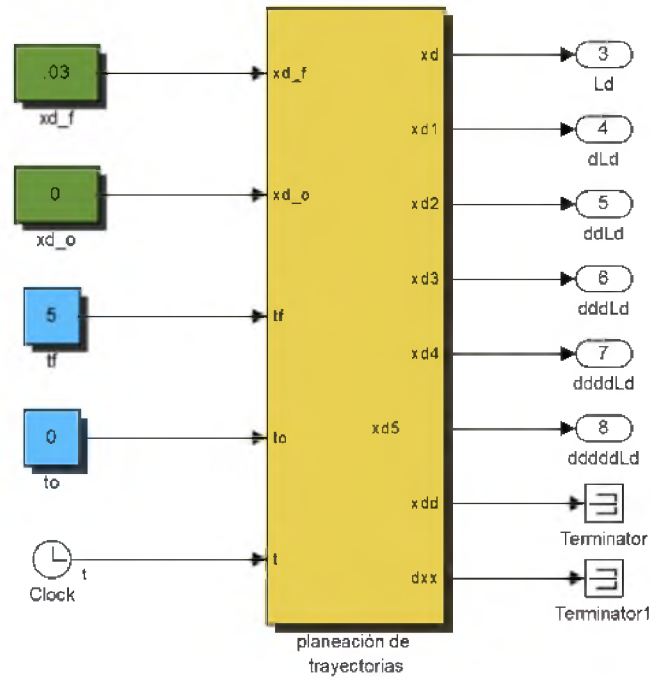


Figura B.11: Diagrama de bloque de la trayectoria de Bezier y sus derivadas correspondientes.

En el subsistema se encuentran programadas la trayectoria deseada y hasta la quinta derivada, de acuerdo a la ec.(A.4) del Apéndice A (ver pág. 59).