



UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN

CAMPUS LOMA BONITA

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

**DISEÑO DE UNA ESTRATEGIA DE CONTROL
PROPORCIONAL RETARDADO PARA UN ROBOT
MÓVIL SÍNCRONO**

Tesis profesional para obtener el grado de
INGENIERO EN MECATRÓNICA

Presenta:

JOSÉ ANTONIO BAUTISTA MEDINA

Director de tesis:

Dr. Hiram Netzahualcoyotl García Lozano

LOMA BONITA, OAX.

JULIO 2015

Dedicatoria

SON MUCHAS LAS PERSONAS ESPECIALES A LAS QUE LES DEDICO ESTA TESIS, PORQUE SIN SU AMISTAD, APOYO, ÁNIMO Y CONFIANZA NO LO HUBIERA LOGRADO.

No hay palabras que puedan describir mi profundo agradecimiento hacia mis padres, quienes durante todos estos años han confiado en mí, comprendiendo mis ideales y han sido el motor para superarme cada día.

Francisco y Lorenza

A quien siempre me ha dado ánimos en todo momento, alegrándome con sus locuras.

A mi hermana

A quienes me han brindado buenos consejos y me han apoyado para lograr esta meta.

A mis tíos y tías

A quienes siempre han creído en mí y me han transmitido sus buenos deseos.

A mis abuelos

Sin olvidarme de quien me ha permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos.

A Dios

José Antonio

Agradecimientos

Gracias a todas las personas quienes me brindaron su tiempo, su apoyo y por la sabiduría que me transmitieron en el desarrollo de mi formación profesional.

A mi asesor Dr. Hiram N. García, quien ha guiado y apoyado en todo lo posible desde el inicio hasta la culminación de esta etapa profesional.

A mis sinodales M.C. Rafael F. González, Dr. Eduardo Sánchez y Dr. Juan M. Pérez, por todo su tiempo prestado para complementar este trabajo.

A mis amigos quienes han estado a mi lado en los buenos y malos momentos, quienes me han brindado su amistad y confianza.

A esa persona especial con la que he compartido buenos momentos y ha hecho la vida mas amena.

A todas y todos a quienes de una u otra forma han colocado un granito de arena para el logro de este trabajo, agradezco de forma sincera su valiosa colaboración.

Gracias!!!

Resumen

En la actualidad los sistemas controlados automáticamente son cada vez más frecuentemente utilizados. Existen gran variedad de aplicaciones, desde las más simples, como son el apagar o prender una lámpara de acuerdo a la intensidad de luz presente, hasta las más complejas como el piloto automático de un avión. En este trabajo es de interés el estudio de vehículos autónomos terrestres con ruedas. Estos vehículos, los cuales no requieren conductor se conocen como robots móviles. Algunos ejemplos de uso, de este tipo de robots, en la vida diaria es la introducción en el 2015 de vehículos autónomos, como taxis, en Gran Bretaña o el vehículo sin conductor diseñado por Google, entre otros. En estos robots el análisis del sistema y el diseño de control juegan un papel muy importante, por lo que se requiere un modelo y un diseño de estrategia de control lo más preciso posible. A fin de satisfacer esta necesidad se han desarrollado distintas estrategias de control, clásicas y modernas. En algunos casos, cuando el procesamiento de información es considerable, estas estrategias no satisfacen los requerimientos mínimos de precisión. A los sistemas cuya respuesta es retrasada por algún efecto de transporte se les conoce como sistemas con retardo. Distintas estrategias de control han sido desarrolladas para este tipo de sistemas, las cuales, pueden ser aplicadas en sistemas sin retardo mejorando el desempeño de otros controladores.

En este trabajo se considera el problema de diseñar una estrategia de control retardada (proporcional retardada) para mejorar el desempeño del seguimiento de la trayectoria de un robot móvil tipo síncrono. Esta estrategia es comparada con su homóloga lineal y muestra que tiene mejor desempeño.

Abstract

The objective of this paper is the study of autonomous terrestrial vehicles with wheels. At the present, automatically controlled systems are being used more and more frequently. There is a large variety of applications, from the simplest, such as turning on and off a lamp in accordance to the present light intensity, to the more complex such as the autopilot of an airplane. Autonomous terrestrial vehicles, which do not require a driver, are known as mobile robots. One example of an autonomous terrestrial vehicle introduced in 2015, is the taxi in Great Britain another is a vehicle without driver designed by Google, among others. In these robots the analysis system and the design control play a very important role, it is required for a model and a design control strategy to be as accurate as possible. In order to comply with these requirements a classic control strategy and a modern control strategy have been developed. In some cases, when the information processing is considerable, these strategies do not comply with the minimum requirements of precision. When this occurs, answers from the system are delayed due to the effect of transport this is known as a system delay. Different control strategies have been developed for this type of system; these can be applied in systems without delay improving the performance of other controllers. Consideration of the problem of designing a delayed control strategy was taken into account for this reason and a proportional delayed strategy was designed to improve the performance of tracing the path of a synchronous mobile robot. After being compared with the homologous linear strategy the proportional delayed strategy shows that it has better performance.

Índice

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Índice de figuras	III
1. CAPÍTULO 1	
INTRODUCCIÓN	1
1.1. SISTEMAS DE CONTROL	1
1.2. ROBÓTICA MÓVIL	5
1.3. TÓPICOS DE CONTROL AVANZADO	7
2. CAPÍTULO 2	
SISTEMAS CON RETARDO	9
2.1. MÉTODO PASO A PASO	11
2.2. ESTABILIDAD	14
2.3. MÉTODO DE <i>D</i> SUBDIVISIÓN (<i>D</i> PARTICIÓN)	15
3. CAPÍTULO 3	
ROBÓTICA MÓVIL	17
3.1. SISTEMAS DE LOCOMOCIÓN	18
3.2. MODELO DE ROBOT SÍNCRONO	22
4. CAPÍTULO 4	
CONTROL DE ROBOT MÓVIL	24
4.1. CONTROL LINEAL	26
4.1.1. SIMULACIÓN DEL CONTROL LINEAL	28
4.2. CONTROL PROPORCIONAL RETARDADO (PR)	32

4.2.1. REGIONES DE SIGMA ESTABILIDAD	37
4.2.2. ANÁLISIS DE LAS RAÍCES DOMINANTES	39
4.2.3. ESTRATEGIA DEL DECAIMIENTO EXPONENCIAL MÁXIMO	41
4.2.4. SIMULACIÓN DEL CONTROL PR EN EL ROBOT MÓVIL .	44
5. CAPÍTULO 5	
CONCLUSIONES	48
6. BIBLIOGRAFÍA	52
A. Diagramas en <i>Simulink</i>[®] para el control lineal.	54
B. Diagramas en <i>Simulink</i>[®] para el control PR.	57
C. Código en <i>Matlab</i>[®] para la obtención de las regiones de σ-estabilidad.	60

Índice de figuras

1.1. Diagrama de bloque de un sistema de control básico.	2
1.2. Diagrama de control de la dirección de un automóvil.	2
1.3. Ajuste controlado del volante por el conductor.	3
1.4. Respuesta típica de la dirección del viaje.	3
1.5. Tipos de robots.	4
1.6. Tipos de robots móviles	6
2.1. Retardos en el bucle de control.	9
2.2. Intervalo 1 del método paso a paso.	11
2.3. Intervalo 2 del método paso a paso.	12
2.4. Intervalo 3 del método paso a paso.	13
2.5. D subdivisión para el cuasipolinomio (2.8).	16
3.1. Robots móviles terrestres.	17
3.2. Configuración Ackerman	18
3.3. Locomoción de triciclo clásico.	19
3.4. Locomoción con direccionamiento diferencial en dos ruedas laterales.	19
3.5. Locomoción síncrona	20
3.6. Configuración síncrona: El robot se puede mover en cualquier dirección.	20
3.7. Ejemplo de seguimiento de trayectoria.	21
3.8. Error de seguimiento de la trayectoria.	22
4.1. Diagrama del sistema	24
4.2. Trayectoria deseada.	25
4.3. Velocidad lineal deseada.	25
4.4. Velocidad angular deseada.	26
4.5. Diagrama del control lineal.	29
4.6. Simulación de la trayectoria obtenida con el control lineal.	29
4.7. Simulación de la velocidad lineal obtenida con el control lineal.	30
4.8. Velocidad angular deseada y velocidad angular obtenida con el control lineal.	31
4.9. Comportamiento del error en el control lineal.	31

4.10. Regiones de σ – <i>estabilidad</i> para distintos valores.	38
4.11. Diagrama de bloques del sistema con controlador PR.	45
4.12. Trayectoria del robot móvil aplicando control PR.	45
4.13. Velocidad del robot móvil con control PR.	46
4.14. Velocidad angular del robot móvil con controlador PR.	47
4.15. Comportamiento del error del robot móvil con controlador PR.	47
5.1. Comparación de la trayectoria: Control lineal vs control PR.	48
5.2. Comparación de la velocidad lineal: Control lineal vs control PR.	49
5.3. Velocidad angular: Control lineal vs control PR.	49
5.4. Error en la coordenada $x(t)$: Control lineal vs control PR.	50
5.5. Error en la coordenada $y(t)$: Control lineal vs control PR.	50
5.6. Comparación entre el error en la orientación de los controladores.	51
A.1. Diagrama general del control lineal.	54
A.2. Subdiagrama del control lineal.	55
A.3. Subdiagrama que calcula el error $e(t)$ en el control lineal.	56
A.4. Subdiagrama que implementa la ley de control $u(t)$ para el controlador lineal.	56
B.1. Diagrama de bloques del sistema con controlador PR.	57
B.2. Subdiagrama de bloques del control PR.	58
B.3. Subdiagrama que calcula el error $e(t)$ en el control PR.	59
B.4. Subdiagrama que implementa la ley de control $u(t)$ para el controlador PR.	59

1. CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El desarrollo tecnológico en la sociedad va aumentando a grandes pasos. Este desarrollo se da en gran variedad de sistemas tales como: eléctricos, mecánicos, computacionales, o una mezcla de estos como son sistemas robóticos e incluso otros más complejos como los sistemas inteligentes. Todos estos sistemas tienen la finalidad de facilitar las tareas y las necesidades de las personas, incluso como área de investigación científica. Sea cual sea el motivo, entre más y más pasa el tiempo, es necesario adentrarse cada vez más en la investigación para desarrollar nuevas técnicas con el fin de controlar eficazmente y de manera precisa estos sistemas, así también, incrementar su autonomía limitando en todo lo posible la intervención humana. Es por ello que el control de estos sistemas juega un papel muy importante.

1.1. SISTEMAS DE CONTROL

Algunos de los principios básicos de la teoría de control automático ya eran utilizados en el siglo III a.C, sin embargo no fue hasta la Segunda Guerra Mundial que los sistemas de control automático comenzaron su desarrollo durante la Revolución Industrial. En esa época, el Ing. James Watt diseñó el primer regulador automático de velocidad para a la máquina de vapor. A mediados del siglo XIX, el físico James C. Maxwell analizó por primera vez diversos tipos de controladores de velocidad, y relacionó el problema de estabilidad (de los mismos) con un problema algebraico. Este problema fue resuelto posteriormente por el matemático Adolf Hurwitz. Alrededor de 1930, el Ing. Harry Nyquist y el Ing. Hendrik Alfred Bode desarrollaron técnicas de análisis para sistemas realimentados utilizando conceptos de respuesta en frecuencia [Ogata, 1998]. Durante la Segunda Guerra Mundial, el interés en las aplicaciones bélicas hizo que se consideraran problemas de dirección y guía de proyectiles balísticos, lo que tuvo como consecuencia el estudio de sistemas estocásticos y no lineales. Desde los últimos años de la década de 1950, gracias al advenimiento de las computadoras digitales, fueron redescubiertas las variables de estado y se estudiaron a profundidad problemas tales como optimización y control bajo incertidumbre.

En los últimos veinte años, se desarrolló el control numérico y el control jerarquizado. Recientemente se ha notado un cambio en el campo de aplicación de la teoría de con-

trol enfocados a analizar problemas ecológicos, sociales y económicos [Dorf & Bishop, 2005]. Hoy en día los sistemas de control juegan un papel importante, debido a la ayuda que prestan para realizar tareas que puedan ser difíciles o repetitivas. Sea cual sea el sistema de control, su estructura básica se muestra en la Figura 1.1.

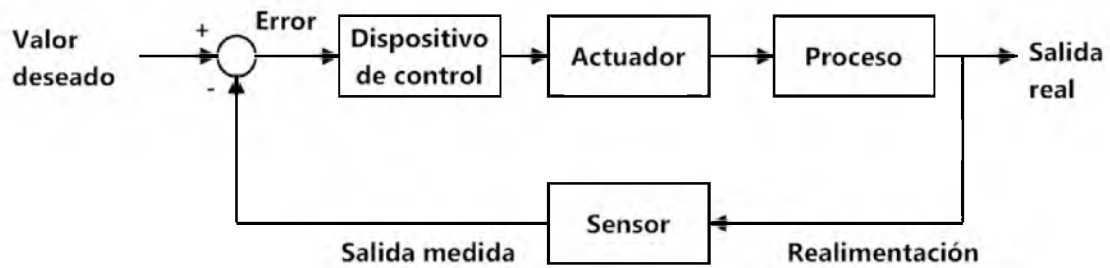


Figura 1.1: Diagrama de bloque de un sistema de control básico.

Los sistemas de control operan en una configuración de lazo cerrado, es decir, la diferencia entre la salida y la entrada se usa como señal de entrada de control. Con un sensor preciso, la salida medida es igual a la salida real del sistema. La diferencia entre la salida real y la deseada es igual al error, que se ajusta por el dispositivo de control (tal como un amplificador). La salida del dispositivo de control hace que el actuador module el proceso para reducir el error.

Existen diversos sistemas de control, unos son sencillos y convencionales y otros más complejos. Para entender mejor los sistemas de control, se toma el caso de un conductor el cual controla la dirección de su vehículo.

En la Figura 1.2 se muestra un sencillo diagrama de bloques del sistema de control de la dirección del automóvil.

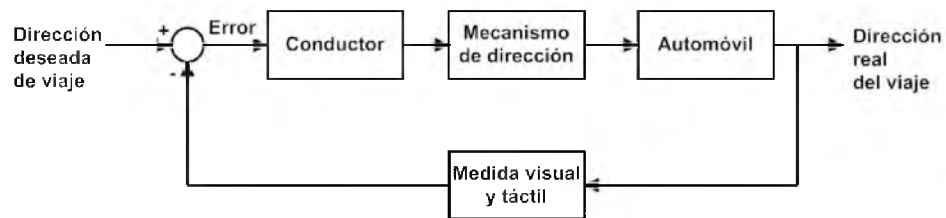


Figura 1.2: Diagrama de control de la dirección de un automóvil.

El conductor compara el rumbo deseado con una medición del rumbo real para generar una medida del error tal como se muestra en la Figura 1.3.

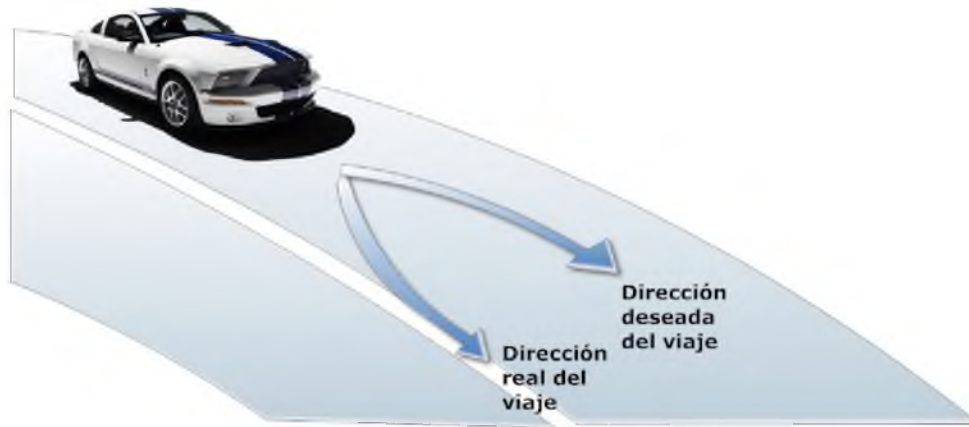


Figura 1.3: Ajuste controlado del volante por el conductor.

Esta medida se obtiene por realimentación visual y táctil (movimiento del cuerpo). Hay una realimentación adicional por la sensación percibida por la mano (sensor) sobre el volante de la dirección.

Así como este control de dirección, es similar para los sistemas de control de dirección en un barco o los controles de vuelo en un avión. En la Figura 1.4 se muestra una típica respuesta de la dirección del viaje.

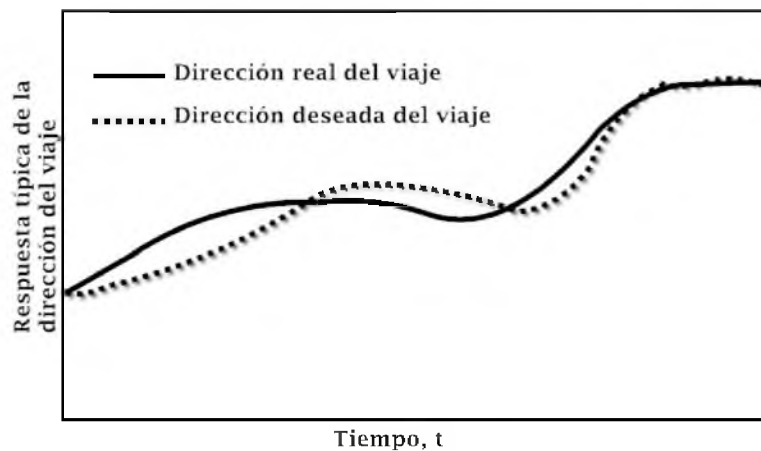


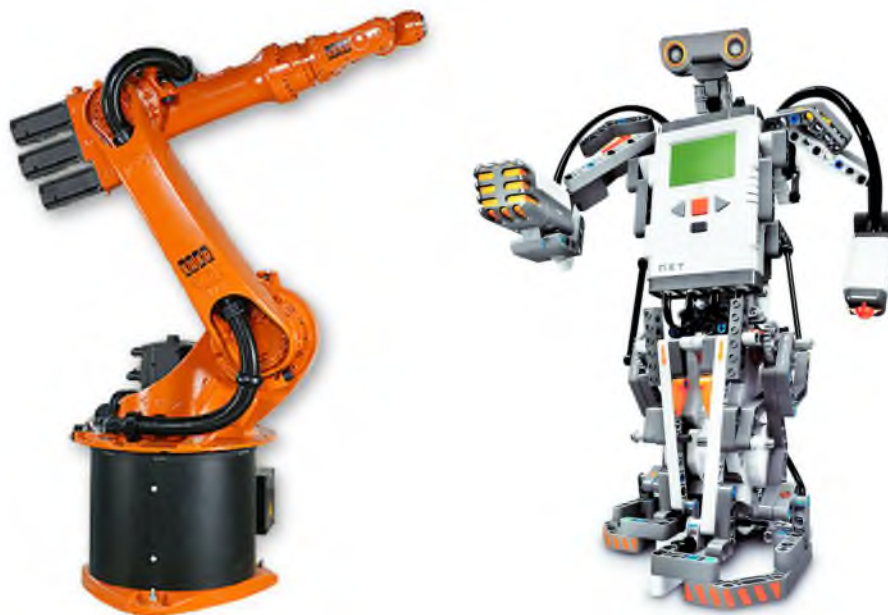
Figura 1.4: Respuesta típica de la dirección del viaje.

Otros sistemas controlados tienen los mismos elementos básicos del sistema de la Figura 1.1. En la industria existen controles de velocidad, presión, temperatura, posición, espesores, composición y calidad, entre muchos otros que tiene la misma configuración [Dorf & Bishop, 2005].

Estos controles forman parte de sistemas más grandes, estructurados y complejos, cuyos procesos están automatizados, esto es, pueden operar sin ayuda o interferencia humana. La mayoría de los sistemas automatizados son capaces de realizar sus funciones con mayor fidelidad, precisión y en menos tiempo que los seres humanos. Existen procesos semiautomatizados, los cuales incorporan tanto seres humanos como robots. Por ejemplo, en las líneas de montaje de automóviles requieren de la cooperación entre un operador humano y un robot. Los robots son máquinas controladas por una computadora, tecnología asociada con la automatización. Estas máquinas pertenecen a alguna de las siguientes categorías:

$$\text{Robots} \begin{cases} \text{Robots manipuladores} \\ \text{Robots móviles} \end{cases}$$

En la Figura 1.5, se pueden ver ejemplos de la categoría de robots.



(a) Robot manipulador industrial de KU- (b) Robot móvil: Humanoide hecho con
KA el Lego Nxt.

Figura 1.5: Tipos de robots.

Los robots manipuladores y los robot móviles figuran como piezas clave del mosaico que actualmente forma la robótica [Kelly & Santibáñez, 2003].

Esta tesis muestra aspectos relacionados con los robots móviles, y técnicas de control del mismo.

1.2. ROBÓTICA MÓVIL

El desarrollo de robots móviles responde a la necesidad de extender el campo de aplicación de la robótica de manipuladores, el cual está restringido al alcance de una estructura mecánica anclada en uno de sus extremos. Así mismo de incrementar su autonomía.

En los primeros robots móviles el desarrollo tecnológico no era suficiente para lograr la navegación autónoma y eficiente. Fue hasta los años ochentas donde el gran incremento en la capacidad computacional y el desarrollo de nuevos sensores, mecanismos y sistemas de control, permitieron aumentar su autonomía. Este proceso de automatización intenta dotar al robot de suficiente 'inteligencia' para reaccionar y tomar decisiones basándose en observaciones de su entorno, sin suponer que este es perfectamente conocido.

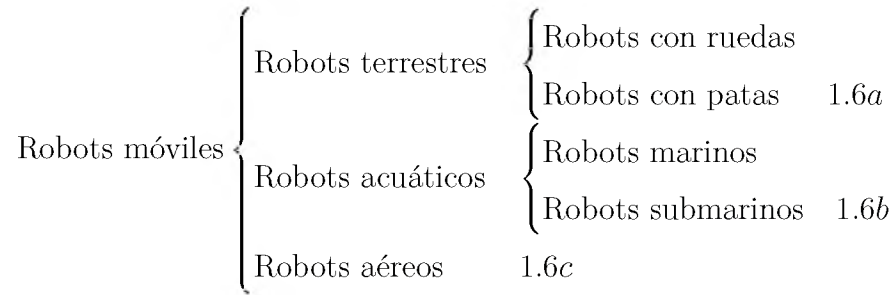
La autonomía de un robot móvil se basa en el sistema de navegación automática. En estos sistemas se incluyen tareas de planificación, percepción y control. En los robots móviles, el problema de la planificación, en el caso más general, puede descomponerse en planificación global de la misión, de la ruta, de la trayectoria y finalmente, en evitar obstáculos no esperados.

Existen numerosos métodos de planificación de caminos, para robots móviles, que se basan en hipótesis simplificadoras como: entorno conocido y estático, robots omnidireccionales, con movimiento lento y ejecución perfecta de trayectoria. La planificación de la trayectoria puede realizarse también de forma dinámica, considerando la posición actual del vehículo y los puntos intermedios de paso definidos en la ruta. La trayectoria se corrige debido a acontecimientos no considerados [Baturone, 2001].

La definición de la trayectoria debe tener en cuenta las características cinemáticas del vehículo. Por ejemplo, en los vehículos con ruedas y tracción convencional, interesa definir trayectorias de curvatura continua que puedan ejecutarse con el menor error posible.

Una vez realizada la configuración de la trayectoria, es necesario planificar movimientos concretos y controlar dichos movimientos para mantener el vehículo en la trayectoria. De esta forma, se plantea el problema del seguimiento de caminos que, para vehículos con ruedas, se concreta en determinar el ángulo de dirección teniendo en cuenta la posición y orientación actual del vehículo con respecto a la trayectoria que se debe seguir. Así mismo, es necesario resolver el problema de control y regulación de la

velocidad del vehículo. Existen variedad de vehículos móviles pero de acuerdo al medio en que se desplazan los robots móviles se clasifican como se muestra a continuación.



En la Figura 1.6, se pueden ver ejemplos de robots móviles.



(a) Robot terrestre: Robot con patas (hexápodo).



(b) Robot acuático: Robot zapatero, camina sobre el agua.



(c) Robot aéreo: Robot aéreo no tripulado (dron).

Figura 1.6: Tipos de robots móviles

1.3. TÓPICOS DE CONTROL AVANZADO

El diseño de sistemas de control es un campo muy amplio. En los últimos 50 años ha habido avances sustanciales, como la aparición de métodos específicos de diseño. Esto ha dado como resultado un mejor conocimiento y comprensión de los sistemas de control. Estos avances se han acelerado por el desarrollo tanto de la tecnología computacional como de las herramientas de diseño de sistemas de control basadas en la computadora.

Hablando en términos generales, los controladores se han diseñado utilizando dos enfoques diferentes: control basado en modelos y sintonía directa. Los enfoques basados en modelos comienzan con un modelo matemático del proceso. En sintonía directa se aplica un controlador al proceso y se efectúan algunos experimentos sencillos para obtener los parámetros del controlador.

Antes de analizar métodos de sintonía específicos es útil darse cuenta de que hay un amplio rango de problemas de control con objetivos muy diversos. Algunos ejemplos son regulación en estado estacionario, seguimientos del punto de consigna y seguimiento de trayectorias, entre otros.

Cuando se requiere la regulación de un sistema durante el estado estacionario el principal objetivo es mantener las variables del proceso en los valores deseados o establecidos. Mientras que en el seguimiento del punto de consigna se intenta conseguir que las variables del proceso sigan una función de tiempo. Estos problemas de control pueden ser encontrados en la robótica y el control de movimiento.

En los robots móviles el objetivo de control, depende del tipo de sistema y del campo de aplicación. Por ello, elegir y diseñar el sistema de control, que mejor se adapte a las características del sistema y cubra las necesidades de control, es de vital importancia.

En la actualidad existen diversas estrategias utilizadas para controlar estos sistemas, entre los más mencionados son el control Proporcional (P), el control Integral (I), Proporcional-Derivativo (PD) o la combinación de estas estrategias como el Proporcional-Integral (PI) y el Proporcional-Integral-Derivativo (PID) [Ogata, 1998].

En muchos casos es suficiente la utilización de estos controles para mejorar los requerimientos del sistema. Sin embargo en algunas ocasiones este tipo de control no satisface las necesidades, debido a que las características del sistema exigen mayores ajustes que el control convencional.

La investigación en los sistemas de control ha generado nuevas herramientas y más

avanzadas para controlar este tipo de sistemas, por ejemplo el control difuso, el control neuronal y el control robusto, entre otros.

Cuando en los sistemas se presentan parámetros como un tiempo de retardo en la variable medida, estos tipos de controles ya no satisfacen las necesidades requeridas en su totalidad.

Esto lleva a buscar otras estrategias que se adapten a la problemática de control presente, puesto que al tener un retardo de tiempo cambia completamente la metodología de diseño de control.

El enfoque clásico de control de sistemas que presentan retardo utiliza controles proporcional-integral-derivativo (PID), el Predictor Smith clásico. Otra estrategia menos conocida y aún con un amplio campo de investigación es el control Proporcional Retardado (PR), cuya investigación precedente ha demostrado tener resultados sobresalientes en comparación con los métodos mencionados.

En este trabajo se aborda el estudio de un robot móvil con ruedas en configuración síncrona, así como el diseño de una estrategia de control proporcional retardado para el seguimiento de trayectoria.

El resto del trabajo se divide de la siguiente forma: En el capítulo 2, se describe el retardo en el tiempo, como aparecen en los sistemas de control y que consecuencias genera. Seguidamente, en el capítulo 3, se presenta una descripción de los robots móviles, enfocándose en el robot móvil síncrono a ruedas, así como su modelo matemático. En el capítulo 4, se presenta el diseño de una estrategia de control PR para el robot móvil síncrono, así también, el diseño de una estrategia de control lineal, y sus simulaciones correspondientes con los resultados obtenidos. Por último se mostrarán las conclusiones del desempeño de los controladores aplicados al robot móvil síncrono.

2. CAPÍTULO 2

SISTEMAS CON RETARDO

Las aplicaciones del control en tiempo real juegan un papel importante en la tecnología moderna. Éstas, como elementos de la teoría de control, tienen sus bases en la realimentación (control en lazo cerrado). El proceso de realimentación consiste en calcular una acción de control, la cual será aplicada sobre un sistema. Ante esta acción el sistema obtiene una respuesta o salida. El error, definido como la diferencia entre la salida y el valor deseado en ésta, se utiliza como nueva entrada para calcular la acción de control en un proceso iterativo.

Debido a los grandes avances en la tecnología digital este tipo de sistemas de control pueden ser implementados en una computadora. Las señales presentes en la realimentación son analógicas. Para ser introducidas en la computadora se deben tomar muestras de estas señales cada periodo de tiempo T , lo que se conoce como el proceso de discretización.

El periodo de muestreo T define la distancia temporal entre dos acciones de control, es decir, cada T se tomarán datos de la salida, se calculará la acción de control y se enviará al proceso. Muchas veces el tiempo de muestreo se ve afectado por la velocidad de los sensores, actuadores o incluso por el tráfico en la red de comunicación. Esto tiene como consecuencia que la respuesta generada en la acción de control sea retardada debido a los datos que se reciben en el proceso. En la Figura 2.1 se muestran gráficamente estos retardos.

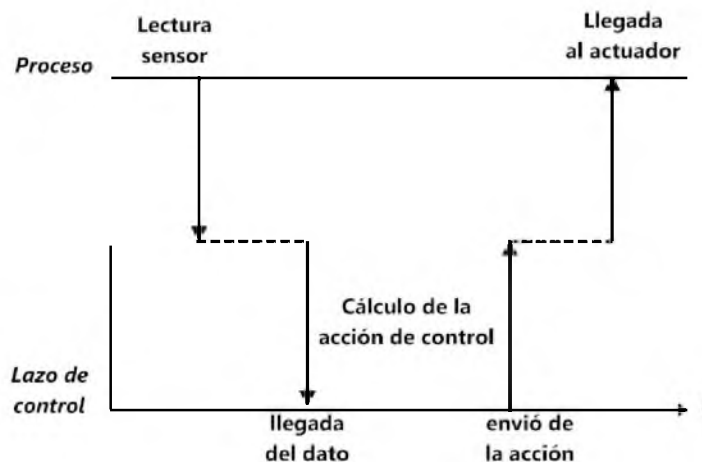


Figura 2.1: Retardos en el bucle de control.

Entre más complicado sea el cálculo de la acción de control más se pueden apreciar los retardos de tiempo. A fin de entender un poco mejor como trabajar, con sistemas los cuales presentan este efecto, se realizaran algunas definiciones.

Cuando se habla de retardo se está haciendo alusión a la propiedad de un sistema físico donde la respuesta a una acción aplicada es retardada en el tiempo. En cualquier sistema donde se haya transportado físicamente materia o energía, o transmitido información, hay un retardo asociado con este proceso. El valor del retardo es determinado por la distancia y la velocidad de transmisión. Dependiendo de la longitud del retardo es la complejidad del sistema. La presencia de retardos largos hace que el análisis del sistema y el diseño del control sean más difícil. En muchos casos cuando los retardos son demasiado largos el diseñador no es capaz de percibirlos y diseña el sistema de control como si no los tuviera. Esto, en el peor de los casos, puede llevar al sistema a la inestabilidad. Es importante prestar especial atención a este tipo de interferencias en los sistemas de control al momento de estudiarlos, así también cuando se diseña una estrategia de control.

Antes de establecer una teoría general para los sistemas con retardo. Se define el siguiente sistema con retardo

$$u'(t) = a_1u(t) + a_2u(t - h) + f(t), \quad (2.1)$$

donde $h > 0$ se conoce como el retardo.

Para conocer cómo se comporta este tipo de sistemas es necesario construir la solución de la ecuación (2.1). En la siguiente sección se presenta un método para construir la solución para este tipo de sistemas.

2.1. MÉTODO PASO A PASO

Existen distintos métodos para dar solución a los sistemas con retardo. A continuación se presenta uno de los más simples, el cual utiliza el cálculo por intervalos. Este método denota la naturaleza retardada del sistema.

Considere la siguiente ecuación

$$u'(t) = u(t - 1). \quad (2.2)$$

A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, (2.2), requiere de una condición inicial perteneciente a las funciones continuas, al menos por intervalos.

Suponga que se requiere la solución a partir de $t = 1$. Así la condición inicial requerida es una función continua en el intervalo de 0 a 1.

Una vez que se tiene esta información, la solución $u(t)$ para la ecuación (2.2) para todos los valores de t es determinada .

Por ejemplo, suponiendo $u(t) = 1$ para $0 < t \leq 1$, entonces la ecuación (2.2) determina los valores de $u(t)$ para $1 < t < 2$.

De acuerdo a lo anterior tenemos

$$u'(t) = u(t - 1).$$

Sea $u(t) = 1$, $0 < t \leq 1$, como se muestra en la Figura 2.2.

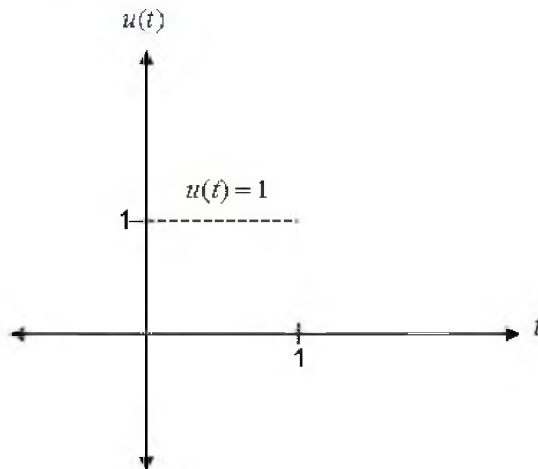


Figura 2.2: Intervalo 1 del método paso a paso.

Entonces para el intervalo $(1, 2]$ se tiene

$$\int_1^t u'(t) d\theta = \int_1^t 1 d\theta,$$

$$[u(t)]_1^t = \int_1^t 1 d\theta,$$

$$u(t) - u(1) = \int_1^t 1 d\theta,$$

$$u(t) = u(1) + \int_1^t 1 d\theta,$$

$$u(t) = u(1) + [\theta]_1^t,$$

$$u(t) = u(1) + (t - 1),$$

$$u(t) = t = 1 + (t - 1), \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Como se puede apreciar en la Figura 2.3.

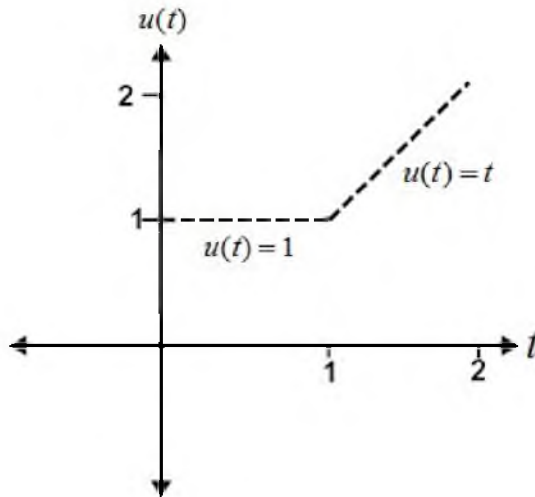


Figura 2.3: Intervalo 2 del método paso a paso..

Tomando ahora $u(t)$ para $1 < t \leq 2$, como condición inicial para determinar $u(t)$ en $2 \leq t \leq 3$. Es decir,

$$\int_2^t u'(t) d\theta = \int_2^t (\theta - 1) d\theta,$$

$$[u(t)]_2^t = \left[\frac{\theta^2}{2} - \theta \right]_2^t,$$

$$u(t) - u(2) = \left(\frac{t^2}{2} - t \right) - \left(\frac{2^2}{2} - 2 \right),$$

$$u(t) - u(2) = \frac{1}{2}t^2 - t,$$

$$u(t) = u(2) + \frac{1}{2}t^2 - t,$$

$$u(2) = 2,$$

$$u(t) = 2 + \frac{1}{2}t^2 - t,$$

$$u(t) = 1 + (t - 1) + \frac{(t-2)^2}{2}, \quad 2 \leq t \leq 3.$$

Nuevamente la solución se gráfica en la Figura 2.4.

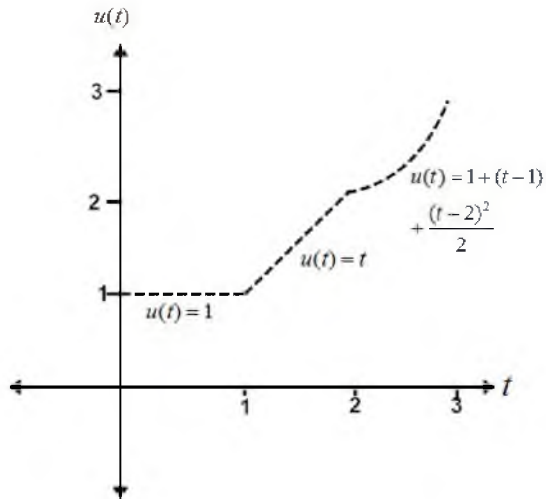


Figure 2.4: Intervalo 3 del método paso a paso.

De esta manera se puede, en forma recursiva, encontrar la solución para cualquier intervalo de tiempo. Extendiendo la definición de $u(t)$ de un intervalo al siguiente, por medio del método de inducción matemática se halla la solución

$$u(t) = \sum_{j=0}^N \frac{(t-j)^j}{j!}, \quad N \leq t \leq N+1, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Note que la ecuación (2.3), implica que $u'(t)$ es continua para $t > 1$.

Este es un método fundamental para construir una solución de ecuaciones con retardo, de forma continua donde la solución es extendida progresivamente – es decir, en la dirección de incremento t – de intervalo a intervalo [Bellman,1963].

2.2. ESTABILIDAD

La estabilidad es una importante propiedad de cualquier sistema de control. Esta propiedad es la que permite regular el comportamiento de un sistema alrededor de un punto de operación.

En sistemas lineales invariantes en el tiempo existen diversas técnicas que nos permiten establecer si un sistema tiene o no puntos de equilibrio estables.

En los sistemas con tiempo de retardo estas técnicas son relativamente más difícil debido a que el termino de retardo hace que la ecuación característica sea trascendental (llamados cuasipolinomios), en lugar de ser algebraica como en los sistemas sin retardo.

A fin de estudiar la estabilidad de estos sistemas considere la ecuación de estado de un sistema homogéneo con tiempo de retardo linealmente invariante en el tiempo,

$$\dot{x} = Ax(t) + \sum_{i=1}^N A_i x(t - h_i), \quad (2.4)$$

donde x es un vector de estado de $n \times 1$, A_i son matrices constantes de $n \times n$ y h_i , $i = 1, \dots, N$ son los retardos constantes del sistema.

La condición inicial, como se presentó en la ecuación (2.4), se describe por una función

$$x(\sigma) = \phi(\sigma), \quad -\Delta \leq \sigma \leq 0, \quad (2.5)$$

donde $\Delta = \text{máx } h_i$.

Para el sistema con tiempo de retardo (2.4), se define el estado de equilibrio de la siguiente manera:

Definición 1. Un estado x_e del sistema (2.4) se dice que es un estado de equilibrio si $x(t_0, \phi) = x_e \Rightarrow x(t; \phi) = x_e$ para todo $t > t_0$ siempre que ninguna entrada es aplicada.

El sistema (2.4) puede tener más que un estado de equilibrio. Para determinar si un sistema con tiempo de retardo tiene estados de equilibrio estable se conocen algunos métodos [Malek-Zavarei & Jamshidi, 1987], uno de ellos es el método de *D Subdivisión*, el cual se explica a continuación.

2.3. MÉTODO DE *D* SUBDIVISIÓN (*D* PARTICIÓN)

El método de *D* Subdivisión permite investigar la propiedad de estabilidad en los sistemas que presentan un tiempo de retardo. Para ello considere

$$D(z) = \sum_{l=0}^m \sum_{j=1}^m a_{lj} z \exp(b_j z), \quad (2.6)$$

la cual representa la forma general de cuasipolinomios característicos para ecuaciones diferenciales con tiempo de retardo.

El método de *D* Subdivisión se utiliza para determinar las condiciones bajo las cuales el cuasipolinomio (2.6) no tiene polos en cero (*p*-zeros). Este método está basado en el hecho de que los zeros del cuasipolinomio (2.6) son funciones continuas de los parámetros a_{lj} y b_j .

En este método se construye la subdivisión del espacio de coeficientes por medio de hipersuperficies. Para variaciones continuas de los parámetros del cuasipolinomio, el número de *p*-zeros puede cambiar solamente por el paso de algún zero a través del eje imaginario. Los puntos de cada dominio de *D* subdivisión corresponden al cuasipolinomio con el mismo número de *p*-zeros contados de acuerdo a sus multiplicidades.

Entonces, para todos los puntos de cada dominio, el número de *p*-zeros del cuasipolinomio será el mismo. La *D* Subdivisión solamente se puede visualizar cuando el cuasipolinomio depende de dos parámetros [Nosov,1986].

Para ilustrar mejor en que consiste la representación gráfica del método de la *D* Subdivisión, considere la ecuación

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-h) = 0, \quad (2.7)$$

cuyo cuasipolinomio característico es el siguiente

$$D(z) = z + a + b \exp(-zh). \quad (2.8)$$

Este cuasipolinomio tiene raíces reales en $z = 0$ para $a + b = 0$ y una raíz imaginaria en $z = i\omega$ si y solo si $a + b \cos \omega h = 0$ y $\omega - b \sin \omega h = 0$. Así los límites de las *D* subdivisión son líneas rectas singulares $a + b = 0$ y curvas paramétricas $a = -(\omega \cos \omega h) / (\sin \omega h)$, $b = \omega / (\sin \omega h)$, $-\infty < \omega < \infty$.

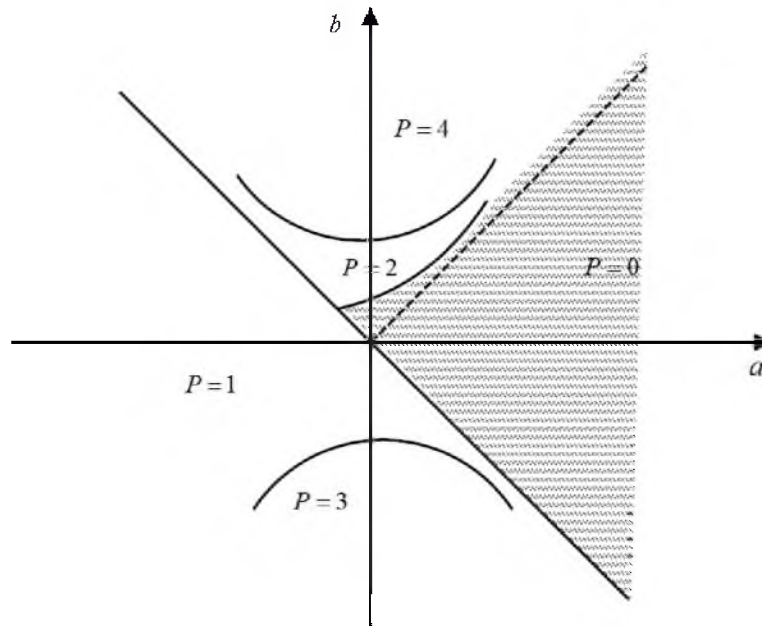


Figura 2.5: D subdivisión para el cuasipolinomio (2.8).

La D subdivisión para el cuasipolinomio (2.8) es representado en la Figura 2.5. El cuasipolinomio (2.8) no tiene p-zeros para $a > 0$ y $b = 0$. Por lo tanto la ecuación (2.7) es asintóticamente estable en el dominio mostrado en la Figura 2.5.

Este método será utilizado para encontrar, en forma gráfica, las regiones de estabilidad del robot móvil y seleccionar las ganancias del controlador PR que lo mantengan en esta región.

3. CAPÍTULO 3

ROBÓTICA MÓVIL

La robótica móvil se considera un área de la tecnología que se enfoca en problemas de alta complejidad. Su desarrollo lo constituyen aplicaciones de áreas tales como el control, programación, inteligencia artificial, percepción e instrumentación. Estas sirven de base para el avance en diversos campos de aplicación, tales como: robots voladores o drones para exploración aérea cuando se necesita desplazarse a lugares de difícil acceso, los robots acuáticos para exploración durante la construcción de pozos petroleros bajo el agua, robots terrestres se caracterizan por ser los más populares y la aplicación es muy extensa.

Los robots terrestres pueden moverse utilizando diferentes métodos, orugas, ápodos, patas o ruedas, siendo estos dos últimos los más comunes. Ejemplos de ellos se ven en la Figura 3.1.



(a) Aibo: Sofisticado perro robot de Sony.



(b) Sphinx: Robot para el control de pozos de petróleo de XIOR.

Figura 3.1: Robots móviles terrestres.

Los robots a ruedas son los más económicos y sencillos de implementar. Estos dan una solución simple y eficiente cuando se quiere conseguir la movilidad en terrenos suficientemente duros y libres de obstáculos, permitiendo conseguir velocidades relativamente altas.

Los robots móviles con ruedas emplean diferentes tipos de locomoción. De acuerdo a la configuración utilizada esta le confiere características y propiedades diferentes respecto a la eficiencia energética, dimensiones, cargas útiles y maniobrabilidad. A continuación se describen las principales configuraciones para la locomoción de los robots móviles a ruedas.

3.1. SISTEMAS DE LOCOMOCIÓN

La locomoción se entiende como la capacidad que tienen los robots móviles para desplazarse de un lugar a otro, a través de mecanismos que le permiten generar un movimiento específico.

A continuación se comentan brevemente las características más significativas de los mecanismos de locomoción más comunes en los robots móviles con ruedas [Baturone, 2001].

ACKERMAN

Es el utilizado en vehículos de cuatro ruedas convencionales. Este sistema de locomoción se ilustra en la Figura 3.2.

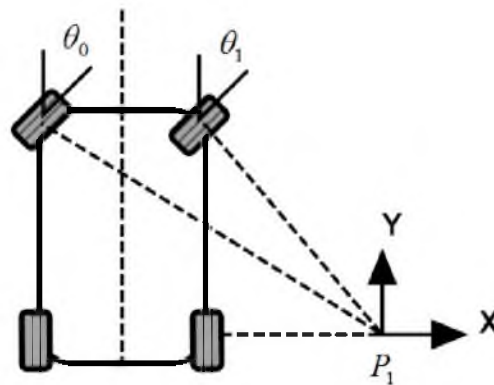


Figura 3.2: Configuración Ackerman

La rueda delantera interior gira un ángulo ligeramente al superior a la exterior ($\theta_1 > \theta_0$) para eliminar el deslizamiento. Las prolongaciones de los ejes de las dos ruedas delanteras intersectan en un punto, P_1 , sobre la prolongación del eje de las ruedas traseras. El lugar de los puntos trazados sobre el suelo por los centros de los neumáticos son circunferencias concéntricas con el centro el eje de rotación P_1 , Figura 3.2. El mayor problema de la locomoción Ackerman es la limitada maniobrabilidad.

TRICICLO CLÁSICO

Este sistema de locomoción se ilustra en la Figura 3.3. La rueda delantera sirve tanto para la tracción como para el direccionamiento. El eje trasero, con dos ruedas laterales, es pasivo y sus ruedas se mueven libremente. La maniobrabilidad es mayor que la configuración anterior pero puede presentar problemas de estabilidad en terrenos difíciles.

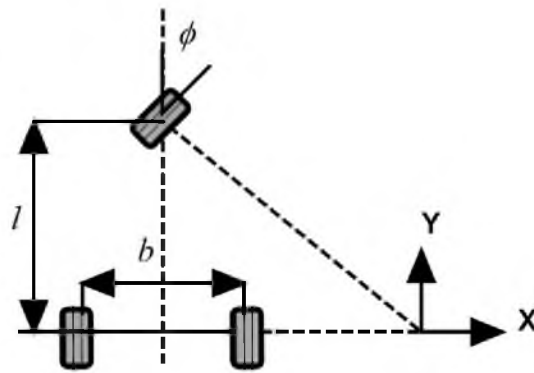


Figura 3.3: Locomoción de triciclo clásico.

El centro de gravedad tiende a desplazarse cuando el vehículo se desplaza por una pendiente, causando la pérdida de tracción.

DIRECCIONAMIENTO DIFERENCIAL

El direccionamiento viene dado por la diferencia de velocidades de las ruedas laterales. La tracción se consigue con estas mismas ruedas. Adicionalmente existen una o más rudas para soporte. En la Figura 3.4 se ilustra el sistema de locomoción de la plataforma Labmate. Esta configuración es la más frecuente en los robots para interiores.

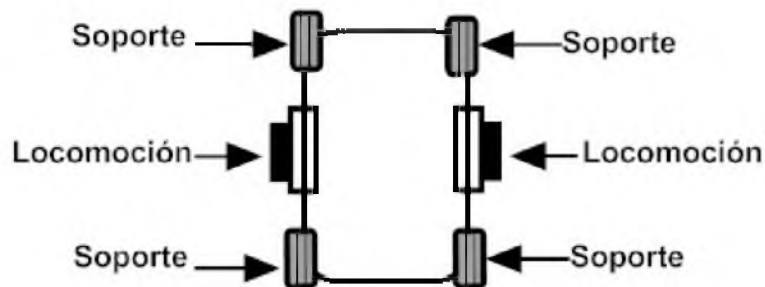


Figura 3.4: Locomoción con direccionamiento diferencial en dos ruedas laterales.

El sistema emplea cuatro ruedas de castor no actuadas para soporte de la plataforma.

SÍNCRONAS

Consiste en la actuación simultánea de todas las ruedas, que giran de forma síncrona. La transmisión se consigue mediante coronas de engranes (sychro drive) o con correas concéntricas como se muestra en la Figura 3.5.

La configuración síncrona es una popular disposición de las ruedas dentro de las aplicaciones de los robots móviles.

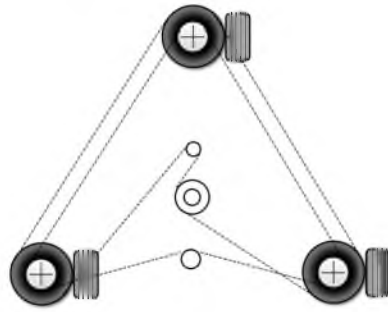


Figura 3.5: Locomoción síncrona

Esta es una configuración interesante porque, a pesar de que utiliza tres ruedas para dirigir y controlar al robot móvil, solamente son necesario dos motores, como se ve en la Figura 3.6 .

El mismo motor de traslación establece la velocidad de las tres ruedas juntas, y el mismo motor de dirección gira todas las ruedas juntas sobre cada uno de sus ejes de dirección vertical. Hay que notar que las ruedas son dirigidas con respecto del chasis del robot, y por lo tanto no hay un cambio directo de orientaron del chasis del robot [Siegwart y otros, 2004].

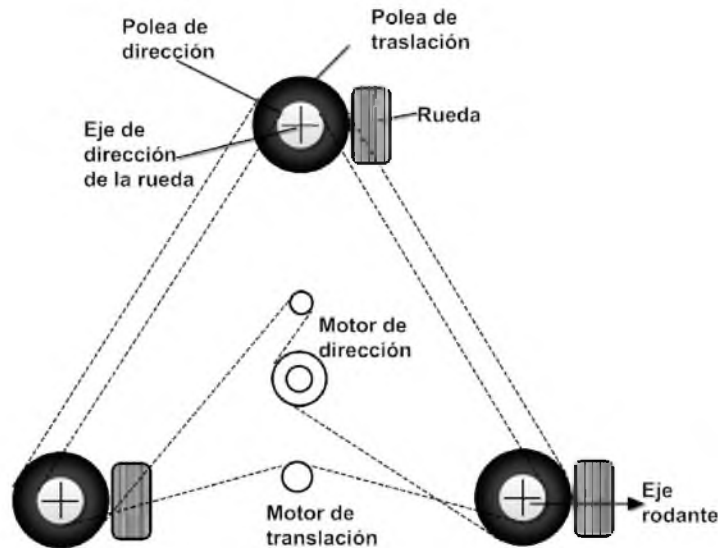


Figura 3.6: Configuración síncrona: El robot se puede mover en cualquier dirección.

La configuración síncrona es particularmente ventajosa en casos donde la omnidireccionalidad es buscada. Cada eje vertical de dirección es alineado con la trayectoria de contacto de cada llanta. El robot puede siempre reorientar las ruedas y moverse a lo largo de una nueva trayectoria sin que se note cuando se realiza un cambio.

Esta configuración hace mucho más simple la obtención del modelo matemático en los robots móviles. El modelo describe la acción del robot, es decir, seguir una trayectoria deseada como se muestra en la Figura 3.7.

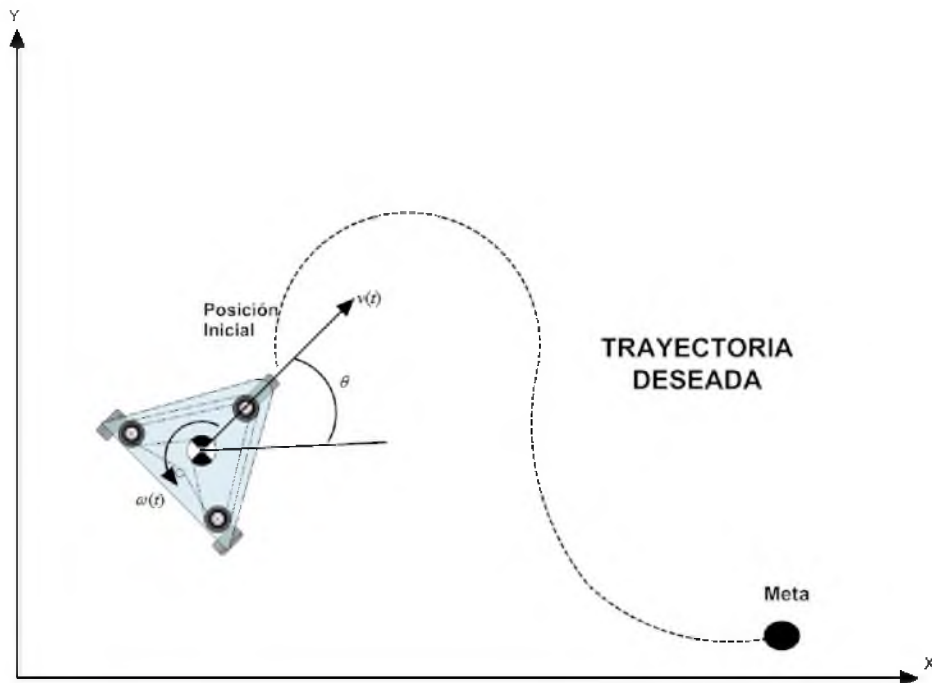


Figura 3.7: Ejemplo de seguimiento de trayectoria.

Al planear una trayectoria para un vehículo robótico se debe tener en cuenta aspectos geométricos, cinemáticos y dinámicos de este, que determinen el comportamiento y el desempeño del mismo con su entorno.

Uno de los aspectos principales es describir de forma conveniente la posición y orientación del robot móvil en el espacio.

En esta tesis se plantea utilizar un control proporcional retardado en un robot móvil. Este tipo de controlador aumenta la complejidad en la sintonización del control. Por lo tanto se requiere que el modelo matemático del robot sea lo más simple posible. De acuerdo con las características antes mencionadas, en este trabajo se utilizará un robot con configuración síncrona.

3.2. MODELO DE ROBOT SÍNCRONO

Para estudiar el robot móvil a ruedas con configuración síncrona se utiliza el modelo cinemático del robot utilizado en [Sarmiento, 2013].

El modelo cinemático que describe al robot está dado por (3.1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega, \quad (3.1)$$

donde las entradas ν y ω corresponden a la velocidad lineal y angular, respectivamente.

Se quiere que el robot móvil siga una trayectoria deseada $(x_d(t), y_d(t))$. Para ello en el modelo cinemático (3.1) se deben satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$\dot{x}_d = \nu_d \cos\theta_d, \quad (3.2)$$

$$\dot{y}_d = \nu_d \sin\theta_d,$$

$$\dot{\theta}_d = \omega_d,$$

aquí debe seleccionarse el valor de las entradas de referencia ν_d y ω_d .

Realizando una comparación entre el estado deseado $q_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ \theta_d(t)]^T$ y el estado medido actual $q(t) = [x(t) \ y(t) \ \theta(t)]^T$, Figura 3.8, se calcula el vector de error, el cual es la entrada del controlador.

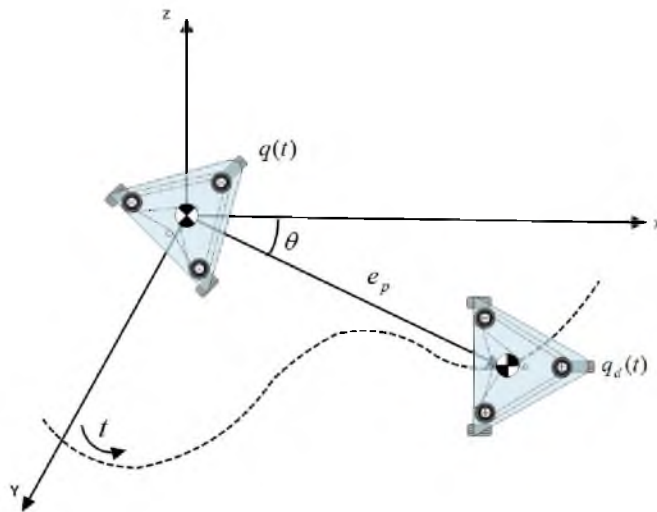


Figura 3.8: Error de seguimiento de la trayectoria.

Este error es caracterizado por la siguiente igualdad matricial

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

en el cual el término que corresponde al error en posición es el error cartesiano $e_p = [x_d - x \quad y_d - y]^T$ es expresado en un eje de referencia alineado con la orientación actual θ del robot mostrado en la Figura 3.8.

A fin de encontrar la dinámica del error, derivando (3.1) con respecto del tiempo y utilizando (3.2).

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (\dot{x}_d - \dot{x})\cos\theta - \dot{\theta}(x_d - x)\sin\theta + (\dot{y}_d - \dot{y})\sin\theta + \dot{\theta}(y_d - y)\cos\theta, \\ \dot{e}_2 &= -(x_d - x)\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}(x_d - x)\cos\theta + (\dot{y}_d - \dot{y})\cos\theta - \dot{\theta}(y_d - y)\sin\theta, \\ \dot{e}_3 &= \dot{\theta}_d - \dot{\theta}, \end{aligned}$$

y por medio de la transformación $v = v_d \cos e_3 - u_1$ y $\omega = \omega_d - u_2$,

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \omega_d - e_2 u_2 - u_1, \\ \dot{e}_2 &= -e_1 \omega_d + e_1 u_2 + v_d \sin e_3, \\ \dot{e}_3 &= u_2, \end{aligned}$$

se llega a la ecuación dinámica del error de seguimiento

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(e_3) \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & -e_2 \\ 0 & e_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

El primer término de la dinámica es lineal, mientras que el segundo y el tercero no lo son. Cabe resaltar que tanto el primero como el segundo son variantes en el tiempo debido a las entradas $v_d(t)$ y $\omega_d(t)$ [Siciliano y otros 2009].

4. CAPÍTULO 4

CONTROL DE ROBOT MÓVIL

El diseño de control, para los robots móviles con ruedas, depende de su capacidad de desplazarse en determinada dirección. En el caso del robot móvil con ruedas síncrono, debido a su capacidad de desplazarse en cualquier dirección, permite que las estrategias de control sean más sencillas.

La estructura del sistema con las estrategias de control a implementar se muestra en la Figura 4.1.

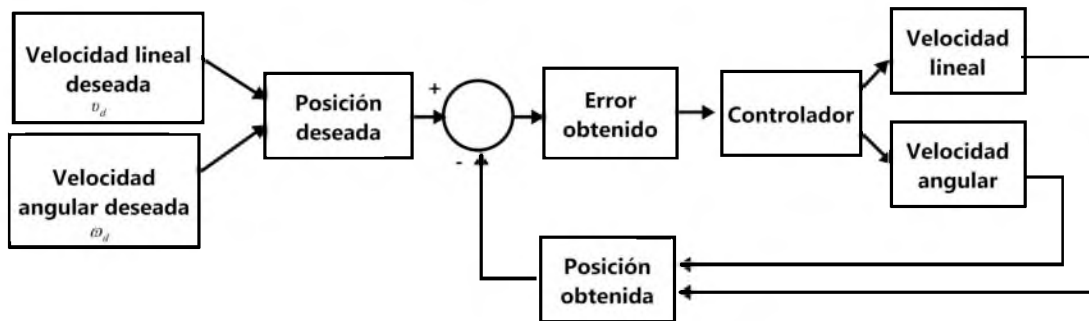


Figura 4.1: Diagrama del sistema

Las trayectorias se determinan mediante las funciones de la velocidad angular y lineal, de modo que la estimación de la posición (x, y, θ) se obtiene por medio de una integración del modelo (3.1) dando como resultado:

$$\begin{bmatrix} \int x \\ \int y \\ \int \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t v \cos \theta \\ \int_0^t v \sin \theta \\ \int_0^t \omega \end{bmatrix}$$

Suponga que se desea que el robot móvil siga la trayectoria mostrada en la Figura 4.2.

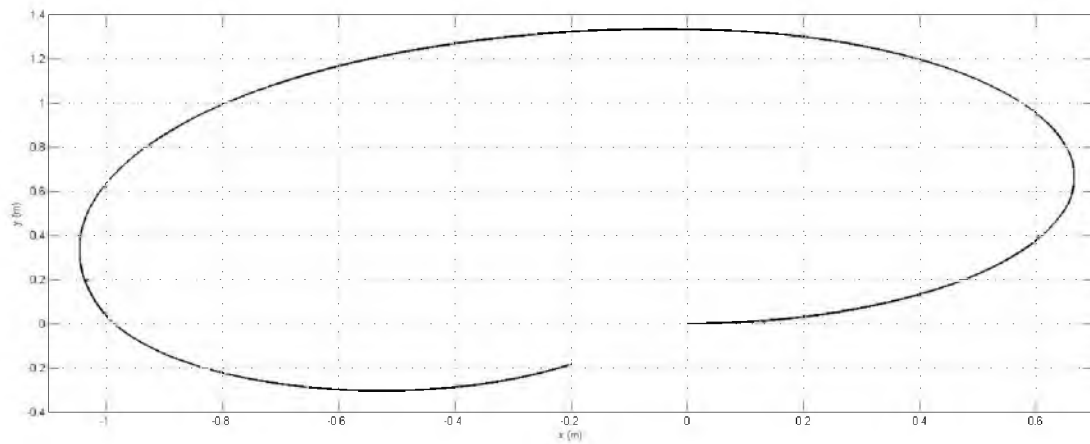


Figura 4.2: Trayectoria deseada.

Entonces las condiciones establecidas de velocidad lineal y velocidad angular serían las presentadas en la Figura 4.3 y la Figura 4.4.

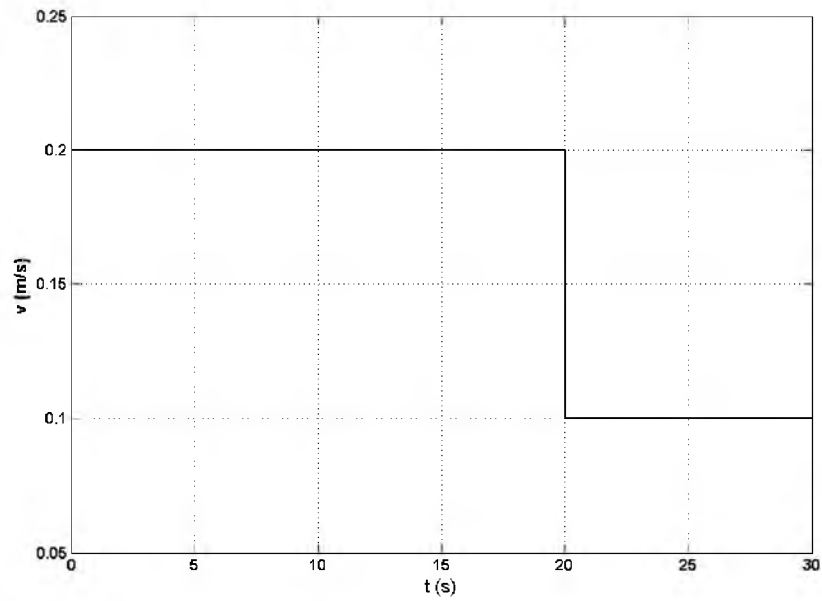


Figura 4.3: Velocidad lineal deseada.

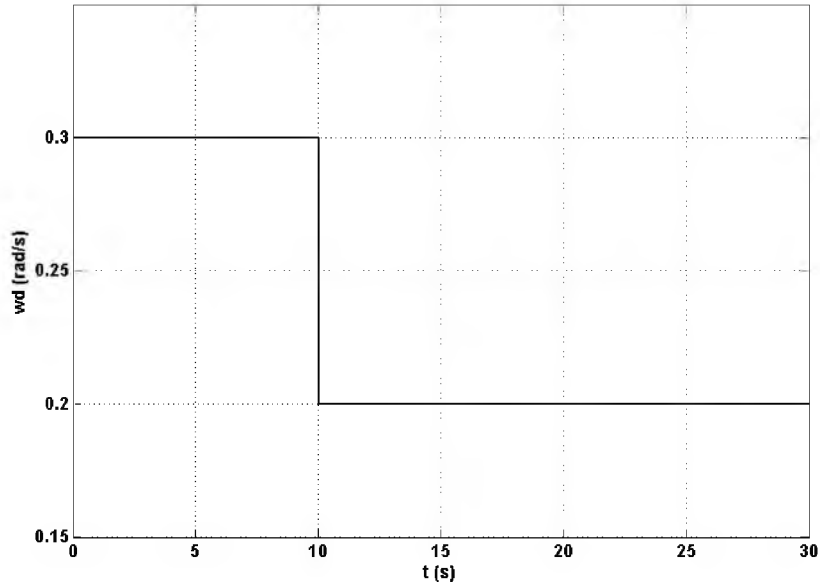


Figura 4.4: Velocidad angular deseada.

El seguimiento de la trayectoria involucra una ecuación dinámica del error. Dicho error está dado por la matriz (3.3) cuya salida es el error de seguimiento. El error se utiliza como entrada para la estrategia de control, cuya salida determina la velocidad lineal y angular que serán aplicadas al bloque de posición obtenida.

4.1. CONTROL LINEAL

Para ejemplificar, de forma simple, el diseño del control para el seguimiento de trayectoria es conveniente realizar una linealización aproximada de la dinámica del error alrededor de la trayectoria de referencia, en la que $e = 0$.

Esto se obtiene a partir de la ecuación dinámica del error, (3.4), donde se define $\text{sen}(e_3) = e_3$, al suponer que e_3 varía en pocos radianes, es posible considerar que

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La ley de control lineal propuesta se utilizará como realimentación, u_1 y u_2 .

$$u_1 = -k_1 e_1 \quad (4.2)$$

$$u_2 = -k_2 e_2 - k_3 e_3 \quad (4.3)$$

Aplicando (4.2) y (4.3) en (4.1) se obtiene la dinámica linealizada del sistema

$$\dot{e} = A(t)e = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} e \quad (4.4)$$

De la ecuación matricial (4.4) se determina el polinomio característico

$$P(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \det \begin{bmatrix} \lambda + k_1 & -\omega_d & 0 \\ \omega_d & \lambda & -v_d \\ 0 & k_2 & \lambda + k_3 \end{bmatrix},$$

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda + k_1)(\lambda + k_3) + \omega_d^2(\lambda + k_3) + v_d k_2(\lambda + k_1), \quad (4.5)$$

de acuerdo a la técnica mostrada en [Baturone, 2001] y [Siciliano y otros 2009], se propone que $k_1 = k_3$, y substituyendo en (4.5) se tiene el siguiente polinomio

$$P(\lambda) = (\lambda + k_1)(\lambda^2 + k_1\lambda + \omega_d^2 + k_2v_d). \quad (4.6)$$

Así mismo se define k_1 y k_2 como

$$k_1 = 2\zeta a, \quad (4.7)$$

$$k_2 = \frac{a^2 - \omega_d^2}{v_d}, \quad (4.8)$$

donde

a = frecuencia natural,

ζ = coeficiente de amortiguamiento.

Utilizando (4.7) y (4.8) en (4.6), se obtiene el polinomio característico

$$P(\lambda) = (\lambda + 2\zeta a_1)(\lambda^2 + 2\zeta a\lambda + \omega_d^2 + \frac{a^2 - \omega_d^2}{v_d}). \quad (4.9)$$

Si las raíces de (4.9) están en el semiplano complejo izquierdo se garantiza que la dinámica del error sea asintóticamente estable, asegurando que la posición del robot móvil converge al valor deseado.

4.1.1. SIMULACIÓN DEL CONTROL LINEAL

El diagrama de bloques en *Simulink*[®] del modelo matemático del robot móvil con el control lineal implementado se puede encontrar en el ApéndiceA.

A continuación se establecen los parámetros necesarios para la simulación.

Velocidad lineal:

$$v_d = \begin{cases} 0.2 \text{ m/s} & 0 \text{ s} \leq t < 20 \text{ s} \\ 0.1 \text{ m/s} & t \geq 20 \text{ s} \end{cases} .$$

Velocidad angular:

$$\omega_d = \begin{cases} 0.3 \text{ rad/s} & 0 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s} \\ 0.2 \text{ rad/s} & t \geq 10 \text{ s} \end{cases} .$$

Punto inicial de partida para el robot :

$$P_i = (0.34, 0.35).$$

Orientación del robot:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Valores arbitrarios de las constantes:

$$k_1 = 1,$$

$$k_2 = 2,$$

$$k_3 = 1.$$

Utilizando estos valores en el diagrama de *Simulink* siguiente

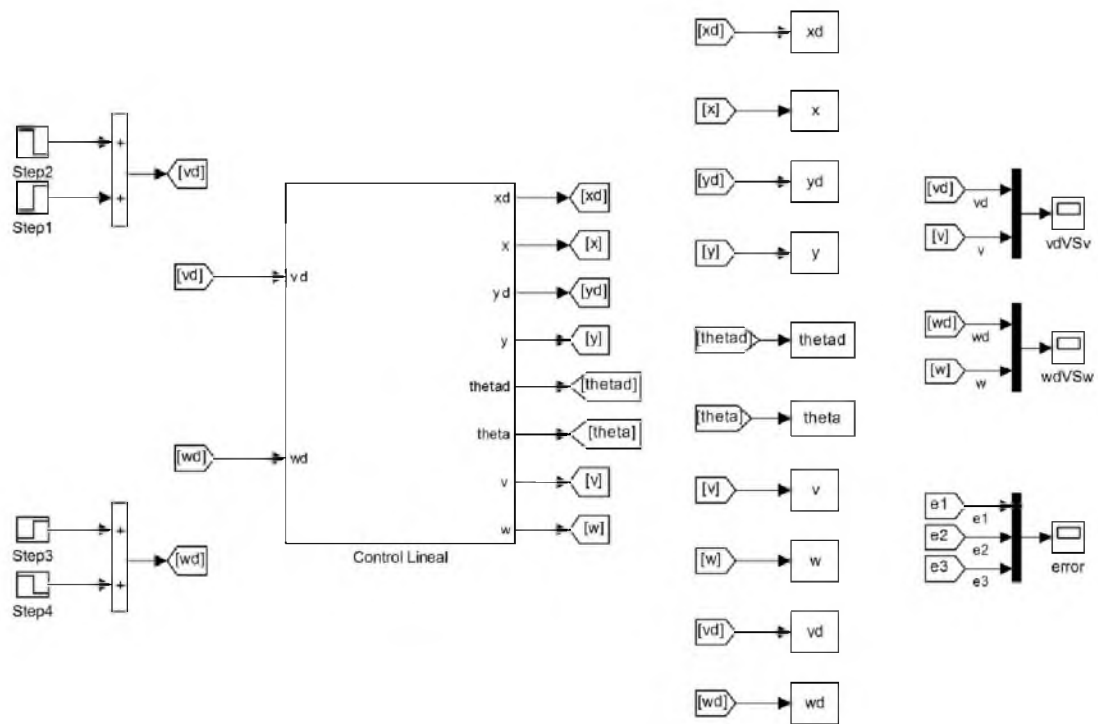


Figura 4.5: Diagrama del control lineal.

Los resultados de la simulación del robot móvil síncrono, cuando se utiliza una estrategia de control lineal, se presenta en la figura 4.6.

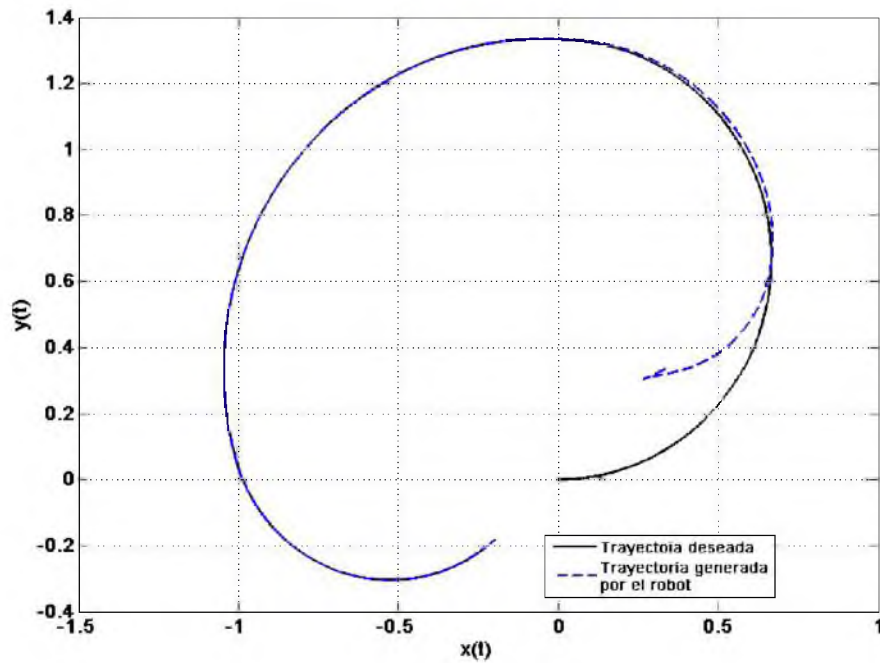


Figura 4.6: Simulación de la trayectoria obtenida con el control lineal.

Aquí se muestra como la trayectoria deseada parte de las coordenada $P_{iDes} = (0, 0)$, mientras que el robot se encuentra inicialmente ubicado en la coordenada $P_{iRob} = (0.34, 0.35)$. El robot tiene la orientación $\theta = \frac{\pi}{6} rad$, el robot gira para acoplarse a la trayectoria que se desea, pero es hasta la coordenada $P_{seg1} = (0.66, 0.66)$ cuando el robot coincide por primera vez con la trayectoria que se desea. La segunda coincidencia se alcanza en $P_{seg2} = (0.12, 1.32)$, a partir de este punto la trayectoria que realiza el robot se aproxima asintóticamente a la trayectoria deseada hasta su posición final en la coordenada $P_{final} = (-0.2, -0.2)$.

La velocidad lineal deseada, de 0 seg a 20 seg, para el robot es de $0.2 m/s$. Esta velocidad es alcanzada cerca de los 10 s donde a partir de ahí la mantiene, hasta 20 s. Desde este instante hasta 30 s se desea que la velocidad disminuya a $0.1 m/s$. EL robot sigue esta entrada correctamente como se muestra en la Figura 4.7.

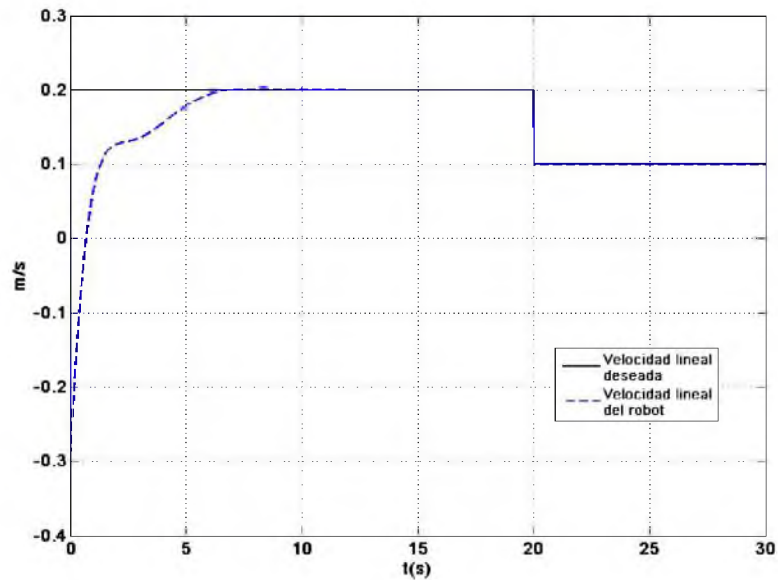


Figura 4.7: Simulación de la velocidad lineal obtenida con el control lineal.

La velocidad angular requerida (dirección) es $0.3 rad/s$ en el lapso de 0 s a 10 s. La respuesta del robot ante esta entrada produce un sobre impulso con tiempo de levantamiento de 2.4 s. Este es el punto donde el robot alcanza por primera vez los $0.3 rad/s$. Cerca de los 8.3 s se estabiliza en la velocidad deseada. De 10 s hasta los 30 s, se requiere que la velocidad baje a los 0.2 s, en este lapso el robot cumple esta condición, como se puede ver en la Figura 4.8.

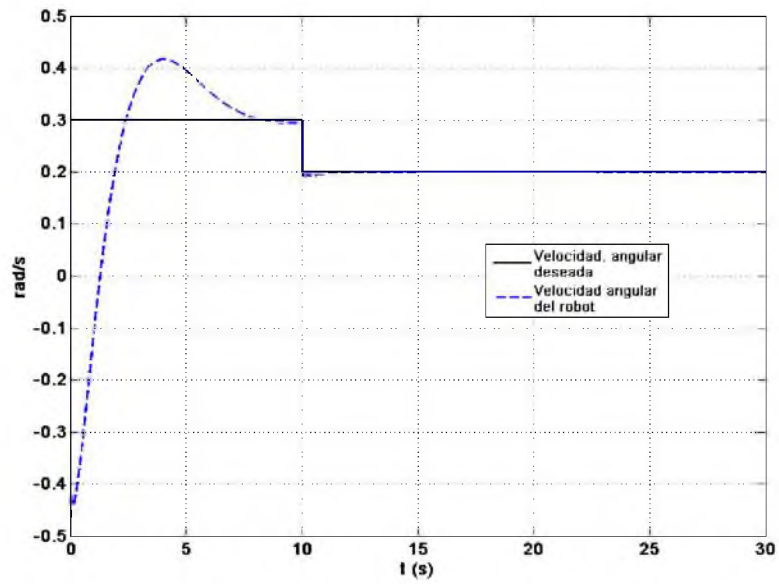


Figura 4.8: Velocidad angular deseada y velocidad angular obtenida con el control lineal.

El comportamiento de la dinámica del error del robot móvil se visualiza en la Figura 4.9, en la cual se puede ver que el error del sistema disminuye rápidamente a cero.

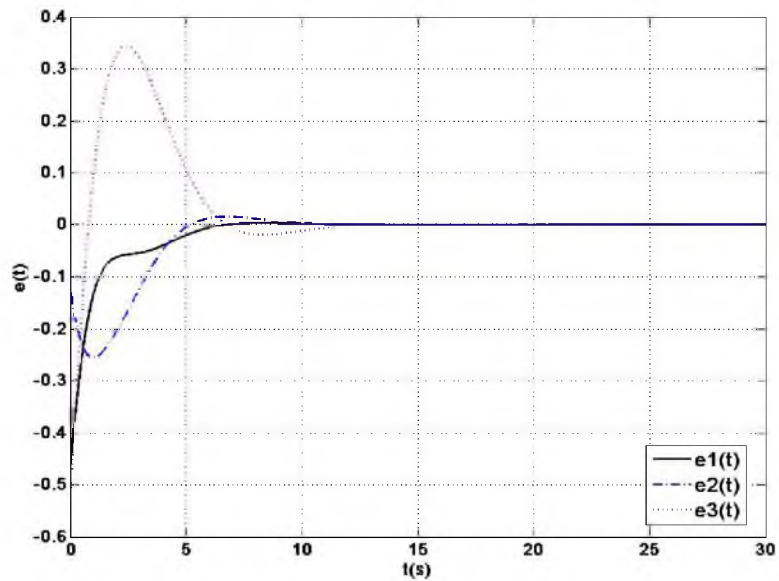


Figura 4.9: Comportamiento del error en el control lineal.

4.2. CONTROL PROPORCIONAL RETARDADO (PR)

Para el diseño del control PR se retoma la dinámica del error (4.1).

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Partiendo de las leyes de control establecidas en el control lineal u_1 y u_2 .

$$u_1 = -k_1 e_1, \quad (4.11)$$

$$u_2 = -k_2 e_2 - k_3 e_3, \quad (4.12)$$

se plantea una nueva ley de control PR [Villafuerte & Mondié., 1991],

$$u(t) = -k_p \theta(t) + k_r \theta(t - h), \quad (4.13)$$

sustituyendo la ley de control (4.13) en (4.12) se tiene

$$u_2 = -k_p e_2 + k_r e_2(t - h) - k_3 e_3. \quad (4.14)$$

Utilizando la igualdad $k_3 = k_1$ tenemos

$$u_2 = -k_p e_2 + k_r e_2(t - h) - k_1 e_3. \quad (4.15)$$

Estas entradas, (4.11) y (4.15), son utilizadas en el sistema (4.10)

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 e_1 \\ -k_p e_2 + k_r e_2(t - h) - k_1 e_3 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} -k_1 e_1 \\ 0 \\ -k_p e_2 + k_r e_2(t - h) - k_1 e_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Llevando la ecuación dinámica resultante a la forma $\dot{e} = Ae(t) + A_1e(t - h)$

[Malek-Zavarei & Jamshidi, 1987], se tiene

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_p & -k_1 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t-h) \\ e_2(t-h) \\ e_3(t-h) \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_p & -k_1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 0 \end{bmatrix}.$$

El cuasipolinomio característico de la dinámica del error se obtiene a través del $\det(\hat{s}I - A - A_1e^{-\hat{s}h}) = 0$, así

$$\begin{aligned} \hat{s}I - A - A_1e^{-\hat{s}h} &= \begin{bmatrix} \hat{s} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{s} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_p & -k_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r e^{-\hat{s}h} & 0 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \hat{s} + k_1 & -\omega_d & 0 \\ \omega_d & \hat{s} & -v_d \\ 0 & k_p - k_r e^{-h\hat{s}} & \hat{s} + k_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

el determinante da como resultado

$$\begin{aligned} \det(\hat{s}I - A - A_1e^{-\hat{s}h}) &= \det \left(\begin{bmatrix} \hat{s} + k_1 & -\omega_d & 0 \\ \omega_d & \hat{s} & -v_d \\ 0 & k_p - k_r e^{-h\hat{s}} & \hat{s} + k_1 \end{bmatrix} \right), \\ &= (\hat{s} + k_1) (\hat{s}(\hat{s} + k_1) - (-v_d)(k_p - k_r e^{-h\hat{s}})) - (-\omega_d)(\omega_d(\hat{s} + k_1)), \\ &= (\hat{s} + k_1) [(\hat{s}(\hat{s} + k_1) - (-v_d)(k_p - k_r e^{-h\hat{s}})) - (-\omega_d)(\omega_d)], \\ &= (\hat{s} + k_1) (\hat{s}^2 + \hat{s}k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{-h\hat{s}}). \end{aligned}$$

El cuasipolinomio característico resultante está constituido por dos partes, un polinomio de primer orden con raíz en $-k_1$ y el cuasipolinomio

$$p(\hat{s}, k_p, k_r, h) = \hat{s}^2 + \hat{s}k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{-h\hat{s}}. \quad (4.17)$$

Este cuasipolinomio se utilizará para la implementación del control PR, ya que (4.17) describe el comportamiento del sistema.

Debido a las características del modelo del robot síncrono podemos decir que, en general, el comportamiento del sistema es estable. Esto es, el modelo síncrono presenta estabilidad estática y cualquier entrada acotada producirá una salida acotada (las velocidades acotadas). Bajo esta suposición es posible encontrar la abscisa de convergencia α para que la ecuación dinámica del error converja a cero [Ogata, 1998]. Entonces, para cualquier $|\sigma| \geq |\alpha|$, existe una constante $L > 0$ tal que la solución de (4.16) satisface la desigualdad

$$|e(t)| \leq L e^{\sigma t} \|\varphi\|_h,$$

donde φ es la condición inicial y $\|\varphi\|_h = \max_{\tau \in [-h, 0]} \|\varphi(\tau)\|$ [Villafuerte & Mondié., 1991].

Esta σ estabiliza al sistema con una velocidad de convergencia $e^{\sigma t}$, por lo que se denomina estabilidad relativa o σ -estabilidad.

Para el análisis de la σ -estabilidad, del modelo del robot móvil, se realiza el cambio de variable $\hat{s} \rightarrow (s - \sigma)$, lo que transforma el cuasipolinomio (4.17) en

$$\begin{aligned} p(s - \sigma, k_p, k_r, h) &= (s - \sigma)^2 + (s - \sigma)k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{-h(s - \sigma)}, \\ &= s^2 - 2s\sigma + \sigma^2 + s k_1 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{-hs} e^{h\sigma}, \end{aligned}$$

$$p_\sigma(s, k_p, k_r, h) = s^2 + (k_1 - 2\sigma)s + \sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{-hs} e^{h\sigma}. \quad (4.18)$$

El cuasipolinomio (4.18) define completamente la σ -estabilidad y el dominio de las raíces del sistema (4.10). Como el comportamiento de las raíces en el plano complejo es continuo con respecto a los cambios continuos de los parámetros, la pérdida de la σ -estabilidad necesariamente ocurre cuando el cuasipolinomio tiene raíces, ya sea en $s = 0$ o un par de raíces imaginarias puras en $s = \pm j\omega$.

A continuación se caracterizan los cruces de la raíces por el eje imaginario s (recorrido en σ). Estas representan el lugar geométrico candidato para los límites de la estabilidad/inestabilidad.

Caso 1. Las raíces cruzan el lugar geométrico del cuasipolinomio (4.18), en el eje imaginario cuando $s = 0$.

El resultado se puede obtener sustituyendo $s = 0$ en la ecuación (4.18)

$$p_\sigma(0, k_p, k_r, h) = \sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma}, \quad (4.19)$$

$$\sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma} = 0, \quad (4.20)$$

de (4.20) despejamos k_r

$$k_r = \frac{\sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p}{v_d e^{h\sigma}}, \quad (4.21)$$

la cual satisface que el cuasipolinomio tenga raíces en cero.

Caso 2. Las raíces cruzan el lugar geométrico del eje imaginario del cuasipolinomio (4.18) en $s = \pm j\omega$ ocurre en $\omega = \sqrt{\lambda_{1,2}}$ para valores reales y positivos de $\lambda_{1,2}$.

Esto lo comprobamos sustituyendo en el cuasipolinomio (4.18) a $s = j\omega$,

$$p_\sigma(j\omega, k_p, k_r, h) = \sigma^2 - \omega^2 + \omega_d^2 - 2j\sigma\omega - \sigma k_1 + j\omega k_1 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma} e^{-jh\omega},$$

en términos de ω ,

$$p_\sigma(j\omega, k_p, k_r, h) = -\omega^2 + j(-2\sigma + k_1)\omega + \sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma} e^{-jh\omega}. \quad (4.22)$$

El modulo de (4.22), ($|a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $|e^{x+j\omega}| = e^x$), es

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sigma^2 - \omega^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2 + (-2\sigma\omega + \omega k_1)^2} &= v_d k_r e^{h\sigma}, \\ (\sigma^2 - \omega^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2 + (-2\sigma\omega + \omega k_1)^2 &= (v_d k_r e^{h\sigma})^2, \\ (\sigma^2 - \omega^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2 + (-2\sigma\omega + \omega k_1)^2 &= v_d^2 k_r^2 e^{2(h\sigma)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^4 - 2\sigma^3 k_1 + 2\sigma^2 \omega^2 + 2\sigma^2 v_d k_p + 2\sigma^2 \omega_d^2 + \sigma^2 k_1^2 - 2\sigma \omega^2 k_1 - 2\sigma v_d k_1 k_p - 2\sigma \omega_d^2 k_1 + \dots + \\ + \omega^4 - 2\omega^2 v_d k_p - 2\omega^2 \omega_d^2 + \omega^2 k_1^2 + v_d^2 k_p^2 + 2v_d \omega_d^2 k_p + \omega_d^4 = v_d^2 k_r^2 e^{2(h\sigma)}. \end{aligned}$$

Ordenando en términos de ω

$$\begin{aligned} \omega^4 + 2\sigma^2 \omega^2 - 2\sigma \omega^2 k_1 - 2\omega^2 v_d k_p - 2\omega^2 \omega_d^2 + \omega^2 k_1^2 + \sigma^4 - 2\sigma^3 k_1 + 2\sigma^2 \omega_d^2 + 2\sigma^2 v_d k_p + \dots + \\ + \sigma^2 k_1^2 - 2\sigma v_d k_1 k_p - 2\sigma \omega_d^2 k_1 + v_d^2 k_p^2 + 2v_d \omega_d^2 k_p + \omega_d^4 = v_d^2 k_r^2 e^{2(h\sigma)}, \end{aligned}$$

$$v_d^2 k_r^2 e^{2(h\sigma)} = \omega^4 + (2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p) \omega^2 + \dots + \underline{+\sigma^4 - 2\sigma^3 k_1 + 2\sigma^2 \omega_d^2 + 2\sigma^2 v_d k_p + \sigma^2 k_1^2 - 2\sigma v_d k_1 k_p - 2\sigma \omega_d^2 k_1 + v_d^2 k_p^2 + 2v_d \omega_d^2 k_p + \omega_d^4}.$$

Factorizando el termino subrayado tenemos que

$$\omega^4 + (2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p) \omega^2 + (\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2 - (v_d k_r e^{h\sigma})^2 = 0.$$

A fin de obtener una ecuación cuadrática se realiza el siguiente cambio de variable

$$\lambda = \omega^2$$

$$\lambda^2 + (2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p) \lambda + (\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2 - (v_d k_r e^{h\sigma})^2 = 0.$$

Utilizando la formula general para la solución de ecuaciones cuadráticas de segundo orden se obtienen las raíces del polinomio

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p)^2 - 4((\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2 - (v_d k_r e^{h\sigma})^2)}, \quad (4.23)$$

esto se asegura que el cuasipolinomio tenga raíces imaginarias pura, es decir, $\lambda_{1,2}$.

Los casos anteriores, corresponden a los límites permisibles máximos donde el sistema alcanza la velocidad de decaimiento $e^{\sigma t}$. Por lo cual estos son los límites del lugar geométrico de las raíces, en cuyo rango se asegura la σ – *estabilidad* del sistema.

4.2.1. REGIONES DE SIGMA ESTABILIDAD

El análisis anterior presenta el lugar en el cual las raíces del sistema (4.18) cruza por el eje imaginario s , recorrido en sigma, lo que se le denominó σ -estabilidad. De acuerdo a la selección de un valor para esta sigma se tendrán distintas regiones. Estas regiones se obtendrán a continuación.

Utilizando el polinomio (4.22) y sustituyendo $e^{-j\omega h} = \cos(\omega h) - j \sin(\omega h)$

$$\begin{aligned} p_\sigma(j\omega, k_p, k_r, h) &= -\omega^2 + j\omega(-2\sigma + k_1) + \sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma} e^{-j\omega h}, \\ &= -\omega^2 + j\omega(-2\sigma + k_1) + \sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - \dots \\ &\quad \dots - v_d k_r e^{h\sigma} (\cos(\omega h) - j \sin(\omega h)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_\sigma(j\omega, k_p, k_r, h) &= -\omega^2 + j\omega(-2\sigma + k_1) + \sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - \dots \\ &\quad \dots - v_d k_r e^{h\sigma} \cos h\omega + j v_d k_r e^{h\sigma} \sin h\omega. \end{aligned} \quad (4.24)$$

A partir de (4.24) se obtienen la parte real e imaginaria por separado

$$\text{real}(p_\sigma(j\omega, k_p, k_r, h)) = -\omega^2 + \omega_d^2 + \sigma^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma} \cos h\omega, \quad (4.25)$$

$$\text{Im}(p_\sigma(j\omega, k_p, k_r, h)) = \omega(-2\sigma + k_1) + v_d k_r e^{h\sigma} \sin h\omega. \quad (4.26)$$

De (4.26) se despeja k_r

$$\omega(-2\sigma + k_1) + v_d k_r e^{h\sigma} \sin h\omega = 0,$$

$$k_r(h, \omega) = \frac{\omega(2\sigma - k_1)}{v_d e^{h\sigma} \sin h\omega}. \quad (4.27)$$

En (4.25) se sustituye (4.27) y despejamos h

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \omega_d^2 + \sigma^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma} \cos h\omega &= 0, \\ -\omega^2 + \omega_d^2 + \sigma^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - v_d \left(\frac{\omega(2\sigma - k_1)}{v_d e^{h\sigma} \sin h\omega} \right) e^{h\sigma} \cos h\omega &= 0, \\ -\omega^2 + \omega_d^2 + \sigma^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - \omega(2\sigma - k_1) (\cot h\omega) &= 0, \\ -\omega^2 + \omega_d^2 + \sigma^2 - \sigma k_1 + v_d k_p = \omega(2\sigma - k_1) (\cot h\omega), \\ \frac{-\omega^2 + \omega_d^2 + \sigma^2 - \sigma k_1 + v_d k_p}{\omega(2\sigma - k_1)} &= \cot h\omega, \end{aligned}$$

$$h(\omega) = \frac{1}{\omega} \cot^{-1} \left(\frac{-\omega^2 + \sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p}{\omega(2\sigma - k_1)} \right) + \frac{n\pi}{\omega}, n = 0, 1.. \quad (4.28)$$

La caracterización del anterior lugar geométrico combinado con las ecuaciones paramétricas permite dibujar la primera región sigma-estabilidad como sigue.

Limite superior: Para la k_p y σ seleccionada, se dibuja en el plano (h, k_r)

$$k_r = \frac{\sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p}{v_d e^{h\sigma}}$$

Limite inferior: Para la k_p y σ seleccionada, se dibuja en el plano (h, k_r)

$$k_r(h, \omega) = \frac{\omega(2\sigma - k_1)}{v_d e^{h\sigma} \sin h\omega},$$

con

$$h(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} \cot^{-1} \left(\frac{-\omega^2 + \sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p}{\omega(2\sigma - k_1)} \right) & \omega \in [\varepsilon, \omega_e] \\ \frac{1}{\omega} \cot^{-1} \left(\frac{-\omega^2 + \sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p}{\omega(2\sigma - k_1)} \right) + \frac{\pi}{\omega} & \omega \in [\omega_e, \omega_2] \end{cases},$$

para $\omega \in [\varepsilon, \omega_2)$, $\varepsilon > 0$ y $\omega_e = \min \{ \omega_2, \sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p \}$.

La regiones para el sistema, con los valores de los parámetros numéricos $v_d = 0.2$, $\omega = 0.2$, $k_1 = 1$, $k_p = 20$ y para distintos valores de sigma(σ) se grafican a continuación.

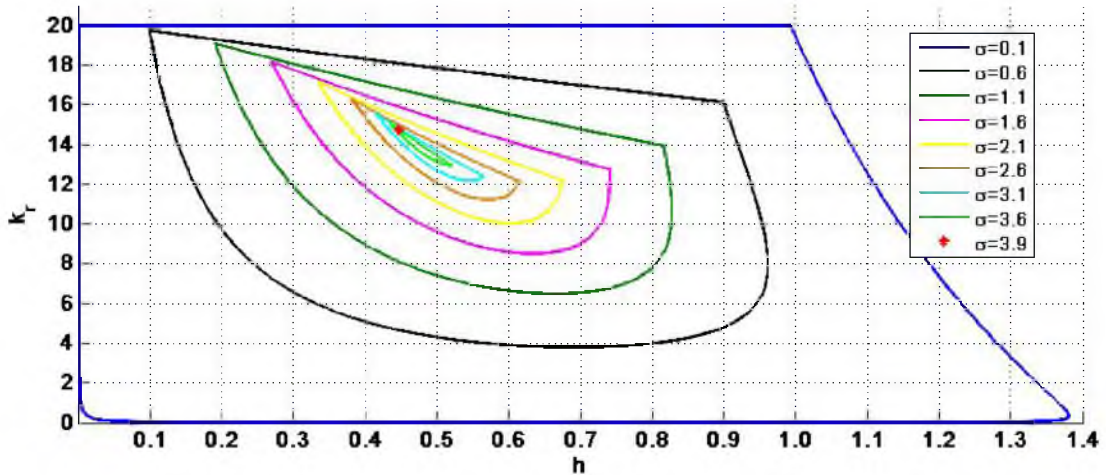


Figura 4.10: Regiones de σ – estabilidad para distintos valores.

Cada una de estas regiones representa un valor de sigma, es decir, una región en la cual el sistema decae asintóticamente a su punto de equilibrio a una velocidad sigma.

4.2.2. ANÁLISIS DE LAS RAÍCES DOMINANTES

El comportamiento de la respuesta del sistema está influenciado directamente por la localización de las raíces dominantes. A continuación se hace una caracterización analítica de algunos lugares geométricos claves de los límites para los cuales se logra el decaimiento exponencial $-\sigma$.

LUGAR GEOMÉTRICO 1: DOBLE RAÍZ EN $-\sigma$.

Para el cuasipolinomio (4.18), sustituyendo $s = j\omega$.

$$p_\sigma(j\omega, k_p, k_r, h) = -\omega^2 + j\omega(-2\sigma + k_1) + \sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma} e^{-j\omega h}.$$

El cruce de la rama corresponde a la raíz ω_1 con el límite $(\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p) - v_d k_r e^{h\sigma} = 0$ que ocurre cuando $\omega_1 \rightarrow 0$.

En este caso hay una raíz doble en σ , por lo tanto $p_\sigma(0, k_p, k_r, h) = 0$ y $\left. \frac{dp_\sigma(s, k_p, k_r, h)}{ds} \right|_{s=0}$.

Es decir hacemos que $\omega = 0$

$$\begin{aligned} -\omega^2 + j\omega(-2\sigma + k_1) + \sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma} e^{-j\omega h} &= 0, \\ (\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p) - v_d k_r e^{h\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$(\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p) = v_d k_r e^{h\sigma}. \quad (4.30)$$

Aplicando derivada parcial con respecto de sigma (4.29)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma}) &= 0, \\ 2\sigma - k_1 - h v_d k_r e^{h\sigma} &= 0, \end{aligned}$$

y despejando k_r

$$k_r = \frac{2\sigma - k_1}{h v_d e^{h\sigma}}. \quad (4.31)$$

Sustituyendo (4.30) y (4.31), obtenemos que

$$\begin{aligned} (\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p) &= v_d \left(\frac{2\sigma - k_1}{h v_d e^{h\sigma}} \right) e^{h\sigma}, \\ (\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p) &= \frac{2\sigma - k_1}{h}, \end{aligned}$$

despejando h

$$h = \frac{2\sigma - k_1}{(\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)}. \quad (4.32)$$

En consecuencia, dado $\sigma > 0$ y $k_p > 0$ los parámetros h y k_r corresponden a (4.31) y (4.32) respectivamente.

LUGAR GEOMÉTRICO 2: LUGAR GEOMÉTRICO DONDE $\omega_1 = \omega_2$

Este lugar geométrico es cuando la parte imaginaria de la raíz activa del cuasipolinomio resulta de ω_1 a ω_2 . Esto puede verse de (4.23) ya que $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Donde, el máximo posible valor para λ_1 ocurre cuando

$$(v_d k_r e^{h\sigma}) = \sqrt[2]{-\frac{1}{4}(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p)^2 + (\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2}.$$

Este se logra, haciendo $\lambda_{1,2} = 0$, y simplificando términos.

De modo que retomando

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p \right) + \frac{1}{2} \sqrt[2]{(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p)^2 - 4 \left((\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2 - (v_d k_r e^{h\sigma})^2 \right)},$$

y haciendo el término de la raíz igual a cero tenemos que

$$\lambda_2 = -\sigma^2 + \sigma k_1 + \omega_d^2 - \frac{1}{2} k_1^2 + v_d k_p.$$

Recordando que $\lambda_2 = \omega^2$, obtenemos el valor de ω

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt[2]{-\sigma^2 + \sigma k_1 + \omega_d^2 - \frac{1}{2} k_1^2 + v_d k_p}.$$

LUGAR GEOMÉTRICO 3: PAR DE RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS EN $-\sigma + j\omega_2$ Y UNA RAÍZ REAL EN $-\sigma$.

Cuando la parte imaginaria de la raíz activa es ω_2 , entonces el lugar geométrico 3 ocurre cuando

$$(\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p) - v_d k_r e^{h\sigma} = 0 \implies (\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p) = v_d k_r e^{h\sigma}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sqrt{(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p)^2 - 4 \left((\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2 - (v_d k_r e^{h\sigma})^2 \right)}, \\
&= \frac{1}{2} \left(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\left(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 4 \left((\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2 - (\sigma^2 + \omega_d^2 - \sigma k_1 + v_d k_p)^2 \right) \right]^{1/2}, \\
&= \frac{1}{2} \left(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p \right) + \frac{1}{2} \sqrt{(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p)^2}, \\
&= \frac{1}{2} \left(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p \right) + \frac{1}{2} \left(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p \right), \\
&= \left(2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p \right),
\end{aligned}$$

y

$$\omega_2 = \sqrt{2\sigma^2 - 2\omega_d^2 + k_1^2 - 2\sigma k_1 - 2v_d k_p}.$$

4.2.3. ESTRATEGIA DEL DECAIMIENTO EXPONENCIAL MÁXIMO

Para obtener los valores del máximo decaimiento exponencial, para un valor de σ dado, tomamos el cuasipolinomio (4.18)

$$p_\sigma(s, k_p, k_r, h) = s^2 - (2\sigma - k_1)s + \sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{-hs} e^{h\sigma},$$

y lo evaluamos con $s = 0$

$$\begin{aligned}
\left[s^2 - (2\sigma - k_1)s + \sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{-hs} e^{h\sigma} \right]_{s=0} &= 0, \\
\sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{h\sigma} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p = v_d k_r e^{h\sigma}. \quad (4.33)$$

Obteniendo la primera derivada parcial de (4.18) con respecto de s evaluada en $s = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} \left[s^2 - (2\sigma - k_1)s + \sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p - v_d k_r e^{-hs} e^{h\sigma} \right]_{s=0} &= 0, \\ \left[2s - 2\sigma + k_1 + h v_d k_r e^{h\sigma} e^{-hs} \right]_{s=0} &= 0, \\ -2\sigma + k_1 + h v_d k_r e^{h\sigma} &= 0, \\ 2\sigma - k_1 &= h v_d k_r e^{h\sigma}.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Obteniendo la segunda derivada parcial de (4.18) con respecto de s evaluada en $s = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} \left[2s - 2\sigma + k_1 + h v_d k_r e^{h\sigma} e^{-hs} \right]_{s=0} &= 0, \\ \left[2 - h^2 v_d k_r e^{h\sigma} e^{-hs} \right]_{s=0} &= 0, \\ 2 - h^2 v_d k_r e^{h\sigma} &= 0, \\ 2 &= h^2 v_d k_r e^{h\sigma}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Dividiendo (4.34) entre (4.33) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{2\sigma - k_1}{\sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p} &= \frac{h v_d k_r e^{h\sigma}}{v_d k_r e^{h\sigma}}, \\ h &= \frac{2\sigma - k_1}{\sigma^2 - k_1\sigma + \omega_d^2 + v_d k_p}.\end{aligned}\tag{4.36}$$

Dividiendo (4.35) entre (4.33)

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sigma^2 - \sigma k_1 + \omega_d^2 + v_d k_p} &= \frac{h^2 v_d k_r e^{h\sigma}}{v_d k_r e^{h\sigma}}, \\ h^2 &= \frac{2}{\sigma^2 - k_1\sigma + \omega_d^2 + v_d k_p}.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Sustituyendo (4.36) en (4.37)

$$h^2 = \frac{2}{\sigma^2 - k_1\sigma + \omega_d^2 + v_d k_p},$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2\sigma - k_1}{\sigma^2 - k_1\sigma + \omega_d^2 + v_d k_p}\right)^2 &= \frac{2}{\sigma^2 - k_1\sigma + \omega_d^2 + v_d k_p}, \\
(2\sigma - k_1)^2 &= 2(\sigma^2 - k_1\sigma + \omega_d^2 + v_d k_p), \\
0 &= 4\sigma^2 - 4\sigma k_1 + k_1^2 - 2\sigma^2 - 2k_1\sigma - 2\omega_d^2 - 2v_d k_p, \\
0 &= \sigma^2 - 3k_1\sigma - \omega_d^2 + \frac{1}{2}k_1^2 - v_d k_p, \tag{4.38} \\
\sigma &= \frac{1}{2}3k_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(3k_1)^2 - 4\left(-\omega_d^2 + \frac{1}{2}k_1^2 - v_d k_p\right)}, \\
\sigma &= \frac{3}{2}k_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_d^2 + 7k_1^2 + 4v_d k_p}.
\end{aligned}$$

El límite de la cota exponencial Sigma óptima queda como (4.39)

$$\sigma^* = \frac{3}{2}k_1 + \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_d^2 + 7k_1^2 + 4v_d k_p}. \tag{4.39}$$

Retomando (4.38) y despejando σ^2

$$\sigma^2 = 3k_1\sigma + \omega_d^2 - \frac{1}{2}k_1^2 + v_d k_p, \tag{4.40}$$

ahora sustituyendo (4.40) en (4.36)

$$\begin{aligned}
h &= \frac{2\sigma - k_1}{\sigma^2 - k_1\sigma + \omega_d^2 + v_d k_p}, \\
h &= \frac{2\sigma - k_1}{\left(3k_1\sigma + \omega_d^2 - \frac{1}{2}k_1^2 + v_d k_p\right) - k_1\sigma + \omega_d^2 + v_d k_p}.
\end{aligned}$$

El retardo óptimo queda como (4.41)

$$h^* = \frac{2\sigma - k_1}{2\omega_d^2 - \frac{1}{2}k_1^2 + 2\sigma k_1 + 2v_d k_p}. \tag{4.41}$$

Tomando (4.34) y sustituyendo (4.39) y (4.41) obtenemos la Ganancia Retardada Optima

$$k_r^* = \frac{2\sigma^* - k_1}{v_d h^* e^{h^* \sigma^*}}. \tag{4.42}$$

4.2.4. SIMULACIÓN DEL CONTROL PR EN EL ROBOT MÓVIL

Con las ecuaciones para calcular los parámetros óptimos en el control del robot móvil, podemos simular el comportamiento del robot. Los resultados obtenidos se describen a continuación:

Al igual que la simulación con el control lineal, mostrado anteriormente, para el control PR el robot móvil parte de las mismas condiciones, es decir,

$$v_d = \begin{cases} 0.2 \text{ m/s} & 0 \text{ s} \leq t < 20 \text{ s} \\ 0.1 \text{ m/s} & t \geq 20 \text{ s} \end{cases}$$

$$\omega_d = \begin{cases} 0.3 \text{ rad/s} & 0 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s} \\ 0.2 \text{ rad/s} & t \geq 10 \text{ s} \end{cases}$$

$$P_i = (0.34, 0.35),$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad},$$

$$k_1 = 1,$$

$$k_2 = 2,$$

$$k_3 = 1.$$

Se propone el valor de $k_p = 20$, para asegurar que el robot converja al valor deseado. Los valores óptimos de σ^* , h^* y k_r^* se calculan con las ecuaciones (4.39), (4.41) y (4.42), respectivamente.

$$\sigma^* = 3.9166,$$

$$h^* = 0.4405,$$

$$k_r^* = 13.8177.$$

Teniendo todos los parámetros necesarios se utilizan en el diagrama de bloques de *Simulink*[®], que se muestra a continuación

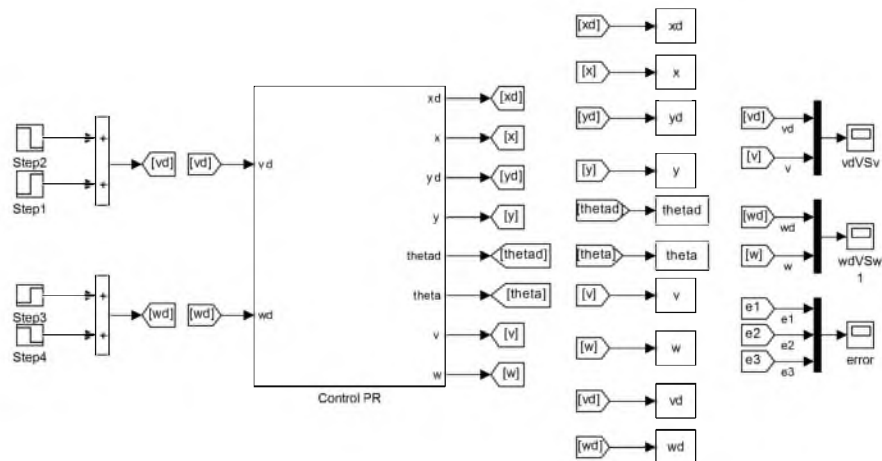


Figura 4.11: Diagrama de bloques del sistema con controlador PR.

Los resultados obtenidos al utilizar el controlador PR en el diagrama de bloques del robot móvil son los siguientes:

La coordenada inicial deseada es $P_{iDes} = (0, 0)$, mientras que el robot se encuentra inicialmente ubicado en la coordenada $P_{iRob} = (0.34, 0.35)$. El robot tiene la orientación $\theta = \frac{\pi}{6} rad$, el robot gira para acoplarse a la trayectoria deseada. A partir de la coordenada $P_{seg} = (0.42, 0.15)$ el robot ya se encuentra en una vecindad cercana a la trayectoria deseada. Posteriormente, el robot sigue idénticamente la trayectoria que se desea, esto se puede visualizar claramente en la Figura 4.12.

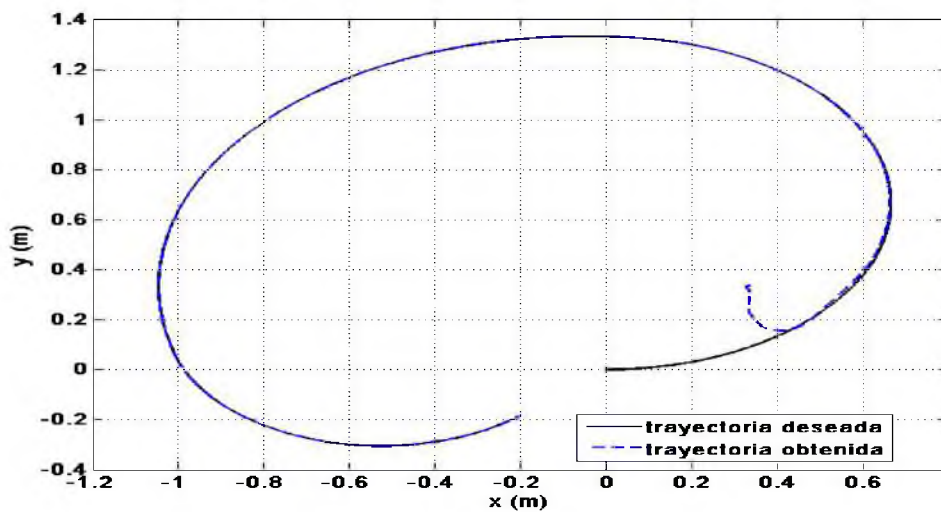


Figura 4.12: Trayectoria del robot móvil aplicando control PR.

La velocidad lineal requerida es de 0.2 m/s en el intervalo de tiempo de 0 s a 20 s . Para satisfacer este requerimiento el robot presenta un sobre impulso, en 0.2 s cruza por primera vez el valor deseado, vuelve a cruzar en 0.5 s . Es hasta los 0.7 s cuando el robot se establece en el valor deseado de la velocidad angular. A partir de los 20 s la condición de velocidad cambia a 0.1 m/s , ante este condición el robot sigue exactamente este requerimiento, esto se presenta en la Figura 4.13.

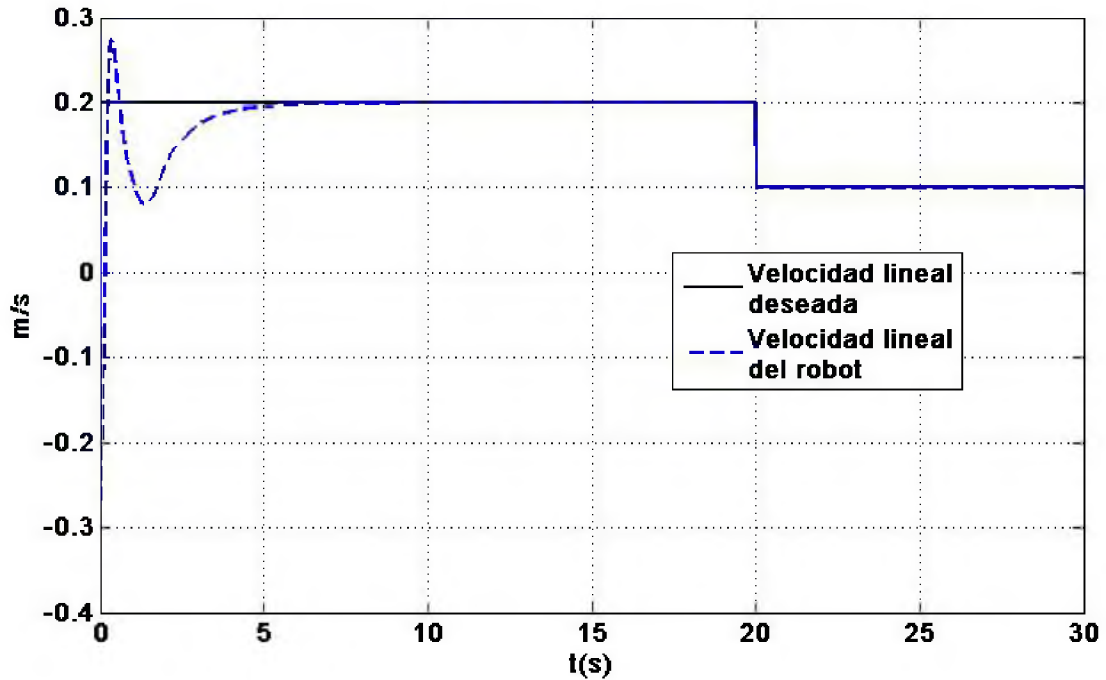


Figura 4.13: Velocidad del robot móvil con control PR.

Por otro lado se requiere que la velocidad angular del robot sea de 0.3 rad/s en el lapso de 0 s a 10 s , esta condición se satisface después de 3.7 s . Debido a la rapidez con que se llega al valor deseado, la velocidad presenta una oscilación inicial. A partir de los 10 s y hasta los 30 s , la velocidad baja a los 0.2 s , dicha condición se satisface, como se ve en la Figura 4.14.

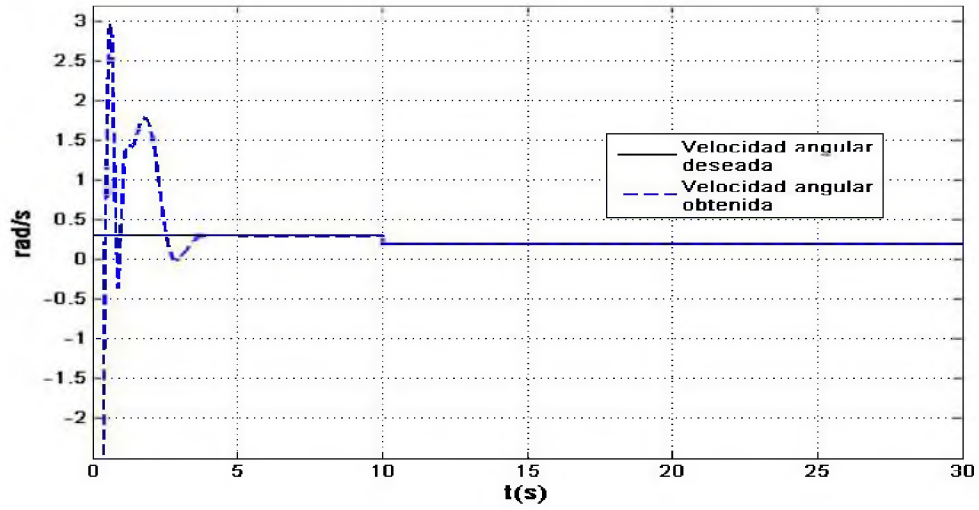


Figura 4.14: Velocidad angular del robot móvil con controlador PR.

El error presente en el sistema se puede visualizar en la Figura 4.15. Como se puede observar el error en $t = 3.4s$ prácticamente ha desaparecido. Esto garantiza que el robot sigue los valores de trayectoria y velocidad establecidos de manera precisa.

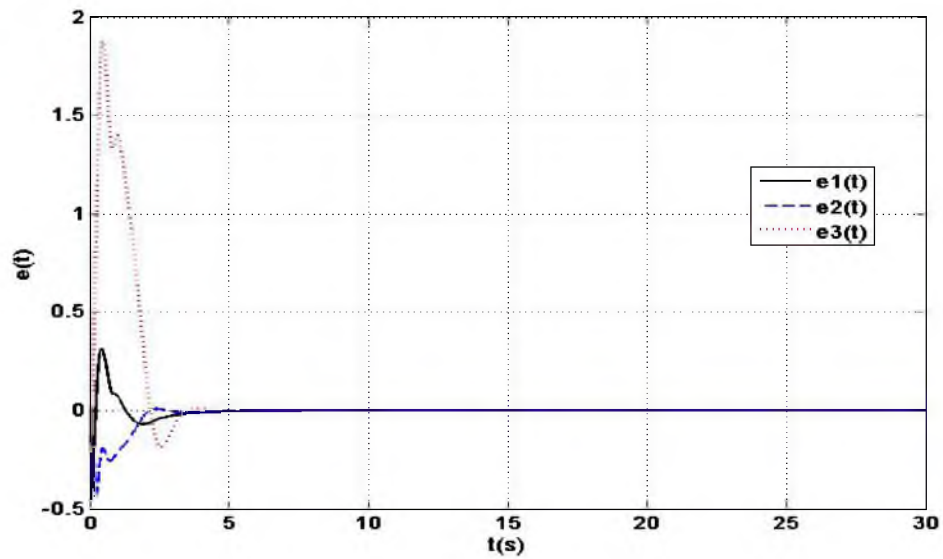


Figura 4.15: Comportamiento del error del robot móvil con controlador PR.

5. CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

El controlador PR diseñado, en comparación al control lineal, tiene un mejor desempeño y muestra ventajas sobresalientes, lo que se ve claramente reflejado en los resultados de las simulaciones.

En general, cuando el robot utiliza el control PR, reacciona con mayor rapidez, alcanzando la trayectoria deseada en un menor tiempo (Figura 5.1).

Así mismo tiene menor índice de error y su tiempo de establecimiento es mucho menor que con el controlador lineal.

A continuación se presenta una comparación del desempeño del robot móvil, cuando utiliza el control PR y el control lineal.

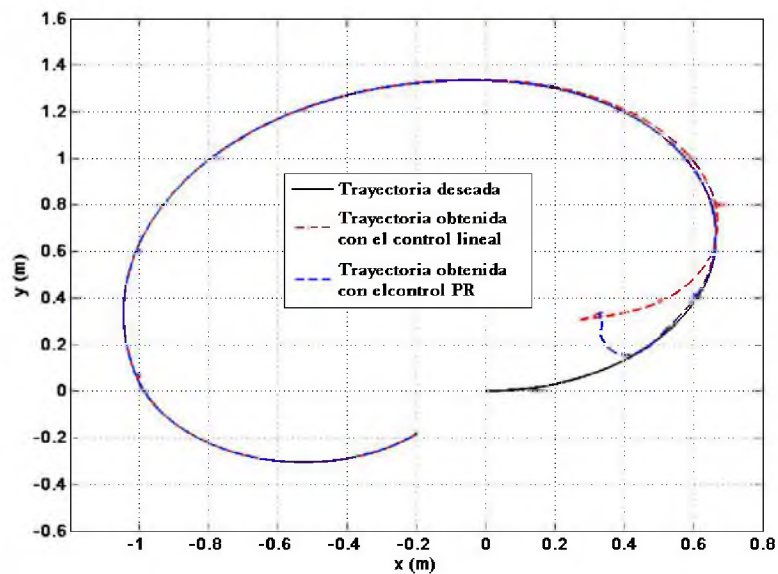


Figura 5.1: Comparación de la trayectoria: Control lineal vs control PR.

La velocidad lineal también tiene mejoras significativas. La Figura 5.2 muestra la comparación de la velocidad lineal obtenida con el control lineal y el control PR.

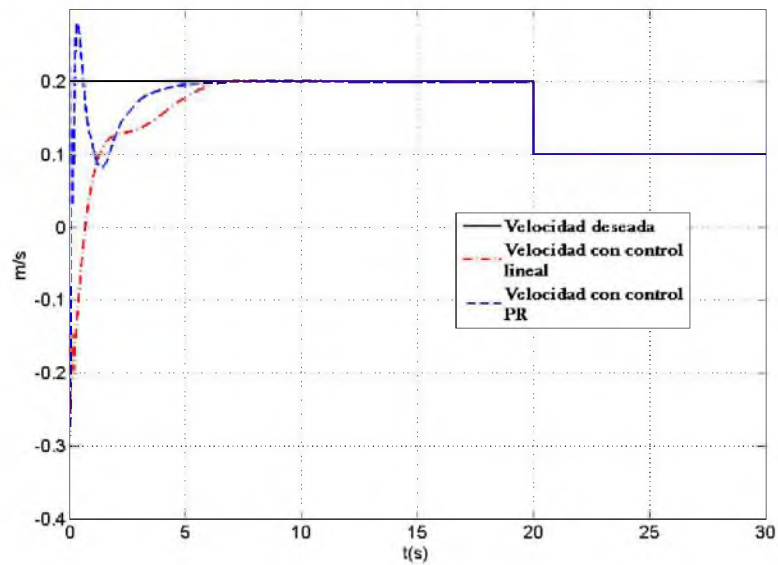


Figura 5.2: Comparación de la velocidad lineal: Control lineal vs control PR.

En cuanto a la velocidad angular es de esperarse de que mejore notablemente, como se ve en la Figura 5.3. En esta figura se muestran las diferencias entre las dos estrategias control aplicadas.

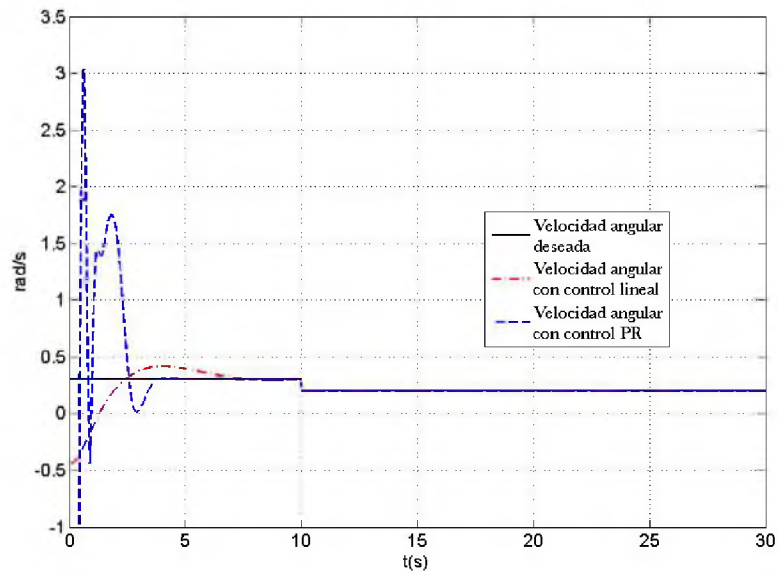


Figura 5.3: Velocidad angular: Control lineal vs control PR.

Es importante también mostrar el comportamiento del robot móvil, en el plano, esto es, la posición en x , la posición en y y la orientación θ .

Error en la coordenada $x(t)$ se muestra en la Figura 5.4.

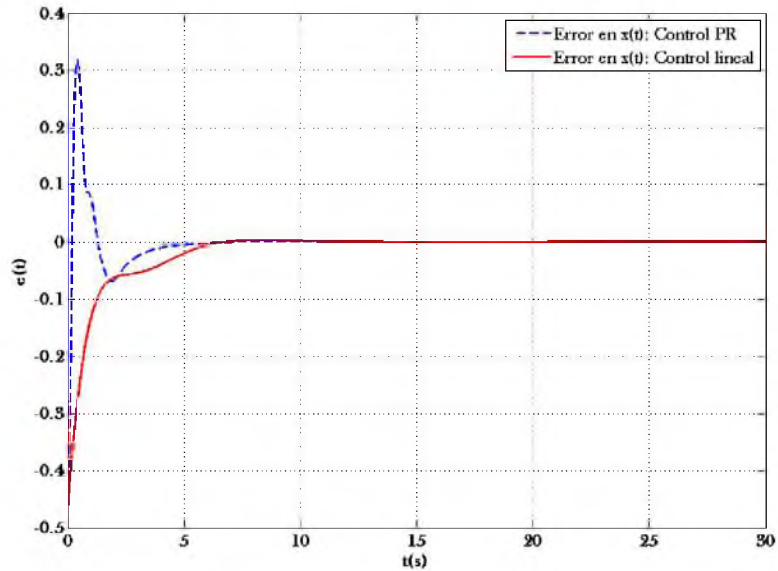


Figura 5.4: Error en la coordenada $x(t)$: Control lineal vs control PR.

El error en la coordenada $y(t)$ se ve en la Figura 5.5.

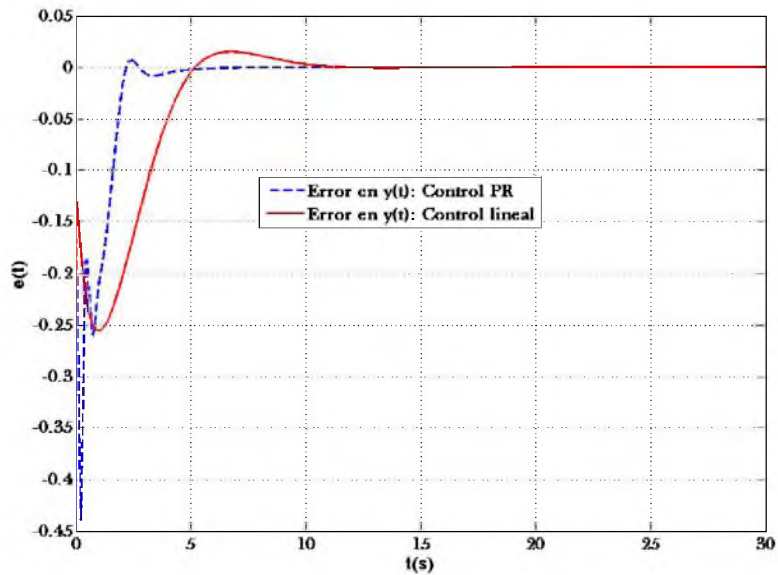


Figura 5.5: Error en la coordenada $y(t)$: Control lineal vs control PR.

Para el seguimiento de trayectoria no solo es necesario el posicionamiento en el eje coordinado, sino que también, una componente que indique la orientación del robot móvil. El error en la orientación del robot móvil (θ) se muestra en la Figura 5.6.

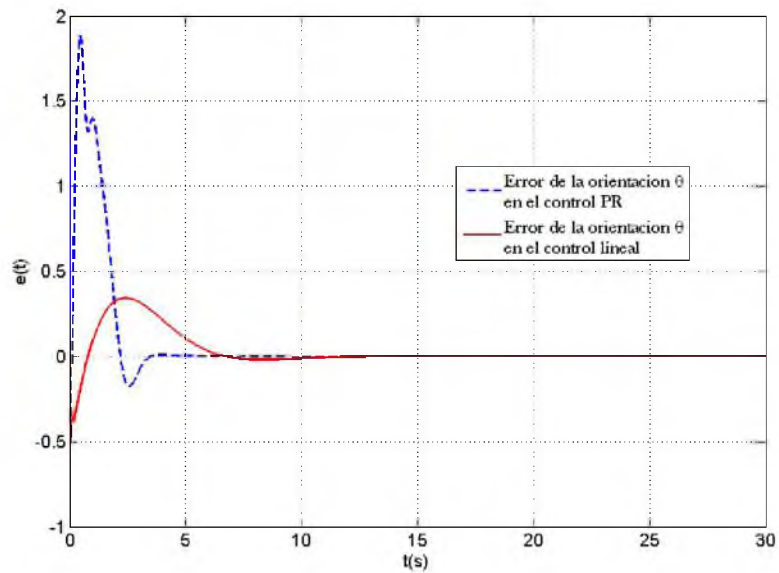


Figura 5.6: Comparación entre el error en la orientación de los controladores.

En conclusión, a pesar de que la estrategia de control lineal permite realizar el seguimiento de trayectoria de manera aceptable es factible, considerando este mismo modelo lineal, obtener mejores resultados. En esta tesis se abordó este problema considerando una ley de control proporcional retardada. Esta ley de control considera el estado del sistema como un segmento de trayectoria lo que nos permite utilizar valores actuales y valores retardados para calcular la acción de control correspondiente. Como se puede ver, en los resultados presentados, al ocupar esta ley de control se obtiene un notable mejor desempeño que el que se obtiene con el control lineal. Sin embargo el esfuerzo para diseñar la estrategia de control lineal es menor que el necesario para diseñar el control PR, el cual requiere de información adicional sobre solución de ecuaciones diferenciales con retardo, el método de la D subdivisión para comprobar la estabilidad de sistemas, graficación de las regiones de σ -estabilidad y estrategias de diseño para la obtención de los valores óptimos.

BIBLIOGRAFÍA

Referencias

- [Baturone, 2001] Baturone, Aníbal Ollero. (2001). ROBÓTICA Manipuladores y robots móviles. Primera Edición. Barcelona (España) : Alfaomega. 1.2, 3.1, 4.1
- [Dorf & Bishop, 2005] Dorf, Richard C. y Bishop, Robert H. (2005). Sistemas de Control Moderno. Decima edición. Madrid (España) : Pearson Educación, S.A. 1.1, 1.1
- [Kelly & Santibáñez, 2003] Kelly, Rafael y Santibáñez, Victor. (2003). Control de Movimientos de Robots Manipuladores. Madrid : Prentice Hall. 1.1
- [Malek-Zavarei & Jamshidi, 1987] Malek-Zavarei, M. & Jamshidi, M., (1987). Time-Delay Systems Analysis, Optimization and Applications. U.S.A: North-Holland. 1, 4.2
- [Ogata, 1998] Ogata, K., (1998). Ingeniería de control moderna. Tercera ed. México: Prentice Hall. 1.1, 1.3, 4.2
- [Sarmiento, 2013] Sarmiento, E. G. D., (2013). Aplicación de estrategias de control lineal y no lineal en el modelo matemático de un robot móvil. Tesis. Universidad del Papaloapan. Loma Bonita, Oaxaca. 3.2
- [Siciliano y otros 2009] Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). Robotics Modelling, Planning and Control. Londres: Springer. 3.2, 4.1
- [Siegwart y otros, 2004] Siegwart, Roland y Nourbakhsh, Illah R. (2004). Introduction to Autonomous Mobile Robots. Primera. USA: The MIT Press. 3.1

- [Villafuerte & Mondié., 1991] Villafuerte, R. & Mondié., S., (2010). Tuning the leading roots of a second order DC servomotor with proportional retarded control.. México DF. 4.2, 4.2
- [Bellman,1963] Bellman, R., (1963). Differential-Difference Equations. New York: Academic Press, Inc. 2.1
- [Nosov,1986] Nosov, V.R., (1986). Stability Of Functional Differential Equations. Moscow (USSR): Academic Press,Inc. 2.3

A. Diagramas en *Simulink*[®] para el control lineal.

El diagrama general del control lineal se muestra en la Figura A.1.

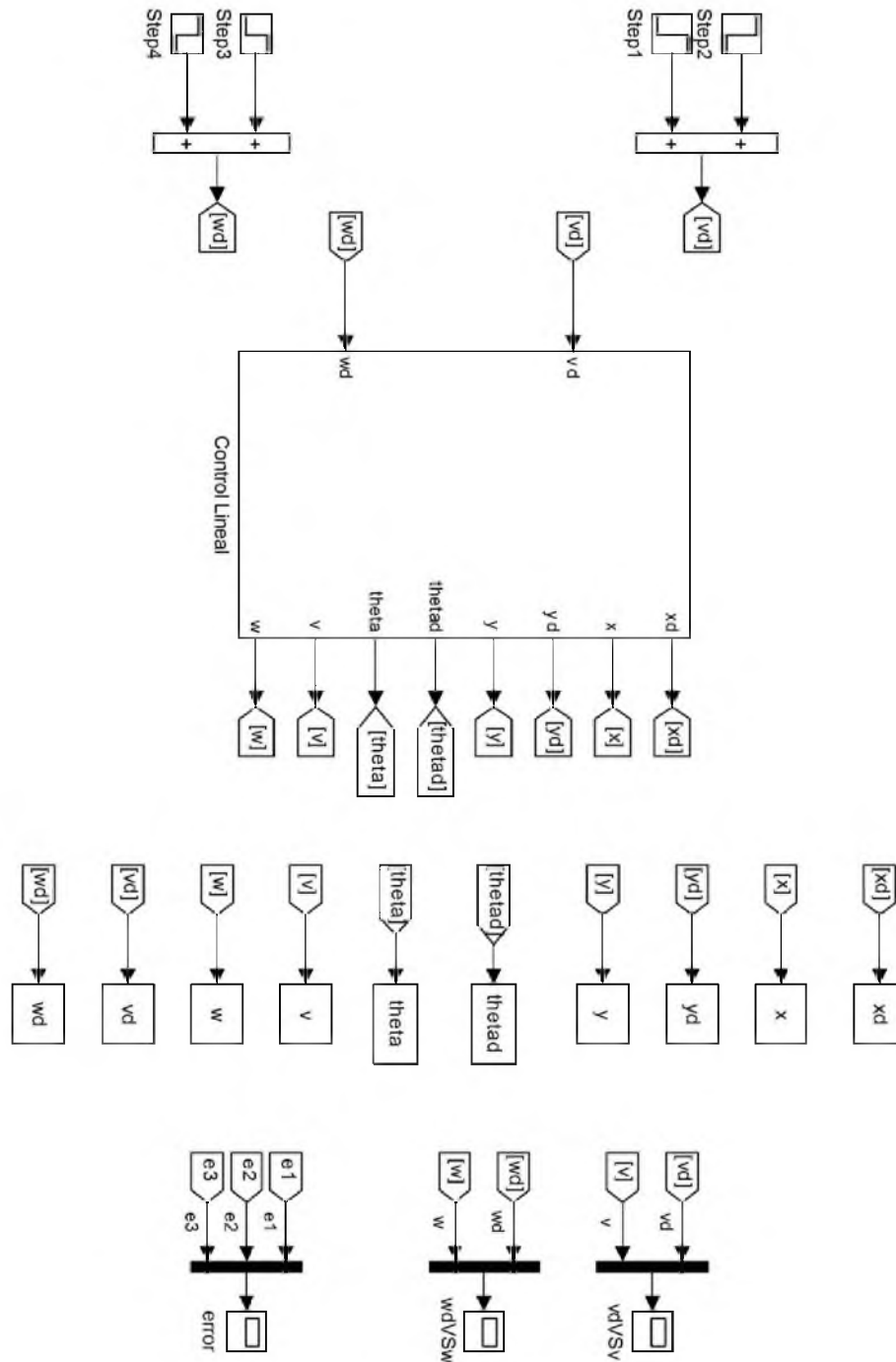


Figura A.1: Diagrama general del control lineal.

El subdiagrama del control lineal se muestra en la Figura A.2.

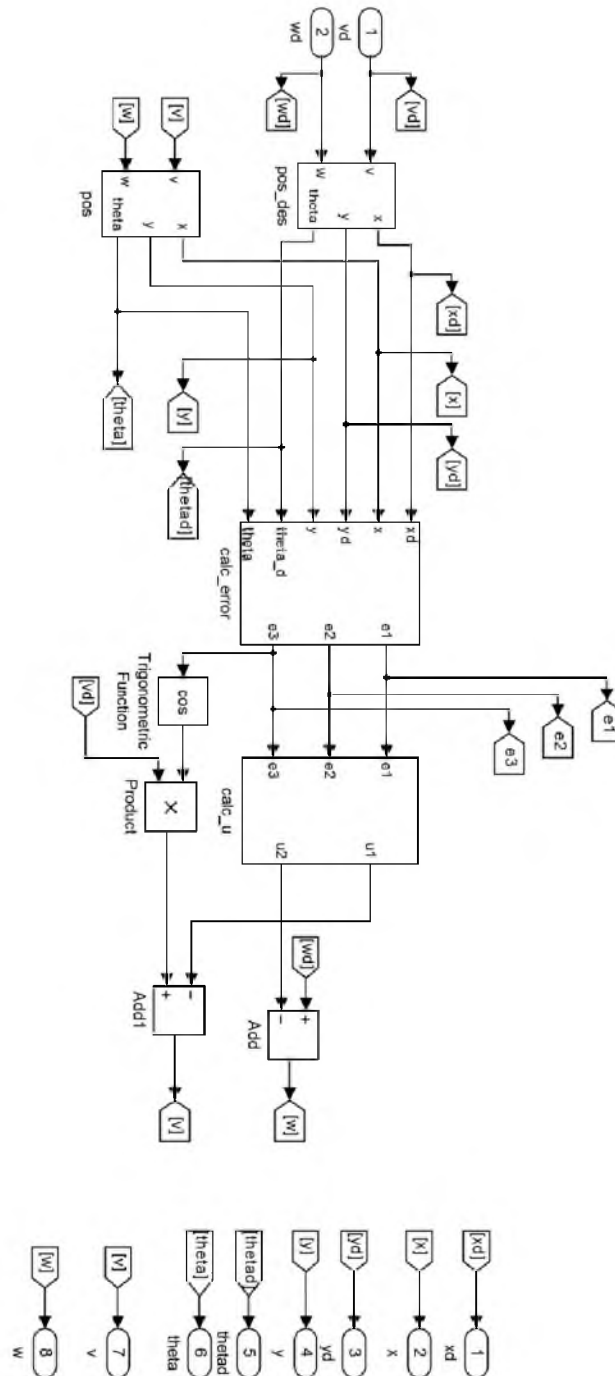


Figura A.2: Subdiagrama del control lineal.

El subdiagrama que calcula el error se muestra en la Figura A.3.

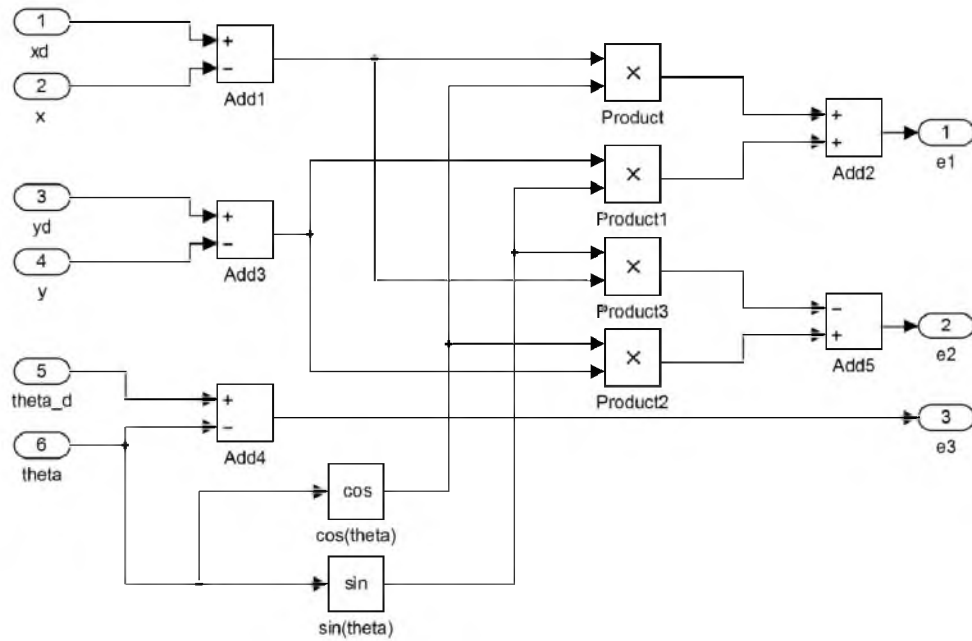


Figura A.3: Subdiagrama que calcula el error $e(t)$ en el control lineal.

El subdiagrama que corresponde a la ley de control $u(t)$ del control lineal se muestran en la Figura A.4.

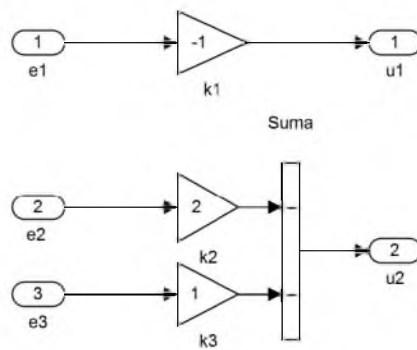


Figura A.4: Subdiagrama que implementa la ley de control $u(t)$ para el controlador lineal.

B. Diagramas en *Simulink*[®] para el control PR.

El diagrama general utilizado el controlador PR se muestra en la Figura B.1.

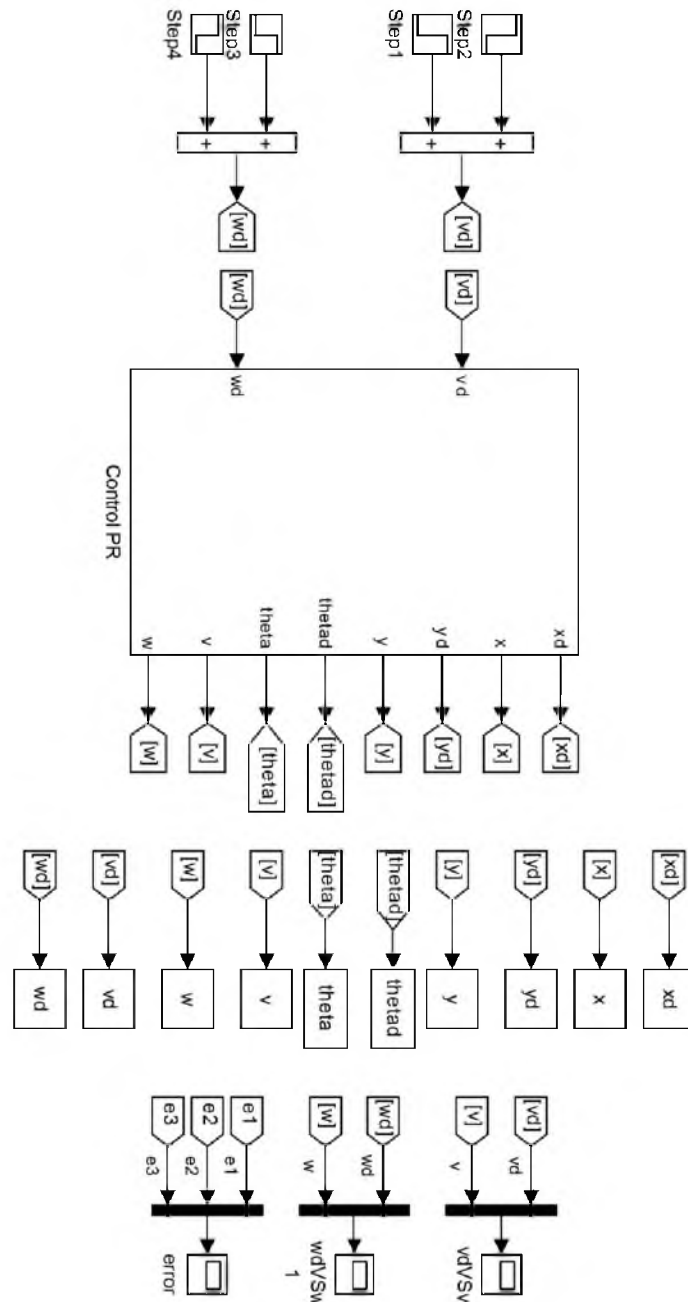


Figura B.1: Diagrama de bloques del sistema con controlador PR.

El subdiagrama del control PR se muestra en la Figura B.2.

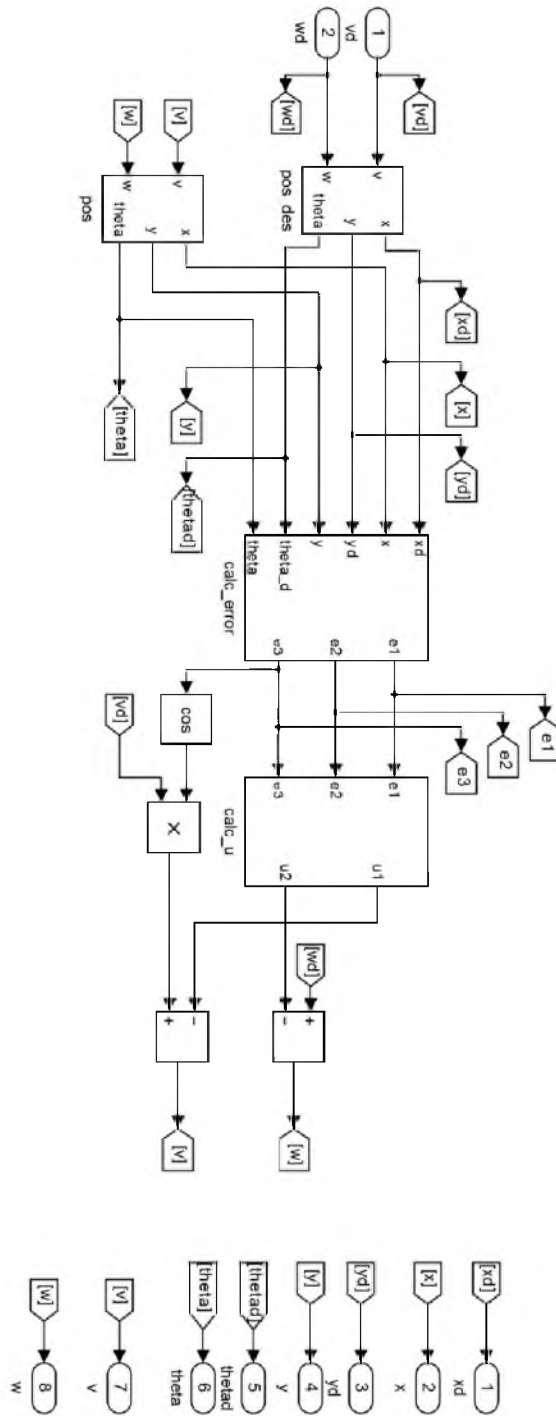


Figura B.2: Subdiagrama de bloques del control PR.

El subdiagrama que calcula el error se muestra en la Figura B.3.

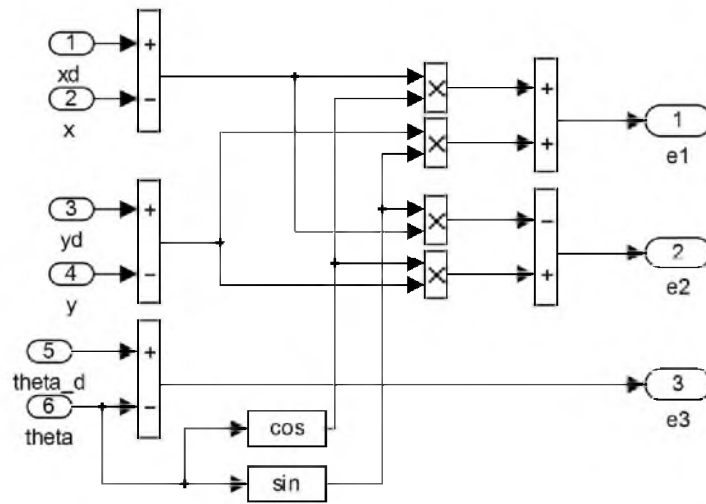


Figura B.3: Subdiagrama que calcula el error $e(t)$ en el control PR.

El subdiagrama que corresponde a la ley de control $u(t)$ del control PR se muestran en la Figura B.4.

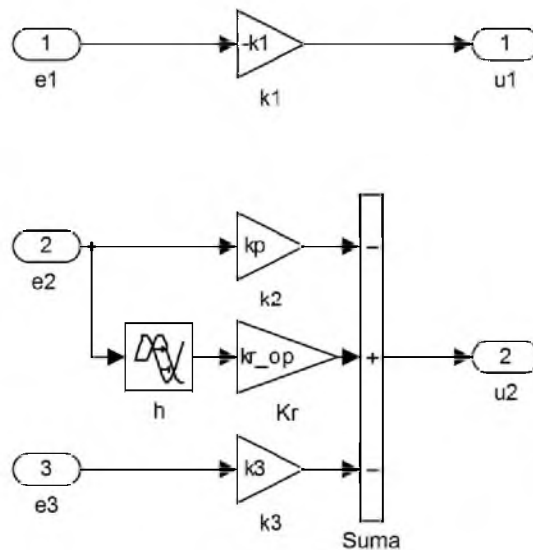


Figura B.4: Subdiagrama que implementa la ley de control $u(t)$ para el controlador PR.

C. Código en *Matlab*[®] para la obtención de las regiones de σ -estabilidad.

```
clc;
clear all;

%Valores de los parametros iniciales.
vd=0.2;
wd=0.3;
k1=1;
k2=2;
k3=1;
kp=20;

%OBTENCION DE LOS VALORES OPTIMOS
%Limite de la cota exponencial 'Sigma'
s_op = (3/2)*k1 + (1/2)*sqrt(4*wd^2 +7*k1^2 +4*vd*kp)
%Retardo Optimo (h)
h_op= (2*s_op -k1)/(2*wd^2 -(1/2)*k1^2 +2*s_op*k1 +2*vd*kp)
%Ganancia Retardada Optima (kr)
kr_op= (2*s_op -k1)/(vd*h_op*exp(h_op*s_op))

n_h=1000;
n=n_h+(n_h/2)+1;
X(1,:)=h_op*ones(1,n);
Y(1,:)=kr_op*ones(1,n);
Z(1,:)=kp*ones(1,n);
M(1,:)=[kp,h_op,kr_op,s_op];
%Grafica Del Punto Optimo
figure(4)
xlabel('h')
ylabel('k_r')
zlabel('k_p')
```

```

grid on
hold on
plot3(h_op,kr_op,kp,'r*')

%GRAFICAS DE LAS REGIONES DE SIGMA ESTABILIDAD.
kk=1;
for s=1e-3:0.5:s_op
kk=kk+1;
tt=0;

%Punto Derecho Maximo
max_d= sqrt(2*s^2 -2*wd^2 +k1^2 -2*s*k1 -2*vd*kp);
%Valor donde se indetermina acot(w_2)
pru= sqrt(s^2 + wd^2 - s*k1 +vd*kp);

if pru>max_d,
    fin=max_d;
else
    fin=pru-0.00001;
end

%Definicion del paso 1
paso=(max_d-0.00001)/n_h;
for x=0.00001:paso:fin,
    tt=tt+1;
    aa = (-x^2+s^2-s*k1+wd^2+vd*kp)/(x*(2*s-k1));
    h_min = (1/x)*acot( aa );
    kr_min = x*(2*s-k1)/(vd*exp(h_min*s)*sin(h_min)*x);

    X(kk,tt)=h_min;
    Y(kk,tt)=kr_min;
    Z(kk,tt)=kp;
end

for x=x+paso:paso:max_d,

```

```

tt=tt+1;
aa1 = (-x^2+s^2-s*k1+wd^2+vd*kp)/(x*(2*s-k1));
h1_min = (1/x)*acot( aa1 ) + (pi/x) ;
kr1_min = x*(2*s-k1)/(vd*exp(h1_min*s)*sin(h1_min)*x);

X(kk,tt) = h1_min;
Y(kk,tt) = kr1_min;
Z(kk,tt) = kp;
end

%Definicion del paso 2
h_iz = X(kk,1);
h_der = X(kk,tt);
paso2= (h_der-h_iz)/(n_h/2);
for x=h_der:-paso2:h_iz,
    hh = x;
    K1 = ( s^2-s*k1+wd^2+vd*kp )/(vd*exp(hh*s));

    X(kk,tt)=hh;
    Y(kk,tt)=K1;
    Z(kk,tt)=kp;
    tt=tt+1;
end

hold on
plot3(X(kk,:),Y(kk,:),Z(kk,:), 'b')
plot3(h_op,kr_op,kp, 'r*')
end

```